courbes qui portaient chez les anciens le nom de mécaniques, parce qu'elles ne peuvent être construites d'un mouvement continu qu'à l'aide de machines plus ou moins compliquées, avait disparu, absorbée dans la *géométrie* analytique. On tend aujourd'hui, avec raison, à la restaurer. Elle comprenait surtout l'étude, par les procédés élémentaires, des principales propriétés des sections coniques.

— *Géométrie pratique.* Ce que nous appelons *géométrie* pratique est la section de la *géométrie* générale qui se lie à la *géométrie* élémentaire par la composition des figures, et à la *géométrie* analytique par la nature des procédés. Elle a pour objet l'étude par les méthodes algébriques des relations métriques qui se rapportent aux figures les plus simples, et la recherche des méthodes de calcul arithmétique les plus convenables pour arriver sûrement et promptement à la mesure pratique des grandeurs. Nous avons déjà dit que la *géométrie* élémentaire des modernes s'en est approprié une petite partie : la plus importante, qui est restée autonome, comprend les deux trigonométries.

— *Géométrie analytique.* Les courbes qu'avaient étudiées les anciens s'étaient présentées à eux non pas sans ordre réel, puisque leur invention était née de besoins éprouvés, mais au moins sans ordre appréciable ; d'un autre côté, il n'existait aucun lien entre ces courbes, ni aucun moyen d'en établir, de sorte que l'étude de l'une ne pouvait en rien profiter à celle des autres ; enfin, leur identité même était loin d'être établie, car une même courbe un peu compliquée, jouissant d'une infinité de propriétés toutes différentes, comporte par conséquent une infinité de définitions dont la concordance peut être souvent fort difficile à apercevoir. La *géométrie* analytique est née du besoin de mettre de l'ordre et de la méthode dans des recherches poursuivies jusque-là sans plan arrêté et sans préparation suffisante. Les principes de cette nouvelle *géométrie* sont tellement simples, que quelques mots suffiront pour les résumer.

Toute définition d'une courbe comprend en elle-même l'indication des procédés à suivre pour construire cette courbe par points, c'est-à-dire pour en obtenir successivement autant de points que l'on voudra et aussi rapprochés les uns des autres qu'il sera désirable. Le procédé consiste toujours à reproduire un nombre quelconque de fois une même figure définie, mais dépendant d'un élément variable à volonté. Pour chaque valeur de cet élément, la figure prend une forme déterminée, et les constructions échafaudées aboutissent chaque fois à un point particulier, qui est l'un des points de la courbe définie. Quand l'élément variable change, le point trouvé change aussi, et si l'on imagine que cet élément croisse d'une manière continue, en même temps le point correspondant se déplacera d'une manière continue et décrira la courbe qu'on avait en vue. Le principal inconvénient des définitions anciennes des courbes tenait à ce que la figure mobile que nous venons de considérer changeant de forme lorsque la courbe changeait, la mise en rapport de deux courbes définies séparément devenait presque impossible. La constatation seule de l'identité d'une courbe définie successivement de plusieurs manières différentes pouvait souvent présenter des obstacles insurmontables ; enfin, la théorie d'une courbe devant naturellement résulter de l'étude de la loi de déformation de la figure mobile propre à l'engendrer, une même courbe comportait autant de théories distinctes qu'on pouvait lui concevoir de modes de génération. L'étude préalable, souvent laborieuse, de la figure mobile était chaque fois à recommencer.

La première question à résoudre était donc de ramener à quelques types fixes, entre lesquels on pourra ensuite choisir, selon les cas, les figures mobiles qui devront servir à construire par points toutes les courbes. Or la position d'un point sur un plan dépend de deux éléments, et donner un de ces éléments, c'est donner une ligne sur laquelle doit se se trouver le point. Donner les deux éléments propres à déterminer un point, c'est donc donner deux lignes qui iront s'y couper, c'est-à-dire la figure à construire pour obtenir le point. Si, d'ailleurs, la nature des éléments choisis reste toujours la même, la figure mobile conservera la même forme et les définitions de toutes les courbes deviendront comparables entre elles.

Mais ce n'est encore qu'un des côtés de la question : la figure mobile propre à engendrer une courbe restant toujours la même, la loi de déformation de cette figure, c'est-à-dire la définition même de la courbe, ne peut plus être qu'une relation entre les deux éléments, toujours les mêmes, qui déterminent chaque point. Les courbes seront donc définies par des équations, et l'étude de ces courbes ne sera autre chose que l'étude de leurs équations.

Les deux éléments choisis pour fixer la position d'un point sont les coordonnées de ce point. Il existe une infinité de systèmes de coordonnées ; mais, dans chaque système, les définitions de toutes les courbes sont comparables ; l'étude de ces courbes comprend les mêmes recherches et peut être préparée d'avance par l'établissement préalable de formules générales, fournissant les solutions toutes calculées des principaux problèmes simples qui, par leurs combinaisons diverses, forment toutes les questions spéciales qu'on peut avoir à envisager.

Cela posé, il est facile de se représenter ce que deviendra la méthode : en premier lieu, une courbe se présentant sous une définition quelconque, si on la rapporte au système de coordonnées adopté, et que dans cette première opération on laisse complétement indéterminé ce qu'il peut y avoir de variable dans les bases de ce système, on aura l'équation la plus générale de la courbe dans ce système, c'est-à-dire son équation type, de sorte que si plus tard la même courbe se représente sous une autre définition, en recherchant son équation dans le même système de coordonnées, particularisé alors de façon à simplifier autant que possible les calculs, il suffira de comparer l'équation particulière à l'équation générale pour constater l'identité de la courbe, pour lui donner immédiatement son nom et en connaître toutes les propriétés étudiées à l'avance.

Ainsi, en premier lieu, l'identité d'une même courbe sera toujours facile à reconnaître, quelle qu'en soit la définition.

D'un autre côté, la mise en rapport de deux courbes quelconques, rapportées au même système de coordonnées, s'obtiendra de la manière la plus simple ; en effet, le rapport élémentaire dont se composent tous les autres est le rapport constitué par le concours en un même point, c'est-à-dire le rapport d'intersection ; or la représentation simultanée de deux courbes dans un même système de coordonnées fournit immédiatement les moyens de trouver leurs points de rencontre. En effet, les coordonnées du point de rencontre des deux courbes, devant satisfaire à la fois à leurs deux équations, seront données par la résolution algébrique du système de ces deux équations. Ainsi, la question la plus générale que comporte l'étude des courbes sera rattachée à la difficulté analytique la plus élémentaire. L'étude spéciale des solutions fournies selon les cas par le système des équations des deux courbes mettra d'ailleurs en évidence les rapports plus intimes que ces deux courbes pourront avoir : ainsi, si deux solutions se confondent, les courbes seront tangentes ; si trois solutions se confondent, elles auront même cercle osculateur, etc. ; si deux solutions sont rejetées à l'infini, les deux courbes seront tangentes à l'infini, c'est-à-dire asymptotes, etc.

Cela posé, voici quelle sera la marche à suivre dans l'institution de la nouvelle *géométrie.* On commencera par établir les formules de transformation nécessaires pour changer les bases du système de coordonnées, tout en restant dans le même système : ces formules permettront plus tard de reconnaître les différentes formes que pourra affecter l'équation d'une même courbe, par conséquent de choisir chaque fois celle de ces formes qui conviendra le mieux à la recherche qu'on aura en vue, mais surtout d'arriver à la forme la plus simple de l'équation de chaque courbe.

Comme la droite et le cercle sont destinés à être mis à chaque instant en rapports avec les lignes plus compliquées pour en faire ressortir les propriétés, on refera dans le système de coordonnées adopté les théories complètes de ces deux lignes, c'est-à-dire qu'on établira d'avance les formules des solutions de tous les problèmes élémentaires qui s'y rapportent. Ces formules seront d'un usage continuel, puisque les mêmes problèmes élémentaires, dont les bases seront alors prises sur la courbe étudiée, composeront nécessairement, par leurs combinaisons, toutes les questions qu'on pourra avoir à résoudre dans l'étude des rapports de cette courbe avec la droite et le cercle.

Ces préliminaires posés, on passera à l'étude spéciale des courbes représentées par les équations les plus simples. Ces courbes, si le système de coordonnées a été bien choisi, seront elles-mêmes les plus simples, par conséquent les plus usuelles, c'est-à-dire les plus utiles à connaître.

Tout ce que nous venons de dire s'étend de soi-même sans difficulté à la *géométrie* à trois dimensions, c'est-à-dire à la *géométrie* des surfaces. Il faut trois éléments pour déterminer la position d'un point dans l'espace ; les coordonnées d'un point seront donc au nombre de trois ; une surface sera représentée par une équation entre les trois coordonnées d'un de ses points ; enfin, une ligne sera représentée par le système de deux équations entre les trois coordonnées.

— *Géométrie infinitésimale.* Nous comprenons dans cette dénomination l'ensemble des recherches de *géométrie* qui ne pouvaient être abordées que par les méthodes que fournit le calcul infinitésimal. Cette *géométrie* forme simplement suite à la *géométrie* analytique de Descartes, dont elle fait même partie ; la différence consiste simplement en ce que les questions, plus délicates, ne sont plus du ressort exclusif de l'algèbre élémentaire, c'est-à-dire de la théorie des équations entre grandeurs finies, mais exigent l'emploi du calcul infinitésimal. Les questions qu'elle embrasse sont de deux sortes : les unes, qui ressortissent au calcul différentiel, se rapportent aux contacts des divers ordres qui peuvent exister entre deux courbes ou deux surfaces ; les autres, qui forment des applications du calcul intégral, ont pour objet la mesure des grandeurs dont les éléments incessamment variables ne peuvent être sommés par parties finies.

— *Géométrie descriptive.* Cette branche de la *géométrie* générale ne fait pas, à proprement parler, partie de la science pure : c'est plutôt un art particulier, d'un grand prix pour les praticiens, mais d'une valeur relativement médiocre en théorie. Le but principal de la *géométrie* descriptive est de fournir les moyens de réaliser indirectement, mais d'une manière équivalente, les constructions projetées dans l'espace. Elle supplée au défaut irrémédiable d'un tableau à trois dimensions, par l'association de deux tableaux à deux dimensions. Ces tableaux, formés habituellement de deux plans rectangulaires, reçoivent les projections orthogonales des points de l'espace, et, comme le couple des projections d'un point détermine la position de ce point dans l'espace, le mode descriptif de représentation remplit à la fois les deux conditions essentielles de définir l'objet et de ne s'appliquer qu'à lui. Il convient toutefois de remarquer que la *géométrie* descriptive manque et manquera nécessairement toujours des moyens de représenter directement les objets qui, par leur nature, forment l'élément essentiel de la *géométrie* à trois dimensions, nous voulons dire les surfaces. Les figures descriptives d'une surface, sur les deux plans de projection, n'y formeraient que des plaques où les contours resteraient seuls distincts. Les surfaces ne peuvent être figurées descriptivement que par les projections de leurs génératrices, prises dans des positions voisines, mais nécessairement séparées par des intervalles finis. Cette considération seule suffira toujours pour faire refuser à la *géométrie* descriptive les caractères d'une science indépendante ; si on la relie à la *géométrie* spéculative, on ne peut plus y voir qu'un mode de représentation propre à permettre la réalisation des conceptions de l'esprit et, par suite, à faciliter les recherches en en fixant à mesure les résultats.

Le problème général de la *géométrie* descriptive peut être énoncé dans les termes suivants : la figure descriptive d'un objet étant donnée, lui faire subir les modifications correspondantes à des modifications définies de l'objet lui-même. Les relations entre l'objet et sa figure étant trop peu directes, la plupart des méthodes employées en *géométrie* descriptive sont détournées ; telle est, par exemple, la méthode des rabattements, qui consiste à ramener dans l'un des plans de projection les figures planes qui peuvent être considérées, à effectuer directement les constructions voulues sur ces figures, sans l'intermédiaire de leurs projections, et à obtenir après coup les projections des résultats. Telle est aussi la méthode des rotations, qui s'emploie de la même manière. Ce n'est guère que pour les intersections et les tangentes que les procédés restent ce qu'ils devraient être partout : opérer sur la figure pour opérer sur le figuré.

Quoi qu'il en soit, la *géométrie* descriptive a rendu et rendra toujours les plus grands services aux ingénieurs et aux constructeurs. Elle remplit donc parfaitement les vues de son illustre créateur, Monge.

— III. Histoire de la géométrie. L'ordre à suivre dans l'exposition de l'histoire d'une science n'est pas tracé d'avance, comme pour l'histoire politique d'un peuple, par la chronologie. Bien des découvertes, en effet, ne sont pas, si l'on peut parler ainsi, de leur temps ; faites pour ainsi dire prématurément par les efforts d'un seul, elles ne seront d'abord l'objet d'aucune attention et ne paraîtront souvent avec éclat que quelques siècles plus tard. D'un autre côté, chaque science se compose naturellement de plusieurs branches distinctes, dont les progrès ont lieu tantôt simultanément, tantôt séparément. En adoptant l'ordre chronologique pur et simple, on se verrait donc obligé soit à passer incessamment d'un système à un autre, soit à rester trop longtemps appesanti sur une seule des branches de la science.

Voici le plan que nous avons cru devoir adopter : nous diviserons l'histoire de la *géométrie* en périodes distinctes les unes des autres, soit par des changements survenus dans la méthode adoptée, soit par la nature des recherches généralement poursuivies. Nous suivrons alors l'ordre chronologique, et, dans l'intérieur de chaque période, nous ferons successivement et séparément l'histoire de chacune des branches de la science. Enfin, relativement à chaque branche en particulier, nous suivrons l'ordre dogmatique.

Pour que notre division par périodes soit plus facile à saisir, nous la faisons précéder d'un tableau chronologique des principaux géomètres ; au reste, ce tableau nous dispensera dans la suite de reproduire à chaque instant les dates.

Thalès de Milet, né en 639 av. J.-C., mort en 548.
Pythagore, né vers 580.
Architas, célèbre pythagoricien dont Platon avait suivi les leçons en Italie.
Hippocrate, de Chio, né vers 580.
Platon, né en 430, mort en 347.
Ménechme, disciple de Platon.
Dinostrate, frère du précédent.
Aristée, né vers 380.
Euclide, né vers 315.
Archimède, né en 287, mort en 212.
Eratosthène, né en 276.
Aristarque de Samos, né vers 230.
Apollonius de Perge, né en 245.
Hypsicle, né vers 170.
Nicomède, né vers 160.
Hipparque, né vers 180.
Germinus, né vers 150.
Persus, né vers 140.
Théodose, né vers 130.
Ménélaüs, né vers 50 après J.-C.
Ptolémée, né vers 100.
Pappus, né à Alexandrie vers 350.
Serenus, contemporain de Pappus.
Proclus, né en 412, mort à Athènes en 485.
Héron d'Alexandrie, né vers 550.
Brahme Gupta, né vers 600.
Mohammed ben Musa, né à Bagdad vers 850.
Hassan ben Aithem, mort au Caire en 1038.
Léonard de Pise, 1170-1220.
Regiomontanus, 1436-1476.
Lucas de Burgo, 1460-1523.
Cardan, 1501-1576.
Viète, 1540-1603.
Tycho-Brahé, 1546-1601.
Néper, né vers 1550, mort en 1618.
Adrien Romain, 1561-1615.
Galilée, 1564-1642.
Adrien Métius, 1571-1635.
Képler, 1571-1631.
Guldin, 1577-1643.
Grégoire de Saint-Vincent, 1584-1667.
Snellius, 1591-1626.
Desargues, 1593-1662.
Descartes, 1596-1650.
Fermat, 1590-1663.
Cavalieri, 1598-1647.
Roberval, 1601-1675.
Torricelli, 1608-1647.
Wallis, 1616-1703.
Viviani, 1622-1704.
Pascal, 1623-1662.
Huyghens, 1629-1695.
Barrow, 1630-1677.
Newton, 1642-1727.
Leibnitz, 1646-1716.
Bernouilli (Jacques), 1654-1708.
Bernouilli (Jean), frère du précédent.
Halley, 1656-1742.
Lhôpital, 1661-1704.
Cotes, 1682-1716.
Bernouilli (Nicolas), 1687-1759.
R. Simson, 1687-1768.
Maclaurin, 1698-1746.
Bernouilli (Daniel), 1700-1782.
Cramer, 1704-1752.
Euler, 1707-1783.
Clairaut, 1713-1765.
D'Alembert, 1717-1776.
Lambert, 1728-1777.
Lagrange, 1736-1813.
Monge, 1746-1818.
Laplace, 1749-1827.
Legendre, 1752-1833.
Carnot, 1753-1823.
Poinsot, 1777-1859.
Charles Dupin, 1784.
Poncelet, 1788-1867.
Chasles, 1793.
Abel, 1802-1829.
Jacobi.
Liouville, 1806.

Nous diviserons l'histoire de la *géométrie* en onze périodes : la première allant de Thalès à Platon ; la seconde, de Platon à Euclide ; la troisième, d'Euclide à Hipparque ; la quatrième, d'Hipparque à Ménélaüs et Ptolémée ; la cinquième, de Ménélaüs et Ptolémée à la fin de l'école d'Alexandrie ; la sixième, de la Renaissance à Viète ; la septième, de Viète à Képler ; la huitième, de Képler à Descartes ; la neuvième, de Descartes à Leibnitz ; la dixième, de Leibnitz à Monge ; la onzième, de Monge jusqu'à nos jours.

— *Première période.* L'origine de la *géométrie* se perd naturellement dans la nuit des temps. Les notions de perpendicularité et de parallélisme, les conditions d'égalité des triangles, les propriétés les plus élémentaires du cercle relatives à ses diamètres, à ses cordes et à sa tangente, enfin les premières notions de la sphère devaient être familières aux Egyptiens ; mais si, comme on le croit, Thalès leur enseigna les moyens de mesurer la hauteur d'un obélisque par la grandeur de son ombre, leurs connaissances en *géométrie* n'allaient pas plus loin que ces notions instinctives, qui résultent simplement de l'attention. L'histoire de la *géométrie*, pour nous du moins, commence à Thalès. C'est à ce philosophe, né en Phénicie, mais qui vint fonder à Milet l'école ionienne, qu'on attribue la remarque qui forme la base de la théorie de la similitude, savoir, que les triangles équiangles ont leurs côtés proportionnels. Il est croyable, bien entendu, que Thalès n'avait d'idées nettes que sur les rapports simples, pouvant s'exprimer par des nombres entiers ; mais la *géométrie* précisément fournissait le meilleur moyen d'arriver, sous ce rapport, à des notions plus générales. Peu après Thalès, Pythagore, qui avait été son disciple, fondait en Italie sa célèbre école, où la *géométrie* n'était pas moins en honneur que la philosophie. L'invention du théorème du carré de l'hypoténuse, dont il dota la science, avait probablement été précédée au moins de l'étude des relations simples entre les aires des triangles et des parallélogrammes, relations qui, lorsqu'on écarte la considération des rapports incommensurables, sont presque intuitives. La découverte de la propriété fondamentale du triangle rectangle complétait, pour ainsi dire, la *géométrie* des polygones. La théorie des polygones réguliers naissait en même temps dans la même école, qui probablement s'éleva aussi jusqu'à la comparaison des volumes des parallélipipèdes, au moins dans les cas les plus simples, puisque le problème de la duplication du cube y était déjà posé.

— *Deuxième période.* Architas, l'un des successeurs de Pythagore, près de qui Platon alla puiser les premiers éléments de la *géométrie*, forme le lien naturel entre la première et la seconde période. Il avait donné du problème des deux moyennes proportionnelles, auquel Hippocrate de Chio, célèbre par ses lunules, avait déjà ramené le problème de la duplication du cube, une solution plus théorique que pratique, qui reposait sur la considération de la courbe d'intersection d'un cylindre et d'un tore. Platon et ses disciples, Ménechme et Eudoxe, donnèrent du même problème des solutions plus simples, par des intersections de coniques, ou même de courbes mécaniques, plus compliquées, et fondèrent la théorie des lieux géométriques, qui prit dans l'école d'Athènes le nom de *géométrie transcendante*, et la méthode analytique que Théon a définie ainsi : « Regarder la chose cherchée comme si elle était donnée, et marcher de conséquences en conséquences jusqu'à ce que l'on reconnaisse comme vraie la chose cherchée, » c'est-à-dire supposer le problème résolu, et tirer, de l'hypothèse que les conditions imposées soient remplies, les conséquences qui en résultent, afin d'obtenir sous une forme pratique les relations de la figure où sont renfermées les données à celle qui comprend les inconnues.

Dinostrate, frère de Ménechme, imaginait, à la même époque, sa célèbre quadratrice pour la division d'un angle en un nombre quelconque de parties proportionnelles à des lignes données et pour la quadrature du cercle.

Les résultats des recherches des géomètres de l'école de Platon, sur les sections coniques, avaient été recueillis et mis en ordre par Aristée, dans un ouvrage en cinq livres, dont les anciens faisaient un grand cas, mais qui ne nous est pas parvenu. Viviani a cherché à le restituer, sur les indications de Pappus, sous le titre : *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristei senioris geometræ* (Florence, 1701).

Nous devons encore signaler, dans cette seconde période, les traités de *géométrie* élémentaire d'Hippocrate de Chio, de Léon, de Theudius de Magnésie, d'Hermotime de Colophon, d'Eudoxe et de Thætète, que celui d'Euclide devait faire oublier, mais qui cependant existaient encore du temps de Proclus.

— *Troisième période.* Cette troisième période est illustrée par les trois plus grands géomètres de l'antiquité : Archimède, Apollonius et Euclide ; mais Euclide vint le premier en date. Outre sa *Géométrie*, dont nous parlerons plus loin en détail, on a de lui les *Données*, qui font suite aux *Éléments*, et sont destinées à en faciliter l'usage pour la résolution des problèmes. Il avait laissé aussi quatre livres *Sur les sections coniques*, deux livres *Sur les lieux à la surface*, qui probablement traitaient des surfaces engendrées par les révolutions des coniques autour de leurs axes, et enfin trois livres *Sur les porismes*. Ces derniers ouvrages sont totalement perdus. Les *Eléments* d'Euclide sont restés jusqu'à nos jours un modèle pour la forme des démonstrations et l'enchaînement des théorèmes. L'histoire doit y signaler d'abord une théorie complète des rapports incommensurables ; en second lieu, la construction effective des racines des équations du second degré, formulées, il est vrai, entre les grandeurs données et l'inconnue, non pas entre leurs mesures.

Le théorème des lunules d'Hippocrate, établissant un rapport exact entre deux surfaces terminées, l'une par un contour curviligne, l'autre par un contour rectiligne, avait fait naître de vives espérances, d'où naquirent bientôt des recherches opiniâtres relativement à la quadrature du cercle. Le problème était insoluble, comme on sait ; mais l'ignorance où l'on était nécessairement alors de l'incomparabilité des incommensurables d'origines diverses ne permettait pas d'apercevoir l'impossibilité d'obtenir une solution du problème par les moyens dont on exigeait l'emploi exclusif. Les recherches continuant donc toujours dans le même sens, la question n'avait pas fait un pas, lorsque parut Archimède. On sait assez comment ce grand géomètre la résolut dans le seul sens où elle pût l'être, et étendit ensuite sa méthode aux quadratures et cubatures du cylindre, du cône et de la sphère. Nous remarquerons seulement à ce sujet qu'Archimède paraît être le premier géomètre de l'antiquité qui ait entrevu la double signification, concrète et métrique, des formules qui traduisent les énonces des théorèmes de *géométrie* relatifs à la comparaison des aires. De même qu'Euclide avait dit, par exemple : « Deux rectangles ont entre eux une raison composée des côtés, » et non pas, ce qui n'a été dit que cinq ou six siècles plus tard « Un rectangle a pour mesure le produit des mesures de ses côtes ; » de même Archimède dit : « Le cercle est équivalent au rectangle qui aurait pour base la demi-circonférence et pour hauteur le rayon ; » et non pas : « La mesure du cercle est le produit des mesures de la demi-circonférence et du rayon ; » — « La zone sphérique est équivalente en surface au cylindre qui aurait même hauteur et pour base un grand cercle de la sphère, » et non pas : « La mesure de la surface de la zone est le produit des mesures de sa hauteur et de la circonférence d'un grand cercle, etc. » Mais sans innover encore, relativement à la forme à donner aux énoncés dans l'exposition dogmatique de la science, Archimède sait déjà, dans des cas spéciaux, relier entre elles les valeurs numériques des éléments des figures. C'est ainsi qu'il arrive à la valeur approchée $\frac{22}{7}$ du rapport de la circonférence au diamètre. Un demi-siècle après, Aristarque de Samos devait faire un nouveau pas dans la même voie, en cherchant à évaluer le rapport des distances du soleil et de la lune à la terre, par la connaissance de l'angle sous lequel se voit la distance de ces deux astres, lorsque la lune est dichotome, c'est-à-dire lorsque l'angle à la lune est droit dans le triangle ayant pour sommets les centres des trois globes.

Archimède, au reste, se livrait volontiers à des spéculations numériques, comme on le voit assez par son *Arénaire.* Le voisinage de l'école de Pythagore, avec laquelle on peut supposer qu'il dut avoir quelques rapports, expliquerait peut être cette particularité chez un géomètre de son époque. Quoi qu'il en soit, on pourrait faire remonter jusqu'à lui l'invention des logarithmes, qui se trouve nettement indiquée dans l'ouvrage dont nous parlons.

Les autres ouvrages d'Archimède sur la *géométrie* ont rapport à la quadrature de la parabole et à la cubature des segments du paraboloïde, de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde de révolution, problèmes incomparablement plus difficiles que tous ceux qui avaient été élaborés jusque-là, et qui eussent donné naissance, deux mille ans plus tôt, à l'analyse infinitésimale, si l'algèbre eût pu être rendue indépendante de la *géométrie.*

Archimède avait à peine disparu sous les ruines de Syracuse, qu'Apollonius venait briller à Alexandrie et acquérir dans une autre voie une gloire presque égale. Archimède avait mis le sceau, chez les anciens, à la branche de la *géométrie* qui a pour objet la comparaison entre elles des grandeurs de même nature ; Apollonius fit faire des progrès analogues à celle qui traite plus spécialement des propriétés des figures. Ses huit livres des *Coniques*, où il considère ces courbes dans le cône oblique, ce qui n'avait pas encore été fait, en contiennent à peu près toutes les propriétés les plus intéressantes, depuis celles qui se rapportent à leurs foyers, à leurs tangentes ou asymptotes et à leurs diamètres, jusqu'à leurs développées mêmes. Ce grand ouvrage, dont les sept premiers livres seulement nous sont parvenus, avait fait donner à son auteur le surnom de *géomètre par excellence.* On a encore de lui *De sectione rationis ;* on ne connaît ses autres traités *De sectione determinata*, *De tactionibus*, *De inclinationibus* et *De locis planis* que par quelques notes des commentaires de Pappus.

Apollonius avait été précédé de quelques années par Eratosthène, qui fut directeur de la bibliothèque d'Alexandrie, sous le troisième Ptolémée, et avait laissé un ouvrage estimé, ayant pour titre *De locis admediatis*, qui ne nous est pas parvenu ; on a seulement de lui une histoire du problème de la duplication du cube. Hypsicle n'a laissé qu'un traité des cinq polyèdres réguliers, qui a été joint aux *Eléments* d'Euclide dans la plupart des manuscrits. Nicomède n'est connu que par l'invention de la conchoïde, qu'il employait à la trisection de l'angle.

— *Quatrième période.* Cette quatrième période, qui correspondrait à l'ère la plus brillante de l'astronomie, ne présente pour la géométrie qu'une seule découverte, d'une grande valeur à la vérité, celle de la trigonométrie. Nous n'avons aucun des ouvrages d'Hipparque, mais l'étude attentive de l'*Almageste* a révélé les nombreux et larges emprunts que Ptolémée y avait faits, et si nous en croyons Delambre, dont le témoignage pourrait difficilement être récusé en cette matière, c'est à Hipparque que sont dues à peu près toutes les méthodes de calcul appliquées par les anciens astronomes. Remarquons, au point de vue de l'histoire générale, que la trigonométrie d'Hipparque est bien loin encore de correspondre aux méthodes employées depuis par Viète, pour résoudre par l'algèbre les problèmes déterminés de *géométrie.* Il ne s'agit alors que d'un problème tout spécial, car Hipparque ni Ptolémée n'employèrent jamais que des triangles rectangles ; et quant au calcul numérique des cordes des différents arcs, il ne constituait qu'une application plus étendue de la méthode qu'avait enseignée Archimède pour l'évaluation du rapport approché de la circonférence au diamètre.

Nous trouvons, dans la même période illustrée par Hipparque, Geminus, auquel sont attribués par Proclus deux ouvrages aujourd'hui perdus, l'un relatif à l'hélice, l'autre intitulé *Enarrationes geometricæ*, qui devait être une histoire de la *géométrie.* Perseus, postérieur de quelques années à Geminus, avait écrit sous le titre de *Spiriques* un traité des sections du tore, qui est aussi perdu ; Théodose a laissé, sous les titres *Sphæricorum libri tres*, *De habitationibus* et *De diebus et noctibus*, trois ouvrages élémentaires sur la sphère, les climats et l'inégalité des jours et des nuits, qui se rapportent plutôt à l'astronomie qu'à la *géométrie.*

— *Cinquième période.* Dans cette cinquième période, la *géométrie* ancienne s'enrichit : 1° du célèbre théorème de Ménélaüs, relatif aux six segments déterminés par une transversale quelconque sur les côtés d'un triangle, théorème qui a été longtemps attribué à Ptolémée. Il formait, dans les *Sphériques* de Ménélaüs, la base du théorème fondamental de la trigonométrie sphérique, et fut reproduit dans le même but par Ptolémée ; il est devenu depuis, entre les mains de Carnot, le point de départ de la belle théorie des transversales ; 2° du beau théorème dont Guldin s'était attribué l'invention et qu'on a retrouvé dans les *Collections mathématiques* de Pappus ; 3° du théorème relatif aux quatre segments déterminés sur une transversale quelconque par quatre droites fixes issues d'un même point ; ce théorème sur la constance du rapport des rapports des distances, des points d'intersection de la transversale avec deux des quatre droites aux points d'intersection avec les deux autres, est devenu depuis, entre les mains de M. Chasles, le point de départ d'une nouvelle théorie des coniques ; 4° du théorème relatif aux six segments interceptés sur une transversale par les quatre côtés et les diagonales d'un quadrilatère quelconque ; 5° du théorème auquel se réduit l'*hexagrammum mysticum*, lorsqu'à une conique quelconque on substitue le système de deux droites ; 6° enfin des théorèmes qui ont donné naissance, entre les mains de Desargues, à la théorie de l'involution. Tous ces théorèmes, qui sont peut-être dus à Pappus, sont très-remarquables et ils étaient appelés, comme nous venons de le montrer, à prendre une grande importance dans la science. Il convient de citer encore dans la même période : l'identification par Serenus des sections du cône et du cylindre ; la génération de l'ellipse par le mouvement d'un point d'une droite de longueur constante qui glisse entre deux droites fixes, imaginée par Proclus ; enfin, l'invention de la cissoïde, par Dioclès, pour la résolution du problème des deux moyennes proportionnelles. Mais, de toutes ces inventions, les unes, celles de Pappus, sont presque prématurées : elles n'ont pas alors de but, et les autres ne consistent qu'en des additions presque sans valeur aux travaux des géomètres des deux périodes précédentes ; aussi n'y voyons-nous pas le caractère distinctif de cette période. Ce qui la rend remarquable à nos yeux, c'est l'œuvre de Diophante et de ses disciples, principalement de Héron, l'auteur du plus ancien traité d'arpentage. Diophante n'a guère été considéré que comme arithméticien ou algébriste ; nous y voyons le précurseur de Viète, l'initiateur de la plus grande révolution qui se soit produite dans la méthode ; non pas que nous attribuions à cet homme remarquable un véritable génie, mais parce que, sans le prévoir et encore plus, sans doute, sans le vouloir, il a puissamment contribué à établir l'identité, évidente aujourd'hui, mais si peu soupçonnée alors, entre les fonctions d'origine géométrique, la quatrième et la moyenne proportionnelle, et les fonctions d'origine arithmétique, le produit ou le quotient et la racine carrée. On a trop peu remarqué que les énoncés des problèmes d'arithmétique ou d'algèbre qu'a traités Diophante sont, pour ainsi dire, tirés des énoncés des problèmes de géométrie contenus dans les *Eléments* d'Euclide, et rangés à peu près dans le même ordre. Diophante a été le modèle sur lequel se sont d'abord formés les géomètres algébristes arabes, Léonard de Pise, Tartaglia, Cardan et enfin Viète ; il forme donc le trait d'union entre les anciens et les modernes. Il faut remarquer toutefois que, si Diophante pressentit en quelque sorte la révolution qui allait s'accomplir, il est loin d'y avoir porté la dernière main ; le principal honneur en reviendrait plutôt à Héron d'Alexandrie, dont le traité d'arpentage contient les règles pour la mesure des aires des polygones, et particulièrement la formule de l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, formule dont l'existence seule suffit à prouver que la révolution est achevée, que la *géométrie* et l'algèbre ont définitivement fait alliance. Nous ne savons pas au juste à quelle époque placer ce Héron, qu'on appelle l'Ancien, pour le distinguer d'un autre Héron appelé le Jeune, qui était également d'Alexandrie ; nous pensons qu'il doit appartenir au VIe siècle. M. Chasles le place dans le IIe siècle avant J.-C. C'est évidemment une grosse erreur.

— *Sixième période.* La sixième période s'étend de Héron à Viète ; elle est remplie par l'intronisation de la méthode algébrique en *géométrie.* Après le sac d'Alexandrie par Omar et l'incendie de sa bibliothèque, la science se réfugia d'abord dans l'Inde, ou plutôt s'y confina, car elle y existait déjà du temps des Grecs. Brahme-Gupta, qui n'est postérieur à Héron que de cent ans à peine, est le premier et le plus illustre représentant de l'école indo-arabe. Ses ouvrages ne sont connus en Europe que depuis peu d'années, et ils étaient depuis longtemps oubliés des Indous. Leur confrontation avec les anciens auteurs arabes a aisément décélé les nombreux emprunts que ceux-ci y avaient faits. La *géométrie* n'y est pas traitée directement ; ce qu'ils en contiennent est disséminé dans les chapitres relatifs à l'arithmétique et à l'algèbre ; mais c'est précisément cette association qui en forme le caractère principal. On trouve dans cet ouvrage remarquable, non-seulement les formules de l'aire du triangle et du rayon du cercle circonscrit en fonction de ses trois côtés, mais aussi celles qui paraissent là pour la première fois de l'aire du quadrilatère inscrit en fonction de ses quatre côtés, de ses diagonales, des hauteurs des triangles dans lesquels il se décompose, enfin du diamètre du cercle circonscrit.

Ce serait, paraît-il, dans les ouvrages de Brahme-Gupta que se seraient d'abord formés les Arabes, avant de revenir à Euclide, à Archimède, à Apollonius et à Ptolémée. C'est ce que semblent démontrer, notamment, les œuvres des trois fils de Musa ben Schaker, Mohammed, Hamet et Hasen, qui furent apportées en Europe au commencement du XIIIe siècle par Léonard de Pise, et dont il donna des extraits importants dans sa *Pratique de la géométrie.*

L'application de l'algèbre à la *géométrie*, une fois introduite en Europe par Léonard de Pise, ne s'y perdit plus, quoique la publication des ouvrages des auteurs grecs tendît naturellement à détourner l'attention, par l'incontestable supériorité de leur facture : nous voyons cette nouvelle *géométrie* cultivée d'abord par Régiomontanus, qui s'en sert avec avantage pour perfectionner la trigonométrie, par Lucas de Burgo, enfin par Tartaglia et par Cardan ; mais il faut bien remarquer que, comme Brahme-Gupta et les Arabes, ces précurseurs de Viète n'établissent encore leurs formules algébriques que sur des données numériques ; c'est pourquoi nous les isolons de notre célèbre compatriote.

— *Septième période.* La septième période est remplie presque tout entière par Viète ; elle est caractérisée par la transformation subite que ce grand homme imprime à l'application de l'algèbre à la *géométrie.* L'enfantement avait été aussi long que pénible ; Viète couronne l'œuvre de près de quinze siècles ; mais *tantæ molis erat*, que Viète ne parvient encore à donner qu'une forme bizarre aux démonstrations des règles élémentaires du calcul algébrique appliqué aux grandeurs concrètes ; son algèbre *speciosa* naît et meurt avec lui.

C'était à Descartes qu'était réservé l'honneur de mettre la dernière main à l'œuvre ; il le fait, en quelques lignes, au début de sa *Géométrie*, en introduisant l'unité concrète, la grandeur à laquelle seront censées rapportées les grandeurs de même espèce, mais qui ne sera jamais dénommée, n'aura qu'une existence purement virtuelle et ne remplira partout qu'un simple rôle de présence fictive.

La *géométrie* doit à Viète d'importants perfectionnements ; il simplifia considérablement la trigonométrie, et la dota de la plupart des élégantes formules qui la constituent aujourd'hui. C'est lui qui, le premier, résolut le cas des triangles sphériques où l'on donne les trois côtés ; ce cas, qui ne se présente pas dans la pratique de l'astronomie, avait été négligé par les Arabes. Il donna l'explication de la multiplicité des solutions des problèmes de trigonométrie, et ramena à la trisection de l'angle ou à la duplication du cube tous les cas de l'équation du troisième degré, qui, dans l'*Ars magna* de Cardan, montaient à un nombre prodigieux. Il construisit aussi les racines de l'équation du quatrième degré, et donna la première solution géométrique du problème du cercle tangent à trois autres. Enfin, on lui doit le traité *De tactionibus*, qu'il restitua sous le titre d'*Apollonius Gallus.*

Les autres géomètres de la même période sont : Adrien Romain, avec qui il eut d'abord quelques démêlés, mais qui se déclara bientôt après son admirateur enthousiaste ; Adrien Métius, connu seulement par sa nouvelle approximation du rapport de la circonférence au diamètre ; Snellius, qui compléta l'idée de Viète sur l'emploi du triangle supplémentaire pour les trois derniers cas des triangles sphériques ; enfin Néper, l'illustre inventeur des logarithmes. Nous ne nommons ni Copernic, ni Tycho-Brahé, qui sont exclusivement des astronomes.

— *Huitième période.* La huitième période comprend trois grands noms : ceux de Képler, de Galilée et de Cavalieri. La gloire immortelle dont Képler et Galilée se sont couverts, ils l'ont principalement acquise, le premier en astronomie spéculative, le second en astronomie physique, en physique et en mécanique ; toutefois, les travaux de Képler en *géométrie* pure ont de l'importance : sa *Stereometria doliorum*, titre assez bizarre, contient les premières applications chez les modernes de la méthode d'exhaustion d'Archimède, débarrassée des difficultés dont l'avait entourée le géomètre grec. Képler trouva par cette méthode les volumes engendrés par la révolution d'une conique autour d'une droite parallèle à l'un de ses axes. Il convient aussi de remarquer que sa méthode pour représenter graphiquement les circonstances d'une éclipse se rapproche singulièrement des procédés de la *géométrie* descriptive. Quant à Galilée, il n'est connu en *géométrie* que par l'invention de la cycloïde, dont il ne découvrit, au reste, aucune propriété. La suprématie dans cette huitième période appartient