miento total en la materia dirigiéndose hacia su especialización sin haber siquiera rosado la estructura general del asunto.

No pretendemos, claro está, dar lecciones de pedagogía en las matemáticas ni en ninguna otra disciplina. Presentamos estos aspectos como un condicionante de la época, a cuya respuesta contribuye la obra de Piaget.[7]

[7] E. Husserl, *L'origine de la géométrie*, introducción de J. Derrida, P. U. F., 1962; M. Frecht, *Las matemáticas y lo concreto*, UNAM, 1958; E. Kant, *Crítica de la razón pura*, Losada, 1960; H. Weyl, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, UNAM, 1965; A. N. Whitehead, *Los fines de la educación*, Paidós, 1961; J. Piaget, *Educación e instrucción*, Proteo, 1968.

II. EPISTEMOLOGIA Y MATEMATICAS

> El matemático no es en verdad el teórico puro, sino solo el técnico ingenioso, el constructor, por decirlo así, que edifica la teoría como una obra de arte técnica, atendiendo meramente a las conexiones formales . . . hace falta una reflexión paralela, de 'crítica del conocimiento', que compete exclusivamente al filósofo y que no deja privar otro interés que el puro interés teórico, al cual restablece en sus derechos. (E. Husserl, **Investigaciones lógicas,** Prolegómenos XI, 71).

Un primer escorzo del problema nos presenta los límites de los campos temáticos y la dirección en que puede ser conducida la epistemología matemática. La reducción absoluta de la lógica y la matemática a los datos proporcionados por la psicología, el psicologismo, es rechazado para circunscribir la investigación psicológica al estudio de los *mecanismos causales* que permitan se dé una operación matemática en un sujeto; en tanto, el aspecto lógico se refiere a las condiciones que permiten la *validez* de tal demostración.

I. ESTRUCTURAS MATEMATICAS Y ESTRUCTURAS DE LA INTELIGENCIA.

Independientemente de la formalización de los problemas de las matemáticas (cuestión que compete exclusivamente a esta disciplina), algunos problemas generales se presentan para su análisis en relación con la psicología. Tales son: la naturaleza de las estructuras, la evidencia, la intuición y las relativas a la invención y el descubrimiento matemáticos.

A. LAS ESTRUCTURAS MATRICES

Bourbaki, en un artículo titulado "La arquitectura de las matemáticas" sustenta la tesis de que frente a la disparidad de teorías en matemáticas se pueden abstraer las relaciones estructurales o comunes a las diferentes disciplinas haciendo caso omiso de sus elementos. Al ser precisadas las condiciones de esas relaciones interdisciplinarias se pueden construir los axiomas de la estructura descubierta. Construir la teoría axiomática sería, entonces, extraer las consecuencias implícitas en esos axiomas. Si tales estructuras son demostradas como no reductibles entre sí, se les puede llamar "matrices".
Estas son:

A. 1 *Estructuras algebráicas.* Su prototipo es el *grupo.* En éste, si se dan dos elementos x y y del sistema, se determina en esa dirección un tercer elemento z, a través de una operación (ɪɪ) que reúne los dos elementos primeros: x ɪɪ $y = z$.

A. 2 *Estructuras de orden.* Un tipo importante de ellas es el "reticulado", referido a las relaciones x Ry (donde x es, máximamente, igual a y). Aquí, los dos elementos no determinan unívocamente al tercero sino que se tiene: xRx, xRy, yRx: x = y y si xRy y yRz, entonces xRz. (Sin descartar el caso de estructuras donde x y y son incomparables; cuando R significa "contenido en").

A. 3 *Estructuras topológicas.* Referidas a los conceptos de "en torno", "límite" y "continuidad".

A estas estructuras matrices se agregan axiomas adicionales, trayendo nuevas consecuencias a partir de la diferenciación por combinación de aquellas. Se forman así las estructuras *múltiples* (álgebras topológicas, topología algebráica, etc.) para construir finalmente las teorías matemáticas particulares.

Si rastreamos el origen de estas estructuras, es fácil notar que no son "naturales" (en el sentido de que espontáneamente tengamos los *conceptos* de ellas, pues no se llega a tomarlas sino hasta el nivel de educación universitaria). Pero ello no descarta la hipótesis de que haya estructuras mentales coordinadoras semejantes a las algebráicas y de éstas, consideradas como acciones interiorizadas, una relación con la coordinación espontánea de las operaciones.

Las investigaciones han demostrado que al intentar clasificar las estructuras de las operaciones de la inteligencia se hallaron tres tipos irreductibles entre sí en lo que respecta a su origen, a saber: las operaciones cuya *reversibilidad* era la inversión o anulación (A — A = O) (semejante al modelo algebráico o de grupo); las de reversibilidad consistente en la reciprocidad (estructuras de orden) y las basadas en lo continuo (topológicas). Estos procesos operatorios elementales se dividen en dos clases fundamentales: agrupamiento (inversión y reciprocidad) y las topológicas (relativas a la construcción del objeto como totalidad: las operaciones relativas al espacio y el tiempo).

La reversibilidad por inversión permite que a toda operación corresponda su inversa (T y T^{-1}); la reciprocidad permite intercambiar los términos de una relación ($A > B$), invertirla o ambas. Respecto a las transformaciones topológicas, éstas soportan la integración de los objetos como totalidades sobre la base de las operaciones referidas al espacio y el tiempo. Antes que el niño aprenda una geometría a través de la enseñanza, tiene una "geometría de las acciones" (nociones de conservación progresivas a partir de coordinación de acciones). Por ejemplo, antes de formarse las *invariantes de desplazamientos* y transformaciones proyectivas, hay invariantes de los entornos, aperturas, cierres, continuidad y separación, etc. (homeomorfías topológicas elementales). Las invariantes de la métrica euclídea al nivel de las invariantes proyectivas, las afinidades y semejanzas, y la construcción de sistemas de coordenadas se relacionan con la coordinación de perspectivas o puntos de vista.

Denominando M a las estructuras matemáticas y G las concernientes al sujeto, la relación se representa así:

a. Las M son objeto de reflexión sobre el cual el sujeto elabora la teoría; las G no son patentes a la conciencia del sujeto pero las manifiesta implícitas en su conducta y razonamiento.

b. Las condiciones de M son los axiomas; las de G pertenecen al funcionamiento.

c. En M las condiciones son punto de partida para la deducción del sujeto, (reglas no formales sino ligadas al contenido concreto del objeto sobre el que se ejercitan).

B. LA ABSTRACCION REFLECTORA Y LA EXPERIENCIA

Al intentar axiomatizar las estructuras operativas, la "abstracción empírica" cedería su lugar a la "abstracción reflectora". La empírica se ejerce sobre objetos percibidos y consiste en tomar rasgos comunes de una serie de *objetos* mientras que la segunda es constructiva: extrae de un sistema de acciones u operaciones ciertos caracteres que se reflejan sobre operaciones de nivel superior (por ejemplo, al perder sus contenidos o volverse reversible la operación). (Véase III, II).

Lo anterior no implica que con una *introspección* se detecten esas operaciones o los entes lógico-matemáticos porque se trata de una construcción que eleva a un plano superior la operación inferior. Este tipo de experiencia sobre la que trabaja la operación lógico-matemática, la "experiencia lógico-matemática", se distingue de la "experiencia física" y la "psíquica".

B. 1 *La experiencia.* La experiencia física se refiere a objetos externos que conocemos por abstracción; la lógica-matemática es referida a acciones ejercidas sobre los objetos (y, en tal caso, el conocimiento se obtendría a partir de tales acciones); la psicológica versa sobre objetos dados en la conciencia, procediendo por introspección. Por ejemplo, si el niño compara dos objetos de diferente tamaño y deduce la diferencia de peso, parte del objeto. Pero si al alinear varios objetos descubre el número cinco (independientemente de la dirección del conteo) actúa sobre las acciones de ordenar y reunir. La experiencia lógico-matemática es diferente de la psicológica porque ésta se refiere a una acción en cuanto proceso individual (los rasgos subjetivos de la acción: fácil, difícil, con imágenes o sin ellas, etc.) mientras aquella toma los resultados comunes a todos los sujetos. Además, una segunda diferencia entre la experiencia psicológica y la lógico-matemática deja ver que la primera puede referirse a cualquier experiencia, en tanto la segunda se efectúa sólo sobre acciones que al interiorizarse se truecan en operaciones. Al formarse estas estructuras, la deducción aparece. Pero en el caso de que la experiencia psicológica se refiera a las acciones, se ocupa sólo del despliegue causal en su proceso de interiorización, mientras la experiencia lógico-matemática se ocupa de los "esquemas" de aquellas.

La misma experiencia física no es sólo una "lectura" perceptiva sino un proceso activo que requiere los marcos lógico-matemáticos para el encuadre de lo dado. Y si la misma "lectura" de lo físico requiere esos marcos, cuando se trata de examinar los esquemas, ¿no se trajaba con ellos mismos? Es claro que sí, pero eso eleva los esquemas al nivel de la conciencia, permite usarlos deductivamente reemplazando la experiencia directa; y aquello que estaba implicado en el razonamiento y la conducta se vuelve patente como operaciones conscientes, lo cual significa afirmar la existencia de un proceso constructivo, como es el caso de la abstracción reflectora.

Cabe remarcar que el sistema de acciones sobre el que trabaja la experiencia lógico-matemática no se refiere a lo que hay de individual en las acciones de un sujeto cualquiera, sino a las coordinaciones generales de todo sistema de acción (contar, medir, ordenar, seriar, etc.) que coordinan operaciones senso-motrices, intuitivas, etc; pudiendo llegarse hasta la organización nerviosa, y biológica retrospectivamente.

En relación con la abstracción reflectora que no toma la experiencia como datos sino como acciones, los problemas clásicos de la evidencia, la intuición y el descubrimiento matemático adoptan diversa significación (a partir del viejo problema del inventor acostumbrando a tratar las dificultades con un método al que se habitúa).

Con todo esto, podemos ahora plantear el problema de la evidencia.

II. LA EVIDENCIA

En los niveles preoperatarios del pensamiento el niño puede saber, por ejemplo, que un objeto A es menor que B y este menor que C; pero no puede captar la relación de A a C. No ha formado, pues, la operación de transitividad. Hacia los siete años (tratándose de longitudes) la transitividad aparece como comprensión brusca ("insight"). Resulta claro por las investigaciones que toda evidencia presupone una estructura y la reversibilidad de ésta se conecta directamente a ese fenómeno "misterioso" de conocimientos súbitos: las estructuras se integran progresivamente y al cerrarse se acompañan de una aceleración en la construcción, en tanto que las nuevas evidencias presuponen ya la estructura integrada con un equilibrio.

El mecanismo de formación de tales evidencias presenta varias formas:

a) Regulación progresiva por maduración del sistema nervioso (coordinación de vista y tacto, etc.).

b) Por aprendizaje o ejercicio (a partir de la experiencia física, como la noción de peso; o a partir de la lógica-matemática, como el descubrimiento de la suma independientemente del orden).

c) Por el lenguaje, transmisión educativa o social, (tal es el caso de la adquisición de la numeración hablada).

d) Por equilibramiento progresivo (como en el descubrimiento de conservación de la materia de una bola cuya forma cambia indicando que el sujeto razona no solo sobre configuraciones sino sobre transformaciones haciéndolo de modo cada vez más reversible).

A. LA INVENCION MATEMATICA

Ante la vieja disyuntiva de la invención o creación libre y el descubrimiento que presupone el encuentro imperativo con algo que existe independientemente del sujeto. Piaget propone una tercera posibilidad.

Hablar de un trabajo "inconsciente" que soporta la construcción matemática es eludir el problema: todo lo relacionado con lo "consciente" o "inconsciente" es relativo a las deficiencias de la introspección. Apoyándose en las operaciones de Leroy (debate en el *Institute for advanced studies*, de Princeton) resume los pasos de la invención de la siguiente manera: 1) *tentativas* en diferentes direcciones sobre las cuales no se tiene certeza, a las que se concede desigual importancia y entre las cuales puede hallarse la solución certera al problema planteado; 2) *búsqueda* que reduce todo a unas cuantas direcciones provocando que algunas tentativas desechadas cubren mayor importancia, haciendo ver la solución como aparentemente nueva.

Ahora bien, la abstracción reflectora no es invención ni descubrimiento. La estructura que se obtiene con esa abstracción sale a una anterior pero no se reduce a ella. A la vez, no es una creación libre absoluta porque los resultados de la abstracción están ya contenidos fundamentalmente en la estructura inferior. Hay, en el fondo de todo ello, la combinación de estructuras determinadas por un marco de posibilidad ya definido.

B. LA INTUICION

Ya es conocida de sobra la dificultad que presenta el abordaje de este tema dado que quienes sostienen la predominancia de la intuición como forma cognoscitiva no han elaborado una teoría consecuente de ella. Independientemente de las tesis que se han elaborado las investigaciones permiten observar que respecto a la "intuición":

B.1 *Del tiempo*

a. hay un tiempo senso-motor como *orden de sucesión* (ejecución de un movimiento medio antes de realizar el que consigue el objetivo) y como duración (la impaciencia);

b. un tiempo perceptivo ligado al senso-motor (percepción de sucesiones, simultaneidades y duración);

c. tiempo vivido (Bergson) no sólo perceptivo, pero tampoco estructurado en operaciones (la duración del tiempo según la atención, el interés, etc.);

d. estos tiempos se estructuran definitivamente por las operaciones que están en la base de la comprensión cronométrica (la seriación, encajamiento sucesivo de duraciones), síntesis de las dos anteriores, que conduce a la métrica espontánea (música popular, poesía, distinción entre sonidos largos y cortos de un lenguaje).

B. 2 *Del espacio*

a. hay grados del espacio senso-motor que van desde el espacio proximal (bucal, postural, tactilar, visual y auditivo) hasta la comprensión de los objetos fuera del campo perceptivo;

b. el espacio perceptivo que da formas, dimensiones, posiciones y distancias;

c. El representativo por imágenes.

Aquí, como en el tiempo, lo que permite construir una imagen espacial es el sistema de acciones y operaciones que hacen que lo construido represente simbólicamente lo representado. Cuando el niño se vuelve capaz de efectuar operacion reversibles, por ejemplo, cuando efectúa particiones, desplazamientos, mediciones y las invariantes de agrupamientos (conservación de distancias) se pueden imaginar las transformaciones y se ve claro que es sobre la base de tales operaciones como se realiza la construcción del espacio.

B. 3 Las intuiciones operatorias en elementos discretos, son independientes de las imágenes y si éstas las acompañan son símbolos no generales. Tal es el caso de la conocida intuición de Poincaré de "n + 1", de lo transfinito (paso al límite en la serie $1 + ½ + 1/4 + 1/6 \ldots$).

B. 4 La intuición matemática pura no guarda ya relación con acciones en objetos materiales sino con combinaciones de operaciones (como en el paso del espacio de tres dimensiones al espacio de *n* dimensiones).

III. LA MATEMATICA PURA

La matemática pura sostiene un conjunto de axiomas haciendo caso omiso de todo objeto o contenido intutivo que pudiera ligarse a ellos.

Ya el planteamiento de este problema contiene un consecuente: ¿cómo se explicaría psicológicamente el surgimiento de esta matemática? Como se ha visto, los entes lógico-matemáticos estan conectados a las actividades del sujeto, pero esto no significa que dependan de la experiencia, interpretada ésta empíricamente. Lo que sucede es que la abstracción reflectora va llevando las operaciones a planos cada vez más elevados accionando sobre las operaciones del sujeto, hasta el grado en que es posible sustituir esa conexión con la experiencia por un proceso deductivo. Las operaciones anteriores a las hipotéticas deductivas funcionan "concretamente", solo se ejercen en presencia del objeto o su imagen representativa, para luego librarse de todo contacto y establecer deducciones a partir de la enunciación verbal de una hipótesis.

Las etapas del proceso que conduce a la matemática pura consisten en abstraer relaciones operatorias de una estructura, capaces de generalizarse en otra posterior. Las nuevas serán una réplica generalizada (lo cual implica su liberación de los elementos particulares ligados a ellas). Esta operación del reflejar, entonces, versa sobre otra operación nueva permite la reunión de otras en un todo sistemático.

Hay, pues, un campo propio del desarrollo operatorio que se constituye por las acciones del sujeto, sin que cuenten las características físicas de los objetos ni los aspectos subjetivos de las acciones dando a aquel campo una autonomía. Pero tales operaciones son a la vez individuales y colectivas: la educación acelera las formaciones operatorias pero para su asimilación requiere las formaciones individuales creándose un círculo. Y esta autonomía, como ya se vió, libera progresivamente las formas de sus contenidos intuitivos.

IV. LA FORMALIZACION

Visto lo anterior, es posible intentar ahora comprender las razones de la matemática formalizada. La formalización es la técnica más importante de las matemáticas contemporáneas.

Históricamente, ese proceso de las matemáticas se remonta a Euclídes quien aceptaba proposiciones deductivas (teoremas) e indemostrables (axiomas y postulados). Estas las escogía aceptando su indemostrabilidad y refugiándose en la intuición de su validez. De allí era fácil continuar hacia axiomas cuyo contenido fuese solo la formalización lógica, abandonando la intuición (Leibniz, Frege, Russell, Whitehead, Pasch, Hilbert).

Como es sabido, el pensar lógico-matemático no "copia", no "corresponde" a la realidad. F. Gonseth *(Las matemáticas y la realidad)* llevó esta tesis a la afirmación de que la intuición es un proceso que conduce a la "esquematización axiomática". Piaget acepta esta tesis a condición de entender que el arranque de la esquematización es la actividad del sujeto sobre

las cosas y que, por abstracciones reflectoras, conduce a la formalización axiomática que reconstruye estructuras intuitivas abstrayendo lo necesario y combinando estos elementos en operaciones nuevas (éstas son las operaciones de la demostración).

Llevando estas tesis a sus consecuencias inmediatas, nos resulta el siguiente problema: ¿cuál es el criterio o sistema que otorga validez a los demás: los esquemas naturales o inferiores, o los formalizados de manera axiomática? Por la pronto, el intento de reducir la no-contradicción o consistencia interior de un sistema aritmético a un sistema más débil como la lógica ha fracasado (K. Godel se ha encargado de demostrar eso). La posibilidad de reducir lo superior a lo inferior (como es el caso del atomismo lógico) linda con su tesis contraria: la reducción de lo inferior a lo superior, lo cual implicaría la necesidad de nuevos marcos de referencia para validar lo presentado. Visto así el problema, resta la posibilidad de que sea la estructura del conjunto la que autónomamente validaría la consistencia. Sin embargo, eso no explicaría la sucesión de formaciones y la tendencia hacia una formalización infinita. El enlace de lo estructurado como conjunto y su variación genética se comprende a partir de las lagunas de todo sistema que impulsan hacia su construcción como estructura no-contradictoria. Es decir, avanza hacia su reversibilidad. Al final, este progreso hacia la reversibilidad hace salir de sí al sistema para reflejarse en lo superior y resulta que de todas maneras la formación interior no garantiza su no-contradicción.

Después de todo, la formalización se limita "por abajo" (en tanto que parte de nociones indefinibles e indeterminables) y "por arriba" (en tanto, todo sistema formal precisa de un metalenguaje que dé significación a los elementos).