grale se compose d'une quantité fixe, à laquelle on peut ajouter des multiples entiers quelconques de quantités ω, ω', etc., qu'on nomme les périodes de l'*intégrale*.

Ces découvertes entraînèrent la nécessité de réformer la définition d'une *intégrale* : c'est M. Cauchy qui s'est chargé de remplir la lacune qui venait d'être signalée. L'indétermination, évidemment, ne pouvait tenir qu'à ce que la marche de x de a à b, c'est-à-dire la succession des valeurs que devait prendre la variable dans l'intervalle de a à b, restait complètement arbitraire ; d'où il résultait que, pour que l'*intégrale* devînt véritablement définie, il fallait indiquer par quelles valeurs la variable progresserait de a à b. Pour comprendre immédiatement tous les cas, M. Cauchy imagina de considérer la variable comme pouvant devenir imaginaire, et de définir la marche de cette variable entre les limites a et b, qui pouvaient devenir imaginaires, en se donnant une relation entre les parties réelle et imaginaire de x. Lorsque la fonction $\varphi(x)$, placée sous le signe $\int$, comportait elle-même plusieurs déterminations, il convenait de préciser celle à laquelle devait se rapporter l'intégration.

Les meilleures choses ne sont pas toujours immédiatement appréciées, et la lumineuse idée de Cauchy lui valut les indécents quolibets d'un jeune confrère sans expérience, qui, traduisant le mot *imaginaire* par inconnu indéterminé ou absurde, s'amusa énormément de l'idée qu'avait eue l'illustre analyste de donner volontairement à une variable des valeurs imaginaires !!!

Cauchy continua de faire la joie de ce jeune collègue, en donnant bientôt après sa remarquable théorie des valeurs multiples des *intégrales* simples, et retrouvant les périodes des fonctions elliptiques.

Nous ne suivrons pas ici la méthode de l'illustre académicien ; cette méthode assez détournée, très-difficile à dégager de difficultés de calcul presque inextricables, a été suppléée par une autre assez simple pour trouver sa place dans les éléments, et qui est due à M. Marie. Cette méthode ramène la question relative aux *intégrales* des fonctions d'une seule variable à une simple question de géométrie analytique élémentaire, et elle s'étend sans nouvelles difficultés aux *intégrales* doubles ou même d'ordre quelconque, que M. Cauchy avait en vain tenté de soumettre à son analyse.

L'invention de cette méthode a valu à M. Marie, de la part du même académicien, des plaisanteries encore plus spirituelles que celles qu'avait méritées Cauchy; l'auteur ni son œuvre ne s'en porteront pas plus mal.

— INTÉGRALES SIMPLES. Si l'on rapporte successivement une même courbe à deux systèmes d'axes OX, OY et OX, OY', les aires des segments correspondants à un même arc ayant pour extrémités $[x_0y_0]$ et $[x_1y_1]$ dans l'ancien système, $[x'_0y'_0]$ et $[x'_1y'_1]$ dans le nouveau, ces aires

$$\sin YX\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx \quad \text{et} \quad \sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'dx'$$

sont liées entre elles par la relation

$$\sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'dx' = \sin YX\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx - \frac{1}{2}\sin Y'Y\,\frac{\sin YX}{\sin Y'X}\,(y_1^2 - y_0^2).$$

Cette égalité, qui reste vraie quels que soient $[x_0,y_0]$ et $[x_1,y_1]$ réels, est une identité absolue; elle s'applique donc même au cas où les limites sont imaginaires.

Or, lorsque les deux limites appartiennent à une même conjuguée, ayant pour caractéristique C ; si, d'ailleurs, l'axe des Y' a été dirigé parallèlement aux cordes réelles de cette conjuguée (v. les mots CONJUGUÉE, CARACTÉRISTIQUE, CORDES RÉELLES), l'*intégrale*

$$\sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'dx'$$

représente, par sa partie réelle, l'aire du diamètre de cette conjuguée, qui divise en parties égales ses cordes réelles, et, par sa partie imaginaire, l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre (v. QUADRATURE), ces deux aires, bien entendu, étant limitées aux cordes réelles de la conjuguée qui partent des points correspondants aux limites de l'*intégrale*. Quant à la partie complémentaire

$$\frac{1}{2}\sin Y'X\,\frac{\sin YX}{\sin Y'X}\,(y_1^2 y_0^2,$$

elle reçoit alors la forme plus simple

$$\sin YX\,\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C},$$

et la relation fondamentale écrite plus haut devient

$$\sin YX\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx = \sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'dx' + \sin YX\,\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}.$$

C'est de cette formule que nous déduirons dans chaque cas une interprétation toujours simple de l'*intégrale* contenue dans le premier membre, parce que celle que contient le second représentera une aire connue, et que la partie complémentaire

$$\sin YX\,\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C},$$

qui est la formule analytique de la différence des triangles introduits aux limites par le changement opéré dans la direction des ordonnées, sera, d'abord, toujours facile à évaluer, et disparaîtra, d'ailleurs, dans tous les cas les plus intéressants où les limites de l'*intégrale* seront réelles.

Cela posé, nous commencerons par assigner dans chaque cas une valeur concrète de l'*intégrale*

$$\sin YX\int y\,dx\,;$$

nous verrons ensuite quelles peuvent être les autres, et comment elle peut les acquérir.

Nous supposerons toujours, dans tout ce qui va suivre, les axes primitifs rectangulaires.

Considérons d'abord le cas où les limites seraient réelles par rapport à x. Si les deux points limites appartiennent à la courbe réelle et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'*intégrale* sera la mesure de l'aire correspondant à cet arc.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'*intégrale* sera la mesure de l'aire correspondant à cet arc ; la partie réelle de cette valeur sera l'aire du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, qui se trouvera comprise entre les limites de l'*intégrale*, par rapport à x, et la partie imaginaire sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Si les deux limites appartiennent à la courbe réelle, mais qu'aucune branche de cette courbe ne les réunisse, les branches de la courbe réelle sur lesquelles elles se trouveront pourront comprendre entre elles un seul anneau de la conjuguée $C = \infty$. Dans ce cas, entre autres valeurs, l'*intégrale* représentera la somme des mesures de l'aire correspondant à l'arc compris sur la courbe réelle entre la limite inférieure de l'*intégrale* et le point où la branche qui contient cette limite touchera la conjuguée $C = \infty$, de l'aire de la portion du diamètre correspondante aux cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, comprise dans l'intérieur de l'anneau considéré, de l'aire correspondante à l'arc compris sur la courbe réelle, entre le point où la branche qui contient la limite supérieure touche la conjuguée $C = \infty$ et la limite supérieure, cette somme augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire intérieure imaginaire de l'anneau considéré, suivant que le point $[xy]$, pour passer de l'une des limites à l'autre, aura décrit la partie supérieure ou la partie inférieure de l'anneau.

Lorsque les deux limites se trouveront séparées l'une de l'autre par plusieurs anneaux de la conjuguée et de la courbe réelle, l'*intégrale*, parmi d'autres valeurs, représentera la somme des aires correspondantes aux branches extrêmes et au diamètre commun des différents anneaux, comme dans le cas précédent, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire réelle ou imaginaire de chaque anneau de la courbe réelle ou de la conjuguée $C = \infty$.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'elles soient séparées par un ou plusieurs anneaux de la courbe réelle et de la conjuguée elle-même, ce cas s'analysera comme le précédent.

Enfin, si l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à la conjuguée $C = \infty$, l'*intégrale* représentera la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de la conjuguée, compris entre les limites et le point où les deux courbes se toucheront ; dans le cas où les deux limites seraient séparées par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte, comme dans les cas précédents, de la présence de ces anneaux.

Supposons, en second lieu, que l'une des limites appartienne à la courbe réelle et l'autre à une conjuguée qui touche la courbe réelle : si l'on imagine que l'on ait rendu l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient la limite imaginaire, la formule

$$\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'dx'$$

montre que, à la différence près de la partie algébrique

$$\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C},$$

l'*intégrale* aura pour valeur la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de sa conjuguée qui se trouveront compris entre les limites et le point de contact des deux courbes, les aires étant, bien entendu, limitées par des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée considérée. Si les deux limites étaient séparées l'une de l'autre par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte de cette circonstance comme dans les cas précédents.

Supposons maintenant que les deux limites appartiennent à des conjuguées différentes, mais qui touchent la courbe réelle : on formera, dans ce cas, une des valeurs de l'*intégrale* en imaginant que le point mobile $[xy]$ décrive successivement, sur la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, l'arc compris entre cette limite et le point où la conjuguée qui la contient touche la courbe réelle, l'arc de la courbe réelle compris entre les points où elle touche les deux conjuguées, enfin l'arc de la seconde conjuguée compris entre le point où elle touche la courbe réelle et la limite supérieure.

$[x_0y_0]$, $[x_1y_1]$ désignant toujours les limites de l'*intégrale*, si nous nommons $[a, b]$, $[a_1, b_1]$ les points où la courbe réelle touche les deux conjuguées, l'*intégrale*

$$\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx$$

pourra se décomposer en

$$\int_{x_0y_0}^{a,b} y\,dx + \int_{a,b}^{a_1,b_1} y\,dx + \int_{a_1,b_1}^{x_1,y_1} y\,dx\,;$$

cela posé, si nous rendons successivement l'axe des y parallèle aux cordes réelles des deux conjuguées, en désignant par x' et y', x'' et y'' les variables transformées successivement dans les deux systèmes, par C_0 et C_1 les caractéristiques des deux conjuguées, l'*intégrale*

$$\int_{x_0y_0}^{ab} y\,dx$$

pourra être remplacée par

$$\frac{b^2 - y_0^2}{2C} + \sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{a'b'} y'dx',$$

et l'*intégrale*

$$\int_{a_1b_1}^{x_1y_1} y\,dx$$

par

$$\frac{y_1^2 - b_1^2}{2C} + \sin Y''X\int_{a''_1b''_1}^{x''_1y''_1} y''dx''\,;$$

l'*intégrale*

$$\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx$$

pourra donc être égalée à

$$\frac{y_1^2}{2C_1} - \frac{y_0^2}{2C_0} + \sin Y'X\int_{x'_0y'_0}^{a'b'} y'dx'$$

$$+ \frac{b^2}{2C_0} + \int_{ab}^{a_1b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2C_1}$$

$$+ \sin Y''X\int_{a''_1b''_1}^{x''_1y''_1} y''dx''.$$

Cette expression s'interprète aisément :

$$\frac{b_1}{2C_0} + \int_{ab}^{a_1b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2C_1}$$

représente l'aire comprise entre l'arc de la courbe réelle qui s'étend du point ab au point a_1b_1, les tangentes à la courbe en ces deux points et l'axe des x; par conséquent, l'expression totale, à la différence près de sa partie algébrique

$$\frac{y_1^2}{2C_1} - \frac{y_0^2}{2C_0},$$

représente l'aire comprise entre l'axe des x, les cordes réelles des deux conjuguées menées, l'une d'une des limites, l'autre de l'autre, et enfin l'arc composé qui joint ces deux points.

Cela posé, il est facile de se rendre compte de la manière dont s'accroît continûment l'*intégrale*, lorsque la limite supérieure varie elle-même d'une manière continue : le point $[xy]$ s'éloignant de sa position initiale, outre la quantité algébrique

$$\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0},$$

l'*intégrale*, à chaque instant, se compose de la portion de l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, correspondante à l'arc de cette courbe qui s'étend de cette limite au point de contact avec la courbe réelle; de la portion de l'aire de la courbe réelle correspondante à l'arc compris entre les points où elle touche les conjuguées qui passent par les points limites, cette aire étant d'ailleurs comprise entre les tangentes à la courbe en ces deux points; enfin de la portion de l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, correspondante à l'arc de cette courbe qui va du point où elle touche la courbe réelle à la limite supérieure.

Dans cette somme, la première partie est fixe et les deux autres variables, la seconde est réelle et la troisième se compose d'une partie réelle, qui représente l'aire du diamètre de la conjuguée, et d'une partie imaginaire, qui représente l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre. Lorsque le point $[xy]$ se déplace, la seconde partie de l'*intégrale* s'accroît de l'aire de la courbe réelle qui correspond à l'arc que vient de parcourir sur cette courbe le point où la touche la conjuguée qui passe au point mobile $[xy]$, et la troisième s'accroît dans ses deux parties à mesure que le point $[xy]$ s'éloigne de la courbe réelle sur la conjuguée où il se trouve.

Les parties réelle et imaginaire de

$$\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$$

varient avec la position du point $[xy]$; mais, lorsque ce point revient à sa position initiale, quelque chemin qu'il ait suivi, $\frac{y^2}{2C}$ revient à sa valeur initiale $\frac{y_0^2}{2C_0}$, et la partie complémentaire s'évanouit. Elle disparaît encore dans un autre cas : celui où les limites appartiennent à la courbe réelle, parce qu'elle représente alors effectivement les aires des triangles interceptés entre l'axe des x et les ordonnées menées des points limites parallèlement à l'ancien axe des y et aux cordes réelles de la conjuguée qui passe par chacune de ces limites; en supprimant cette partie complémentaire, on a l'aire comprise entre l'axe des x, une portion de la courbe réelle, la demi-circonférence d'un anneau de conjuguées et des parallèles à l'ancien axe des y menées par les points limites.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que le point mobile $[xy]$ ne sort pas des conjuguées qui touchent la courbe réelle; dans le cas contraire, qui comprend en particulier l'hypothèse où l'équation ne représenterait plus aucune courbe réelle, l'enveloppe imaginaire des conjuguées pourra toujours servir d'intermédaire pour relier les deux conjuguées auxquelles appartiendraient les limites supérieure et inférieure de l'*intégrale* : l'*intégrale* se composera toujours de trois parties se rapportant, l'une à l'arc de la conjuguée contenant la limite inférieure qui s'étendra de cette limite au point de contact du même arc avec l'enveloppe ; la seconde, à la portion de l'enveloppe comprise entre les points où elle touchera les deux conjuguées passant par les deux limites; enfin, la troisième à la conjuguée à laquelle appartiendra la limite supérieure.

La première et la dernière partie de l'*intégrale* représenteront encore des aires connues; mais la partie intermédiaire, en général, ne représentera pas une aire définie par rapport à l'enveloppe. Quoi qu'il en soit, l'*intégrale* prise le long de l'enveloppe sera la seule qu'on puisse avoir à apprécier directement par des procédés purement analytiques, c'est-à-dire sans les secours que peut fournir une interprétation concrète, sans, par exemple, pouvoir recourir aux formules simples des quadratures approchées de Simplon ou de MM. Poncelet et Piobert.

On voit bien, par ce qui précède, comment une *intégrale* définie peut avoir une infinité de valeurs, en progression arithmétique, le chemin adopté pour aller d'une des limites à l'autre pouvant comprendre un nombre quelconque de fois la circonférence entière d'un anneau fermé, soit de la courbe réelle, soit d'une quelconque de ses conjuguées.

L'*intégrale* paraîtrait même complétement indéterminée si l'on pouvait supposer que les aires intérieures des anneaux fermés de conjuguées, compris entre les mêmes branches de la courbe réelle, pussent différer les unes des autres ; mais on démontre aisément (v. PÉRIODES) qu'il n'en est rien, que tous les anneaux fermés d'une même suite continue enveloppent une aire constante; de sorte que, quelque chemin que l'on adopte, on ne peut trouver pour l'*intégrale* que des valeurs différant entre elles de multiples entiers quelconques des aires des anneaux fermés tant de la courbe réelle que de ses conjuguées.

— INTÉGRALES DOUBLES. La théorie précédente s'étend sans difficultés aux *intégrales* doubles; mais l'interprétation complète de ces *intégrales* exige la distinction d'un grand nombre de cas dont nous considérerons seulement les plus pratiques, et, par conséquent, les plus utiles.

La définition d'une *intégrale* double

$$\iint z\,dx\,dy,$$

lorsque les variables dont elle dépend doivent prendre des valeurs imaginaires, est sujette à des difficultés sur lesquelles nous devons insister avant de passer outre.

Il est évident d'abord qu'une des sommes représentées dans la formule

$$\iint z\,dx\,dy$$

ne se sépare des autres qu'autant qu'on fournit deux relations entre les parties réelles et imaginaires de x, y et z qui, jointes aux deux équations dans lesquelles se décompose celle qui donne z explicitement ou implicitement, réduisent à deux le nombre des variables indépendantes.

Mais, ces deux relations étant données, pour concevoir nettement l'*intégrale* double, il faudrait la transformer de manière à pouvoir y séparer les deux intégrations.

Or, une pareille transformation exigerait habituellement un changement de variables indépendantes. En effet, à un même couple de valeurs attribuées aux parties réelle et imaginaire, soit de y, soit de x, il ne correspondra, en général, qu'un nombre limité de systèmes de valeurs, soit de x et de z, soit de y et de z, puisque, sur les six variables, on en aura choisi deux, et qu'il restera aux quatre autres à satisfaire à quatre conditions.

Pour pouvoir séparer les deux intégrations, il faudrait, en général, substituer des variables réelles aux variables imaginaires considérées. On pourrait prendre pour variables indépendantes les parties α et β qui composent x, et l'on effectuerait la transformation au moyen de la formule connue

$$\iint z\,dx\,dy = \iint z_1\,d\alpha\,d\beta\,\frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}},$$

z_1 désignant l'expression de z en fonction de α et de β et

$$\frac{d\alpha}{dx},\ \frac{d\alpha}{dy},\ \frac{d\beta}{dx},\ \frac{d\beta}{dy}$$

les dérivées partielles de α et de β par rapport à x et à y.

Mais une pareille transformation altérerait trop profondément la forme analytique de la fonction placée sous le signe $\int$ pour laisser aucun moyen d'en étudier l'*intégrale*.

La valeur d'une *intégrale* double, comme celle d'une *intégrale* simple, dépend avant tout, la fonction sous le signe $\int$ restant la même, des limites entre lesquelles l'intégration doit être faite. Ces limites restant fixes, la suite des valeurs intermédiaires qu'on doit faire prendre aux variables peut se déformer d'une infinité de manières sans que la valeur de l'*intégrale* change, et cette valeur, lorsqu'elle doit changer, conserve encore intacte sa partie principale ; elle ne s'augmente que de constantes ou d'*intégrales* simples.

Nous commencerons donc par déterminer, en raison du système des limites, la valeur de l'*intégrale* double la plus facile à rencontrer et à définir; on trouvera à l'article PÉRIODE le complément de la théorie.

Les limites seront fournies par deux courbes réelles ou imaginaires, composées de points pris sur la surface

$$F(x,y,z) = 0$$

ou sur ses conjuguées, de sorte que la discussion portera sur les différentes hypothèses qu'on peut faire relativement à ces courbes.

Supposons d'abord que les deux courbes qui forment les limites de l'*intégrale* aient les ordonnées de tous leurs points réelles : on pourra éviter dans ce cas de faire passer y par des valeurs imaginaires; alors l'*intégrale* double recevra immédiatement la forme

$$\int dy \int z\,dx.$$

Soient, pour chaque valeur K de y, $\varphi(K)$ et $\psi(K)$ les limites de l'intégration qui doit être faite par rapport à x : pour fixer la marche des valeurs de x entre ces limites, on devra définir d'une manière générale la courbe réelle ou imaginaire que, dans chaque plan parallèle au plan des xz, et distant de ce plan de la quantité K, le point xz devra parcourir pour engendrer l'aire

$$\int_{\varphi(K)}^{\psi(K)} z\,dx.$$

Le plan $y = K$ coupera la surface réelle, et celles de ses conjuguées dont les ordonnées y sont réelles, suivant une courbe réelle et ses conjuguées. Si $\varphi(K)$ et $\psi(K)$ sont constamment réels, quel que soit K, on pourra ne donner à x que des valeurs réelles, et l'*intégrale*

$$\int_{\varphi(K)}^{\psi(K)} z\,dx$$

fournira la somme des aires des sections faites dans la surface réelle et dans sa conjuguée à abscisses et à ordonnées réelles, comprises entre ces deux courbes, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des z,

$$x = \varphi(K) \quad \text{et} \quad x = \psi(K).$$

Mais cette *intégrale* aura, d'ailleurs, autant de valeurs qu'il y aura de chemins continus sur ces deux courbes, entre les points correspondants aux deux limites.

Si x peut aller de $x_0 = \varphi(K)$ à $x_1 = \psi(K)$, en dépassant ces limites dans un sens et dans l'autre de toutes les manières possibles, pourvu que, partant de $x_0 = \psi(K)$, il arrive par des valeurs réelles à $x_1 = \psi(K)$, l'*intégrale* devra être complétée par l'addition de multiples entiers des aires des anneaux fermés de la section réelle ou de la section imaginaire à abscisses réelles.

L'*intégrale*

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx$$

représentera donc la somme des volumes compris entre la surface réelle prolongée par sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, le plan des xy, les deux plans $y = y_0$, $y = y_1$ et les deux cylindres $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$; et si dans chaque plan $y = K$ le point xz a décrit des anneaux fermés homologues un même nombre de fois, l'*intégrale* comprendra, en outre, des multiples des volumes engendrés par les différents anneaux fermés lorsqu'ils se déplacent parallèlement au plan des yz entre les plans $y = y_0$, $y = y_1$.

Si, $x_0 = \varphi(K)$ et $x_1 = \psi(K)$ étant toujours supposés réels quel que soit K, on veut néanmoins faire passer x par des valeurs imaginaires, on pourra interrompre à un instant quelconque le chemin du point xz sur l'arc de la courbe réelle, par un tour fait sur une de ses conjuguées fermées, de façon à continuer ensuite l'arc réel, ou si cet arc réel se compose de deux branches distinctes, passer de l'une à l'autre en suivant l'une quelconque des conjuguées au lieu de prendre, comme précédemment, la conjuguée à abscisses réelles. L'*intégrale* aura dans tous les cas les mêmes valeurs, car les aires imaginaires des conjuguées fermées contenues dans un même plan seront égales, et, par conséquent, engendreront les mêmes volumes.

Enfin, on pourra passer, dans le plan de chaque section, du point $x_0 = \varphi(K)$ au point $x_1 = \psi(K)$ par une succession de valeurs imaginaires de x réglée par une loi entièrement arbitraire, par une relation choisie à volonté entre les parties réelle et imaginaire de x et de z. Alors l'*intégrale*

$$\int_{\varphi(K)}^{\psi(K)} z\,dx$$

représentera l'aire de la section faite dans la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, par exemple, plus des multiples déterminés des aires des différents anneaux fermés de la section réelle ou de l'une de ses conjuguées imaginaires.

Si $x_0 = \varphi(K)$ et $x_1 = \psi(K)$ n'étaient pas constamment réels, les limites de l'*intégrale*

$$\int_{x_0z_0}^{x_1z_1} z\,dx$$

seraient prises, en général, sur deux conjuguées différentes de la section comprise dans le plan $y = K$, et cette *intégrale*, à la différence près de la quantité

$$\frac{z_0^2}{2C_0} - \frac{z_1^2}{2C_1},$$

représenterait la somme des aires des deux conjuguées passant par les limites et de la courbe réelle terminée aux points où elle toucherait ces deux conjuguées; l'*intégrale* double, à la différence près de la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\frac{z^2}{C}\right)_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)},$$

représenterait donc le volume compris entre le plan des yx, la surface formée par les sections parallèles au plan des xz soit de la surface réelle, soit de ses conjuguées à ordonnées réelles qui passeraient par tous les points

$$y = K, \quad x = \varphi(K), \quad F(x,y,z) = 0,$$

et

$$y = K, \quad x = \psi(K), \quad F(x,y,z) = 0,$$

et les deux conoïdes ayant pour génératrices les parallèles menées de ces divers points aux cordes réelles des conjuguées qui y passeraient.

Supposons maintenant que les deux courbes qui forment les limites de l'*intégrale* double soient sur une même conjuguée : en faisant tourner le plan des xz d'un angle convenable autour de l'axe des z, on substituera à la suite des valeurs que devraient prendre x, y et z une autre suite de valeurs d'autres variables x', y', z', desquelles y' restera constamment réelle, et les valeurs de la nouvelle *intégrale* double

$$\sin YX'\int dy'\int z'dx'$$

fourniront celles de la proposée. Or, ce qui précède les définit complétement.

Enfin, supposons que chacune des limites soit tout entière sur une même conjuguée, les deux conjuguées qui les contiennent étant d'ailleurs différentes : on pourra supposer dans ce cas que le point $[x, y, z]$ décrive des courbes tracées tout entières sur ces deux conjuguées et sur la surface réelle, et l'on arrivera encore aisément à déterminer l'un des volumes que pourra représenter l'*intégrale* double. En effet, il résulte de ce qui précède que l'une des valeurs de l'*intégrale* prise entre des limites déterminées par une courbe A, tracée sur la surface réelle, et une courbe B, tracée sur l'une de ses conjuguées, représente, à la différence près d'une *intégrale* simple qui s'introduit par le changement de direction de l'axe des z, le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe C suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, plus le volume de cette conjuguée limitée aux courbes C et B.

L'*intégrale* double, lorsque la courbe B passe d'une conjuguée à une autre, peut donc être considérée comme s'augmentant du volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre les deux courbes suivant lesquelles elle touche les deux conjuguées consécutives, de la différence des volumes des deux conjuguées limitées respectivement aux courbes suivant lesquelles elles touchent la surface réelle et à la courbe mobile B, enfin de la quantité dont varie l'*intégrale* simple complémentaire.

Cela revient à dire que l'*intégrale* double, définie par ses limites correspondantes à deux courbes B et B' tracées sur deux conjuguées différentes et quelconques d'ailleurs, comprend parmi ses valeurs le volume de la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, limitée à cette courbe et à la courbe C suivant laquelle elle touche la surface réelle, plus le volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre la courbe C et la courbe C' suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B', plus le volume de cette seconde conjuguée limitée aux courbes C' et B', ces trois volumes étant compris entre trois cylindres parallèles à trois axes des z différents, mais dont les directions sont connues, plus enfin les parties complémentaires qui s'introduisent à chaque changement de direction de l'axe des z, parties qui ont été évaluées précédemment.

Tels sont les cas pratiques intéressants auxquels nous nous bornons ici; on trouvera à l'article PÉRIODE la démonstration de l'égalité des volumes enveloppés par les conjuguées fermées comprises entre les mêmes nappes d'une surface réelle : ce sont les volumes de ces conjuguées qui peuvent s'ajouter en nombre quelconque à la valeur brute d'une *intégrale* double définie par ses deux limites.

— *Intégrale d'une équation*. On nomme *intégrale* d'une équation différentielle une équation, entre les valeurs finies des variables, qui, différentiée, reproduirait l'équation proposée ou une équation équivalente.

Une *intégrale* d'une équation peut en être l'*intégrale* générale, une *intégrale* particulière ou une *intégrale* singulière. L'*intégrale* générale d'une équation comprend toutes les *intégrales* particulières qui s'en déduisent par l'attribution de valeurs particulières aux constantes arbitraires que contient l'*intégrale* générale. Une *intégrale* singulière est une *intégrale* qui ne rentre pas dans l'*intégrale* générale.

— *Intégrale générale*. Si l'on prend une équation finie quelconque, qu'on la différentie et qu'entre les deux équations, l'une donnée, l'autre déduite, on élimine une des constantes que pouvait contenir l'équation proposée, on aura une autre équation différentielle de cette proposée. Réciproquement, lorsqu'on a à intégrer une équation différentielle du premier ordre, pour donner à la question que l'on se propose la plus grande extension possible, on doit imaginer que l'équation différentielle que l'on traite soit résultée de l'élimination d'une constante entre l'équation en quantités finies et l'une des équations différentielles en nombre infini qu'on en aurait déduites successivement si on lui eût donné toutes les formes possibles; l'*intégrale* générale d'une équation différentielle du premier ordre doit donc contenir une constante de plus que l'équation différentielle elle-même.

Ce point fondamental peut être établi plus directement de la manière suivante : une équation différentielle du premier ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ne peut donner, pour une valeur particulière x_0 de x, que la valeur d'une des inconnues y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$; il faut donc se donner l'autre arbitrairement : si l'on choisit y_0, l'équation fournira pour $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ une valeur correspondante, et cette valeur permettra de passer du système des valeurs x_0, y_0 des variables x et y au système des valeurs infiniment voisines x_1 et y_1. La même équation permettra ensuite de passer du couple des valeurs x_1, y_1 au couple suivant x_2, y_2, et ainsi de suite. On conçoit donc que la valeur de la fonction y, correspondante à une valeur littérale x de la variable, dépende nécessairement de la valeur y_0 de y, qui correspond à une valeur définie x_0 de x. Cette valeur y_0 est l'une des formes de la constante arbitraire qui doit entrer dans l'*intégrale* générale d'une équation différentielle du premier ordre. On voit en même temps que l'*intégrale* générale d'une équation du premier ordre ne doit renfermer qu'une constante arbitraire, puisque, dès qu'on donne la valeur y_0 de y qui correspond à une valeur particulière x_0 de x, y doit être considérée comme une fonction parfaitement déterminée de x.

De même, si l'on considère une équation différentielle du second ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

elle ne peut fournir la valeur $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$ de la dérivée seconde de y, correspondante à une valeur x_0 de x, qu'autant que l'on se donne arbitrairement y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$; mais, si l'on s'est donné x_0, y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, l'équation, en fournissant la valeur de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, permettra de passer des deux états $x_0\,y_0$, $x_1\,y_1$, infiniment voisins à l'état suivant $x_2\,y_2$; ensuite elle permettra de même de passer des deux états $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, à l'état suivant $x_3\,y_3$ et ainsi de suite, de sorte que y sera une fonction parfaitement déterminée de x. L'*intégrale* générale d'une équation différentielle du second ordre doit donc contenir deux constantes arbitraires, et seulement deux.

Les mêmes raisonnements serviraient à établir de la même manière que l'*intégrale* générale d'une équation différentielle de l'ordre m doit contenir m constantes arbitraires, et seulement m.

— *Intégrales singulières*. L'existence des *intégrales* singulières des équations différentielles du premier ordre peut être prévue par des considérations bien simples. En effet, soient

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

une équation différentielle du premier ordre, et

$$F(x, y, C) = 0$$

son *intégrale* générale : habituellement, les courbes renfermées dans l'équation

$$F(x, y, C) = 0$$

auront une enveloppe, dont on obtiendrait, comme on sait, l'équation en éliminant C entre les équations

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dC} = 0.$$

Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation ainsi obtenue, le lieu $\varphi(x, y) = 0$ sera composé d'éléments pris sur toutes les courbes $F(x, y, C) = 0$; chaque élément de ce lieu $\varphi(x, y) = 0$ sera donc tel que les extrémités en seront reliées par la condition

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

C'est bien dire que le lieu $\varphi(x, y) = 0$ satisfera dans toute son étendue à l'équation différentielle proposée.

Ainsi, toutes les fois que les lieux particuliers représentés par l'*intégrale* générale, en y faisant varier d'une manière continue la constante arbitraire, toutes les fois que ces lieux auront une enveloppe distincte de l'un d'eux, l'équation différentielle admettra une *intégrale* singulière. Les explications mêmes qui précèdent montrent comment l'*intégrale* singulière se déduit de l'*intégrale* générale; on peut aussi la tirer de l'équation différentielle elle-même, par les considérations suivantes :

Si les courbes représentées par les *intégrales* particulières ont une enveloppe, elles se coupent deux à deux, de sorte que pour un système quelconque de valeurs de x et de y l'équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

doit donner au moins deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$; mais si le point $[x, y]$ est sur l'enveloppe même, les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ doivent être égales ; l'enveloppe ou le lieu représenté par l'*intégrale* singulière doit donc être le lieu des points du plan où l'équation en z

$$f(x, y, z) = 0$$

acquiert deux racines égales.

Il en résulte que, pour obtenir l'équation cherchée, on devra exprimer que les équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dz} = 0$$

ont une racine commune, et éliminer z entre l'équation de condition et $f(x, y, z) = 0$; l'équation obtenue sera l'*intégrale* singulière.

INTÉGRALEMENT adv. (ain-té-gra-le-man — rad. *intégral*). D'une manière intégrale, en totalité : *Il a payé toutes ses dettes* INTÉGRALEMENT.

INTÉGRALITÉ s. f. (ain-té-gra-li-té — rad. *intégral*). Etat d'une chose complète, entière, intégrale.

INTÉGRANT, ANTE adj. (ain-té-gran, an-te — rad. *intégrer*). Se dit de chacune des parties qui contribuent à l'intégrité d'un tout sans en constituer l'essence : *Les bras, les jambes sont des parties* INTÉGRANTES, *mais non essentielles, du corps humain; sans elles le corps existerait, mais ne serait pas entier.*

— Fig. Se dit de ce qui est un accompagnement nécessaire : *Notre opinion fait partie* INTÉGRANTE *de nous-mêmes; qui la combat nous offense. La vanité est une partie* INTÉGRANTE *de la coquetterie.* (Mme Monmarson.)

— Physiq. *Molécules intégrantes*, Molécules qui sont de la nature du corps, composées ou simples comme lui : *Les* MOLÉCULES INTÉGRANTES *du sel marin sont du sel marin; ses molécules élémentaires sont du chlore et du sodium.*

INTEGRATION s. m. (ain-té-gra-si-on — rad. *intégrer*). Mathém. Action d'intégrer, opération par laquelle on trouve l'intégrale d'une différentielle ou d'une équation.

— **Encycl.** L'*intégration* d'un système d'équations différentielles consiste dans la recherche des fonctions définies par les relations données entre ces fonctions, leurs dérivées partielles ou totales et les variables indépendantes. Lorsque la question comporte

plusieurs variables indépendantes, les dérivées des fonctions inconnues sont prises par rapport aux différentes variables indépendantes séparément; les équations données sont alors des équations aux différences ou aux différentielles partielles; dans le cas contraire, les équations données ne reçoivent aucune qualification.

Le nombre des équations données doit toujours être égal au nombre des fonctions inconnues. Lorsque la question comporte plusieurs fonctions inconnues, les équations données forment système; elles sont simultanées.

Lorsque l'on se propose la recherche d'une seule fonction définie par une équation différentielle, l'ordre de cette équation est l'indice de la dérivée de rang le plus élevé qui entre dans l'équation. Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est de la forme

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0;$$

une équation aux différentielles partielles du premier ordre est telle que

$$f\left(x,y,\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

L'équation différentielle ordinaire proposée peut ne pas contenir la fonction inconnue; elle est alors mise sous la forme

$$f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Si l'on peut la résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, elle donne

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)$$

ou

$$dy=\varphi(x)dx.$$

L'*intégration* d'une pareille équation porte le nom de quadrature, parce que l'intégrale

$$y=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx$$

représente l'aire de la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires serait

$$y=\varphi(x),$$

cette aire étant comptée à partir de $x=x_0$.

L'*intégration* est rarement possible, quel que soit d'ailleurs le cas que l'on considère; elle ne repose au reste, le plus souvent, que sur des transformations de calcul propres à ramener l'équation proposée à quelqu'un des types connus d'équations provenant de la différentiation directe d'équations en quantités finies.

Nous allons passer en revue les méthodes d'*intégration* propres aux différents cas, en commençant par les plus simples.

— *Intégration par substitution.* Lorsque la fonction $f(x)$ placée sous le signe $\int$ se rapproche de l'un des types connus des dérivées des fonctions simples, on cherche à l'y faire rentrer complétement, au moyen d'un changement de variable. Soit

$$y=\int_{x_0}^{x}f(x)dx.$$

Si l'on pose $x=\varphi(t)$, d'où $dx=\varphi'(t)\,dt$, les éléments de l'intégrale

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dx$$

étant respectivement égaux à ceux de

$$\int f(x)dx,$$

les deux intégrales auront même valeur, pourvu que les limites se correspondent; on pourra donc substituer l'une à l'autre.

Exemples : soit l'intégrale

$$\int(ax+b)^m dx.$$

Si l'on pose $ax+b=t$, d'où $dx=\frac{dt}{a}$, elle deviendra

$$\int t^m\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int t^m dt=\frac{1}{a}\,\frac{t^{m+1}}{m+1}$$
$$+C=\frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}+C.$$

Soit encore

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{a^2+x^2}=t,$$

d'où $a^2+x^2=t^2$ et $x\,dx=t\,dt$, il vient

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int dt=t+C=\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

— *Intégration par parties.* Lorsque la fonction placée sous le signe $\int$ est le produit de deux facteurs, dont l'un est une dérivée exacte, on peut en profiter pour transformer l'intégrale. Soit

$$y=\int vu'dx,$$

u' désignant le facteur qui se trouve être la dérivée exacte d'une fonction connue u, et v étant d'ailleurs quelconque : l'identité

$$\mathfrak{D}_x(uv)=u\,\mathfrak{D}_x v+v\,\mathfrak{D}_x u=uv'+vu'$$

donne

$$vu'=\mathfrak{D}_x(uv)-uv',$$

ou

$$\int vu'dx=\int\mathfrak{D}_x(uv)dx-\int uv'dx=uv-\int uv'dx;$$

on pourra donc remplacer l'intégrale proposée par

$$uv-\int uv'dx.$$

Les limites, si l'intégrale est définie, devront être les mêmes dans la proposée et dans la transformée.

Exemple : soit l'intégrale

$$\int x^2\cos x\,dx;$$

en remarquant que $\cos x\,dx$ est la différentielle exacte de $\sin x$, on aura

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx;$$

en remarquant ensuite que $\sin x\,dx$ est la différentielle exacte de $-\cos x$, on aura de même

$$-2\int x\sin x\,dx=2x\cos x-2\int\cos x\,dx$$
$$=2x\cos x-2\sin x+C,$$

et, en substituant, on aura définitivement

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x$$
$$-2\sin x+C.$$

— *Intégration des différentielles rationnelles.* Les fonctions rationnelles se décomposent en parties appartenant aux types

$$Ax^m,\quad\frac{A}{x-a},\quad\frac{A}{(x-a)^n},$$
$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2},\quad\frac{Mx+N}{(x-a)^n+\beta^2)^n}.$$

(v. FRACTIONS rationnelles) : l'*intégration* d'une différentielle rationnelle se ramène donc à la recherche des intégrales

$$\int Ax^m dx,\quad\int\frac{A}{x-a}dx,\quad\int\frac{A}{(x-a)^n}dx,$$
$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}dx\qquad\int\frac{Mx+N}{((x-a)^2+\beta^2)^n}.$$

La première et la seconde s'obtiennent immédiatement :

$$\int Ax^m dx=A\int x^m dx=A\,\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

et

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}$$
$$=A\log\text{ nép }(x-a).$$

La troisième

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$$

peut s'écrire

$$A\int(x-a)^{-n}dx$$

ou

$$A\int(x-a)^{-n}d(x-a);$$

elle a donc pour valeur

$$\frac{A(x-a)^{-n+1}}{n-1}.$$

L'intégrale

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}$$

peut se mettre sous la forme

$$\int\frac{M(x-a)}{(x-a)^2+\beta^2}dx+(Ma+N)\int\frac{dx}{(x-a)^2+\beta^2};$$

or,

$$\int\frac{M(x-a)dx}{(x-a)^2+\beta^2}=\frac{M}{2}\int\frac{\varphi(x-a)d(x-a)}{(x-a)^2+\beta^2}$$
$$=\frac{M}{2}\log\text{ nép }\left[(x-a)^2+\beta^2\right);$$

d'un autre côté,

$$(Ma+N)\int\frac{dx}{(x-a)^2+\beta^2}$$
$$=\frac{Ma+N}{\beta}\int\frac{d\left(\frac{x-a}{\beta}\right)}{1+\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2}$$
$$=\frac{Ma+N}{\beta}\text{ arc tang }\frac{x-a}{\beta}$$

donc

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}=\frac{M}{2}\log\text{ nép }\left[(x-a)^2+\beta^2\right]$$
$$+\frac{Ma+N}{\beta}\text{ arc tang }\frac{x-a}{\beta}.$$

Enfin

$$\int\frac{Mx+N}{\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^n}=\int\frac{M(x-a)dx}{\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^n}$$
$$+(Ma+N)\int\frac{dx}{\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^n};$$

or,

$$\int\frac{M(x-a)dx}{\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^n}$$
$$=\frac{M}{2}\int\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^{-n}d\left[(x-a)^2+\beta^2\right)$$
$$=-\frac{M}{2(n-1)}\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^{-n+1}.$$

Quant à l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\left[(x-a)^2+\beta^2\right]^n},$$

si l'on pose $x-a=\beta z$, d'où $dx=\beta dz$, elle devient

$$\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n};$$

on est donc ramené à la recherche de l'intégrale

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Or,

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\int\frac{(1+z^2-z^2)dz}{(1+z^2)^n}$$
$$=\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}-\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^n};$$

d'un autre côté,

$$\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^n}=\int z\,\frac{zdz}{(1+z^2)^n}$$

ou, en intégrant par parties, en considérant $\frac{zdz}{(1+z^2)^n}$ comme une différentielle exacte,

$$\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^n}=-\frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{2n-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation qui donne

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

il vient

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Ainsi la recherche de

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

est ramenée à celle de

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}};$$

celle-ci se ramenera de même à celle de

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-2}}$$

et ainsi jusqu'à

$$\int\frac{dz}{1+z^2},$$

qui est arc tang z; l'*intégration* se trouvera donc complétement effectuée.

— *Intégration des différentielles irrationnelles.* Les différentielles irrationnelles qu'on sait intégrer sont celles où n'entrent que des radicaux du second degré au plus, portant sur des expressions du second degré seulement; encore est-il nécessaire que l'expression proposée ne contienne qu'un seul radical, tel que

$$\sqrt{ax^2+bx+c},$$

ou deux radicaux portant sur deux expressions du premier degré,

$$\sqrt{mx+n},\quad\sqrt{px+q}.$$

Le dernier cas se ramène, du reste, au premier; car si l'on pose

$$\sqrt{px+q}=z,$$

d'où

$$x=\frac{z^2-q}{p}$$

et

$$dx=\frac{2}{p}zdz,$$

l'un des radicaux disparaît et l'autre,

$$\sqrt{mx+n},$$

est remplacé par

$$\sqrt{m\,\frac{z^2-q}{p}+n}.$$

Cela posé, la méthode pour intégrer une différentielle algébrique

$$f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

consiste à la transformer en une différentielle rationnelle, c'est-à-dire à faire disparaître le radical. Il existe pour cela plusieurs moyens, entre lesquels on choisit celui qui permet d'éviter l'introduction d'imaginaires, lorsque la question n'en comporte pas.

On peut d'abord poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+z,$$

d'où

$$bx+c=2zx\sqrt{a}+z^2,$$

et, par suite,

$$x=\frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}}\sqrt{a}+z.$$

Comme d'ailleurs dx s'exprime rationnellement en fonction de z, la transformation est complète.

On peut encore poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz+\sqrt{c},$$

d'où

$$ax+b=xz^2+2xz\sqrt{c},$$

et, par suite,

$$x=\frac{b}{z^2+2z\sqrt{c}-a},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{bz}{z^2+2z\sqrt{c}-a}+\sqrt{c}.$$

Comme d'ailleurs dx s'exprime encore rationnellement en fonction de z, la transformation est achevée.

Enfin, si l'on a décomposé ax^2+bx+c en facteurs du premier degré, on peut poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)z,$$

d'où

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)z^2,$$

et par suite

$$x=\frac{\alpha\beta-\alpha z^2}{a-z^2},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{\alpha\beta-\alpha z^2}{a-z^2}-\alpha\right)z$$
$$=\frac{a(\beta-\alpha)z}{a-z^2},$$

dx s'exprimant toujours rationnellement en fonction de z, la transformation est complète.

Si le trinôme placé sous le radical n'est pas décomposable en facteurs réels, on peut le mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

et, en posant

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}=(x-\alpha)+z,$$

d'où

$$x-\alpha=\frac{\beta^2-z^2}{2z},$$

on fait encore disparaître le radical.

— *Intégration des différentielles totales.* La différentielle totale d'une fonction u de trois variables indépendantes x, y, z, par exemple, se présente sous la forme

$$du=Mdx+Ndy+Pdz.$$

M, N, P devant être les dérivées partielles par rapport à x, à y et à z d'une même fonction, ces expressions doivent, par suite, remplir certaines conditions (v. INTÉGRABILITÉ) consistant dans les identités

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\quad\frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx}\quad\text{et}\quad\frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy}.$$

Lorsque ces conditions sont remplies, l'intégration est possible, sinon faisable.

La dérivée de la fonction cherchée u, par rapport à x, devant être M, cette fonction sera comprise dans la formule générale

$$\int Mdx+\varphi(y,z),$$

l'intégrale devant être prise comme si y et z étaient des constantes et la fonction φ restant complétement inconnue. Soit $f(x,y,z)$ l'intégrale $\int Mdx$, la fonction φ devra satisfaire à la condition

$$\frac{df}{dy}+\frac{d\varphi}{dy}=N$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dy}=N-\frac{df}{dy};$$

elle sera donc comprise dans la forme

$$\int\left(N-\frac{df}{dy}\right)dy+\psi(z),$$

l'intégrale devant être prise comme si z était une constante et la fonction δ restant inconnue. Soit $f_1(x,y,z)$ la somme des intégrales

$$\int Mdx$$

et

$$\int\left(N-\frac{df}{dy}\right)dy;$$

la fonction ψ devra satisfaire à la condition

$$\frac{df_1}{dz}+\frac{d\psi}{dz}=P$$

ou

$$\frac{d\psi}{dz}=P-\frac{df_1}{dz},$$

elle sera donc

$$\int\left(P-\frac{df_1}{dz}\right)dz+\text{const.}$$

L'analyse qui précède montre que l'hypothèse même, que la différentielle proposée soit intégrable, entraîne nécessairement comme conséquences que x n'entre pas dans $N-\frac{df}{dy}$ et que de même x et y disparaissent complétement de $P-\frac{df_1}{dz}$. Mais il est facile de voir que ces circonstances se présenteront toujours dès que les conditions d'intégrabilité seront remplies. En effet, la fonction f, obtenue par l'intégration, peut être mise sous la forme

$$f=\varphi_1(y,z)+\int_{x_1}^{x}Mdx;$$

il en résulte

$$\frac{df}{dy}=\frac{d\varphi_1}{dy}+\int_{x_1}^{x}\frac{dM}{dy}dx;$$

mais, par hypothèse, $\frac{dM}{dy}$ est identique à $\frac{dN}{dx}$, par conséquent

$$\frac{df}{dy}=\frac{d\varphi_1}{dy}+\int_{x_1}^{x}\frac{dN}{dx}dx=\frac{d\varphi_1}{dy}+N-N_1;$$

$N-\frac{df}{dy}$ se réduit donc à $\frac{d\varphi_1}{dy}-N_1$, c'est-à-dire à une fonction de y et de z. On verrait de même que $P-\frac{df_1}{dz}$ se réduit à une fonction de z seul.

— *Intégration de l'équation différentielle du premier ordre.* Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Lorsqu'elle est résolubie par rapport à $\frac{dy}{dx}$, elle se décompose en équations rentrant dans le type

$$Mdx+Ndy=0,$$

où M et N désignent deux fonctions de x et de y. Pour intégrer une pareille équation, il faut en rendre le premier membre une différentielle exacte par l'introduction d'un facteur convenable. Soit P ce facteur :

$$PMdx+PNdy$$

devant être une différentielle exacte, il faut qu'il y ait identité entre

$$M\frac{dP}{dy}+P\frac{dM}{dy}$$

et

$$N\frac{dP}{dx}+P\frac{dN}{dx};$$

mais P dépendant généralement de x et de y, l'équation

$$M\frac{dP}{dy}+P\frac{dM}{dy}=N\frac{dP}{dx}+P\frac{dN}{dx}$$

est aux différentielles partielles, et, par conséquent, plus difficile à intégrer que l'équation proposée elle-même. Si l'on suppose que P ne dépende pas de y, par exemple, $\frac{dP}{dy}$ étant identiquement nul, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{dP}{P}=\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)dx;$$

mais, pour que l'hypothèse soit admissible, il faut que y disparaisse de $\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}$. Dans tous les cas où cette circonstance se présentera, en désignant par $\varphi'(x)$ l'expression

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx},$$

on pourra poser

$$\frac{dP}{P}=\varphi'(x)dx,\text{ ou log nép }P=\varphi(x),$$

ou encore

$$P=e^{\varphi(x)};$$

l'expression

$$e^{\varphi(x)}(Mdx+Ndy)$$

sera alors la différentielle exacte d'une fonction u, et l'intégrale de l'équation proposée sera

$$u=\text{const.}$$

— *Équation homogène.* L'équation du premier ordre $Mdx+Ndy=0$ est dite homogène lorsque M et N sont des fonctions homogènes et du même degré de x et de y. On peut toujours ramener l'intégration de l'équation homogène à une quadrature. En effet, si m est le degré commun de M et de N, l'équation peut s'écrire

$$x^m\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy\right]=0,$$

ou simplement

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0.$$

Si l'on pose $y=ux$, d'où $dy=udx+xdu$, l'équation se transforme en

$$\varphi(u)dx+\psi(u)(udx+xdu)=0$$

ou

$$\frac{dx}{x}=-\frac{\psi(u)du}{\varphi(u)+u\psi(u)}=f'(u)du;$$

on en déduit

$$x=e^{f(u)},$$

et, par suite,

$$x=e^{f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Équation linéaire. L'équation du premier ordre est dite linéaire lorsqu'elle se ramène à la forme

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q,$$

P et Q ne dépendant que de x; on peut toujours ramener l'intégration de l'équation linéaire à une quadrature. En effet, si l'on pose $y=uz$, d'où

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

il vient

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q.$$

Comme z et u sont indéterminés et doivent seulement donner pour produit y, on peut joindre à l'équation précédente telle équation que l'on veut. On peut poser, par exemple,

$$\frac{du}{dx}+Pu=0,$$

d'où

$$\frac{du}{u}=Pdx$$

et

$$u=e^{\int Pdx};$$

il en résulte alors

$$dz=Qe^{-\int Pdx}dx,$$

d'où

$$z=\int Qe^{-\int Pdx}dx.$$

Si les intégrations peuvent se faire, on aura y en fonction de x.

On parvient quelquefois par des transformations préalables à ramener l'équation différentielle que l'on traite soit à une équation homogène, soit à une équation linéaire.

— *Intégration d'un équation linéaire d'ordre supérieur.* L'équation linéaire de l'ordre m a la forme

$$(1)\quad\frac{d^my}{dx^m}+P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+Q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\ldots\ldots$$
$$+T\frac{dy}{dx}+Uy=V,$$

P, Q,...., T, U, V désignant des fonctions de x.

Pour intégrer une pareille équation, on cherche d'abord à faire disparaître le second membre V. On pose pour cela $y=u+v$, v désignant l'intégrale générale, supposée connue, de l'équation

$$(2)\quad\frac{d^my}{dx^m}+P\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots\ldots+Uy=0,$$

et u une fonction de x que l'on déterminera après avoir obtenu x.

L'équation (2) jouit d'une propriété remarquable qui en facilite quelquefois l'intégration : la somme de plusieurs solutions de cette équation en est encore une solution. En effet, si y_1 et y_2, par exemple, désignent deux fonctions de x satisfaisant à l'équation, on aura séparément

$$\frac{d^my_1}{dx^m}+P\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}+\ldots\ldots+Uy_1=0$$

et

$$\frac{d^my_2}{dx^m}+P\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}+\ldots\ldots+Uy_2=0,$$

d'où, en ajoutant,

$$\frac{d^m(y_1+y_2)}{dx^m}+P\frac{d^{m-1}(y_1+y_2)}{dx^{m-1}}+\ldots\ldots$$
$$+U(y_1+y_2)=0.$$

On conclut de là qu'il suffit, pour avoir l'intégrale générale de l'équation (2), d'en connaître m intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots, y_m$. L'intégrale générale, en effet, doit être alors

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots\ldots+C_my_m,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ désignant m constantes arbitraires.

Cela posé, soit

$$u=C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots\ldots+C_m'y_m,$$

$C_1', C_2', \ldots, C_m'$ désignant maintenant des fonctions inconnues de x. Si l'on détermine ces fonctions par les conditions

$$(A)\quad\begin{cases}y_1dc_1'+y_2dc_2'+\ldots\ldots+y_mdc_m'=0,\\ dy_1dc_1'+dy_2dc_2'+\ldots\ldots+dy_mdc_m'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d^{m-1}y_1dc_1'+d^{m-1}y_2dc_2'+\ldots\ldots\\ \qquad+d^{m-1}y_mdc_m'=0,\\ d^{m-1}y_1dc_1'+d^{m-1}y_2dc_2'+\ldots\ldots\\ \qquad+d^{m-1}y_mdc_m'=Vdx^m,\end{cases}$$

il est clair que la fonction u satisfera à l'équation (1) : en y ajoutant l'intégrale générale de l'équation (2)

$$v=C_1y_1+C_2y_2+\ldots\ldots+C_my_m,$$

on aura l'intégrale générale de l'équation (1). On remarquera que le système des équations A fournissant pour $\frac{dC_p}{dx}$ une fonction de x facile à obtenir, les fonctions $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ s'obtiendront toujours par de simples quadratures. On ne peut généralement intégrer l'équation (2), mais l'intégration s'en ramène à une simple question d'algèbre lorsque les coefficients P, Q,...., U se trouvent être des constantes. En effet, si l'on pose $y=e^{ax}$, a désignant une constante, on voit aisément que la condition à remplir par a est contenue dans l'équation

$$(B)\quad a^m+Pa^{m-1}+\ldots\ldots+Ta+U=0.$$

En désignant donc par $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les m racines de cette équation algébrique,

$$y_1=e^{a_1x},\quad y_2=e^{a_2x},\ldots,\ y_m=e^{a_mx}$$

représentent m solutions particulières de l'équation proposée; l'intégrale générale de cette équation est donc

$$y=C_1e^{a_1x}+C_2e^{a_2x}+\ldots\ldots+C_me^{a_mx}.$$

Cette formule, lorsque l'équation (B) aurait des racines égales, ne représenterait plus l'intégrale générale de l'équation proposée, parce que les termes de y, qui correspondraient à deux ou plusieurs racines égales, se confondraient en un seul, et que, par conséquent, y ne contiendrait plus m constantes arbitraires. Mais il sera facile de parvenir encore dans ce cas à l'intégrale générale cherchée. En effet, soit $y_p=C_pe^{a_px}$ le terme auquel se réduisent n termes de la valeur de y; en considérant C_p comme une fonction de x, on aura

$$y_p=C_pe^{a_px},$$
$$\frac{dy_p}{dx}=C_pa_pe^{a_px}+\frac{dC_p}{dx}e^{a_px},$$
$$\frac{d^2y_p}{dx^2}=C_pa_p^2e^{a_px}+2\,\frac{dC_p}{dx}a_pe^{a_px}+\frac{d^2C_p}{dx^2}e^{a_px},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^my_p}{dx^m}=C_pa_p^me^{a_px}+m\,\frac{dC_p}{dx}a_p^{m-1}e^{a_px}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{d^mC_p}{dx^m}e^{a_px}.$$

En substituant dans l'équation proposée, les termes en

$$C_p,\quad\frac{dC_p}{dx},\quad\ldots\ldots,\quad\frac{d^{n-1}C_p}{dx^{n-1}}$$

s'en iront d'eux-mêmes, puisque a_p sera une racine d'ordre de multiplicité n de l'équation (B) ; il restera donc, pour déterminer C_p, une équation différentielle linéaire à coefficients constants et sans second membre, contenant les dérivées de l'inconnue C_p depuis l'ordre n jusqu'à l'ordre m. On y satisfera aisément en posant $\frac{d^nC_p}{dx^n}=0$, c'est-à-dire

$$C_p=a_p+a_p+1x+a_p+2x^2+\ldots\ldots$$
$$+a_p+n-1x^{n-1}.$$

— *Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées.* On peut toujours ramener l'*intégration* d'un système d'équations différentielles simultanées à celle d'autant d'équations séparées ne contenant plus chacune qu'une seule inconnue. En effet, soient, par exemple, deux équations simultanées

$$f\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx},\ldots,\frac{d^my}{dx^m},\frac{d^nz}{dx^n}\right)=0$$

et

$$f_1\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx},\ldots,\frac{d^my}{dx^m},\frac{d^nz}{dx^n}\right)=0,$$

où y et z sont les fonctions inconnues.

En les différentiant m fois l'une et l'autre, on aura un système de $2m+2$ équations contenant y et ses $2m$ premières dérivées ; on pourra donc éliminer complétement y et on tombera ainsi sur une équation en x

$$\varphi\left(x,z,\frac{dz}{dx},\ldots,\frac{d^{m+n}z}{dx^{m+n}}\right)=0$$

d'ordre $m+n$. L'intégrale générale de cette équation contiendra $m+n$ constantes. On voit par là que les intégrales générales d'un système d'équations différentielles simultanées doivent contenir un nombre de constantes arbitraires égal à la somme des nombres qui désignent les ordres les plus élevés des dérivées relatives aux différentes fonctions inconnues.

— *Intégration par série.* Toute fonction pouvant être développée par la série de Taylor

$$y=y_x+\left(\frac{dy}{dx}\right)_x\frac{x-x_x}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x\frac{(x-x_x)^2}{1.2}+\ldots,$$

on peut se proposer d'obtenir sous cette forme l'intégrale d'une équation différentielle

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^my}{dx^m}\right)=0.$$

Cette équation donne la valeur de $\frac{d^my}{dx^m}$ correspondante à $x=x_x$, en fonction de

$$y_x,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_x,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x,\ \ldots,\ \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_x,$$

qui doivent être considérées comme arbitraires. Les différentielles successives de cette même équation fourniront ensuite

$$\left(\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\right)_x,\quad\left(\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}\right)_x,\ldots$$

En substituant dans la formule, on aurait la valeur de y, c'est-à-dire l'intégrale générale de l'équation proposée, puisqu'elle contiendrait m constantes arbitraires

$$y_x,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_x,\ \ldots,\ \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_x.$$

Mais, en premier lieu, l'*intégrale* ainsi faite ne pourrait être d'aucune utilité si les coefficients de la série ne suivaient pas une loi connue. En outre, la série ne représenterait l'intégrale cherchée que dans les limites où elle resterait convergente, c'est-à-dire, en général, pour des valeurs de x telles que le module de $x-x_x$ ne dépassât pas une certaine limite pour la détermination de laquelle on ne possède jusqu'ici aucune règle générale. Enfin, si l'équation proposée n'était pas linéaire par rapport à $\frac{d^my}{dx^m}$, comme elle fournirait un certain nombre de valeurs pour cette dérivée, la fonction y, en supposant même que les valeurs de

$$y_x,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_x,\ \ldots,\ \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_x$$

restassent invariables, devrait avoir, pour chaque valeur de x, un nombre égal de valeurs ; la série les fournirait bien séparément, mais sans qu'il fût, en général, possible de distinguer entre elles.

Les principales de ces difficultés ont été levées par M. Marie, dans le cas seulement, il est vrai, où l'équation ne contient pas la fonction inconnue, c'est-à-dire se réduit à

$$f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

M. Marie a donné, en effet, une méthode pour déterminer dans ce cas la limite précise de la région de convergence de la série, pour chaque système de valeurs de x, et de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_x$. Il en résulte évidemment le moyen de calculer, étapes par étapes, la valeur finale de y, quelle que soit la valeur de x, en évitant, non pas, comme l'avait indiqué M. Puiseux, tous les points où les séries propres à représenter les diverses valeurs de y deviendraient divergentes, mais celui où devient certainement divergente celle que l'on veut calculer.

Mais alors l'*intégration* par segments successifs, au moyen de la série, permettant de franchir tout intervalle quelconque $x-x_0$ les valeurs finales de y pouvaient s'être permutées en chemin ; il était donc indispensable de pouvoir parvenir avec certitude de chacun des couples de valeurs initiales de x et de $\frac{dy}{dx}$ à l'un quelconque des couples de leurs valeurs finales. C'est ce qu'a pu faire M. Marie en assignant un caractère distinctif à la valeur de y fournie par chaque *intégration* partielle.

— *Intégration sous le signe* $\int$. Si la différentielle fdx placée sous le signe $\int$ contient une lettre y, considérée comme constante, dans l'*intégration*, l'intégrale est une fonction de x et de y : il peut y avoir lieu de la considérer comme une dérivée par rapport à y et, dans ce cas, on a à faire les deux *intégrations* indiquées par

$$\int dy\int fdx.$$

Or, on peut toujours intervertir l'ordre des *intégrations* (v. INTERVERSIBILITÉ) et, par conséquent, ramener l'expression à la forme

$$\int dx\int fdy :$$

l'*intégration*, par rapport à y, se fait ainsi sous le signe $\int$, au lieu de se faire postérieurement à l'*intégration* par rapport à x.

— *Intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.* Les équations aux différentielles partielles les plus in-