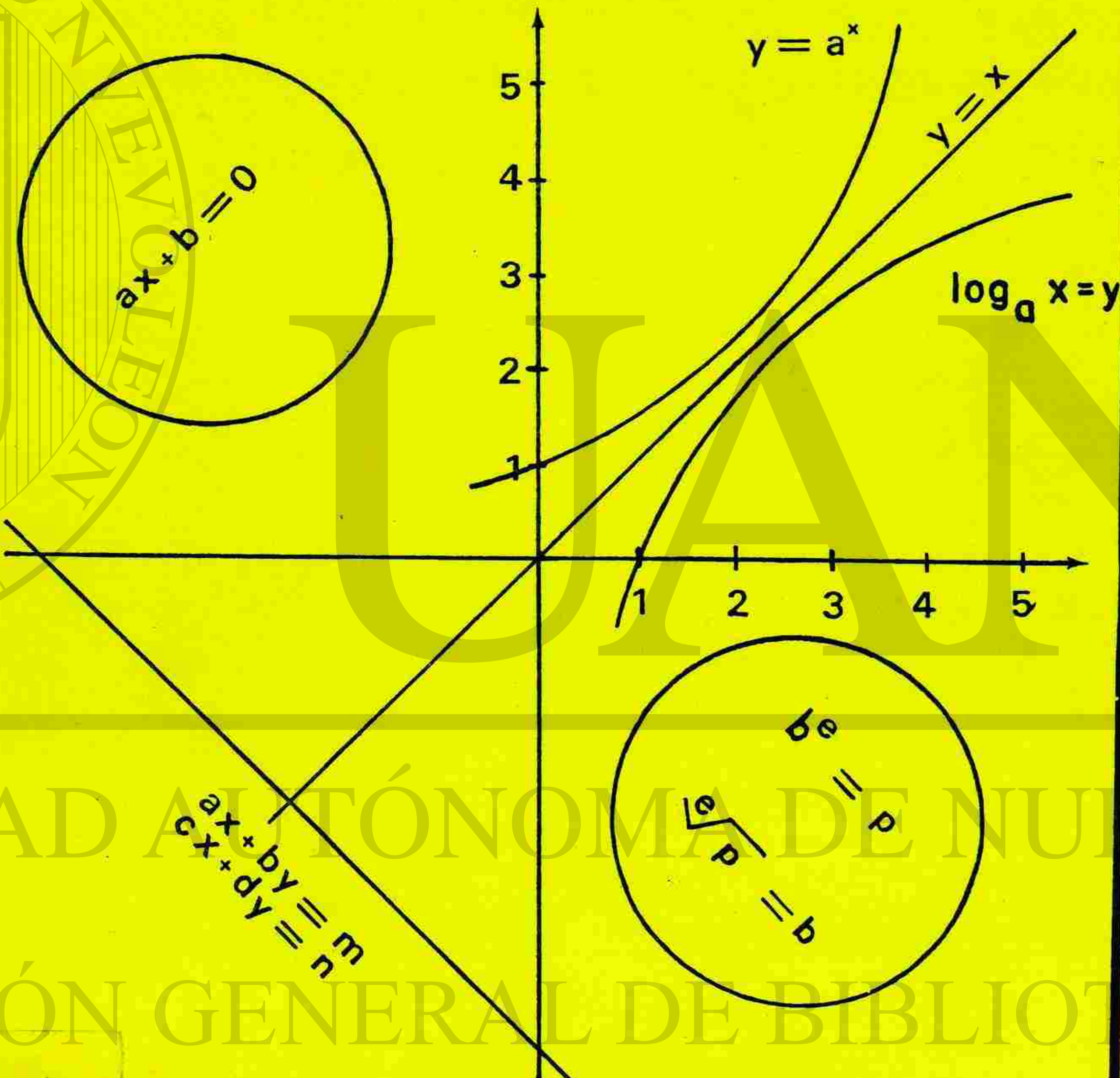
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

ESCUELA PREPARATORIA No. 2

MATEMATICAS II



JUAN HECTOR CANTU CANTU
HECTOR CAZARES VAZQUEZ
JUAN SANCHEZ AYALA
ALFREDO VILLARREAL V.

MATEMATICAS II

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON — 2

ESCUELA PREPARATORIA NO. 2

MATEMATICAS II

6A. EDICIÓN - DICIEMBRE DE 1990. — 3

REALIZACIÓN:

POR ENCARGO DE LA ACADEMIA DEL ÁREA:

JUAN HÉCTOR CANTÚ CANTÚ
HÉCTOR CÁZARES VÁZQUEZ
JUAN SÁNCHEZ AYALA
ALFREDO VILLARREAL VILLARREAL

D E D I C A T O R I A
= = = = = = = = = = =

A LOS ALUMNOS DE LA PREPARATORIA --
No. 2 DE LA U.A.N.L., CON LA CERTE-
ZA DE QUE LOS PROPÓSITOS AQUÍ DES--
CRITOS:

SERAN REALIDAD.

NUESTROS PROPOSITOS

Herramienta adquirida	+	Nuevos Conocimientos.	=	Teoría
Teoría	+	Dedicación diaria.	=	Buen curso
Buen curso	+	Disposición de servicio.	=	Universitario consciente.
Universitario consciente	+	Sentido humanista	=	Magnífico profesionista.
Magnífico Profesionista	+	Amor a la Patria		Excelente mexicano

EXCELENTE MEXICANO = UN MEXICO MAS PROSPERO

Los Realizadores.

C O N T E N I D O

QUINTA UNIDAD.

LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

OBJETIVO GENERAL

Al término del semestre, el alumno será capaz de aplicar:

1.- Los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, en problemas.

2.- Las leyes de los exponentes y los radicales, en la simplificación de expresiones algebraicas.

3.- Las propiedades de los logaritmos, en la solución de operaciones aritméticas.

PRIMERA UNIDAD

RELACIONES Y FUNCIONES

Para alcanzar las alturas, el hombre tuvo que relacionarse consigo mismo, dentro y fuera de su circunstancia.

Más tarde, se dió cuenta que unos elementos pueden actuar en función de otros, lo idealizó en un plano y se lanzó al espacio.

Hoy; el cosmos es su reto y dominarlo su destino.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará los conceptos de relación y función.

OBJETIVO PARTICULAR:

El Alumno será capaz de:

1.- Definir los conceptos de función y relación.

2.- Definir el plano cartesiano.

3.- Graficar pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares.

4.- Diferenciar, analítica y gráficamente, cuando una relación es función.

5.- Determinar el dominio y rango de una relación y/o función.

6.- Graficar los distintos tipos de funciones y relaciones.

RELACIONES Y FUNCIONES

1.- INTRODUCCION: Al inicio de nuestro estudio, cuando tratamos lo referente a los conjuntos y sus operaciones, quedaron establecidas las bases necesarias mediante las cuales se estructura el razonamiento matemático.

Así, iniciamos el estudio de las relaciones o correspondencias entre conjuntos. Al igual que sus propiedades. Entonces, dejamos plenamente señalado el hecho de que: "La función es un caso particular de las relaciones".

La vida del hombre en general, tiene un propósito definido, igualmente, todo lo que crea, descubre e inventa.

No podemos, de manera alguna, concebir la existencia de una ciencia totalmente aislada de los demás.

Así, las matemáticas auxilian al desarrollo de las ciencias en general (exactas, naturales y sociales).

Para entender lo anterior es preciso que estudiemos más a fondo la estructura de las matemáticas y en forma particular, lo referente a las funciones o aplicaciones ya que en ellas descansan los mecanismos indispensables para que esta ciencia cumpla con el propósito de servir a todas las ciencias.

2.- RELACIONES: Para definir el concepto de relación, diremos que es un conjunto de parejas ordenadas de números.

Cuando tratamos el producto cartesiano, dijimos que: "Si A y B son conjuntos, el conjunto producto o producto cartesiano es una relación por qué nos refleja un conjunto de parejas ordenadas (x,y) tales que $x \in A$ $y \in B$, así por ejemplo si tenemos que:

A = $\{a,b\}$ y B = $\{1,2,3\}$, Entonces:

A x B es la relación formada por las parejas ordenadas.

$\{(a,1),\ (a,2),\ (a,3),\ (b,1),\ (b,2),\ (b,3)\}$

Ahora diremos que el conjunto de los primeros elementos de las parejas ordenadas de la relación, se le llama dominio y lo representamos con la letra "D".

Por otro lado, al conjunto de los segundos elementos de las parejas ordenadas de la relación, se le conoce con el nombre de contradominio o rango y lo representamos con la letra "R"

Así tenemos que en el ejemplo anterior:

D = $\{a,b\}$ y R = $\{1,2,3\}$

Ejemplo: si hacemos $y = x + 3$ y deseamos formar una relación donde los valores de "x" sean -1,0,1,2.

Tendremos que:

El dominio esta dado por la totalidad de cada uno de los valores de "x", en tanto que el rango lo obtendremos sustituyendo en la condición marcada el valor que en cada caso tenga la "x" para formar las parejas ordenadas que exige la relación.

Así diremos que: $y = X + 3$

CADA VALOR DE: X	REFLEJA UN CORRESPONDIENTE VALOR PARA: Y
-1	2
0	3
1	4
2	5

y hemos formado la relación:

$\{(-1,2),\ (0,3),\ (1,4),\ (2,5)\}$ a la que podemos representarla en esta forma o bien haciendo uso de un tabulador ya sea horizontal o vertical.

x	y
-1	2
0	3
1	4
2	5

PAREJAS ORDENADAS

x	-1	0	1	2
y	2	3	4	5

D = $\{-1,0,1,2\}$

R = $\{2,3,4,5\}$

3.- FUNCIONES: Antes de definir el término función, observemos los siguientes ejemplos de relaciones:

a) Si una relación entre "x" y "y" está definida por $y = 2x + 1$ encuéntrese el valor de "y" para $x = -1,0,1,2,$ y 3.

x	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7

b) Si una relación entre "x" y "y" esta definida por $y^2 = 9x$, - encontrar el valor de "y" para $x = 0,1,4,9$.

Solución: Si $y^2 = 9x$, entonces tendremos que:

$y = \pm 3\sqrt{x}$ por tanto:

x	0	1	4	9
y	0	±3	±6	±9

Podemos advertir que en el primer caso, por cada elemento del dominio existe uno y sólo un elemento del rango, en tanto que, en el segundo caso, salvo el primer elemento del dominio, todos los demás tienen más de un elemento para su correspondiente valor en "x".

En base a esto, podemos decir que:

Función es toda relación donde a cada elemento del primer conjunto o dominio le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto, contradominio o rango como imagen.

Por tanto, toda función es una relación, más, no toda relación es una función.

Así, en los ejemplos tratados en este punto, vemos que en el primer caso, cada elemento del dominio tiene un valor único de "y" para cada valor de "x" y consecuentemente es, a la vez, relación y función.

Por lo que en el segundo caso podemos observar que el conjunto rango tiene dos valores de "y" para cada valor de "x", es una relación pero no una función.

Al segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función le llamamos imagen y nos representa el valor de la función correspondiente al valor del primer elemento de la pareja ordenada.

El valor de una función en "x", generalmente lo representamos con la expresión f (x), que leemos como "f de x". Debemos hacer conciencia en el hecho de que tal expresión no es un producto, sino una forma específica de nombrar la dependencia que cada elemento del dominio tiene sobre cada elemento del rango.

Así, en la expresión $y = 2x + 1$ podemos decir que la "y" está en función de cada valor asignado a la "x" y se expresa como:

$f(x) = y$ o bien $f(x) = 2x + 1$

Asignado a "x" el valor de 4 diremos que:

$y = 2x + 1$ como $f(x) = y$, tenemos:

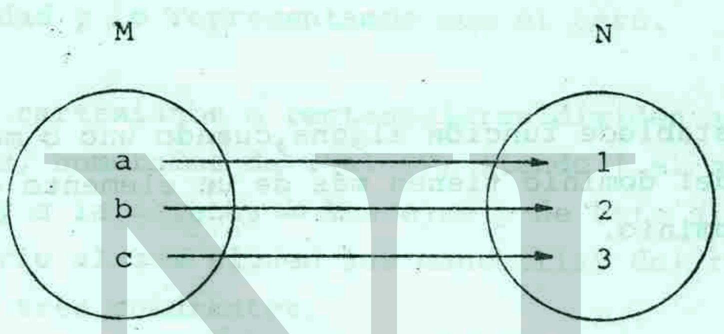
$f(x) = 2x + 1$

$f(4) = 2(4) + 1 = 9$

O sea, que para este caso en particular, cuando la "x" vale 4, la "y" tiene un valor de 9. Porque es una dependiente que refleja la imagen del valor asignado a su correspondiente elemento del dominio para formar la pareja ordenada (x,y) ó (4,9) en este caso.

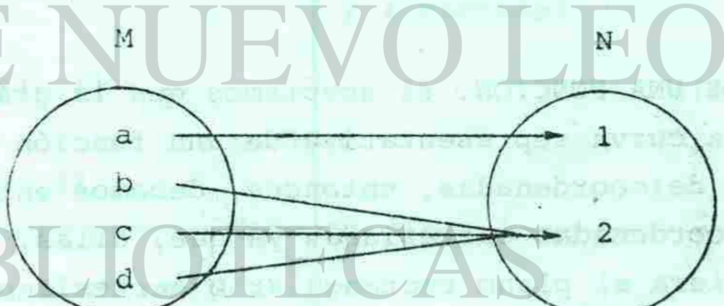
Analicemos gráficamente con diagramas de Venn, cada una de las siguientes situaciones.

a) Se establece una función cuando cada elemento del contradominio es correspondiente de uno sólo del dominio.



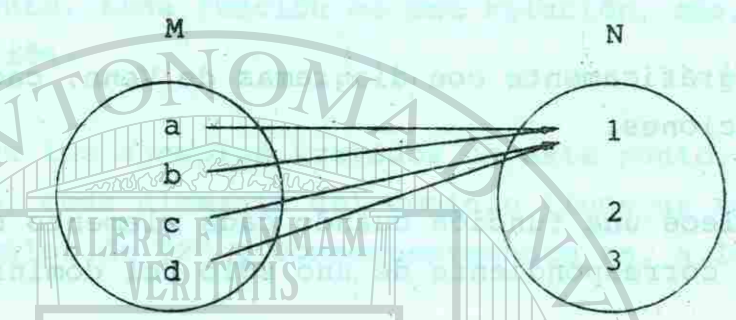
$M \xrightarrow{f} N$

b) Se establece una función cuando un mismo elemento del contradominio es correspondiente con más de un elemento del dominio.



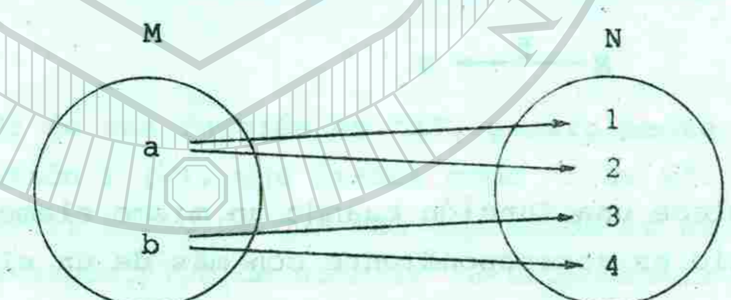
$M \xrightarrow{f} N$

c) Se establece una función cuando un mismo elemento del contradominio es correspondiente a todos los elementos del dominio.



$M \xrightarrow{f} N$

d) No se establece función alguna, cuando uno o más de los elementos del dominio tienen más de un elemento o imagen en el contradominio.



No existe función.

4.- LA GRAFICA DE UNA FUNCION. Si aceptamos que la gráfica de una función es la curva representativa de una función en un determinado sistema de coordenadas, entonces, debemos entender lo que significan coordenadas cartesianas ya que, ellas, hicieron posible que surgiera el plano rectangular o cartesiano, lugar éste, donde han sido trazadas todas las curvas resultantes de las distintas funciones que el hombre ha manejado.

5.- COORDENADAS RECTANGULARES. Hacia 1637 el matemático y filósofo francés René Descartes indtrodujo un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas que consiste en dos ejes numéricos que al intersecarse o cruzarse en su origen; forman entre sí un ángulo recto.

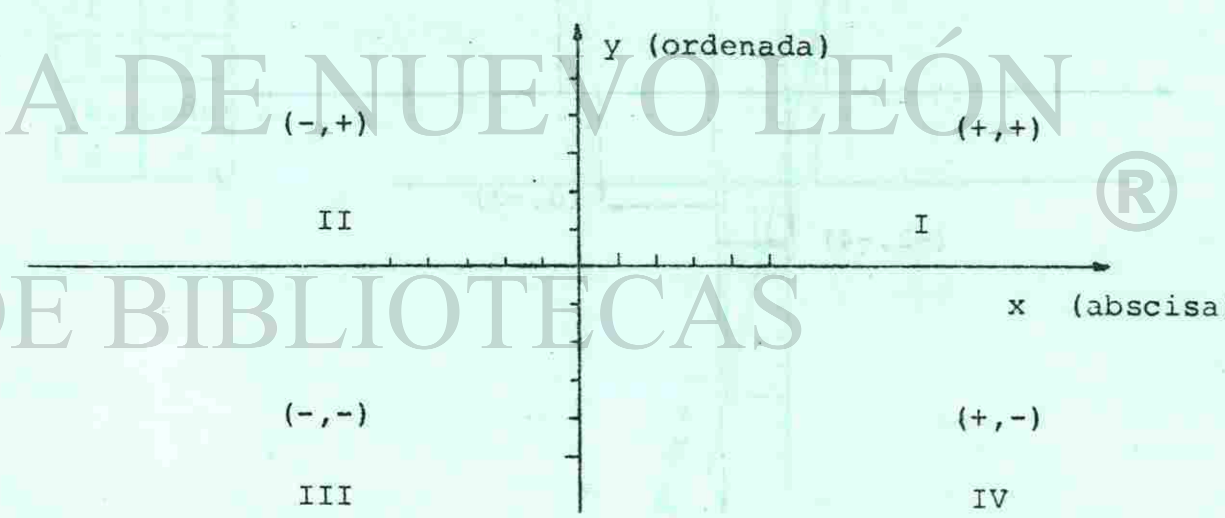
Por conveniencia los ejes numéricos deben ser uno horizontal - al que llamamos eje de las "x" o abscisa y otro vertical al que se nombra eje de las "y" u ordenada. La longitud unitaria de cada uno de ellos, es la misma.

El punto de intersección de ambos ejes le llamamos origen o -- punto de nulidad y lo representamos con el cero.

Los ejes cartesianos o rectangulares dividen al plano en cuatro cuadrantes, numerados de I al IV, siendo I el que se localiza - hacia arriba y a la derecha de los ejes y de éste siguiendo un movimiento contrario al que siguen las manecillas del reloj, localizamos los otros tres cuadrantes.

Gradualmente, cada uno de los puntos localizados hacia la derecha o hacia arriba del punto cero, son positivos.

Por contra, todos los puntos localizados hacia la izquierda o hacia abajo del punto de nulidad son negativos.



COORDENADAS CARTESIANAS O RECTANGULARES

6.- REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES Y RELACIONES.

Al par ordenado de números reales que permiten la localización de un punto en un sistema de ejes cartesianos le llamamos coordenadas del punto.

Para localizar la posición de un punto en el plano es necesario conocer un valor real para la ascisa "x" y otro para la ordenada "y".

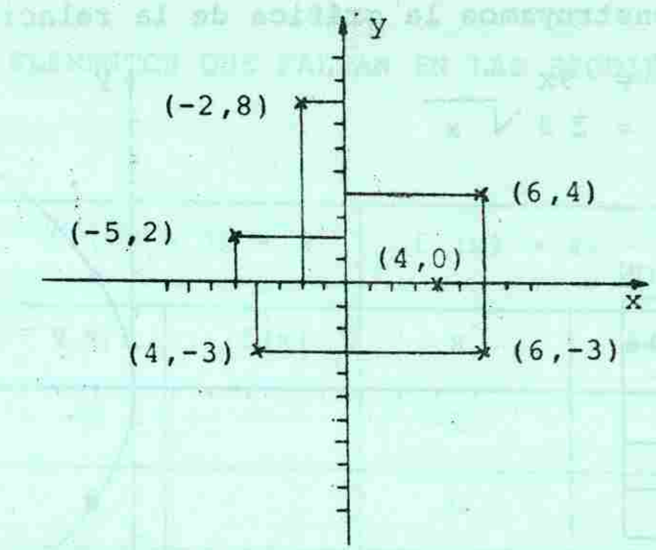
Una vez detectados los valores reales de las coordenadas en sus ejes respectivos, trazamos perpendiculares a cada uno de ellos. El punto de intersección de las rectas así trazadas, será justo el punto propuesto.

Ejemplo 1: Localizar los puntos:

a = (4,6) B (-3,5), C = (-2,-4), D= (3, -3)

Ejemplo 2: Traza los ejes de coordenadas y localiza los puntos:

a) (6, 4)
b) (6, -3)
c) (-2, 8)
d) (-4, -3)
e) (-5, 2)
f) (4, 0)



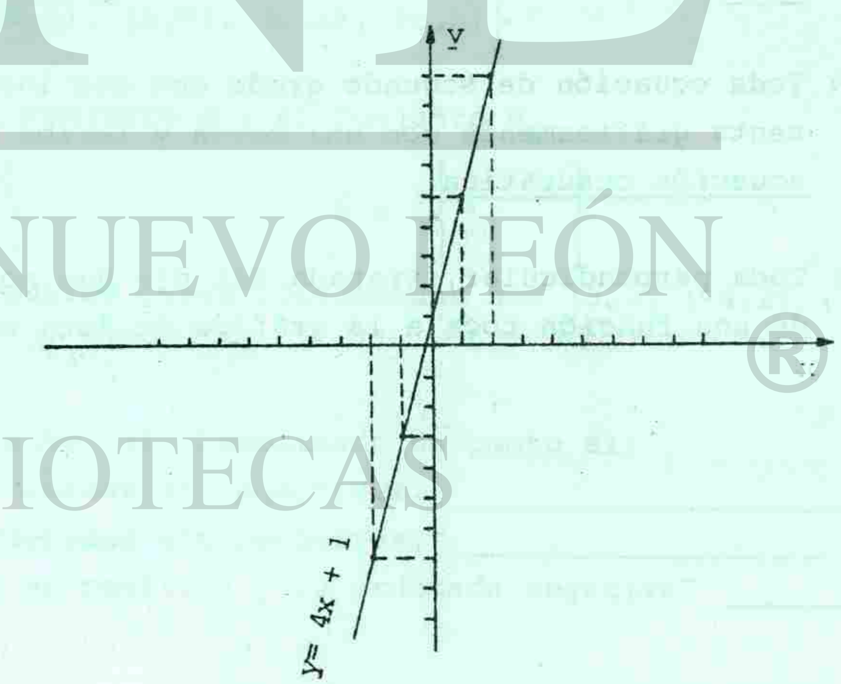
El conjunto de todos los puntos es lo que llamamos la gráfica de una función y la forma más práctica de representarla es mediante la relación numérica de las parejas ordenadas que origina una ecuación.

Llamamos ecuación de primer grado la que, formada por dos incógnitas admite un número infinito de pares ordenados que lo satisfacen para un caso particular.

Ejemplo: Tabular y graficar la función definida por $y = 4x + 1$

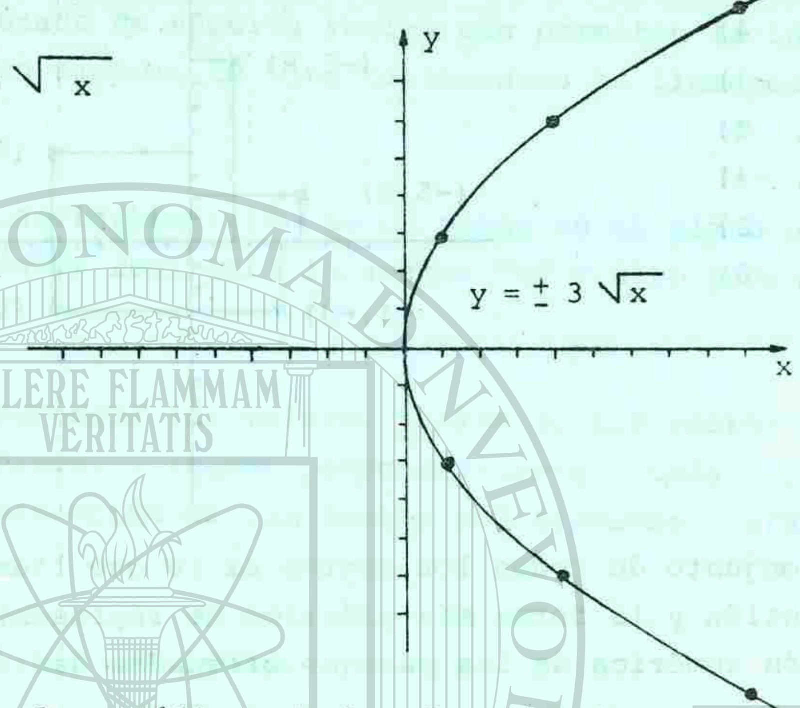
TABULACION

x	y
-2	-7
-1	-3
0	1
1	5
2	9



Ejemplo: Construyamos la gráfica de la relación definida por:

$$y^2 = 9x$$
$$y = \pm 3\sqrt{x}$$



TABULACION

X	Y
0	0
1	± 3
4	± 6
9	± 9

Si observamos las gráficas de los dos ejemplos anteriores puede establecerse que:

PRIMERO: Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas se representa gráficamente por una recta y en tal virtud, toda --- ecuación de primer grado recibe el nombre de <u>ecuación lineal</u>.

SEGUNDO: Toda ecuación de segundo grado con dos incógnitas se representa gráficamente con una curva y recibe el nombre de --- <u>ecuación cuadrática</u>.

TERCERO: Toda perpendicular, trazada del eje que nos da el dominio de una función toca a la gráfica de ésta en un solo punto.

E J E R C I C I O   1 - 1

1.- CALCULAR LOS ELEMENTOS QUE FALTAN EN LAS SIGUIENTES TABULACIONES.

$f(x) = x^2 - 3$		$f(x) = 3x - 2$		$f(x) = 4x - 3$	
x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0		-2		-1	
1		0		0	
2		1		1	
-2		3		2	
3		5		3	

2.- Dados los productos cartesianos:

$$A \times B = \{(a,b),\ (a,c),\ (b,b),\ (b,c)\}$$
$$B \times A = \{(b,a),\ (b,b),\ (c,a),\ (c,b)\}$$

Encuentra el conjunto A y el conjunto B.

$A = \{\qquad\}$ $\qquad B = \{\qquad\}$

3.- Localiza los puntos cuyas coordenadas son (3,2), (-3,2), (3,-2), -(-3,-2).

4.- ¿En qué cuadrante está localizado un punto si:

a) ambas coordenadas son positivas. ____________

b) ambas coordenadas son negativas. ____________

c) La abscisa es positiva y la ordenada negativa? ____________

5.- Los puntos (1,2), (5,0), y (2,6) son vértices de un rectángulo. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice y trazar el rectángulo.

6.- Los puntos A = (1,1), B = (6,2), C = (3,6) son vértices de un paralelogramo. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice. -- Si:

a) AB es una diagonal.
b) AC es una diagonal.
c) BC es una diagonal.

7.- Los puntos (-5,-3), (-2,0), (-4,3), son vértices de un paralelogramo. Encontrar las tres posiciones posibles del cuarto vértice.

8.- Diga cuáles de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas determinan una función y frente a la D escriba los elementos del dominio y frente a la R los del rango:

a) $\{(2,1), (5,-1), (4,2)\}$ = ______
D = ______ R= ______

b) $\{(6,1), (1,4), (6,2)\}$ = ______
D = ______ R= ______

c) $\{(2,a), (4,b), (6,b)\}$ = ______
D = ______ R= ______

d) $\{(-a,b), (b,a), (c,x)\}$ = ______
D = ______ R= ______

9.- Trace la gráfica de la función definida por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y = -6 + 3x$ b) $y = \frac{3-x}{3}$

c) $y = /x + 3/$ d) $y = /x/$

10.- Trace la gráfica de la función definida por las ecuaciones: $y = x^2 - 3x$, $y = 3x^2 - 6x - 4$, de los ceros de las funciones. Use los valores necesarios para determinar la forma de la curva.

NOTA: Para la solución de los problemas 5,6,7,9 y 10 usa papel. cuadrícula o milimétrico.

AUTOEVALUACION

1.- Decir cuál es la diferencia entre una función y una relación.

2.- De los siguientes ejemplos, cuáles corresponden a relaciones o funciones, además mencionar el dominio y el rango en cada una.

2.1 (2,0),(3,-1),(4,3),(0,2)

2.2 (3,1),(1,3),(2,5),(3,-2)

2.3 (a,1),(a,2),(b,1),(b,2)

2.4 (1,2),(2,3),(3,4),(1,5)

2.5 (-3,8),(-2,4),(-1,0),(1,4)

3.- Dadas las siguientes relaciones o funciones, encontrar los casos particulares que se piden.

3.1 $f(x) = 3 - 2x$ encontrar a) $f(0)$ b) $f(3)$ c) $f(-1)$

3.2 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ " a) $f(1)$ b) $f(\frac{1}{2})$ c) $f(a + b)$

3.3 $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x}$ " a) $f(1)$ b) $f(-2)$ c) $f(-6)$

4.- Trazar la gráfica de las siguientes funciones o relaciones, sabiendo que $f(x) = y$, dándoles valores a "x" que vayan de -3 hasta 3.

4.1 $y = 3x - 6$

4.2 $y = 2x - 4$

4.3 $y = 3x^2 + 2x - 16$

4.4 $y = 3x^2 - 24$

5.- Calcular los elementos faltantes en las siguientes tabulaciones:

$f(x) = x^2 - 5$		$f(x) = 4x + 1$		$f(x) = 3x - 1$	
x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
-2		-3		-3	
-1		-2		-2	
0		-1		-1	
1		0		0	
2		1		1	
3		2		2	
4		3		3	
5		4		4	

6.- Grafica cada una de las funciones anteriores.

7.- Los puntos (1,3),(4,0) y (3,5), son vértices de un rectángulo. - Localiza el cuarto vértice y traza en un eje de coordenadas y el rectángulo.

8.- Completa cada uno de los siguientes enunciados tomando la respuesta del conjunto solución que se te ofrece.

a) Dominio
b) y
c) x
d) Eje de las ordenadas
e) Eje de las x
f) Contradominio o Rango
g) Función
h) Primer Cuadrante
i) Segundo Cuadrante
j) Relación
k) Tabulación
l) Imagen

__________________ Es un conjunto de parejas ordenadas de - números.

__________________ Está formado por el conjunto de los se-- gundos elementos de las parejas ordenadas de una relación.

__________________ Representa al conjunto de los primeros - elementos de las parejas ordenadas de la relación.

____________	Es toda relación donde a cada elemento del primer conjunto o dominio le corresponde un y sólo un elemento del rango como imagen.
____________	Es el segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función.
____________	Es una relación, más no toda relación puede ser una.
____________	Concentra al conjunto de puntos positivos que podemos localizar en un plano cartesiano.
____________	Parte del plano cartesiano donde las ordenadas valen cero.
____________	En una relación sus valores siempre serán f(x).
____________	Parte del plano cartesiano donde las abscisas valen cero.

SEGUNDA UNIDAD

ECUACIONES LINEALES

El hombre se descubre igual a sí mismo. Más tarde, se identifica con los demás sin llegar a conocerse y convierte su destino en una constante interrogación.....

La ecuación de su diaria existencia.

______ Es toda relación donde a cada elemento del primer conjunto o dominio le corresponde un y sólo un elemento del rango como imagen.

______ Es el segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función.

______ Es una relación, más no toda relación puede ser una.

______ Concentra al conjunto de puntos positivos que podemos localizar en un plano cartesiano.

______ Parte del plano cartesiano donde las ordenadas valen cero.

______ En una relación sus valores siempre serán f(x).

______ Parte del plano cartesiano donde las abscisas valen cero.

SEGUNDA UNIDAD

ECUACIONES LINEALES

El hombre se descubre igual a sí mismo. Más tarde, se identifica con los demás sin llegar a conocerse y convierte su destino en una constante interrogación.....

La ecuación de su diaria existencia.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará los diferentes teoremas y propiedades del álgebra, en la solución de problemas.

OBJETIVO PARTICULAR:

El alumno estará en condiciones de:

1.- Definir el concepto de ecuación lineal en una variable, a partir de una función lineal.

2.- Resolver ecuaciones lineales de una variable.

3.- Resolver problemas cuya solución implique ecuaciones lineales en una variable.

ECUACIONES LINEALES

1.- IGUALDADES.- Cuando hablamos de los números reales dejamos establecido que en el sistema numérico el signo de igualdad (=) siempre nombrará una relación de identidad que también podemos llamar relación de igualdad.

Así por ejemplo, la expresión $a = b$ quiere decir que a y b son símbolos que representan al mismo valor numérico, independientemente de la forma en que éste sea presentado.

Por lo tanto, el signo de igualdad o identidad, nos permite que relacionemos dos miembros entre sí y que, aplicando distintas propiedades a cada uno de ellos, realicemos infinidad de transformaciones que nos llevan a la solución práctica de múltiples problemas que nos presenta la vida cotidiana.

De lo descrito inferimos que:

Primer miembro	=	Segundo miembro
Miembro izquierdo	=	Miembro derecho

Ejemplos: $3 + 5 = 8$, $6 - 3 = 2 + 1$, $4(2) = \frac{24}{3}$

En el supuesto de que un miembro no establezca equivalencia con el otro, estaremos cayendo en el campo de las desigualdades, en cuyo caso utilizamos el signo $\neq$ que significa (es diferente a) y que posteriormente trataremos. De momento recordemos las propiedades aplicables a todos los elementos de los números reales en cualquier relación de igualdad.

2.- PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES.

a) Reflexiva.- Todo número o valor es igual a sí mismo.
$a = a$, $6 = 6$, $x + y = x + y$, $4 + 2 = 4 + 2$.

b) Simétrica.- Los miembros de una igualdad pueden permutarse sin que la identidad se altere.

Si $a = b$, entonces $b = a$

$6 = 4 + 2$ como $4 + 2 = 6$

$a + b = 7$ como $7 = a + b$

$x + y = z$ como $z = x + y$

c) Transitiva.- Si dos números son iguales a un tercero, los tres son iguales entre sí.

Si $a = b$ y $b = c$	entonces	$a = c$
$3 + 2 = 5$ y $5 = \frac{15}{3}$	entonces	$3 + 2 = \frac{15}{3}$
$m = 4 + 3$ y $n = 4 + 8$	entonces	$m = n$

Ahora bien, si recordamos el axioma básico de las igualdades que dice: "Si con valores iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán siempre iguales", vendrán a nuestra memoria las propiedades aditiva y multiplicativa estudiadas, junto con las anteriores cuando analizamos los números reales.

d) Aditiva.- Si a ambos miembros de una igualdad les sumamos o restamos un mismo valor, obtendremos otra ---- igualdad.

$6 + 3 = 9$	$a + b = c$
Sumando 2	Sumando x
$(6 + 3) + 2 = 9 + 2$	$(a + b) + x = c + x$
$11 = 11$	$a + b + x = c + x$
$8 + 5 = 13$	$a + b = c$
Restando 3	Restando y
$(8 + 5) - 3 = 13 - 3$	$(a + b) - y = c - y$
$10 = 10$	$a + b - y = c - y$

e) Multiplicativa.- Si los dos miembros de la igualdad los multiplicamos o dividimos por un mismo fac--- tor, obtenemos otra igualdad.

$4 + 3 = 7$	$a + b = c$
Multiplicando por 3	Multiplicando por x
$3(4 + 3) = 3 \times 7$	$x(a + b) = c \cdot x$
$21 = 21$	
$9 + 3 = 12$	$a + b = c$
Dividiendo entre 4	Dividiendo entre x; $x \neq 0$
$\frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4}$	$\frac{a + b}{x} = \frac{c}{x}$

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$

De todo esto, podemos deducir que dos o más igualdades pueden sumarse o restarse miembro a miembro trayendo como consecuencia lógica una nueva igualdad.

Si tenemos:

$$\begin{array}{r} 10 + 4 = 8 + 6 \\ + \quad 3 + 5 = 4 + 4 \\ \hline 13 + 9 = 12 + 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 + 3 = 8 + 1 \\ + \quad 9 + 4 = 6 + 7 \\ \hline 15 + 7 = 14 + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 + 9 = 11 + 5 \\ - \quad 3 + 4 = 6 + 1 \\ \hline 4 + 5 = 5 + 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b = c + d \\ - \quad m + n = o + p \\ \hline a - m + b - n = c - o + d - p \end{array}$$

f) sustitutiva.- Cualquier valor puede ser sustituído por su --- igual:

Si en las igualdades:	hacemos:	entonces:
$a + b = c$	$x = a$	$x + b = c$
$x + 8 = 12$	$x = 4$	$4 + 8 = 12$
$x - 6 = 12$	$x = 18$	$18 - 6 = 12$

3.- IDENTIDADES Y ECUACIONES.- Cuando la igualdad se encuentra formada por expresiones algebraicas; éstas traen consigo dos situaciones importantes que permiten considerar a la igualdad como una identidad o bién como una ecuación condicional.

Decimos que, una igualdad es identidad, cuando cualquier grupo de valores para los que han sido definidos ambos miembros, satisfacen a las variables o letras que las formen.

Así por ejemplo, cuando tenemos:

$$3x + x + 5x = 9x \quad ó \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x\,(x - 2)} \qquad \text{siendo } x \neq 0$$

Cualquier valor que asignemos a las variables dadas satisfacen plenamente lo propuesto, en cambio, si tenemos:

$$x - 6 = 2 \quad ó \quad x^2 - x - 6 = 0$$

Para que resulten verídicas estas expresiones, en el primer caso solo haciendo $x = 8$ es valedera y en el segundo ejemplo, será cierta la igualdad únicamente con $x = 3$ o bien $x = -2$, ningún otro valor las hace verdaderas.

Cuando esto sucede, la igualdad recibe el nombre de ecuación condicional o simplemente ecuación, por tanto:

Ecuación es toda igualdad que se cumple o satisface únicamente, para ciertos grupos de valores que se asignan a sus letras o variables.

4.- ECUACIONES.- Habiéndola definido, podemos decir de ella que, por ser una igualdad, consta de dos miembros, cada uno de ellos formado por uno o más términos numéricos o literales.

Las letras que forman los términos de la ecuación y de cuyo valor depende su veracidad, reciben el nombre de incógnitas.

Ahora bien, una ecuación puede contar con una o más incógnitas. Cuando la ecuación se encuentra integrada en ambos miembros por una sola incógnita, podemos determinar su grado por el mayor exponente que tenga la incógnita en cualquiera de sus términos.

Así tendremos que:

$4x - 6 = x + 3$ Es de primer grado, porque el mayor exponente de "x" es 1.

$x^2 + 6 = -5x$ Ecuación de segundo grado, el mayor exponente de x es 2.

$x^3 + 27x = 9x^2 + 26$ Es de tercer grado, porque el mayor exponente de x es 3.

El valor o valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad porque satisfacen la ecuación planteada, reciben el nombre de raíces de la ecuación.

En $x + 9 = 13$ La raíz es 4 porque haciendo $x = 4$ se convierte en verdadera.

$$(4) + 9 = 13$$
$$13 = 13$$

En $8y - 2 = 5y + 1$ La raíz es 1 porque haciendo $y = 1$ nos resulta cierta.

$$8(1) - 2 = 5(1) + 1$$
$$6 = 6$$

En $x^2 + 9x = -18$
haciendo $x = -3$ tenemos:

$$(-3)^2 + 9(-3) = -18$$
$$9 - 27 = -18$$
$$-18 = -18$$

Las raíces son:
$x = -3$ y $x = -6$ porque ambas hacen que la ecuación sea verdadera.

Haciendo $x = (-6)$, tenemos:

$$(-6)^2 + 9(-6) = -18$$
$$36 - 54 = -18$$
$$-18 = -18$$

Por las distintas características que las ecuaciones presentan, podemos decir que la ecuación se llama numérica cuando en sus términos no existen más letras que las incógnitas que poseen sus miembros.

$$2x - 4 = x + 1 \qquad \frac{y + 2}{5} = x$$

$$x = \frac{y - 4}{5} \qquad n^2 - 5n + 6 = 0$$

Nótese que en estas ecuaciones existen términos con incógnitas y términos independientes.

La ecuación es literal si en sus miembros además de las incógnitas aparecen otras literales que se presuponen son valores conocidos.

$$6x - 4a = 4x - a; \quad ax - b = 5$$

Cuando dos o más ecuaciones admiten la misma solución, se llaman equivalentes, así tenemos que las ecuaciones:

$$3x - 4 = x + 6, \quad y \quad x + 2 = 7$$

Son equivalentes porque la única solución que admiten, es:

$$x = 5$$

5.- SOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA O VARIABLE.

Resolver una ecuación para la incógnita o variable, significa - encontrar el valor o raíz de la misma.

Para lograrlo, precisamos aplicar propiedades de las igualdades que estudiamos con anterioridad, llegando mediante ellas a ecuaciones equivalentes y finalmente a las raíces de la ecuación.

El proceso de transformar la ecuación original en equivalente, lleva como propósito fundamental el de agrupar en el primer miembro a la (s) incógnita (s) y en el segundo a los términos independientes o valores conocidos, utilizando la debida aplicación de las propiedades, de la igualdad y su correcta realización en las operaciones indicadas, llegando a la raíz de la incógnita.

En esta sección resolveremos ecuaciones del tipo $ax + b = 0$ ó bien, que pueden ser reducidas a esa forma donde "a" representa cualquier valor $\neq 0$.

Ejemplos:

a) Resolvamos la ecuación $3x + 5 = 8x - 5$
Solución:

$3x + 5 = 8x - 5$	Ecuación dada.
$-5x = -10$	Sumando algebraicamente en ambos miembros $-8x - 5$
$5x = 10$	Multiplicando ambos miembros por (-1).
$x = 2$	Dividiendo ambos miembros entre 5.

Verificación: Sustituyendo 2 por x en la ecuación dada tendremos:

$$3(2) + 5 = 8(2) - 5$$
$$6 + 5 = 16 - 5$$
$$11 = 11$$

El valor $x = 2$ es una raíz porque hace a ambos miembros de la ecuación iguales.

b) Resolvamos para "x", la ecuación: $2x + 3 = 3ax + 4c$.

$2x + 3 = 3ax + 4c$	Ecuación dada.
$2x - 3ax = 4c - 3$	Sumando en ambos miembros $-3ax - 3$.
$x(2 - 3a) = 4c - 3$	Factorizando el 1er. miembro.
$x = \dfrac{4c - 3}{2 - 3a}$	Dividiendo ambos miembros entre $2 - 3a$.

Verificación: Sustitúyase el resultado en la ecuación dada.

c) Resolvamos la ecuación $\dfrac{1}{y - 5} + 2 = \dfrac{3}{y - 5}$

$\dfrac{1}{y - 5} + 2 = \dfrac{3}{y - 5}$	Ecuación dada.
$1 + 2y - 10 = 3$	Multiplicando ambos miembros por $(y - 5)$.
$2y = 12$	Sumando en ambos miembros 9 unidades.
$y = 6$	Dividiendo ambos miembros entre 2.

Verificación: Sustitúyase el resultado en la ecuación dada.

d) Resolvamos la ecuación: $\dfrac{x - 1}{3x - 1} - \dfrac{x}{x + 3} = \dfrac{-2x^2 + 6}{3x^2 + 8x - 3}$

$\dfrac{x - 1}{3x - 1} - \dfrac{x}{x + 3} = \dfrac{-2x^2 + 6}{3x^2 + 8x - 3}$	Ecuación dada.
$\dfrac{x^2 + 2x - 3 - 3x^2 + x}{(3x - 1)(x + 3)} = \dfrac{-2x^2 + 6}{(3x - 1)(x + 3)}$	Efectuando la resta de fracciones indicadas en el miembro izquierdo y factorizando el segundo miembro.
$-2x^2 + 3x - 3 = -2x^2 + 6$	Multiplicando ambos miembros por $(3x - 1)(x + 3)$ y agrupando términos semejantes en el primer miembro.
$3x = 9$	Sumando ambos miembros $2x^2 + 3$.
$x = 3$	Dividiendo ambos miembros entre 3.

Verificación: Sustitúyase el resultado en la ecuación dada.

E J E R C I C I O 2 - 1

Encuentra el conjunto solución despejando para la incógnita -- hasta encontrar su raíz.

1) $9x + 6 = 51$ $x =$ ______

2) $3x + 6 = 0$ $x =$ ______

3) $-5 + y = -12$ $y =$ ______

4) $12z - 8 = 172$ $z =$ ______

5) $3x - 4 = 4x$ $x =$ ______

6) $-x + 9 = 2x$ $x =$ ______

7) $0.3x + 0.2 = 0.26$ $x =$ ______

8) $3x + 8 = -2x - 17$ $x =$ ______

9) $3x - 5 = 4 - 2x$ $x =$ ______

10) $7y + 3 = 2y - 4$ $y =$ ______

11) $9x + 12 = 3x + 48$ $x =$ ______

12) $8z + 1 = 7z + 5$ $z =$ ______

13) $-2m + 5 = -m + 2$ $m =$ ______

14) $16x - 18 = 20 - 3x$ $x =$ ______

15) $2(z - 5) = 3(2z + 1)$ $z =$ ______

16) $6(3x - 1) = 5(4x + 3)$ $x =$ ______

17) $4(-3x + 5) = 7(2x + 3)$ $x =$ ______

18) $8(2z + 3) = -5(-3z + 2)$ $z =$ ______

19) $\frac{1}{4}x + 10 = x + 4$ $x =$ ______

20) $\frac{1}{3}(5x - 2) = x + 2$ $x =$ ______

21) $\frac{3}{4}(3x - 2) = 3x$ $x =$ ______

22) $\frac{3}{7}(4x - 7) = 2x - 5$ $x =$ ______

23) $\frac{6x + 1}{3} = 3x + 2$ $x =$ ______

24) $\frac{8x - 3}{9} = 2x + 4$ $x =$ ______

25) $\frac{3z}{5} + 2 = 4 + \frac{2z}{10}$ $z =$ ______

26) $\frac{9}{x + 5} = \frac{6}{x + 2}$ $x =$ ______

27) $\frac{6y - 5}{11} - \frac{-4y + 5}{3} = -4$ $y =$ ______

28) $\frac{4x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{10x}{5} - \frac{1}{6}$ $x =$ ______

29) $\frac{6z}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9z}{2} - \frac{19}{10}$ $z =$ ______

30) $\frac{3x}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = 2x - 5$ $x =$ ______

31) $z - \frac{11z}{7} + \frac{7}{3} = \frac{3}{7} - 2z$ $z =$ ______

32) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$ $x =$ ______

33) $\frac{4z}{z - 1} - \frac{3}{z + 1} = \frac{4z^2}{z^2 - 1}$ $z =$ ______

34) $\frac{3}{y + 2} + \frac{2}{y - 2} = \frac{4y - 4}{y^2 - 4}$ $z =$ ______

35) $\frac{11a + 10}{a(5 - a)} + \frac{a + 4}{a - 5} = \frac{a - 3}{a}$ $a =$ ______

36) $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 - z} = \frac{2}{z - 1}$ $z =$ ______

37) $\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 1}$ $x =$ ______

38) $\frac{x + 1}{x} - \frac{x + 4}{x + 5} = \frac{-3x - 5}{x^2 + 5x}$ $x =$ ______

39) $\frac{3}{(m + 4)} + \frac{2}{(m + 2)} = \frac{3m}{m^2 + 6m + 8}$ $m =$ ______

40) $\frac{m - 1}{2m - 1} - \frac{m}{m + 1} = \frac{2 - m^2}{2m^2 + m - 1}$ $m =$ ______

6.- APLICACION DE ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS.

La vida del hombre a diario presenta múltiples problemas. Buscar para ello una práctica solución, ha sido preocupación constante desde que el humano se descubre a sí mismo como un ser pensante, capaz de transformar el medio dentro del cual se desenvuelve, en un ambiente más favorable para su propio desarrollo.

El álgebra, como parte de las matemáticas mucho ha tenido que ver en la solución de los múltiples y variados planteamientos que el hombre se ha hecho, tanto en el campo práctico de su actividad como en el desempeño científico de su existencia.

Quizá la aplicación más importante del álgebra, por no decir que la más radica en la resolución de problemas.

Problema es todo planteamiento que surge por necesidad, al relacionar en una cuestión particular, elementos conocidos, a los que llamamos datos o antecedentes, con elementos desconocidos o por conocer y que llamamos incógnitas.

El enunciado o planteamiento del problema, generalmente, muestra la forma en que se relacionan los datos entre sí y con las incógnitas para obtener la respuesta o solución deseada.

Las incógnitas casi siempre las representamos con las últimas letras del alfabeto, cuidando de otorgar una correcta notación algebraica a los valores conocidos o datos que se nos proporcionen.

Es común, que en la solución de problemas mediante el uso de ecuaciones, se sigan las siguientes recomendaciones:

a) Leer cuidadosamente el problema hasta que quede claro qué es lo que se pregunta.
b) De ser necesario, trazar un esquema o figura.

c) Analizar los datos, dándoles la correcta notación algebraica y verificar si son suficientes para la realización del problema.
d) Determinar la incógnita y relacionarla con los datos.
e) Representar una ecuación de acuerdo a las relaciones establecidas en el problema.
f) Resolver la ecuación.
g) Comprobar o verificar los resultados de acuerdo a los datos establecidos en el problema.

Ejemplos:

a) ¿Cuál es el número que aumentado en 13 unidades es igual a 27?

Datos:

El número es: x

Ecuaciones según el enunciado.

$$x + 13 = 27$$
$$x = 14$$

El número es 14.

Verifícalo.

b) Un padre de familia tiene 40 años y su hijo 12. ¿Dentro de cuántos años, la edad del padre será el doble que la del hijo?

Datos:

Años pedidos: x

Edad del padre dentro de x años: $40 + x$

Edad del hijo dentro de x años: $12 + x$

Ecuaciones según el enunciado.

$$40 + x = 2(12 + x)$$
$$40 + x = 24 + 2x$$
$$16 = x$$
$$x = 16$$

Respuesta: Dentro de 16 años.

Verifícalo.

c) Un auto sale de Monterrey a México a una velocidad media de --- 90 Km/hr. Una hora después, sale otro del mismo punto y en di-- rección similar que el anterior con una velocidad constante de 100 Km/hr. ¿A qué distancia y en cuánto tiempo el segundo auto dará alcance al primero?

Datos:	Ecuación según el enunciado (la h.)
Tiempo solicitado: x	$100x = 90 + 90x$
Distancia del primer auto en x hrs. 90x.	$10x = 90$
Distancia del 2do. - auto en x Hrs. 100x.	$x = 9$

Respuesta:
Dentro de 9 hrs. a una distancia de 900 Km.

Verifícalo.

d) La suma de tres números impares consecutivos es 87. ¿Cuáles son tales números?

Datos:
Primero No.: x
Segundo No. impar
Consecutivo: x + 2
Tercer número impar
Consecutivo: x + 4

Ecuación según el enunciado.

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 87$$
$$3x + 6 = 87$$
$$3x = 81$$
$$x = 27$$

Respuesta:
Los números son: 27, 29, 31.
Compruébalo.

e) Encontrar tres enteros consecutivos tales que: la suma del primero con el triple del tercero, sea igual al doble del segundo aumentado en 18.

Datos:
Números consecutivos:
x, x + 1, x + 2.

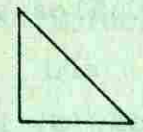
Ecuación según el enunciado.

$$x + 3(x + 2) = 2(x + 1) + 18$$
$$x + 3x + 6 = 2x + 2 + 18$$
$$4x + 6 = 2x + 20$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Respuesta: Los números son 7, 8, y 9. (Compruébalo)

f) Un ángulo de un triángulo es 15° mayor que otro y el tercero es 10° menor que el triple del ángulo más pequeño. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos?

Figura:



Datos:
A = x
B = x + 15
C = 3x - 10

Ecuación según el enunciado.

$$x + (x + 15) + (3x - 10) = 180$$
$$5x + 5 = 180$$
$$5x = 175$$
$$x = 35$$

Respuesta: $\sphericalangle A = 35°$, $\sphericalangle B = 50°$, y $\sphericalangle C = 95°$

E J E R C I C I O 2 - 2

1.- Si a 15 se le agrega un número tal que su suma sea 75. ¿Cuál es el número?

2.- El doble de un número aumentado en 6 unidades es 46. ¿Cuál es el número?

3.- ¿Cuál es el número que sumado con su mitad es igual a 30?

4.- El doble de un número disminuido en su tercera parte es igual a 25. ¿Cuál es el número?

5.- ¿Cuál es el número que sumado con su triple con su mitad y -- disminuido en 7 unidades dá por resultado 20?

6.- Se ha venido la mitad y la quinta parte de un rollo de alam-- bre y quedan todavía 15 metros. ¿Cuánto medía el rollo?

7.- Con 120 pesos se compraron un juego de geometría y una caja de colores. El juego de geometría costó 32 pesos más que los colores. ¿Cuánto se pagó por el juego de geometría y cuánto - por la caja de colores?

8.- La suma de tres números pares consecutivos es 102. ¿Cuáles -- son los números?

9.- Las edades de un padre y de su hijo suman 64 años. Si el pa-- dre tiene una edad que es el triple de la del hijo. ¿Qué edad tiene el padre y qué edad tiene el hijo?

10.- Antonio y Ramiro donaron $160.00 durante la colecta de la Cruz Verde; si Ramiro aportó la tercera parte de lo que dió Antonio, ¿Cuánto donó cada uno?

11.- El perímetro de un terreno de forma rectangular mide 570 mts. Si el largo es el triple del ancho más 5 metros, ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

12.- El perímetro de un terreno triangular mide 71 metros, el lado b mide el triple del lado a y el lado c es igual al lado a más 11 metros. ¿Cuánto mide cada lado?

13.- En la tumba de un gobernante excéntrico se encontró el siguiente epitafio: Aquí yace aquel cuya sexta parte de su existencia tuvo una infancia triste, siendo soltero la cuarta parte de su vida, mientras que la mitad de ella tuvo un matrimonio feliz y en los últimos 7 años se dedicó a contribuir a las buenas obras.
¿Cuántos años vivió el gobernante?

14.- Un gavilán al pasar por un palomar, dijo: adiós mis 100 palomas y una de ellas contestó: no somos 100 señor gavilán, pero las que somos, más otro tanto, más la mitad de las que somos, más la cuarta de las que somos, más usted señor gavilán, 100 completas seremos. ¿Cuál es el número de palomas?

15.- ¿Cuántos alumnos asisten a la escuela si sabemos que la mitad está en los laboratorios, la cuarta parte en deportes y los 250 restantes están en clases académicas?

16.- El suelo mensual de una persona se distribuye de la siguiente manera: la mitad en alimentacion y habitación, la cuarta parte en vestido, la sexta parte en diversiones y los $5,000.00 restantes los ahorra. ¿A cuánto asciende su sueldo?

17.- Calcular el área de un rectángulo cuyo perímetro mide 40 cm., sabiendo que el largo mide 4 cm. más que el ancho.
a) Largo ____________ b) ancho ____________ c) área ____________

18.- Un padre deja los 2/5 de sus bienes a uno de sus hijos, los 7/20 al segundo y los $23,500.00 restantes al tercero. ¿Hállese la suma repartida?

19.- Dígase el número de alumnos que hay en una clase, sabiendo que la tercera parte de ellos está leyendo, la cuarta parte escribiendo y los otros 20 resolviendo problemas.

20.- A las 8:00 hrs. sale un autobús de A para el norte, con una velocidad de 60 Km. por hora. A las 9:00 hrs. sale otro autobús a la velocidad de 75 Km. por hora, se pide cuánto tiempo tardará el segundo autobús para alcanzar al primero y la distancia que habrá recorrido, saliendo del mismo punto en dirección similar.

21.- La suma de tres números es 177. El segundo es 5 unidades mayor que el menor y el tercero es 10 mayor que el menor. Encuentre los números.

22.- La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 4 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en 2 unidades, el área sería incrementada en 60 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

AUTOEVALUACION

I.- RELACIONA CADA ENUNCIADO CON LA PROPIEDAD DE LA IGUALDAD QUE LE CORRESPONDA.

( ) Transitiva — 1.- Todo número o valor es igual a sí mismo.

( ) Multiplicativa. — 2.- Si dos números son iguales a un tercero, los tres son iguales entre sí.

( ) Reflexiva. — 3.- Si a ambos miembros de una igualdad les sumamos o restamos un mismo valor, obtenemos otra igualdad.

( ) Sustitutiva. — 4.- Si los dos miembros de una igualdad los multiplicamos o dividimos por un mismo número, obtendremos otra igualdad.

( ) Aditivas. 5.- Los miembros de una igualdad pueden permutarse sin que la identidad se altere.

( ) Simétrica. 6.- Cualquier valor puede ser sutituido por su igual.

II.- EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS APLICA LA PROPIEDAD QUE SE TE INDIQUE.

1) Transitiva.
Si $9 + 3 = 12$ y $7 + 5 = 12$

2) Asociativa.
$4 + 3 + 7 =$

3) Multiplicativa.
$5x = 40$

4) Aditiva.
$x + 7 = 12$

5) Simetría.
$25 = x^2$

III.- COMPLETA CADA UNO DE LOS ENUNCIADOS SIGUIENTES, TOMANDO LA RESPUESTA DEL CONJUNTO SOLUCION QUE SE TE OFRECE.

CONJUNTO SOLUCION

$9x + 3 = 12$	Aditiva
$x^2 + 3 = 4x$	Equivalente
$3x^2y + 6 = 18$	1
Reflexiva	-1
Variables	-5
Transitiva	Ecuación
=	≠

E N U N C I A D O S

1.- Igualdad que consta de 2 miembros formados por términos numéricos o literales.

____

2.- Nombre que reciben las literales de los términos de una ecuación.

____

3.- Propiedad de la igualdad que indica que todo valor o número es igual a sí mismo.

____

4.- Propiedad de la igualdad que indica que si dos números son -- iguales a un tercero, los tres son iguales entre sí.

____

5.- Símbolo que representa la identidad.

____

6.- Es una ecuación de primer grado.

____

7.- Es una ecuación de segundo grado.

____

8.- Nombre que reciben las ecuaciones con la misma solución.

____

9.- Raíz de la ecuación $3x + 2 = 5$

____

10.- Raíz de la ecuación $x - 3 = - 8$

____

IV.- ENCUENTRA LA RESPUESTA CORRECTA QUE HAGA POSIBLE LA IGUALDAD DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

1) $3x + 6 = 12$ - ( )
b) $x = -2$ d) $x = 4$ e) $x = 2$ f) $x = 0$

2) $2m - 5 = -7$ - ( )
l) $m = -1$ 0) $m = 0$ p) $m = 7/5$ z) $m = 1$

3) $3q + 2 = -12q$ - ( )
x) $q = -x/15$ a) $q = -2/10$ y) $q = 2/15$ p) $q = -2/15$

4) $3 + f = 1$ - ( )
k) $f = -2$ m) $f = 1/2$ b) $f = 4$ r) $f = 3$

5) $8z = 4 + 12$ - ( )
w) $z = 0$ x) $z = 1$ y) $z = -1$ o) $z = 2$

6) $2u + 3 = -4u + 33$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
r) $u = 5$ s) $u = 2$ t) $u = 3$ x) $u = -2$

7) $4y + 5 = 3y + 3$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
b) $y = 4$ a) $y = -2$ c) $y = -4$ d) $y = 2$

8) $-5 + a = 3$ - ( )
m) $a = 0$ d) $a = 1$ b) $a = 7$ c) $a = 8$

9) $3b + 4 = 5b + 10$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
g) $b = 4$ h) $b = 3$ l) $b = -3$ j) $b = 2$

10) $15c + 8 = 13c + 10$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
n) $c = 0$ 0) $c = 1$ p) $c = -1$ q) $c = 2$

11) $12a + 5 = 5a + 26$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
n) $a = 3$ a) $a = 4$ b) $a = -4$ c) $a = 5$

12) $b + 5 = 2b + 9$ - ( )
n) $b = 8$ o) $b = 7$ p) $b = -6$ u) $b = -4$

13) $y - 13 = 4y - 1$ - ( )
q) $y = 6$ r) $y = -8$ x) $y = 2$ a) $y = -4$

14) $8c + 3 = 3c - 2$ - ( )
m) $c = 5$ n) $c = -1$ o) $c = 0$ p) $c = 1$

15) $8a - 12 = a - 12$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )
l) $a = 0$ m) $a = 4$ n) $a = 3$ o) $a = 2$

V.- PROBLEMAS EN PALABRAS APLICADOS A ECUACIONES LINEALES.

1.- Se ha comprado un lote de ladrillos, se utilizó la cuarta parte para arreglar una pared de la casa, una tercera parte para arreglar la barda y todavía sobran 85 ladrillos. ¿De cuántos ladrillos era el lote?

2.- La suma de tres números consecutivos más 10 unidades es 106. ¿Cuáles son los números?

3.- El triple de un número más una cuarta parte de éste y disminuido en 3 unidades es 23 ¿Cuál es el número?

4.- Se compró un libro de Español, y una libreta, se pagó 40 pesos menos por la libreta y en total se pagó 200 pesos. ¿Cuánto costó el libro y cuánto la libreta?

5.- La altura de un triángulo es 3/4 la longitud de su base. Si la altura se incrementará en 3 unidades y la base se disminuyerá en 3 unidades, el área quedaría inalterada. Encuentre la longitud de la base y de la altura y cuál es el área del ---- triángulo.

6.- El numerador de una fracción es - unidades menor que el denominador. Si el numerador es duplicado el denominador es disminuído en 2 unidades, la suma de la fracción original con la -- nueva es 3. Encuentre la fracción original.

7.- Un estudiante obtiene una calificiación de 86 por sus tareas y 75 en sus exámenes parciales. ¿Cuál será la calificación de -- examen final que le dará un promedio total de 80 si la tarea - cuenta 1/10, los exámenes parciales 6/10 y el examen final --- 3/10.

8.- Encuentre el número de alumnos que hay en una clase, sabiendo que la tercera parte de ellos están leyendo, la quinta parte - está escribiendo y 14 están platicando.

9.- Un automóvil sale de Monterrey a Cd. Juárez a una velocidad de 100 Km. por hora. Una hora más tarde, sale otro automóvil del mismo lugar con el mismo destino que el anterior, con -- una velocidad de 110 Km. por hora. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo automóvil en alcanzar al primero y qué distancia habrá recorrido?

10.- La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 2 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 unidades, el área se incrementará en 51 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones originales.

TERCERA UNIDAD

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Inquietudes múltiples mantienen al hombre en constante evolución desde el momento en que se muestra como un ser eminentemente social....

Entonces, busca, no solo distintas soluciones, sino, a la vez, la forma de resolverlas simultáneamente por medio de sistemas y procedimientos adecuados.

9.- Un automóvil sale de Monterrey a Cd. Juárez a una velocidad de 100 Km. por hora. Una hora más tarde, sale otro automóvil del mismo lugar con el mismo destino que el anterior, con una velocidad de 110 Km. por hora. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo automóvil en alcanzar al primero y qué distancia habrá recorrido?

10.- La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 2 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 unidades, el área se incrementará en 51 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones originales.

TERCERA UNIDAD

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Inquietudes múltiples mantienen al hombre en constante evolución desde el momento en que se muestra como un ser eminentemente social....

Entonces, busca, no solo distintas soluciones, sino, a la vez, la forma de resolverlas simultáneamente por medio de sistemas y procedimientos adecuados.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará los diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en problemas.

OBJETIVO PARTICULAR:

El alumno estará en condiciones de:

1.- Definir el concepto de ecuación con dos variables.

2.- Obtener la solución de sistemas de ecuaciones con dos variables utilizando los métodos; Gráfico y de eliminación por sumas y restas, sustitución e igualación.

3.- Resolver problemas de ecuaciones lineales con tres variables y tres ecuaciones, por el método de eliminación o analítico.

4.- Resolver problemas cuya solución implique sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.- ECUACIONES LINEALES EN DOS O MAS VARIABLES O INCOGNITAS.

En la unidad anterior, advertimos que para una ecuación como $x + 5 = 7$, solo existe un único valor para "x" que satisface plenamente a la igualdad, esto por tratarse de una ecuación con una sola incógnita de primer grado.

Ahora bien, si consideramos la ecuación $x + y = 5$, veremos que existe un número infinito de pares de valores para "x" y "y" que satisfacen plenamente a la ecuación planteada, lo mismo sucede para la ecuación $x - y = 1$ o para cualquier otra del mismo tipo, según se puede observar en las siguientes tablas de valores.

$$x + y = 5$$

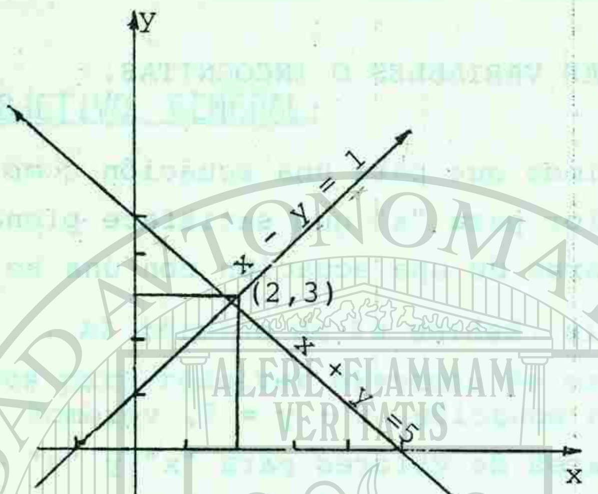
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

$$x - y = -1$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Si hacemos un análisis detallado de ambas tablas de valores, encontramos que solo existe un par de valores repetitivos o comunes entre ellas.

Grafiquemos ahora las ecuaciones propuestas localizando en el plano de coordenadas cartesianas los puntos resultantes de las parejas ordenadas señaladas en las tablas de valores.



Al realizarlo, podemos apreciar que el punto de intersección entre las rectas resultantes es el formado por la pareja ordenada (2,3).

Cuando esto sucede, podemos afirmar que existe un par de valores que satisface al mismo tiempo o simultáneamente a ecuaciones lineales con dos o más incógnitas.

A todo conjunto de ecuaciones de primer grado con dos ó más incógnitas se le llama sitema de ecuaciones lineales.

Ecuaciones lineales porque cuando representamos en el plano de coordenadas cartesianas una ecuación de primer grado, siempre nos resulta una línea recta.

Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 \ldots a_nx_n = 0$, se llama ecuación lineal en "n" variables donde $a_1, a_2, \ldots a_n \in R$. Y la solución para $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \in R^n$ o sea $R \times R$. Esto, cuando se trata de un sistema en dos variables.

Ejemplos:

1.- $x + y = 8$ es una ecuación lineal en las variables x, y, donde sus conjuntos solución pertenece a $R \times R$.

Algunas soluciones las forman las parejas; (5,3), (10,-2), (-2,10), etc.

2.- $x + y + z = 0$ es una ecuación lineal en las incógnitas x, y, z.

Algunas soluciones son: (3,-2,-1), (5,-7,2), (3, 1, -4), etc.

Resumiento podemos decir que:

Al conjunto de M ecuaciones de primer grado con "n" variables ó incógnitas, se le llama sistema lineal de ecuaciones.

La solución del sistema es el conjunto n-adas (ordenadas) que satisfacen simultáneamente a la "m" ecuaciones presentadas, es decir, su solución no es otra cosa que la intersección de los conjuntos Solución de las ecuaciones.

Ejemplos:

3.- $x + y = 6$, $3x - y = 14$ $\qquad$ $4x + 2y = 6$, $3x - 5y = 15$ $\qquad$ $ax + by = 2ab$, $ax - by = 0$

Son sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

4.- $3x + 2y - z = 5$, $2x - 3y + z = 7$, $x - y - z = 1$ $\qquad$ $4x + y - z = 2$, $x - y + 3z = 7$, $3x + 2y - 2z = 1$ $\qquad$ $3x + 5y - z = 0$, $x + y - z = 0$, $2x - 5y + z = 0$

Son sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Al proceso mediante el cual encontramos la solución de un sistema le llamamos, Solución Simultánea de ecuaciones.

2.- SOLUCION POR EL METODO GRAFICO.

Sabemos ya, que la gráfica de una ecuación lineal es una recta, por lo tanto, la gráfica de un sistema de dos ecuaciones, será un par de rectas que pueden tener las siguientes posibilidades:

A) Ambas se intersecan en un punto.
B) Ambas se intersecan en todos los puntos.
C) Su intersección es un $\emptyset$ en cuyo caso hablamos de paralelas.

Dos puntos de una recta son suficientes para reconocer la dirección de la misma, sin embargo, cuando grafiquemos un sistema de ecuaciones lineales, lo recomendable, aparte del origen en ambos casos es conveniente otorgar un valor negativo a la abscisa y el otro positivo.

Para graficar un sistema de ecuaciones, calculamos la tabla de valores para ambas ecuaciones asignado los valores que queramos a la abscisa y sustituyendo "x", encontramos "y".

Ejemplos:

1.- En el sistema $3x + y = 4$
$x + 2y = 3$

Tenemos que:
Sus gráficas son dos rectas que se intersecan en un punto.
Según se ilustra.

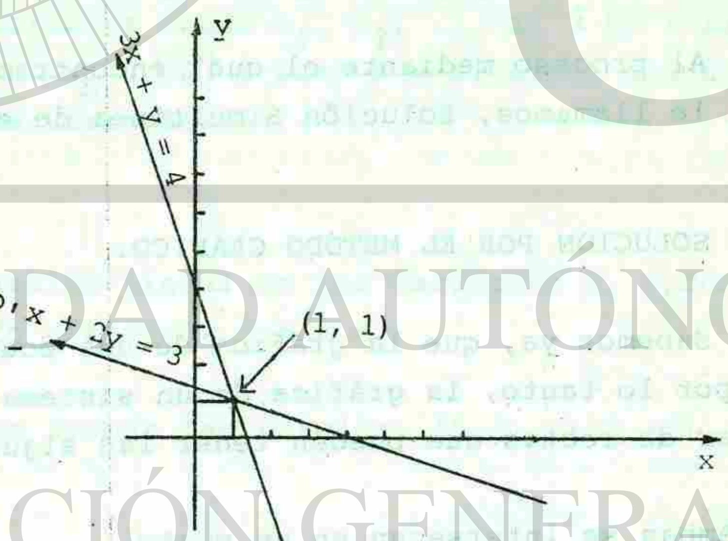
Tablas de valores.

$3x + y = 4$

x	y
-2	10
0	4
3	-5

$x + 2y = 3$

x	y
-2	5/2
0	3/2
3	0



Su $\cap$ = (1,1) por lo tanto, es la solución al sistema.

Cuando esto sucede, las ecuaciones se llaman CONSISTENTES.

2.- En el sistema: $x - 3y = 1$
$3x - 9y = 3$

Tenemos que:
Sus gráficas son rectas que se intersecan en todos sus puntos.
Según se ilustra.

TABLA DE VALORES

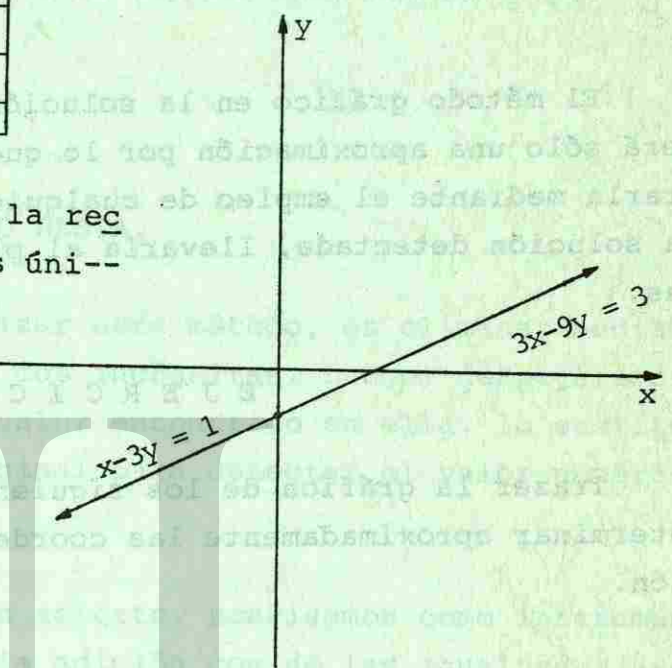
$x - 3y = 1$

x	y
-2	-1
0	- 1/3
3	2/3

$3x - 9y = 3$

x	y
-2	-1
0	-.1/3
3	2/3

Su $\cap$ = a todos los puntos de la recta y su solución no es única.



Cuando esto acontece las ecuaciones son EQUIVALENTES.

3.- En el sistema: $x - 2y = 4$
$2x - 4y = 6$

Tenemos que:
Sus gráficas son rectas paralelas cuya intersección es conjunto vacío por carecer de puntos en común.

TABLAS DE VALORES

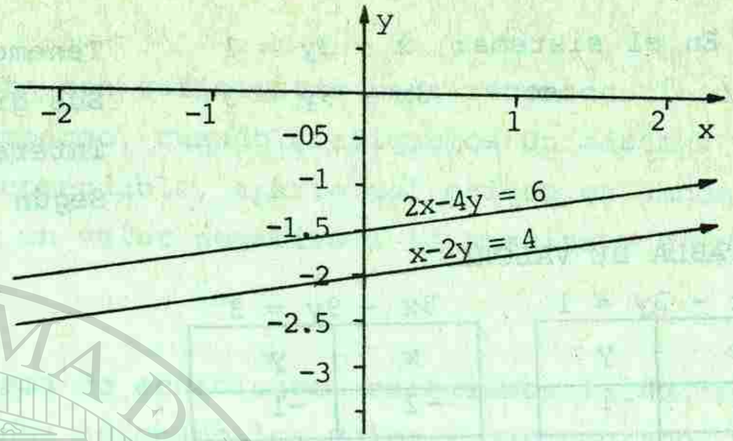
$x - 2y = 4$

x	y
-2	-3
0	-2
2	-1

$2x - 4y = 6$

x	y
-2	-2.5
0	-1.5
2	-0.5

Su $\cap = \emptyset$
Por lo que no tiene solución y la representamos mediante $\emptyset$ a este tipo de ecuaciones le llamamos: INCONSISTENTES.



El método gráfico en la solución de un sistema de ecuaciones será sólo una aproximación por lo que, lo más recomendable es encontrarla mediante el empleo de cualquier método algebraico y luego, la solución detectada, llevarla al plano de coordenadas cartesianas.

E J E R C I C I O 3 - 1

Trazar la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones, y determinar aproximadamente las coordenadas del punto de intersección.

1) $x + y = 9$
   $x - y = 1$

2) $x + 3y = 18$
   $5x - 4y = -1$

3) $x + 3y = -11$
   $3x - 4y = 6$

4) $x + 2y = 7$
   $5x - 3y = 17$

5) $y + 7x = 14$
   $y - 2x = -4$

6) $2x - 3y = -4$
   $5x + 2y = -29$

7) $2x + 5y = 31$
   $7x - y = -21$

8) $9x + 4y = -31$
   $5x + 4y = -19$

9) $3x + 2y = 5$
   $x - 3y = -10$

10) $4x + 8y = 4$
    $7x - 6y = -8$

3.- SOLUCION POR METODOS ALGEBRAICOS.

Al proceso algebraico mediante el cual buscamos la solución de un sistema le llamamos solución simultánea de ecuaciones.

En este curso veremos:

Solución simultánea por suma ó resta, por sustitución y por igualación.

A) SOLUCION SIMULTANEA POR SUMA O RESTA.

El objetivo inicial al utilizar este método, es eliminar mediante la suma algebraica una de las dos incógnitas. Luego, despejaremos para la incógnita restante y el valor encontrado en ella, lo sustituiremos en cualquier ecuación original para detectar el valor numérico de la segunda incógnita.

Para aplicar este método con acierto, precisamos como instrumentos tanto de las propiedades de la adición con de las igualdades. Recordemos que dos términos semejantes se eliminan cuando poseen el mismo coeficiente y diferentes signos, en tanto que, si los dos miembros de una igualdad los multiplicamos o dividimos por la misma cantidad, la igualdad seguirá siendo cierta.

Ejemplo:

La suma de dos números es 3, si al triple del primer número le restamos el doble del segundo, su diferencia será 14. ¿Cuáles serán dichos números?

$x + y = 3$ (La suma de dos números es 3)
$3x - 2y = 14$ (La diferencia del triple del primero con el doble del segundo es 14).

De donde lo planteado nos da un sistema de ecuaciones lineales que es:

$$\begin{aligned} 1)\quad & x + y = 3 \\ 2)\quad & 3x - 2y = 14 \\ 3)\quad & 2x + 2y = 6 \\ 2)\quad & \underline{3x - 2y = 14} \end{aligned}$$

Observamos que si multiplicamos la primera ecuación por el factor 2 podremos igualar los coeficientes de la segunda incógnita y como sus signos son distintos, al sumar término a término cada ecuación, fácilmente eliminaremos una incógnita.

$$4)\quad 5x = 20 \qquad x = \frac{20}{5}$$

Despejando para "x".

$$\boxed{x = 4}$$

Encontramos su valor.

$$(4) + y = 3 \qquad y = 3 - 4 \qquad \boxed{y = -1}$$

Sustituyendo el valor de "x" en la primera ecuación, despejando para "y". Encontramos su valor

$$3(4) - 2(-1) = 14 \qquad 12 + 2 = 14$$

Comprobación: Sustituyendo en la segunda ecuación por sus valores, verificamos que la solución es la pareja ordenada (4,-1).

En este método, para eliminar una de las dos incógnitas podemos encontrarnos, entre otros, con los siguientes casos:

a)

$$\begin{aligned} 1)\quad & 3x + y = 7 \\ 2)\quad & 5x - y = 9 \\ & 8x = 16 \\ & x = \frac{16}{8} \end{aligned}$$

Cuando una de las 2 incógnitas poseen en ambas ecuaciones signos distintos y coeficientes iguales. En cuyo caso, la suma algebraica se realiza directamente.

Despejando para "x".

$$\boxed{x = 2}$$

Encontramos su valor.

$$3(2) + y = 7 \qquad 6 + y = 7$$

Sustituyendo en la primera ecuación por el valor encontrado para "x".

$$y = 7 - 6 \qquad \boxed{y = 1}$$

Despejando para "y". Encontramos su valor.

$$5(2) - (1) = 9 \qquad 10 - 1 = 9$$

Comprobación: Sustiuyendo en la segunda ecuación con los valores encontrados decimos que la pareja solución es (2,1).

b)

$$\begin{aligned} 1)\quad & 5x - 2y = 4 \\ 2)\quad & \underline{4x - 2y = 2} \end{aligned}$$

Cuando una de las dos incógnitas poseen signos y coeficientes iguales, en cuyo caso, una de las dos ecuaciones la multiplicamos por (-1).

$$\begin{aligned} 1)\quad & 5x - 2y = 4 \\ 3)\quad & \underline{-4x + 2y = -2} \\ 4)\quad & \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

Para efectuar luego la eliminación vía la suma o resta. Encontrando en este ejemplo, directamente el valor de "x".

$$\begin{aligned} (5)(2) - 2y &= 4 \\ 10 - 2y &= 4 \\ -2y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-2} \\ \boxed{y = 3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera el valor de "x". Despejando para "y".

$$4(2) - 2(3) = 2 \qquad 8 - 6 = 2$$

Comprobación: Sustituyendo en la segunda ecuación los valores para concluir que la pareja solución es (2,3).

c)

$$\begin{aligned} 1)\quad & 3x + 5y = 22 \\ 2)\quad & 2x - 3y = 2 \end{aligned}$$

Cuando una de las incógnitas poseen signos y coeficientes distintos.

En cuyo caso, se igualan coeficientes de la incógnita a eliminar.

$$\begin{aligned} 3)\quad & 9x + 15y = 66 \\ 4)\quad & \underline{10x - 15y = 10} \\ & 19x = 76 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por (3).
Multiplicando la segunda ecuación por (5).

$x = \frac{76}{19}$ — Eliminando una incógnita. Despejando para "x".

$\boxed{x = 4}$

$9(4) + 15y = 66$ — Sustituyendo "x" por su valor encontrado.

$36 + 15y = 66$ — Despejando para "y".

$15y = 30$

$y = \frac{30}{15}$

$\boxed{y = 2}$

Comprobación:

$10(4) - 15(2) = 10$ — Sustituyendo en la segunda ecuación.

$40 - 30 = 10$ — La validez de la pareja (4,2).

RESUMIENDO:

Diremos que la solución de un sistema de ecuaciones simultáneamente por el método de suma y resta requiere por lo menos de los siguientes pasos.

PRIMERO: Selección de la incógnita a eliminar.

SEGUNDO: Igualación de coeficientes cuidando a la vez que tengan signos contrarios los términos a eliminar.

TERCERO: Sumar algebraicamente término a término los dos miembros de ambas ecuaciones.

CUARTO: Despejar para encontrar el valor numérico de la incógnita que no se eliminó.

QUINTO: Sustituir en una de las ecuaciones originales el valor numérico de la incógnita encontrada para detectar su homólogo en la segunda variable.

SEXTO: Comprobar en la segunda ecuación original en base a los valores numéricos obtenidos para las incógnitas presentadas.

E J E R C I C I O 3 - 2

Aplicando el método de eliminación por suma o resta, resuelve los siguientes sistemas lineales de ecuaciones:

1) $x + y = 8$; $x - y = 2$

2) $2x - y = 4$; $3x - 3y = 3$

3) $4x + 6y = -10$; $4x - 3y = -1$

4) $4x - 6y = 8$; $-2x - 2y = -14$

5) $x - 7y = -33$; $x + 8y = 42$

6) $x - 3y = -1$; $x + 4y = 6$

7) $4x + 7y = 26$; $-2x + 5y = 2$

8) $-4x + 9y = -59$; $2x + 5y = 1$

9) $2x + 9y = 11$; $4x - 3y = 1$

10) $2x - 3y = 2$; $8x + 6y = 44$

11) $3x + 4y = -2$; $2x + 3y = -1$

12) $3x + y = 6$; $4x + y = 15$

13) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 9$; $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = -1$

14) $\frac{5}{x} - \frac{8}{y} = 12$; $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 14$

15) $\frac{2}{x} - \frac{4}{y} = 6$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 2$

16) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 2$; $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 4$

B) SOLUCION SIMULTANEA POR SUSTITUCION.

Aquí nuestro objetivo primario es encontrar en cualquiera de las dos ecuaciones el valor de una incógnita en términos de la --- otra. Luego, en la ecuación que dejamos libre, sustituiremos la incógnita de la cual ya tenemos su valor, para, posteriormente, mediante operaciones que nos conducen al despeje de incógnitas en -- ecuaciones, encontrar el valor numérico de una variable.

Por último, hacemos la sustitución numérica de la incógnita -- descubierta en la ecuación que nos sirvió de punto de partida llegando a encontrar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO:

La suma de dos números es 9 y su diferencia es 1. ¿Cuáles son dichos números?

Solución:

1) $x + y = 9$	(La suma de dos números es 9).
2) $x - y = 1$	(Su diferencia es 1).
1) $x + y = 9$ 3) $x = 9 - y$	Tomamos la primera ecuación para encontrar el valor de "x" en términos de "y".
2) $x - y = 1$ $(9 - y) - y = 1$	En la segunda ecuación sustituimos el - valor encontrado de "x".
$9 - 2y = 1$	Quitando paréntesis y agrupando términos semejantes.
$-2y = 1 - 9$	Despejando para "y".
$\boxed{y = 4}$	Dividiendo ambos miembros entre (-2).
3) $x = 9 - y$ $x = 9 - (4)$ $\boxed{x = 5}$	Sustituyendo "y" por valor numérico tendremos el valor de "x".

	Comprobación:
2) $(5) - (4) = 1$	Sustituyendo ambas incógnitas en la segunda ecuación podemos afirmar -- que la pareja solución es (5, 4).

Otro Caso:

1) $2x + 4y = 2$ 2) $x - y = 4$	Presentación.
3) $x = 4 + y$	Despejando para "x" en términos "y".
4) $2(4 + y) + 4y = 2$	Sustituyendo en la otra ecuación el valor "x".
$8 + 6y = 2$	Quitando paréntesis y agrupando términos semejantes.
$6y = -6$	Despejando para 6y.
$\boxed{y = -1}$	Despejando para "y".
3) $x = 4 + (-1)$	Sustituyendo "y" por su valor numérico.
$\boxed{x = 3}$	Despejando para "x".
	Comprobación:
1) $2(3) + 4(-1) = 2$ $6 - 4 = 2$	Sustituyendo en la primera ecuación las incógnitas por sus valores numéricos nos damos cuenta que el con-- junto solución es (3, 1).

RESUMIENDO:

Los pasos mínimos que exige la solución simultánea por sustitución de un sistema de ecuaciones lineales, son:

PRIMERO: Despejar en una de las ecuaciones propuestas el valor de una incógnita en términos de la otra.

SEGUNDO: Sustituir en la otra ecuación la incógnita por su valor - detectado.

TERCERO: Despejar, hasta encontrar el valor numérico de la incógnita que nos quedó.

CUARTO: Sustituir el valor numérico de la incógnita detectada, a partir de la ecuación que nos dió el valor de una incógnita en términos de la otra.

QUINTO: Comprobar los valores numéricos de la pareja en cualquiera de las ecuaciones originales.

E J E R C I C I O 3 - 3

Resuelve cada sistema para x y y por el método de sustitución y verifica sus resultados.

1) $\begin{array}{rcl} 3x + 7y & = & 19 \\ -x + 7y & = & 31 \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcl} 2x + 9y & = & 11 \\ 4x - 3y & = & 1 \end{array}$

3) $\begin{array}{rcl} 2x - 7y & = & 17 \\ 4x - 5y & = & 25 \end{array}$ 4) $\begin{array}{rcl} 15x + 3y & = & 2 \\ 10x + 2y & = & 3 \end{array}$

5) $\begin{array}{rcl} 4x - 3y & = & 5 \\ 3x - 2y & = & 3 \end{array}$ 6) $\begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & -4 \\ 5x + 2y & = & -29 \end{array}$

7) $\begin{array}{rcl} 3x - 11y & = & 47 \\ 2x + 4y & = & -14 \end{array}$ 8) $\begin{array}{rcl} 7x - 9y & = & 66 \\ 8x + 5y & = & -1 \end{array}$

9) $\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 8 \\ x - 4y & = & -5 \end{array}$ 10) $\begin{array}{rcl} 5x - y & = & 19 \\ x + 3y & = & 7 \end{array}$

11) $\begin{array}{rcl} 14x + 9y & = & 37 \\ 11x - 8y & = & 14 \end{array}$ 12) $\begin{array}{rcl} -6x + 5y & = & 1 \\ -11x + 9y & = & 1 \end{array}$

C) SOLUCION SIMULTANEA POR IGUALACION.

Nuestro objetivo en este método, es encontrar en las dos ecuaciones dadas el valor de una de las variables en términos de la otra. -- Luego igualaremos los valores obtenidos para así eliminar una variable, posteriormente, mediante el despeje de incógnitas en ecuaciones, encontrar el valor numérico de una de estas. Por último mediante la sustitución numérica de la incógnita en cualquiera de los valores que se igualaron, encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo:

La diferencia entre el doble de un número y otro es 4 y la diferencia del triple de uno, con el triple del segundo es 3, ¿Cuáles serán dichos números?

1) $2x - y = 4$ (Diferencia del doble de un número con otro)

$3x - 3y = 3$ (Diferencia de los triples de ambos números)

$2x - y = 4$ Tomamos primera ecuación para encontrar el valor de "x".

$\boxed{x = \frac{4 + y}{2}}$

$3x - 3y = 3$ Usando la segunda ecuación para encontrar el valor de "x".

$\boxed{x = \frac{3 + 3y}{3}}$

$\frac{4 + y}{2} = \frac{3 + 3y}{3}$ Igualando valores obtenidos.

$12 + 3y = 6 + 6y$ Eliminando denominadores.

$\boxed{y = 2}$ Depejando para "y".

$x = \frac{4 + y}{2}$ Sustituyendo la "y", por su valor numérico encontrado.

$x = \frac{4 + 2}{2}$ Despejando para "x".

$\boxed{x = 3}$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 2(3) - 2 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera ecuación ambas incógnitas, por sus valores numéricos encontrados, podemos afirmar que la pareja solución es (3, 2).

Resumiendo:

Los pasos mínimos que exige la solución simultánea por el método de igualación de un sistema de ecuaciones lineales son:

Primero: Despejar en las dos ecuaciones propuestas, el valor de una variable en términos de la otra.

Segundo: Igualar los valores obtenidos en el paso anterior.

Tercero: Despejar, hasta encontrar el valor numérico de la incógnita que no se eliminó.

Cuarto: Sustituir en cualquiera de los valores obtenidos en el primer paso, la incógnita cuyo valor numérico encontramos en el paso número 3.

Quinto: Comprobar los valores numéricos de la pareja en cualquiera de las ecuaciones originales.

E J E R C I C I O 3 - 4

Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método de igualación.

1) $x + 6y = 27$
$3x - 2y = 1$

2) $3x + y = 23$
$2x - 5y = 13$

3) $3x + y = 9$
$2x + 3y = 13$

4) $-7x + 2y = 22$
$3x + 5y = 14$

5) $2x + 5y = -8$
$4x - 3y = 10$

6) $4x + y = 6$
$5x + 8y = 21$

7) $3x + y = 12$
$4x - y = 16$

8) $x + 7y = 28$
$3x - 2y = 15$

9) $3x + 2y = 8$
$2x + 5y = 9$

10) $4x - y = 11$
$x + 3y = 6$

4.- ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS.

Los métodos algebraicos nos ayudan también a encontrar los valores numéricos de tres o más incógnitas en igual número de ecuaciones.

Por ejemplo, haciendo uso del método de suma o resta, resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
1) & 3x & + & 2y & - & z & = & 7 \\
2) & 4x & - & 2y & - & z & = & 0 \\
3) & 2x & + & 2y & + & z & = & 6
\end{array}
$$

Haciendo combinaciones para eliminar la "z" en las ecuaciones 1 y 3 y 2 y 3, tenemos:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
1) & 3x & + & 2y & - & z & = & 7 \\
 & 2x & + & 2y & + & z & = & 6 \\
\hline
4) & 5x & + & 4y & & & = & 13
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcrcr}
2) & 4x & - & 2y & - & z & = & 0 \\
 & 2x & + & 2y & + & z & = & 6 \\
\hline
 & 6x & & & & & = & 6
\end{array}
$$

$$x = \frac{6}{6}$$

$$\boxed{x = 1}$$

Observamos que en este caso podemos eliminar dos incógnitas y directamente encontramos el valor de "x".

Sustituyendo el valor numérico de "x" en la suma de las ecuaciones 1 y 3 tenemos:

4) $5(1) + 4y = 13$

$4y = 8$ Por simple despeje.

$\boxed{y = 2}$

Ahora, en cualquiera de las tres ecuaciones originales sustituyamos los valores numéricos encontrados para detectar el valor de la incógnita faltante.

3) $2(1) + 2(2) + z = 6$

$2 + 4 + z = 6$

$z = 6 - 6$ Por simple despeje.

$\boxed{z = 0}$

Tomemos cualquiera de las ecuaciones restantes para comprobar.

1) $3(1) + 2(2) - 0 = 7$

$3 + 4 + 0 = 7$

Por lo que advertimos que la solución del sistema es: (1,2,0).

Combinando recursos resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

1)	$3x + 2y = 8$	
2)	$2x - z = 5$	
3)	$4y + z = 3$	
4)	$2x + 4y = 8$	Sumando ecuaciones 2 y 3
5)	$-6x - 4y = -16$	Multiplicando la ecuación 1 por (-2).
6)	$-4x = -8$	Sumando ecuaciones 4 y 5.
	$\boxed{x = 2}$	Despejando.
	$2(2) - z = 5$	(Sustituyendo "x" en la segunda ecua--
	$4 - z = 5$	ción).
	$-z = 1$	Despejando.
	$\boxed{z = -1}$	
	$3(2) + 2y = 8$	Sustituyendo "x" en la primera ecua---
	$6 + 2y = 8$	ción para encontrar "y" .
	$2y = 2$	Despejando.
	$\boxed{y = 1}$	
	$4(1) + (-1) = 3$	Comprobando en la tercera ecuación tenemos que la solución al sistema es --
	$4 - 1 = 3$	(2,1,-1).

E J E R C I C I O 3 - 5

A) RESUELVE LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES.

$$
\begin{array}{ll}
1)\; x + y + z = 6 & 2)\; 2x - 4y + 3z = 12 \\
 5x - 2y - z = -2 & 7x + 3y + 2z = -9 \\
 3x - 3y + 4z = 9 & 3x - 5y + z = 3 \\
3)\; 3x - 2y - 5z = 16 & 4)\; 2x + 3y + 4z = 3 \\
 2x - 3y - 7z = 10 & x - 6y + 10z = 1 \\
 5x - 4y - 2z = 3 & 5x - 12y + 2z = -2
\end{array}
$$

5) $\begin{aligned} 5x - y - z &= 3 \\ 20x + 4y - z &= 6 \\ x + 6y + 3z &= 2/5 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x - y &= -4 \\ y + z &= 5 \\ 3y - x &= 6 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 3x + 5y &= -1 \\ 4x - 7z &= 5 \\ 2y - 3z &= -7 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} 3x + y - z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= -9 \\ x + 3y - z &= 10 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x - 5y + z &= -1 \\ x + y - z &= -3 \\ x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x - y + 3z &= -9 \\ 3x + y + 2z &= -1 \\ 5x + y - z &= 10 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -9 \\ 3x - y + 2z &= -11 \\ 5x + 4y - z &= 10 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} 3x + 2z &= 5 \\ 2y - 3z &= 12 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$

B) ADECUA A CADA PROBLEMA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES QUE LE CORRESPONDA, RESUELVELO LUEGO CORRECTAMENTE Y COMPRUEBA LOS VALORES OBTENIDOS.

1) La suma de dos números es igual a 55, tres veces el primer número menos el doble del segundo nos dá 15. ¿Cuáles son los números?

2) La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, si la suma de dos de sus ángulos es igual a dos tercios del tercer ángulo y la diferencia de éstos mismos es igual a un tercio del tercer ángulo. Encuentre los ángulos.

3) La diferencia de 7 veces un número y 3 veces otro es 14. La suma del doble del primer número y 5 veces el segundo es 45. Hallar los números.

4) Dos trenes parten al mismo tiempo de estaciones con una distancia de 360 Km. y se encuentran al cabo de 4 hrs. Si hubieran caminado 7 hrs. en la misma dirección, se hubieran encontrado separados 210 Km. ¿Cuáles son las velocidades de los dos trenes?

5) En una alcancía hay 80 monedas cuyos valores son de $20.00 y $50.00. Si la cantidad ahorrada es de $3,160.00 ¿Cuántas hay de cada una?

6) Una persona tiene 3'100,000.00 invertidos en dos cuentas bancarias, una le dá el 5% y la otra 2.5% mensual. Si su ingreso total por concepto de intereses es de $135,000.00 al mes, ¿Cuánto tiene depósitado en cada una de éstas cuentas?

7) Una persona recibió $360,000.00 por concepto de rentas de dos residencias en 1 año; el precio de la renta de una de ellas era $2,500.00 por mes más que la otra ¿Cuánto recibió la persona por mes en cada una de las casas, tomando en cuenta que la casa estuvo desocupada dos meses?

8) Un comerciante tiene $55.00 en monedas de 20 y 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay si el número total de monedas es 125.

9) Las casas de una nueva colonia fueron valuadas en 3 y 3.5 millones de pesos respectivamente, el valor total de la colonia fué de $3,200 millones de pesos. Al final de 10 meses, la mitad de las casas más caras y dos tercios de las otras habían sido vendidas. Si la cantidad recibida de las ventas fué de $1,900 millones de pesos ¿Cuántas casas de cada tipo hay en la colonia?

A U T O E V A L U A C I O N

I.- RELACIONA LAS SIGUIENTES COLUMNAS.

1.- Conjunto de ecuaciones de 1er. grado con dos o más incógnitas.	( ) Sistema de ecuaciones lineales.
2.- Punto determinado por los valores de "x" y "y" que satisfacen al mismo tiempo o simultáneamente a ecuaciones lineales con dos ó más incógnitas.	( ) Punto de Intersección.
3.- Ecuación de la forma $A_1x_1 + A_2x_2 \dots + A_nx_n = 0$.	( ) Ecuación lineal en "n" variables.
4.- Proceso algebraico mediante el cual se encuentra la solución de un sistema.	( ) Solución simultánea de ecuaciones.
5.- Se representan como líneas rectas en el plano de coordenadas cartesianas.	( ) Ecuaciones lineales.
6.- Cuando en la gráfica de un sistema de dos ecuaciones, ambas rectas se intersectan en todos sus puntos, tenemos ecuaciones que son.	( ) Equivalentes.
7.- Cuando en la gráfica de un sistema de dos ecuaciones, sus rectas son paralelas, tenemos ecuaciones que son.	( ) Inconsistentes.
8.- Métodos de solución simultánea de ecuaciones.	( ) Solución simultánea por suma o resta. Solución simultánea por sustitución.
9.- Tiene como objetivo inicial el eliminar mediante la suma algebraica una de las dos incógnitas.	( ) Solución de Ec. simultánea por suma y resta.
10.- Tiene como objetivo inicial encontrar en cualquiera de las dos ecuaciones el valor de una incógnita en términos de la otra.	( ) Solución de Ec. simultánea por sustitución.

II.- TRACE LA GRAFICA DE LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES Y DETERMINE LAS COORDENADAS DEL PUNTO DE INTERSECCION.

1) $x + y = 18$
$x - y = 2$

2) $x + 6y = 36$
$5x - 4y = -2$

3) $9x + 4y = -14$
$5x + 4y = -19$

4) $6x + 4y = 10$
$2x - 6y = -20$

III.- RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL METODO DE ELIMINACION POR SUMA Y RESTA.

1) $2x + 2y = 8$
$x - y = 4$

2) $4x - 2y = 2$
$3x - y = 3$

3) $2x - 6y = 4$
$4x + 6y = 22$

4) $3x + y = 6$
$2x + 2y = 15$

IV.- RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL METODO DE SUSTITUCION.

1) $6x + 14y = 38$
$-x + 7y = 62$

2) $4x + 9y = 11$
$2x - 3y = 1$

3) $2x + y = 16$
$2x - 4y = -5$

4) $7x + 9y = 37$
$11x - 4y = 7$

V.- RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS.

1) $x + y + z = 12$
$10x - 2y + 2z = -4$
$6x - 3y + 4z = 9$

2) $3x + 10y = -2$
$2x - 7z = 5$
$4y - 3z = -7$

VI.- ESTABLEZCA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y RESUELVA POR CUALQUIERA DE LOS METODOS ALGEBRAICOS CONOCIDOS.

1) En una alcancía hay 80 monedas cuyos valores son de \$20.00 y 50.00. Si la cantidad ahorrada es de \$3,160.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

2) En una alcancía hay 120 monedas cuyos valores son \$50.00 y \$100.00. Si la cantidad ahorrada es de \$8,500.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

CUARTA UNIDAD

EXPONENTES Y RADICALES

Nuestra imaginación viaja al punto más alto del universo o al más profundo de la tierra, de ahí, se transporta a otros puntos y así sucesivamente.

Sin embargo, jamás olvidemos el origen para volver al lugar de partida...la tierra que pisamos.

V.- RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS.

1) $x + y + z = 12$
$10x - 2y + 2z = -4$
$6x - 3y + 4z = 9$

2) $3x + 10y = -2$
$2x - 7z = 5$
$4y - 3z = -7$

VI.- ESTABLEZCA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y RESUELVA POR CUALQUIERA DE LOS METODOS ALGEBRAICOS CONOCIDOS.

1) En una alcancía hay 80 monedas cuyos valores son de \$20.00 y 50.00. Si la cantidad ahorrada es de \$3,160.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

2) En una alcancía hay 120 monedas cuyos valores son \$50.00 y \$100.00. Si la cantidad ahorrada es de \$8,500.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

CUARTA UNIDAD

EXPONENTES Y RADICALES

Nuestra imaginación viaja al punto más alto del universo o al más profundo de la tierra, de ahí, se transporta a otros puntos y así sucesivamente.

Sin embargo, jamás olvidemos el origen para volver al lugar de partida...la tierra que pisamos.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará las leyes de los exponentes y de los radicales, en la simplificación de ejercicios con expresiones algebraicas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

El alumno:

1.- Definirá los conceptos de exponente, base y potencia.

2.- Enunciará las leyes de los exponentes.

3.- Utilizará las leyes de los exponentes, para la simplificación de expresiones algebraicas, que contengan radicales, para las operaciones fundamentales.

4.- Identificará los elementos de una expresión radical: Radical, Indice de un radical, Radicando y Raíz.

5.- Enunciará las leyes de los exponentes.

6.- Obtendrá la enésima raíz principal de una expresión radical.

EXPONENTES Y RADICALES

1.- HACIA DONDE VAMOS.

Hemos visto, hasta el momento, cómo de los principios y propiedades de los números reales han surgido un sin fin de juegos matemáticos que amplían y simplifican a la vez, la capacidad de raciocinio que poseemos.

Nos percatamos también, de la importancia implícita de las operaciones básicas y las leyes que las rigen, así como su aparición en toda relación de igualdad que celebramos.

Ahora, las mismas bases y principios generales, serán aplicados específicamente en dos nuevas operaciones, que brotan como consecuencia lógica de lo estudiado.

La potenciación con su respectivo inverso, la radicación, ambas, con los principios o leyes que son de su particular propiedad.

2.- EXPONENTES ENTEROS Y EXPONENTE CERO, SUS LEYES.

Por definición sabemos que $a^n = a.a.a....a$ (n factores).

Así por ejemplo tenemos que; $5^3 = 5.5.5 = 125$, es decir, una expresión exponencial puede presentarse en forma de potencia y ambas, a la vez, se desprenden de la multiplicación de una o varias bases multiplicadas por sí mismas "n" o "m" veces, según lo indique el exponente que posean.

Así, cualquier real puede escribirse en términos de sus factores primos como cuando decimos:

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$$1000 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \overbrace{5 \times 5 \times 5}^{5^3}$$

Representarlo así nos resulta largo y tendioso, cansado e impráctico, pudiendo con facilidad decir que $1000 = 2^3 \times 5^3$ y más fácil aún $(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1000$.

Observese como dos bases distintas al ser afectadas por igual exponente, mediante la propiedad asociativa, se reduce a una simple operación con una sola base, en este caso, (10), un solo exponente, (3) y una potencia, en el ejemplo, 1000, de aquí inferimos que: potencia es el resultado de elevar una base a un exponente determinado.

Tal operación le llamamos a partir de hoy potenciación y la -- describimos como: $\boxed{b^e = P}$

$$\boxed{\text{base}}^{\boxed{\text{exponente}}} = \boxed{\text{Potencia}}$$

V:gr.

$$3^4 = 81$$
$$(5a)^3 = 125a^3$$
$$(2xy)^2 = 4x^2y^2$$

Cuando analizamos la multiplicación y división con expresiones algebraicas, vimos el significado de a^n siendo $(a \neq 0)$ y "n" un entero positivo y demostramos los teoremas:

$$a^m . a^n = a^{m + n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m - n} & \text{Si } m > n \\ a^{m - n} = a^\circ = 1 & \text{Si } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n - m}} & \text{Si } m < n \end{cases}$$

Ahora, deseamos ampliar el concepto diciendo que tales leyes son aplicables cuando n (exponente) es un entero, dígase positivo, negativo o cero. Y aún más, según veremos después, podemos extenderlos a cualquier n (exponente) racional como:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 \quad y \quad \frac{a^n}{a^n} = a^{n - n} = a^\circ$$

luego: $a^\circ = 1$ ahora si: $a^{n - n} = a^\circ$

$$a^{n - n} = a^n . a^{-n} = 1$$

$$\therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Así podemos definir

$$\boxed{a^0 = 1,\ a \in R,\ a \neq 0}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in R,\ a \neq 0}$$

Con la última definición, es posible simplificar la ley de -- los exponentes que dice: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n - m}}$ cuando $m < n$ porque -- cuando esto sucede, entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n - m}} = a^{-(n - m)} = a^{m - n}$$

, de modo que, sin - importar que "m" o "n" sea mayor o menor podemos decir que:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m - n}$, siendo m, n $\in$ reales o lo que es mismo:

Cualquier factor puede ser transferido del numerador al denominador o viceversa, con el simple cambio del signo de su exponente.

Por ejemplo:

$$\frac{3x^{-2}y^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-3}} = \frac{6a^3b^3}{x^2y^4} \quad ; \quad \frac{8^0x^{-5}y^2}{6^{-2}x^2y^{-5}} = \frac{36y^7}{x^7}$$

Cuando los exponentes m y n son iguales, la propiedad anterior también es aplicable diciendo:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{n-m} = a^0 = 1$$

De esto desprendemos importantes teoremas que una vez demostrados los utilizamos como leyes de los exponentes diciendo:

Si a y b $\in R$, $(a,b \neq 0)$ y $m,n \in R$ (enteros) entonces:

A) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Multiplicación de bases iguales con exponentes distintos o iguales.

B) $(a \cdot b)^m = a^m b^m$ La potencia de un producto.

C) $(a^m)^n = a^{mn}$ La potencia de una potencia.

D) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ El cociente de dos potencias.

E) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ La potencia de un cociente.

Ejemplos: Simplifiquemos al máximo cada expresión dejando los resultados libres de exponentes negativos o nulos.

a) $x^4 \cdot x^5 = x^{4+5} = x^9$

b) $(x^4)^2 = x^{(4)(2)} = x^8$

c) $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$

d) $\left(\frac{x^2}{5y}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(5y)^3} = \frac{x^6}{125y^3}$

e) $\frac{3^{n+2}x^{2m}}{3^n x^m} = 3^2x^m = 9x^m$

f) $(-5)^2(-5)^{-2} = (-5)^0 = 1$

g) $b^5 \cdot b^{-4} = b^{5-4} = b$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}} = \frac{b^3}{a^3}$

i) $\frac{ax^{-3}}{by^{-4}} = \frac{ay^4}{bx^3}$

j) $\frac{1}{x^{-3}+y^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}$

$$\frac{1}{\frac{x^3+y^3}{(x^3)(y^3)}} = \frac{x^3y^3}{x^3+y^3}$$

Es importante observar que la transferencia del numerador al denominador con el simple cambio del signo del exponente se aplica exclusivamente cuando se trata de factores.

E J E R C I C I O 4 - 1

Efectuar las operaciones indicadas, haciendo uso de las leyes de los exponentes.

1.- $4^3 \cdot 4^7 =$ 2.- $7^2 \cdot 7^5 =$

3.- $3^{-3} \cdot 3^4 \cdot 3^0 =$ 4.- $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^0 =$

5.- $9^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^5 \cdot 9^{-8} =$ 6.- $a^2 \cdot a^4 =$

7.- $x^5 \cdot x^2 \cdot x^2 =$ 8.- $(x+y)^3 \cdot (x+y)^5 =$

9.- $(3ab)^{-2} \cdot (2ab)^3 =$ 10.- $a(a+2)^3 \cdot a^3(a+2)^4 =$

11.- $(a^2 \cdot b^{-2})^{-1} \cdot (a^3 \cdot b^0)^2 =$ 12.- $(2m^5)^3 \cdot (3mn^2)^2 \cdot (m^2n^2)^2 =$

13.- $(-m^3)^4 =$ 14.- $-(m^3)^4 =$

15.- $(x \cdot y^{-2}) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1})^{-1} =$ 16.- $(5x^2y^3)^{-2} \cdot (15x^3y^2)^3 =$

17.- $3m^2n^3(4mn^2 + 7m^2n) =$ 18.- $\dfrac{a^{-3} \cdot b^{-2}}{a^{-4}\, b^{-3}} =$

19.- $\dfrac{5^{-1}a^{-3} \cdot b^2}{7^{-1}\, a^{-5}\, b} =$ 20.- $\left(\dfrac{4x^2}{2xy}\right) \cdot \left(\dfrac{y}{8x^2}\right) =$

21.- $\dfrac{(8x^3y^2)^3}{(4x^5y^4)^4} =$ 22.- $\left(\dfrac{m^{-2}n^{-3}}{5^0p^{-2}}\right)^{-3} =$

23.- $\dfrac{27(m+n)^2 \cdot (m-n)^3}{18(m+n)^3 \cdot (m-n)^2} =$ 24.- $\dfrac{3^{-1}\ 5 + 4 + 5 + 2^{-1}}{3^{-1}\quad 2^{-1}} =$

25.- $\dfrac{x^{-1}y + xy^{-1}}{x^{-2} + y^{-2}} =$

3.- LOS RADICALES Y SU RELACION CON EXPONENTES FRACCIONARIOS.

A) Radicación.- Al analizar las operaciones básicas dejamos claro el hecho de que la adición tiene su inverso llamado sustracción y la división es la operación inversa a la multiplicación.

Acabamos de tratar la potenciación y decimos que, al igual que las demás, tiene su operación inversa a la que damos el nombre de Radicación.

Observemos el comportamiento exponencial en los siguientes ejemplos.

Si $x = 3$ decimos que: $x^2 = 9$ y $x^3 = 27$

$x = 4$ $x^2 = 16$ y $x^5 = 1024$

$x = 2$ $x^2 = 4$ y $x^7 = 128$

Invirtiendo el proceso diremos.

Si $x^2 = 9$ y $x^3 = 27$ entonces $x = 3$

" $x^2 = 16$ y $x^5 = 1024$ " $x = 4$

" $x^2 = 4$ y $x^7 = 128$ " $x = 2$

En el primer caso partimos de un número para encontrar el valor de una determinada potencia, en tanto; en el segundo, determinamos la base que originó a la potencia dada. A esta operación le llamamos extracción de raíz, dígase cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, sexta, etc., cuando se trata de la extracción de una raíz cuadrada, simplemente le denominamos extracción de raíz.

Ejemplos:

Si: $(3a)^2 = 9a^2$ entonces: $\sqrt{9a^2} = 3a$

$(7a^3b^2)^3 = 343a^9b^6$ " $\sqrt[3]{343a^9b^6} = 7a^3b^2$

$(2a^2b^3c)^4 = 16a^8b^{12}c^4$ " $\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4} = 2a^2b^3c$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ " $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$

$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ " $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = x + 5$

La radicación la representamos mediante el símbolo $\sqrt[n]{x}$ donde la "n" n-ésima recibe el nombre de índice del radical y nos indica la raíz que deseamos encontrar. El símbolo $\sqrt{}$ se llama radical y la "x" representa al radicando, es decir, la potencia que resultó de elevar una base a un exponente "n" y de la cual deseamos encontrar la base o raíz que le originó.

B) Raíz principal y raíz negativa.

Si partimos del hecho de que cualquier base, elevada a un exponente par nos resulta una potencia real, positiva, entonces diremos que cualquier potencia real positiva tiene exactamente una pareja de raíces: una positiva llamada Principal y la otra denominada raíz Negativa.

Un número negativo no tiene raíces reales de orden par porque no existe base que elevada a un exponente par nos resulte una potencia negativa.

Así tenemos que:

$(2)^2 = 4$ y: $(-2)^2 = 4$ por lo que: $\sqrt{4} = \pm 2$

$(3)^2 = 9$ $(-3)^2 = 9$ " $\sqrt{9} = \pm 3$

$(2)^4 = 16$ $(-2)^4 = 16$ " $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

$(3)^4 = 81$ $(-3)^4 = 81$ " $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

En cambio qué base real podrá hacer verídica cualquiera de las siguientes relaciones de igualdad.

$$\left.\begin{array}{lll} (x)^2 = -4 & \text{para poder decir:} & \sqrt{-4} \\ (x)^2 = -9 & \text{"} & \sqrt{-9} \\ (x)^4 = -16 & \text{"} & \sqrt[4]{-16} \\ (x)^4 = -81 & \text{"} & \sqrt[4]{-81} \end{array}\right\} \text{No existe una Raíz Real.}$$

En tal caso, estamos cayendo en un campo de números que se salen del contexto de los reales y les llamamos números imaginarios, mismos que analizaremos cuando nos corresponda tratar el campo de los números complejos.

Un radicando Real (Positivo o Negativo) tiene exactamente una sola raíz de orden impar siendo su signo igual al singo de radicando que le dió origen.

Así tenemos que:

$$\sqrt{36} = \pm 6 \; ; \; -\sqrt{81} = -9 \; ; \; \sqrt[3]{-27} = -3; \; \sqrt[5]{-32} = -2$$

C) EXPONENTES FRACCIONARIOS.

Si utilizamos la ley de la potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{mn}$, entonces, estamos en posibilidad de demostrar que una expresión algebraica en forma de radical puede presentarse como una expresión algebraica con exponencial fraccionario m/n donde "m" es un entero positivo o negativo y "n" es un entero positivo.

Esto es, haciendo $m = \frac{1}{n}$ podemos tener $a^{1/n}$, aplicando la potencia de una potencia obtendremos la siguiente igualdad:

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

Tal igualdad nos demuestra que la n-ésima potencia de $a^{1/n}$ es igual a " a ". Siendo lo mismo, que $a^{1/n}$ es la n-ésima raíz de "a" de donde inferimos una nueva definición diciendo:

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

Para tal definición si el índice "n", es del orden par, la "a" deberá ser positiva, no así cuando el índice "n" representa a un número del orden impar.

En base a la misma ley y haciendo $m \neq 1$ tendremos que:

$$\boxed{a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

o bien

$$\boxed{a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m}$$

La simple **observación** nos permite asegurar que: cuando una expresión algebraica es exponencial fraccionaria, al cambiarla a la forma de radical, el denominador de la fracción exponencial está representando al índice del radical; por ejemplo:

Expresiones Algebraicas:

Forma Exponencial Fraccionaria:		Forma Radical:
$a^{3/4}$	=	$\sqrt[4]{a^3}$
$x^{3/5}$	=	$\sqrt[5]{x^3}$
$3ax^{1/2}$	=	$3a\sqrt{x}$
$(-4xyz)^{3/5}$	=	$\sqrt{(-4xyz)^3}$

D) Reducción de exponentes fraccionarios a su mínima expresión.

La misma ley de la potencia de una potencia nos permite ahora demostrar que cuando a los exponentes fraccionarios se les aplican los principios de divisibilidad, las expresiones algebraicas de esta naturaleza, se reducen a su mínima expresión, así encontraremos que:

$$\boxed{a^{cm/cn} = (a^{m/n})^{c/c} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Por ejemplo: Simplifiquemos cada expresión completamente y dejémosla libre de exponentes negativos o nulos.

a) $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$ o bién:

$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b) $16^{-3/4} = \dfrac{1}{16^{3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(2^4)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^{12}}}$

$= \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

c) $(-243)^{3/5} = \sqrt[5]{(-243)^3} = \sqrt[5]{(-3^5)^3} = \sqrt[5]{-3^{15}} = -3^3$

$= -27$

d) $\left(\dfrac{9a^{-1/3}}{b^{2/3}c^{-2}}\right)^{-1/2} = \dfrac{3^{-2/2}a^{1/6}}{b^{-2/6}c^{2/2}} = \dfrac{a^{1/6}b^{1/3}}{3c}$

$= \dfrac{a^{1/6}b^{1/3}}{3c}$

e) $\left(a^{5/3}b^{3/4}\right)\left(a^{1/3}b^{5/4}\right) = a^{5/3+1/3}b^{3/4+5/4} = a^{6/3}b^{8/4} = a^2b^2$

E J E R C I C I O 4 - 2

Expresar los siguientes radicales en su forma más simple.

1.- $\sqrt{25} =$

2.- $\sqrt[3]{-8} =$

3.- $\sqrt{36x^4y^2} =$

4.- $\sqrt{49a^4b^2} =$

5.- $\sqrt[4]{81a^8b^4} =$

6.- $\sqrt[4]{625x^4y^{12}} =$

En las siguientes expresiones cambiar su forma de exponencial a radical.

7.- $(3)^{1/2} =$

8.- $(ab)^{1/3} =$

9.- $(2xy)^{2/3} =$

10.- $(5ab)^{2/3} =$

11.- $(3x^2)^{1/4} =$

12.- $(a^{1/3})^{1/3} =$

Simplificar cada expresión dejándola libre de exponentes negativos o nulos.

13.- $\dfrac{5^{-3} \cdot 5^4}{5^3} =$

14.- $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-2} =$

15.- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} =$

16.- $(5^{-2} + 3^{-2})^{-2} =$

17.- $(3^2 + 7^3)^0 =$

18.- $\dfrac{3\,(a + b)}{(a - b)^{-1}} =$

Encontrar el valor de cada expresión.

19.- $25^{-1/2} =$ 20.- $9^{3/2} =$ 21.- $27^{-1/3} =$

22.- $\left(\frac{27}{125}\right)^{2/3} =$ 23.- $\left(\frac{81}{16}\right)^{1/4} =$ 24.- $\left(\frac{49}{36}\right)^{-3/2} =$

4.- LAS LEYES DE LOS RADICALES.

Así como las leyes con que operamos la resta y la división se desprendieron respectivamente de las propiedades de adición y la multiplicación, ahora, de las propiedades de los exponentes surgen una serie de leyes que aplicamos en el tratamiento de radicales, condicionándolas a radicandos exclusivamente positivos en el caso de índices de orden par y denominadores > 0 en el exponente fraccionario.

Así diremos:

Leyes de los Radicales
- a) Raíz Exacta
- b) Productos
- c) Cocientes
- d) Simplificación
- e) Raíz de Raíz
- f) Productos con Indices diferentes.

RAIZ EXACTA.

A) $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; porque $(a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a$

Producto de radicales de igual índice.

B) $\sqrt[n]{ab} = \left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{b}\right)$ porque $(ab)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)\left(b^{1/n}\right)$

Cociente de Radicales de igual índice.

C) $\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ porque $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

Simplificación de Radicales.

D) $\sqrt[cn]{a^{cm}} = \sqrt[n]{a^m}$ porque $a^{cm/cn} = a^{m/n}$

La Raís de una Raíz.

E) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ porque $\left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/nm}$

Producto de los Radicales con Indices diferentes.

F) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt{a^{mq+np}}$ porque $a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

Las leyes aquí descritas las utilizamos para simplificar radicales aplicándolas también en las operaciones fundamentales.

5.- SIMPLIFICACION DE RADICALES.

Los casos más comúnes de simplificación son, entre otros:

A) Simplificación del radicando.
B) Racionalización de fracciones que poseen radicales.
C) Simplificación del índice del radical.
D) Inclusión de factores al símbolo de radical.
E) La Raíz de una Raíz.

A).- Simplificación del radicando.- Un número real tiene tantas representaciones como nosotros queramos o necesitemos, basta tan solo aplicar con acierto las propiedades de los reales para advertirlo.

Ahora, nos encontramos ante una nueva situación a la que denominamos "Simplificación de Radicales". Esta operación consiste en presentar un radical en su forma más simple o en su mínima expresión.

Cuando el radicando es una potencia exacta del índice señalado en el radical, su simplificación no presenta dificultad alguna puesto que se reduce a la simple extracción de la raíz solicitada como cuando decimos:

Ilustración $\sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplo: Obtengamos las raíces solicitadas.

$\sqrt{4} = \pm 2;$ $\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2;$ $\sqrt[5]{-243x^{10}y^{15}};$ $-3x^2y^3;$

$\sqrt{64a^4b^6} = \pm 8a^2b^3$; $-\sqrt[4]{16x^4} = -2x$

En cambio, cuando se trata de radicandos cuya raíz no es exacta o de potencias no exactamente divisibles entre el índice del radical, la situación se torna un poco más delicada y su simplificación consiste en descomponer el radicando en dos factores, tales que, uno de ellos, sea divisible entre el índice del radical, mismo al que le extraeremos la raíz indicada, dejándola fuera de los alcances del radical en tanto que, el otro factor, quedará dentro del radical y su raíz señalada.

Ilustración: $\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m . a^n} = a\sqrt[n]{a^m}$

Por ejemplo:

Simplifiquemos el radicando en cada uno de los siguientes casos.

a) $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{16} . \sqrt{3} = \pm 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt[3]{8.3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3} = 2/3\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{72a^3b^2} = \sqrt{36.2a^2.a.b^2} = \pm 6ab\sqrt{2a}$

d) $\sqrt[3]{8(a+b)^{10}} = \sqrt[3]{2^3(a+b)^9(a+b)} = 2(a+b)^3\sqrt[3]{(a+b)}$

e) $\sqrt[5]{64x^6} = \sqrt[5]{2^5.2x^5.x} = 2x\sqrt[5]{2x}$

B) Racionalización de Fracciones.- Racionalizar una fracción, significa dejarle su denominador libre de expresiones radicales, para lograrlo utilizamos el recurso del elemento de identidad para la multiplicación expresado a nuestra entera conveniencia.

Racionalicemos los denominadores en las siguientes fracciones.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{\frac{3}{4a^2}} = \frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{4a^2}} . \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}} = \frac{\sqrt[3]{-6a}}{\sqrt[3]{8a^3}} = \frac{\sqrt[3]{-6a}}{2a} = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{-6a}$

c) $\sqrt[5]{\frac{b}{16x^4}} = \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{16x^4}} . \frac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{2x}} = \frac{\sqrt[5]{2bx}}{\sqrt[5]{32x^5}} = \frac{\sqrt[5]{2bx}}{2x} \frac{1}{2x}\sqrt[5]{2bx}$

C) Simplifiación del Indice del Radical.- Cuando hablamos de fracciones, buscamos su equivalente aplicando los principios de divisibilidad y logramos reducirlas a su mínima expresión.

Ahora, encontraremos radicales cuyo índice y radicandos expresan raíces muy elevadas y que, haciendo uso de los mismos principios, podemos reducirlas para representarlas como radicales de un orden menor.

Ilustración: $\sqrt[cn]{a^c} = \sqrt[n]{a}$

Por ejemplo: Reduzcamos el orden de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{36x^2} = \sqrt[4]{(6x)^2} = \sqrt{6x}$

b) $\sqrt[6]{27x^3y^6} = \sqrt[6]{(3xy^2)^3} = \sqrt{3xy^2} = y\sqrt{3x}$

c) $\sqrt[6]{81a^9b^4} = \sqrt[6]{(3a^2b)^4} = \sqrt[3]{9a^4b^2} = a\sqrt[3]{9ab^2}$

d) $\sqrt{\frac{32x^5y^{10}}{z^5}} = \sqrt{(\frac{2xy^2}{z})^5} = y\sqrt{\frac{2x}{z}} = y/z\sqrt{2xz}$

e) $\sqrt[5]{\frac{243a^5b^{10}}{c^5}} = \sqrt[5]{(\frac{3ab^2}{c})^5} = \frac{3ab^2}{c}$

D) Inclusión de factores al símbolo de Radical. Si fuimos capaces de simplificar el radicando de un radical mediante el uso de la factorización y el principio de la divisibilidad estimamos que, vía la multiplicación y potenciación, podemos ahora incluir dentro de cualquier radical a los factores o coeficientes que nos propongamos.

Ilustración: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$

Ejemplos: Incluyamos dentro del signo de radical los coeficientes -- contenidos en las siguientes expresiones.

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{5(4)} = \sqrt{20}$

b) $3x\sqrt[3]{2y} = \sqrt[3]{2y(3x)^3} = \sqrt[3]{54x^3y}$

c) $2a\sqrt{1 + \frac{1}{4a^2}} = \sqrt{4a^2(1 + \frac{1}{4a^2})} = \sqrt{4a^2 + 1}$

d) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{3y^3}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}(\frac{3y^3}{x})} = \sqrt{3xy}$

E) La Raíz de una Raíz.- Cuando hablamos de las bases y principios - aplicables en la multiplicación, analizamos las leyes de los exponentes y entre otras, vimos el comportamiento de la potencia de - una potencia y dejamos establecido que: $(a^m)^n = a^{mn}$, pues bien -- ahora nos encontramos ante la raíz de otra raíz y tal vez de ---- otra, esta operación según veremos, se reduce a la simple multi-- plicación de los índices de las raíces solicitadas.

Ilustración: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ porque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/m}$

$= a^{1/mn}$

$= \sqrt[mn]{a}$

Ejemplos: Expresamos las siguientes raíces de raíces con un solo índice.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{5}}} = \sqrt[24]{45}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt{3x}} = \sqrt[6]{12x}$ d) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

E J E R C I C I O 4 - 3

Simplificar al máximo los siguientes radicales.

1.- $\sqrt{28}$ 2.- $\sqrt{20}$ 3.- $\sqrt[3]{54}$

4.- $\sqrt[3]{-40}$ 5.- $\sqrt{18x^2y^4}$ 6.- $\sqrt[3]{125x^5y^6}$

7.- $\sqrt{\frac{4}{5}}$ 8.- $\sqrt{\frac{2x}{5y}}$ 9.- $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

10.- $\sqrt[3]{-\frac{3x^2}{25}}$ 11.- $\sqrt[4]{\frac{y}{9a^2}}$ 12.- $\sqrt{25a^2b^2}$

13.- $\sqrt[5]{\frac{-32x^{10}}{y^4}}$ 14.- $\sqrt{32x^5}$ 15.- $\sqrt[4]{\frac{x^2 - 10x + 25}{25x^2}}$

Aplicando las leyes de exponentes y radicales introducir el coeficiente como parte de los factores del radicando.

16.- $3\sqrt{5}$ 17.- $3a\sqrt{b}$ 18.- $5a\sqrt{\frac{a+1}{25a^2}}$

19.- $3x\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{x^2}}$ 20.- $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{5n^3}{m^5}}$ 21.- $\frac{7m}{n^2}\sqrt{\frac{3n^5}{49}}$

Empleando las leyes de los radicales, expresar cada uno de los - siguientes problemas en función de un solo radical.

22.- $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ 23.- $\sqrt[3]{\sqrt{m^6}}$ 24.- $\sqrt{3\sqrt[3]{81}}$

25.- $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}$ 26.- $\sqrt{2a\sqrt[3]{8a^4}}$ 27.- $\sqrt{x\sqrt[4]{256x^7}}$

6.- ADICION Y SUSTRACCION DE RADICALES.

Al tratar la adición y sustracción de términos algebraicos, dejamos establecido que cada término se suma o se resta con su semejante.

Hoy, el principio sigue vigente, salvo que, ahora, el concepto se amplía a lo que llamaremos "radicales semejantes", diciendo que son aquellos cuyo índice y radicandos son iguales, de donde, podemos afirmar que la adición y sustracción de radicales se concreta a la suma y resta de los coeficientes de radicales semejantes, dejando indicada la operación cuando se trata de radicales no semejantes.

Ahora bien, si los radicales a sumar o restar, están dispuestos en forma tal que aparenten no ser semejantes, hasta donde sea posible, debemos aplicarles las leyes de los radicales estudiados y mediante su simplificación, detectar su semejanza para efectuar las operaciones solicitadas.

Ejemplos:

Simplificar y efectuar las operaciones que en cada caso se indican.

a) $3\sqrt{20} + 6\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$

$= 3\sqrt{(4)(5)} + 6\sqrt{(9)(5)} - 3\sqrt{(16)(5)}$

$= 6\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

$= 24\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

$= 12\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{x^2y} + \sqrt{4x^2y} - \sqrt{25x^2y}$

$= 3x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} - 5x\sqrt{y}$

$= 5x\sqrt{y} - 5x\sqrt{y}$

$= 0$

c) $2\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{9}$

$= 2\sqrt{9.3} - \frac{6}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{3x^4} - 3\sqrt[3]{81x} - \sqrt{3x}$

$= x\sqrt[3]{3x} - 9\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

$= (x - 9)\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

$= (x - 9)\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

La operación la dejamos indicada por tratarse de radicales no semejantes. $\sqrt[3]{3x}$ y $\sqrt{3x}$

e) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{y}\sqrt{xy} + \frac{1}{x}\sqrt{xy}$

$= \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\sqrt{xy} = \left(\frac{x + y}{xy}\right)\sqrt{xy}$

E J E R C I C I O 4 - 4

Realizar las operaciones indicadas y simplificar lo más posible tratando de obtener radicales semejantes.

1.- $\sqrt{98} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$

2.- $\sqrt{250} - \sqrt{40} + \sqrt{160}$

3.- $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

4.- $\sqrt{245} - \sqrt{80} - \sqrt{125}$

5.- $\sqrt{24} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - 3\sqrt{6}$

6.- $\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{1}{6}} + 5\sqrt{\frac{2}{3}}$

7.- $\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{27}}$

8.- $\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{20} - \sqrt{80}$

9.- $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625}$

10.- $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{54}$

11.- $\sqrt{9x^3y} + \sqrt{16xy^3} - \sqrt{4xy}$

12.- $\sqrt{50x^3} - 3\sqrt{98x} + \sqrt{8x}$

13.- $\sqrt{3xy^2} + \sqrt{27x^3y^4} - 5\sqrt{12x^5y^6}$

14.- $\sqrt[3]{3xy} - \sqrt[3]{24x^4y^4} - \sqrt[3]{81xy^7}$

15.- $\sqrt[3]{2a^4} - \sqrt[3]{16ab^3} + \sqrt[3]{54a^4b^6}$

16.- $\sqrt[3]{135a^2b^5} + \sqrt[3]{40a^5b^5} - \sqrt[3]{5a^5b^2}$

17.- $\sqrt[3]{54m^4} - \sqrt[3]{24m} + \sqrt[3]{27m^6}$

18.- $\sqrt[4]{4m^2} - \sqrt{18m^3} + \sqrt{32m}$

19.- $\sqrt{5m^3} - \sqrt[4]{25m^6} + \sqrt[6]{125m^6}$

20.- $\sqrt{\frac{3}{a}} - \sqrt{\frac{1}{3a}} - \sqrt{\frac{a}{3}}$

21.- $\sqrt{12m^3} + 5\sqrt[4]{9m^2} - 9\sqrt[6]{27m^3}$

22.- $\sqrt{\frac{3b}{2a}} - \sqrt{\frac{2a}{3b}} + \sqrt{\frac{1}{6ab}}$

7.- MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES.

En base a las leyes de los radicales, podemos decir que el producto o el cociente de dos radicales del mismo índice, se encuentra, respectivamente, mediante la multiplicación o la división de sus radicandos.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad ó \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Cuando deseamos hallar un producto cuyos radicales contengan índices diferentes, precisamos expresarlos en un solo radical donde el índice sea mayor y represente al m.c.m. de los índices dados.

En tal caso, elevamos el ó los índices de los radicales considerados como factores haciendo uso de la ley que expresa el producto de radicales de índices diferentes cuya representación simbólica es:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq + np}}$$

Ejemplos: encontremos en cada caso el producto de radicales solicitado.

a) $2\sqrt[3]{3x} \cdot 5\sqrt[3]{3x^2y} = 10\sqrt[3]{9x^3y} = 10x\sqrt[3]{9y}$

b) $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 6\sqrt{25} - 11\sqrt{10} + 4\sqrt{4}$

$= 30 - 11\sqrt{10} + 8$

$= 38 - 11\sqrt{10}$

c) $(7\sqrt{x} - 4\sqrt{y})^2 = 49x - 56\sqrt{xy} + 16y$

d) $3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt[3]{2} = 15\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = 15\sqrt[6]{108}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = 3\sqrt[4]{3}$

En cambio para llegar al cociente de dos radicales lo hacemos aplicando la ley que nos dice $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ cuando se trata de radicales de índices iguales, en cambio si son diferentes, debemos igualarlos para someterlos luego a la ley de referencia.

El cociente de radicales lo determinamos cuando racionalizamos las fracciones y el numerador de la misma lo presentamos en su forma más simple.

Ejemplo: Determinemos los cocientes en cada una de las siguientes fracciones con radicales.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = 1/5\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2x}{3a^2}} = \sqrt[3]{\frac{18ax}{27a^3}} = \frac{1}{3a}\sqrt[3]{18ax}$

c) $\sqrt[4]{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)^3}} = \sqrt[4]{\frac{(a + b)^3}{(a + b)^4}} = \frac{1}{a + b}\sqrt[4]{(a + b)^3}$

d) $\sqrt[3]{\frac{(2x + 1)^2}{9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{3x(2x + 1)^2}{27x^3}} = \frac{1}{3x}\sqrt[3]{12x^3 + 12x^2 + 3x}$

e) $\frac{8\sqrt[3]{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt[3]{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt[6]{3^2 \cdot 2^3}}{2\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt[6]{72}}{4} = 2\sqrt[6]{72}$

E J E R C I C I O 4 - 5

A.- Multiplica y simplifica los siguientes radicales.

1.- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

2.- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}$

3.- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{12}$

4.- $\sqrt{8xy^2} \cdot \sqrt{3x^3y}$

5.- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10}$

6.- $\sqrt[3]{12x^2} \cdot \sqrt[3]{9x}$

7.- $\sqrt{3}\,(\sqrt{6} + \sqrt{18})$

8.- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

9.- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

10.- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

11.- $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$

12.- $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{18}$

13.- $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}$

14.- $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{16}$

15.- $\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{7}$

16.- $\sqrt{3x}\cdot\sqrt[3]{3x}\cdot\sqrt[4]{3x^2}$

17.- $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{4}}$

18.- $\sqrt{x+\sqrt[3]{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt[3]{y}}$

B.- Racionaliza y simplifica las divisiones que se solicitan.

19.- $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$

20.- $\sqrt{5}\div\sqrt{20}$

21.- $\sqrt{2a^2}\div\sqrt{32a}$

22.- $\sqrt{3a}\div\sqrt{27a^4}$

23.- $3\sqrt{5a^3}\div\sqrt{45a}$

24.- $10\sqrt{5x^3}\div 2\sqrt{20x}$

25.- $\sqrt[3]{54}\div\sqrt[3]{2}$

26.- $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{3a^2}$

27.- $\sqrt[3]{18a^4}\div\sqrt[3]{9a}$

28.- $\sqrt[3]{x}\div\sqrt{x}$

29.- $\sqrt{2x^2}\div\sqrt[3]{4x}$

30.- $\sqrt[3]{5x}\div\sqrt{5x}$

31.- $\dfrac{5}{5-\sqrt{5}}$

32.- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

33.- $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

34.- $\dfrac{7}{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}$

35.- $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

36.- $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

A U T O E V A L U A C I O N

I.- Sobre cada línea escribe la respuesta que complete correctamente la proposición dada.

1.- ______________________ Es el resultado de elevar una base a un exponente determinado.

2.- ______________________ Representa a la operación inversa de la potenciación.

3.- ______________________ Significa dejarle su denominador libre de expresiones radicales.

4.- ______________________ Símbolo mediante el cual representamos la radicación.

5.- ______________________ No tiene raíces reales de orden -- par porque no existe base que elevada a un exponente par nos - resulte una potencia negativa.

6.- ______________________ Es el número que podemos expresar como cociente de dos enteros.

7.- ______________________ Consiste en llevar un radical a su mínima expresión.

8.- ______________________ Radicales que tienen tanto el índi ce como el radicando iguales.

II.- Relaciona ambas columnas escribiendo dentro de cada paréntesis el número que establezca la correspondencia adecuada.

1.- $a^m \cdot a^n$		
2.- $(ab)^m$	( )	$\frac{a^m}{b^m}$
3.- $(a^m)^n$	( )	a^{mn}
4.- $\frac{a^m}{a^n}$	( )	a^{m+n}
5.- $\left(\frac{a}{b}\right)^m$	( )	$12\frac{y^2}{x^5}$
6.- x^9	( )	$a^m b^m$
7.- 1	( )	a^{m-n}
8.- ab^m	( )	$x^5 \cdot x^4$
9.- x	( )	$x^6 \cdot x^{-2} \cdot x^{-4}$
10.- $\frac{4x^{-3}y^{-5}}{3^{-1}x^2y^{-7}}$	( )	$4\frac{y^6}{x^5}$
11.- $\frac{2^2x^{-7}y^4}{3^0x^{-2}y^{-2}}$	( )	$\frac{x^9}{64y^6}$

12.- $\left(\frac{x^3}{4y^2}\right)^3$

13.- $\frac{x^3 \cdot x^3}{8y^2 \cdot 8y^3}$

III.- Realiza lo solicitado en cada caso.

A) Simplifica cada expresión, efectuando las operaciones indicadas y dejando el resultado sin exponentes nulos o negativos.

1.- $4^5 \cdot 4^2 =$

2.- $(a^4)^4 =$

3.- $(5 \cdot 3)^0 =$

4.- $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1} =$

5.- $\left[(m-1)^3\right]^2 =$

6.- $\frac{9^{-2} \cdot 9^{-3}}{3^{-9} \cdot 3} =$

7.- $\frac{a^{-4} + b^{-4}}{a^{-4} - b^{-4}} =$

8.- $\frac{16a^3b^2c^{-3}}{4ab^{-5}c^{-6}} =$

9.- $\left(\frac{2a^{-2}b^{-3}}{4a^{-4}b^{-3}}\right)^2 \left(\frac{3ab^2}{a^2b^3}\right)^3 =$

10.- $\left(\frac{6ab^2}{b^3}\right)^2 \left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 =$

B) Presenta cada uno de los siguientes radicales en la forma más -- simple.

1.- $\sqrt{12} =$

2.- $\sqrt{\frac{2}{3}}$ =

3.- $\sqrt[3]{\frac{2a}{3b}}$ =

4.- $\sqrt[3]{\frac{a^4b^4}{c^2}}$ =

5.- $\sqrt[4]{\frac{4a^6}{a^2 - 2a + 1}}$ =

C) Cambia cada expresión a su forma radical y simplifícala.

1.- $8^{5/2}$ =

2.- $9^{-3/2}$ =

3.- $27^{2/3}$ =

4.- $64^{-1/3}$ =

5.- $x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ =

D) Las siguientes raíces de raíces, preséntalas en función de un solo radical simplificado al máximo.

1.- $\sqrt[4]{\sqrt{5}}$ =

2.- $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$ =

3.- $\sqrt[4]{64\sqrt{64}}$ =

4.- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$ =

5.- $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{6}}$ =

IV.- Efectúa las operaciones señaladas en cada inciso, aplicando leyes de radicales y simplificando al máximo cada resultado.

A) ADICION Y SUSTRACCION.

1.- $2\sqrt{128} - \sqrt{200}$ =

2.- $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ =

3.- $\sqrt{20} - 2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}$ =

4.- $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{54}$ =

5.- $\sqrt{\frac{8}{3}} + 5\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{6}}$ =

B) MULTIPLICACION Y DIVISION.

1.- $\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{10}$ =

2.- $\sqrt{3ab} \cdot \sqrt{18a^2b^4}$ =

3.- $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2}$ =

4.- $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{4}$ =

5.- $\sqrt{72} \div \sqrt{8}$ =

6.- $\sqrt{68} \div \sqrt{17}$ =

7.- $\sqrt[3]{21a} \div \sqrt[3]{7a^2}$ =

8.- $\sqrt{63} \div \sqrt{7}$ =

QUINTA UNIDAD

LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

Actualmente:

Calcular Productos, Cocientes, Potencias y Raíces es sorprendente; conocer el origen de tales logros, resulta maravilloso.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará las diferentes propiedades o leyes de los logaritmos, para simplificar operaciones -- aritméticas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

El alumno:

1.- Definirá el concepto de logaritmo.

2.- Distinguirá las partes de cualquier logaritmo común.

3.- Usará las tablas de los logaritmos, para encontrar el logaritmo y antilogaritmo de cualquier número.

4.- Enunciará las propiedades de los logaritmos.

5.- Utilizará las porpiedades de los logaritmos y sus tablas, en el cálculo de operaciones aritméticas complejas.

LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES.

1.- CURIOSA SITUACION.- Se ha dicho que la artimética es la parte de la matemática llamada de "las cuatro operaciones", aunque en realidad sean dos con sus respectivas inversas.

Durante mucho tiempo, el hombre pensó y creyó que el mundo matemático se concretaba tan solo al campo aritmético y sus cuatro operaciones.

Fué durante el siglo XVI y gracias al abogado francés VIETA, a quién se le considera "el padre del álgebra", cuando por vez primera se comienzan a usar letras y símbolos a fin de descifrar códigos y - claves empelando la ecuación para solucionar incógnitas.

A partir de entonces y gracias a los estudiosos de los principios algebraicos sentados, se fueron incrementando el número de operaciones surgiendo la "quinta operación" llamada también "Potenciación" o elevación de Potencias, pero, aquí, aparece una curiosa situación: a diferencia de la suma y la multiplicación que cuentan cada una de ellas con su respectiva operación inversa, la Potenciación $\boxed{b^e = P}$, trae aparejadas dos inversas.

La primera consiste en la búsqueda de la base "b", es decir la - extracción de la raíz o radicación. La segunda inversa se preocupa -- por la localización de "e", o sea el exponente al qué fue elevada la base "b" para que nos resulta la Potencia "P", a esta nueva operación le llamamos Logaritmación u operación logarítmica, conocida también como la séptima operación matemática.

Por esta razón hay quienes dicen que el álgebra es "la aritmética de las siete operaciones".

2.- ALGO DE HISTORIA.- Gracias al descubrimiento de los logaritmos, realizado por el matemático inglés Juan Néper, las operaciones de cálculo se aceleraron y simplificaron a la vez.

Con la aparición de las primeras tablas logarítmicas, el agotamiento físico y mental de los científicos de su época se vió reducido y el rendimiento exaltado.

Los inventos de Néper sirvieron de fundamento para que Briggs, contemporáneo de áquel, inventara la famosa tabla de logaritmos decimales y ambos, han sido la base para que en la actualidad nosotros gocemos de las bondades que ofrecen las reglas de cálculo, las máquinas calculadoras y las sofisticadas computadoras.

3.- LOGARITMOS.

A) Sus partes y definición.- Mediante el empleo de los exponentes y sus leyes, realizamos, en forma simplificada multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, tanto con números como con variables y vimos que el fundamento con que operan, se basa en los principios de la adición y sustracción.

En este capítulo, nos daremos cuenta de que las citadas operaciones pueden simplificarse todavía más, logrando encontrar más rápida y fácilmente, los resultados deseados, mediante el empleo de logaritmos.

Aseguramos que $2^3 = 8$ porque 3 es el exponente al que fue elevada la base 2 para que la igualdad sea cierta.

Ahora, considerando al 3 respecto del 8, podemos decir que 3 es el logartimo de 8 y la base es 2.

De esto formamos una nueva igualdad que resulta equivalente a la anterior diciendo:

Logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3. Expresado en signos diremos: $\boxed{\log_2 8 = 3}$

Así, decimos que cualquier ecuación, expresada en forma exponencial, puede ser presentada o quizá sustituída por su igual o equivalente en forma logarítmica.

Ecuación Exponencial:	Ecuación Logarítmica:
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$b^e = P$	$\log_b P = e$

De donde inferimos que las partes de un logaritmo son la base, la potencia y el exponente y deducimos que:

> El logaritmo de un número o potencia es el exponente al que debe elevarse una base para obtener dicho número o potencia.

E J E R C I C I O 5 - 1

I.- Cambia a la forma logarítmica las ecuaciones exponenciales que se te ofrecen.

1.- $4^y = 17$	______	6.- $2^4 = 16$	______
2.- $3^3 = 27$	______	7.- $4^3 = 64$	______
3.- $x^2 = 16$	______	8.- $6^2 = 36$	______
4.- $3^x = 34$	______	9.- $2^5 = 32$	______
5.- $5^3 = 125$	______	10.- $10^2 = 100$	______

II.- Espresa cada ecuación logarítmica en forma exponencial.

1.- $\log_4 16 = 2$	______	6.- $\log_4 64 = 3$	______
2.- $\log_3 27 = 3$	______	7.- $\log_7 49 = 2$	______
3.- $\log_2 32 = 5$	______	8.- $\log_5 125 = 3$	______
4.- $\log_5 25 = 2$	______	9.- $\log_{11} 121 = 2$	______
5.- $\log_2 64 = 6$	______	10.- $\log_6 36 = 2$	______

III.- Determina los siguientes logaritmos.

1.- $\log_{10} 10000 =$	______	6.- $\log_9 81 =$	______
2.- $\log_7 49 =$	______	7.- $\log_4 64 =$	______
3.- $\log_5 25 =$	______	8.- $\log_6 36 =$	______
4.- $\log_3 27 =$	______	9.- $\log_8 64 =$	______
5.- $\log_{12} 12 =$	______	10.- $\log_2 64 =$	______

IV.- Sustituye x por su valor.

$\log_x 125 = 3$	x =
$\log_x 8 = 3$	x =
$\log_x 81 = 4$	x =
$\log_9 x = 3$	x =
$\log_5 x = 2$	x =
$\log_4 x = 3$	x =
$\log_3 27 = x$	x =
$\log_7 49 = x$	x =
$\log_{12} 144 = x$	x = ______
$\log_{10} 1000 = x$	x =

B) Sus propiedades.

Los logaritmos cuentan también con una serie de leyes o principios que les son muy propios, entre ellas, encontramos las siguientes:

a) El logaritmo de 1 es 0.

Si partimos del hecho de que $b^0 = 1$ "Cualquier base ≠ 0, elevada al exponente cero es igual a la unidad", entonces diremos que $\log_x 1 = 0$ sea cual fuese el valor de x, hecha excepción del 0.

b) El logaritmo de la base es igual a 1.

Sabiendo que: "Cualquier base elevada al exponente uno es --- igual a sí misma", diremos que: $b^1 = b$ por lo que para cualquier - valor de x tenemos que: $\log_x x = 1$.

c) Logaritmo de un producto.

Recordando aquello de: "Cuando multiplicamos bases iguales -- con exponentes distintos o iguales, el producto será igual a la -- misma base sumando sus exponentes", podemos afirmar que:

$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

Ahora bien, si hacemos $A = b^x$ y $B = b^y$, entonces diremos -- que $\log_b A = x$ y $\log_b B = y$

De tales igualdades, también podemos establecer que $(A)(B) = (b^x)(b^y)$ o lo que es lo mismo, $AB = b^{x+y}$,

$\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$.

De igual manera, el logaritmo del producto xyz, será igual a $\log_b (xyz) = \log_b x + \log_b + \log_b z$.

Por lo que podemos afirmar que:

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

Ejemplos:

$\log_b (5)(8) = \log_b 5 + \log_b 8.$

$\log_b (6)(3)(7) = \log_b 6 + \log_b 3 + \log_b 7.$

d) Logaritmo de un cociente.

Con las bases analizadas, dado que la división es la operación inversa a la multiplicación, recordemos que: "Cuando dividimos bases iguales con exponentes distintos o iguales, su cociente es ---- igual a la misma base, restando, según el lugar que ocupa en la --- fracción, del exponente mayor, el menor". Por lo que, si hacemos:

$A = a^m$ y $B = a^n$, entonces:

$\log_a A = m$ y $\log_a B = n$; de donde decimos que:

$\frac{A}{B} = \frac{a^m}{a^n}$, o bien $\frac{A}{B} = a^{m-n}$

Utilizando la forma logarítmica, también podemos expresar que:

$\log_a \frac{A}{B} = m - n$ y haciendo uso de la sustitución podemos inferir que: $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B;$

Es decir:

El logaritmo de un cociente se encuentra restando al logaritmo del dividendo el logaritmo de divisor.

Ejemplos:

$\log_a \frac{38}{5} = \log_a 38 - \log_a 5$

$\log_x 13/7 = \log_x 13 - \log_x 7$

$\log_y 7 \times 5/3 = \log_y 7 + \log_y 5 - \log_y 3$

$\log_z 9/2 \times 6/5 = (\log_z 9 + \log_z 6) - (\log_z 2 + \log_z 5)$

e) El logartimo de una potencia. Cuando tratamos la potencia de una potencia, establecimos que:

$(a^m)^n = a^{mn}$, supongamos ahora que $A = a^m$ y se nos solicita - que determinemos el logaritmo de A^n.

Con tales antecedentes, nuestro análisis tendrá que partir -- de: $\log_a A = m$. Ahora bien, como ya establecimos que $A = a^m$, en-- tonces claramente advertimos que $A^n = (a^m)^n$ o lo que es lo mismo $A^n = a^{mn}$, esto, expresado en forma logarítmica nos permite establecer la igualdad:

$\log_a A^n = m\,n$ y haciendo uso de la propiedad sustitutiva -- afirmamos que:

$\log_a A^n = n\,(\log_a A)$

es decir:

El logaritmo de una potencia será igual al producto que resulte de multiplicar el exponente de la base por su logaritmo.

Ejemplo:

$\log_x 8^3 = 3\ (\log_x 8)$

$\log_y 67^5 = 5\ (\log_y 67)$

f) Logaritmo de una raíz. En base a lo anterior, recordemos - tan solo que cualquier expresión presentada en forma de radical, - puede ser sustituída por otra con exponente fraccionario, ------- $\sqrt[n]{a^m} = (a)^{m/n}$, de donde, el logaritmo de una raíz se encontrará aplicando el fundamento del logaritmo de una potencia.

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n}(\log_b a)$$

Ejemplos: Localicemos el logaritmo en base "b" de:

a) $\sqrt[5]{87}$, b) $\sqrt[3]{64}$, c) $\sqrt{81}$

Soluciones:

a) $\log_b \sqrt[5]{87} = \log_b (87)^{1/5} = 1/5\ (\log_b 87) = \log_b 87$

b) $\log_b \sqrt[3]{64} = \log_b (64)^{1/3} = \log_b (2^6)^{1/3} = \log_b 2^2 = 2 \log_b 2$

c) $\log_b \sqrt{81} = \log_b 9.$

E J E R C I C I O 5 - 2

Aplicando las propiedades de los logaritmos, expresa en su forma correspondiente cada uno de los siguientes casos.

1.- $\log_x (9)(3) =$

2.- $\log_a (71.3)(1.35) =$

3.- $\log_y (785)(643.1) =$

4.- $\log_z (79.3)(15)(153.2) =$

5.- $\log_b (7.42)(78)^3 =$

6.- $\log_x \dfrac{87}{23.1} =$

7.- $\log_b \dfrac{15.341}{26.5} =$

8.- $\log_b \dfrac{(43)(24)}{37^{1/3}} =$

9.- $\log_y \dfrac{(11.1)(19.3)(20.31)}{(58)(13.5)} =$

10.- $\log_x \dfrac{1231}{20513} =$

11.- $\log_x 1234^3 =$

12.- $\log_y 413^{-5} =$

13.- $\log_a \sqrt{75} =$

14.- $\log_x \sqrt[3]{125} =$

15.- $\log_a \sqrt{153} =$

4.- LOGARITMOS COMUNES O DECIMALES: Sus partes.

Los procesos logarítmicos simplifican cualquier cálculo numérico. Si nuestro sistema de numeración es el decimal, entonces, los logaritmos que convenientemente debemos usar son los de base 10 a los que nosotros les hemos dado el nombre de logartimos comunes ó decimales.

Al adoptar los logaritmos comunes para nuestro sistema, convenimos en que la base es 10, por lo mismo, a partr de este momento omitiremos su inscripción en la relación de igualdad, dejando solo la abreviatura log (en minúscula). Así, para referirnos al logaritmo de 8, diremos tan solo log 8.

A continuación, observemos el comportamiento de la siguiente tabla de potencias de 10 mayores que 1.

$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^3 = 1,000$	$\log 1,000 = 3$
$10^4 = 10,000$	$\log 10,000 = 4$
$10^5 = 100,000$	$\log 100,000 = 5$
$10^6 = 1,000,000$	$\log 1,000,000 = 6$

Al proseguirla, veremos que el logaritmo de tales potencias, siempre será un entero positivo, sin embargo, el conjunto de números contenido entre potencia y potencia de 10, lógicamente, deberá de integrarse de dos partes:

Una entera que representa al número de cifras por ser potencia de 10 y que recibe el nombre de característica.

La otra, fraccionaria o decimal, llamada mantisa, representa al número que no es potencia exacta de 10.

En esta forma, tenemos que:

log 7	=	0	+ una fracción	porque	7	=	$10^0 \times 7.$
log 29	=	1	+ una fracción	porque	29	=	$10^1 \times 2.9$
log 678	=	2	+ una fracción	porque	678	=	$10^2 \times 6.78$
log 3426	=	3	+ una fracción	porque	3426	=	$10^3 \times 3.426$

o lo que es lo mismo:

10^0 + ------ = 7
10^1 + ------ = 29
10^2 + ------ = 678
10^3 + ------ = 3426

Lo cual se demostrará cuando tratemos los Antilogarítmos.

Ahora bien, la base 10, elevada a cualquier exponente menor que cero, nos dará como resultado una potencia decimal o fraccionaria, porque si recordamos aquello de:

$a^{-n} = 1/a^n$, entonces diremos que:

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$	log 0.1	= -1
$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$	log 0.01	= -2
$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$	log 0.001	= -3
$10^{-4} = \frac{1}{10,000} = 0.0001$	log 0.0001	= -4

De donde inferimos que el logaritmo de cualquier número ($x | 0 < x < 1$), cuenta también de dos partes, una característica negativa y la parte decimal que llamamos mantisa.

Por ejemplo:

log. 0.14	=	-1.	+ -------
log. 0.0380	=	-2.	+ -------
log. 0.000978	=	-4.	+ -------
log. 0.0000008	=	-7.	+ -------

5.- CALCULO DE LA CARACTERISTICA Y LOCALIZACION DE LA MANTISA.

Determinar la característica del logaritmo de un número resulta simple en nuestro sistema, dado que, como ya vimos la base 10 elevada al exponente n, nos resulta una potencia de (n + 1) cifras, por lo que, la característica de un número mayor que 1, se calcula restándole 1 al número de cifras enteras que contenga.

Ejemplo:

a) log 5	= 0. + --------	d) log 3.48	= 0. + ---------
b) log 485	= 2. + --------	e) log 54.89	= 1. + ---------
c) log 96,843	= 4. + --------	f) log 9368.042	= 3. + ---------

En cambio, el cálculo de la característica del logaritmo de un número fraccionario o decimal ($0 < x < 1$), será del orden negativo y numéricamente igual al lugar que ocupe la primera cifra significativa después del punto decimal.

Por ejemplo:

a) log 0.004	= -3. + -------	d) log 0.00007398	= -5. + -----
b) log 0.89	= -1. + -------	e) log 0.9843	= -1. + -----
c) log 0.000093	= -4. + -------	f) log 0.0387	= -2. + -----

Para localizar la parte decimal o mantisa del logaritmo de un número, precisamos del manejo de las tablas de logaritmos que se ofrecen al término de la unidad, en ellas se omitió el punto decimal por razon prácticas, sin embargo, deben llevarlo porque son mantisas o parte decimal del logaritmo de un número.

La mantisa del logaritmo de dos o más números que tienen las mismas cifras significativas, independientemente del punto decimal, no varía, debido a que uno será igual al otro si se multiplica o divide por una potencia de 10.

Por lo tanto, sus logaritmos solo diferirán en la parte entera o característica, de ahí su nombre, siendo igual su parte decimal o mantisa.

Ejemplo:

La mantisa de los números 3,000, 30, 3, 0.03, 0.0003 es la misma puesto que:

$3{,}000 = 3 \times 10^3 = 30 \times 10^2 = 0.03 \times 10^5 = 0.0003 \times 10^7$.

Podemos observar que solo difieren en la potencia.

Así, si queremos encontrar la mantisa de un número de una cifra, o sea del 1 al 9, la localizaremos en el cruce o intersección de la columna 0 con el renglón 10,20,30,40...90 de la columna N que parte de 10 y termina en 99.

La mantisa del logaritmo de un número de dos cifras significativas se localiza en las tablas buscando el número deseado en la columna N, y será la que aparece en dicho renglón haciendo intersección con la columna cero.

Ejemplo:

a) log 0.19 = -1.2788
b) log 1.9 = 0.2788
c) log 190,000 = 5.2788
d) log 0.00019 = -4.2788
e) log 19,000 = 4.2788
f) log 0.019 = -2.2788

La mantisa del logaritmo de un número de 3 cifras significativas como 168, se localiza buscando el No. 16 en la columna N y siguiendo el renglón hasta la columna 8. Ahí aparece el 2253 por lo que decimos: log 168 = 2.2253.

La mantisa del logaritmo de un número de 4 cifras significativas como 1479, se detecta buscando el 14 en la columna N y siguiendo el rengón hasta la columna 7, ahí encontramos el 1673; luego continuamos por el rengón hasta localizar la columna del 9 en las partes proporcionales (p.p.) encontrando el 27. Como este número representa diezmilésimos, lo sumamos al 1673 y tenemos que: log 1479 = 3.17

Ejemplo: Encontrar los logaritmos de los siguientes números.

a) log 353,000 = 5.5478
b) log 25.03 = 1.3984
c) log 0.00385 = -3.5855
d) log 306.4 = 2.4863
e) log 0.758 = -1.8797
f) log 9.485 = 0.9770

E J E R C I C I O 5 - 3

Encuentra el logaritmo de los siguientes números.

1.- log .00708 =
2.- log 4.38 =
3.- log 784 =
4.- log 651 =
5.- log 0.0782 =
6.- log 0.00623 =
7.- log 0.0000431 =
8.- log 495000 =
9.- log 579.6 =
10.- log 2751 =
11.- log 9594000 =
12.- log 731.6 =
13.- log 1.251 =
14.- log 3.75 =
15.- log 0.125 =
16.- log 0.0275 =
17.- log 215.4 =
18.- log 15.125 =
19.- log 1948 =
20.- log 19.3 =

6.- ANTILOGARITMOS.

Determinar el antilogaritmo de un número, significa encontrar el número al que corresponde el logaritmo dado.

Para detectarlo, hacemos uso de las tablas de antilogaritmos y se procede en forma inversa a la localización de un logaritmo.

Por ejemplo: Calcular el antilog de 3.5366

Solución.- La característica 3 nos dice que se trata de un número mayor que 1 por ser positiva y consta de 4 cifras. Buscamos -- luego en la tabla de antilogaritmos en la primera columna el número 0.53, seguimos por ese renglón hasta la columna 6 donde hallamos el 3436 y la cuarta cifra la detectamos en la columna 6 de (p.p.) que en nuestro caso es 5, misma que se suma al 3436 para decirnos que:

antilog 3.5365 = 3,441.

Otros ejemplos:

a) antilog 1.4612 = 28.92
b) antilog 0.6725 = 4.704
c) antilog 2.1214 = 132.2
d) antilog 4.7521 = 56500.
e) antilog -2.9501 = 0.08915
f) antilog 1.8016 = 63.33

E J E R C I C I O 5 - 4

Encuentra el Antilogaritmo de los siguientes logaritmos.

1.- antilog 2.498 =
2.- antilog 0.7151 =
3.- antilog -1.7363 =
4.- antilog -3.3427 =
5.- antilog -0.125 =
6.- antilog 6.249 =
7.- antilog 1.125 =
8.- antilog 0.0323 =
9.- antilog 2.0013 =
10.- antilog 4.6363 =
11.- antilog 3.0815 =
12.- antilog 7.189 =
13.- antilog -3.109 =
14.- antilog 0.723 =
15.- antilog 2.0513 =
16.- antilog -5.2942 =
17.- antilog -2.8167 =
18.- antilog 0.9530 =
19.- antilog 0.7155 =
20.- antilog 0.4074 =

7.- SOLUCION DE OPERACIONES ARITMETICAS MEDIANTE LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES.

Calcular productos, cocientes potencias ó raíces numéricas haciendo uso de la aritmética, en ocasiones se dificulta porque las - operaciones a realizar son demasiado largas, amén de laboriosas y - complicadas.

La aplicación de las propiedades logarítmicas estudiadas en el cálculo de operaciones aritméticas mediante logaritmos decimales, - nos permite llegar con más facilidad y menos complicación al resultado deseado, a la vez, nos brinda la oportunidad de entender las - bases en que se fundamenta, como ya lo mencionamos, el mecanismo de la regla de cálculo, la calculadora y las modernas computadoras.

Sabemos que el logaritmo de un número consta de la característica y la mantisa, debemos recordar, que las características pueden ser positivas o negativas, en tanto que las mantisas siempre serán positivas.

Lo anterior en razón a que, ocasionalmente, tendremos que sumar algebraicamente logaritmos de uno y otro signo.

Por ejemplo:

Sí:

a) log 32 = 1.5051 entonces: $10^{1.5051} = 32$
b) log 0.25 = -1.3979 $10^{-1.+3979} = 0.25$
ó $10^{-0.6021} = \frac{1}{4} = 0.25$

Si intentásemos efectuar la suma de los exponentes de la base 10 directamente, estaríamos haciendo negativa la mantisa del logaritmo de 0.25 lo cual es falso dado que lo único negativo es la característica.

Por lo tanto para evitar confusiones, digamos que un logaritmo de característica negativa, puede presentarse en otra forma si a ésta le agregamos 10 o cualquiera de sus múltiplos y al final le restamos la misma cantidad.

Es decir:

$\log 0.25 = -1.3979 = 9.3979-10$

En esta forma, sí podremos efectuar la suma de dos o más logaritmos sin confusión.

Ej. a) $\log 32 + \log 0.25 = 1.5051$

$$\begin{array}{r} 1.5051 \\ +\ 9.3979-10 \\ \hline +10.9030-10 \end{array} = \underline{0.9030}$$

b) $\log 0.0003 = -4.4771 = 6.4771-10$

c) $\log 0.0072 = -3.8573 = 7.8573-10$

Con tales antecedentes, veamos ahora la aplicación práctica de los logaritmos.

A) Productos y Cocientes.

Por definición sabemos que logaritmo es el exponente de una base y que cuando multiplicamos ó dividimos bases iguales con exponentes distintos ó iguales, el producto ó el cociente, según sea el caso, será igual a la misma base sumando o restando sus exponentes.

Así, al calcular el producto de 75 x 471 tendremos:

Si: $\log 75 = 1.8751$ entonces $10^{1.8751} = 75$

$\log 471 = 2.6730$ $\qquad 10^{2.6730} = 471$

o sea que: $(10^{1.8751})\ (10^{2.6730}) = 10^{4.5481}$

Por lo que; aplicando una de las propiedades de los logaritmos diremos:

$$\begin{aligned} \log (75)(471) &= \log 75 + \log 471 \\ &= 1.8751 + 2.6730 \\ &= 4.5481 \end{aligned}$$

Sin embargo, 4.5481 no es el producto sino su logaritmo, a éste, habremos de buscarle su antilogaritmo para encontrar el producto deseado.

antilog 4.5481 = <u>35,330</u>

Cabe aclarar que en las tablas de log que usaremos las mantisas están calculadas a diezmilésimas.

Resumiendo:

Un producto calculado mediante logaritmos es igual, al antilogaritmo de la suma de los logaritmos de sus factores.

Ahora, mediante el uso de las propiedades logarítimicas, encontramos el cociente representado por $\frac{795}{274}$

$795 = 10^{2.9004}$ y $274 = 10^{2.4378}$

Por lo tanto: $\frac{795}{274} = \frac{10^{2.9004}}{10^{2.4378}} = 10^{(2.9004) - (2.4378)} = 10^{0.4626}$

Así le damos aplicación práctica a la propiedad que nos dice que el log de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log \frac{795}{274} = \log 795 - \log 274$$

$$= 2.900 - 2.4378$$

$$= 0.4626$$

Como 0.4626 es el logaritmo del cociente, para conocer el cociente debemos localizar su antilogaritmo.

$$\text{antilog } 0.4626 = \underline{\underline{2.901}}$$

En síntesis:

Cualquier cociente calculado mediante logaritmos será igual, al antilogaritmo que resulte de la diferencia del logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Ejemplos: Mediante logaritmos, encontremos los resultados de las operaciones que se indican.

a) 475 x 0.00493

$$\log (475 \times 0.00493) = \log 475 + \log 0.00493$$

$$\begin{array}{r} =2.6767 \\ +7.6928-10 \\ \hline 10.3695-10 = 0.3695 \end{array}$$

$$\text{antilog } 0.3695 = 2.342$$

$$\therefore 475 \times 0.00493 = \underline{\underline{2.342}}$$

b) $\log \frac{8.385}{0.654} = \log 8.385 - \log 0.654$

$$0.9235 - (-1.8156)$$

(Para obtener la mantisa diremos):

$$\begin{array}{rl} \log 8.385 = & 10.9235-10 \\ - \log 0.654 = & 9.8156-10 \\ \hline & 1.1079 \end{array}$$

$$\text{antilog } 1.1079 = 12.82$$

$$\therefore \frac{8.385}{0.654} = 12.82$$

B) Potencias y Raíces.

Si partimos de la igualdad $(634)^3 = \left(10^{2.8021}\right)^3$ y aplicamos las leyes de los exponentes diremos que:

$$(634)^3 = 10^{2.8021 \times 3} = 10^{8.4063}$$

En virtud de que 2.8021 es el logaritmo y 3 es el exponente afirmamos que:

Cualquier potencia calculada mediante logaritmos es igual, al antilogarimo del producto que resulta al multiplicar el exponente por el logaritmo del número.

En forma directa tenemos:

$$\begin{array}{rl} \log (634)^3 = & 3 \ (\log 634) \\ = & 3 \ (2.8021) = 8.4063 \\ & \text{antilog } 8.4063 = 254;900.000. \end{array}$$

$$\therefore (634)^3 = 254;900,000.$$

De la misma manera podemos encontrar la raíz de un número, siempre y cuando llevemos la expresión radical a la forma exponencial fraccionaria.

Por ejemplo: Determinemos la $\sqrt[3]{849}$.

$$\log \sqrt[3]{849} = \log (849)^{1/3} = \frac{1}{3} (\log 849)$$

$$= \frac{1}{3} (2.9289) = \frac{2.9289}{3}$$

$$= 0.9763$$

$$\text{antilog } 0.9763 = 9.469$$

$$\therefore \sqrt[3]{849} = 9.469$$

Ejemplo: Haciendo uso de logaritmos, encontremos los resultados de las operaciones que a continuación se indican.

a) $\log (0.035)^4 = 4 (\log 0.035)$

$= 4 (-2.5441)$

$= 4 (8.5441-10)$

$= 34.1764-40$

$= -6.1764$

$\text{antilog } -6.1764 = 0.000001501$

$\therefore (0.035)^4 = 0.000001501$

b) $\log \sqrt{0.0081} = (\log 0.0081)^{1/2}$

$= \frac{1}{2} (\log 0.0081)$

$= \frac{1}{2} (-3.9085)$

$= \frac{17.9085-20}{2}$

Sumamos 20 y restamos 20 para que al dividir entre 2 nos de un -10, al dividir entre 3 sumamos y restamos 30, etc.

$= 8.8542 - 10$

$= -2.9542$

$\text{antilog } -2.9542 = 0.09$

$\therefore \sqrt{0.0081} = 0.09$

c) $\log \sqrt[3]{\frac{(42.3)^2 (68.5)}{52.3}} = \frac{2 (\log 42.3) + \log 68.5 - \log 52.3}{3}$

$= \frac{2 (1.6263) + (1.8357) - 1.7185}{3}$

$= \frac{3.3698}{3} = 1.1233$

$= \text{antilog } 1.1233$

$\text{antilog} = 13.28$

$\therefore \sqrt[3]{\frac{(42.3)^2 (68.5)}{52.3}} = 13.28$

E J E R C I C I O 5 - 5

Escribe la ecuación logarítmica que se debe usar y encuentra el resultado.

1.- 52.4×43.32

2.- 83×94

3.- 85×0.41

4.- 5.2×1.5

5.- 0.029×0.077

6.- $\frac{425}{37}$

7.- $\frac{215}{12}$

8.- $\frac{23.9}{2.9}$

9.- $\frac{515}{43}$

10.- $\frac{27 \times 21}{6}$

11.- $\frac{(18)(3.5)}{2.8}$

12.- $\frac{(8.7)(3.3)}{(5.8)(2.5)}$

13.- $\frac{5.3}{(2.8)(1.9)}$

14.- $\sqrt[3]{.876}$

15.- $\sqrt{4.1 \times 3.1}$

16.- $\sqrt{9.85 \times 4.7}$

17.- $\sqrt[3]{\frac{43 \times 29}{21}}$

18.- $\sqrt{\frac{4.9 \times 2.3}{1.7}}$

19.- $\sqrt[3]{\frac{53 \times (25)^2}{3}}$

20.- $\sqrt[3]{\frac{(40.3)^2 \times (53.6)}{0.03}}$

A U T O E V A L U A C I O N

UNIDAD V

I.- Dadas las siguientes preguntas, anota en cada paréntesis de la derecha la letra que corresponda a la respuesta acertada.

1.- En una ecuación exponencial $y = a^n$ el logaritmo es: ( )

a) y b) a c) n

2.- La forma exponencial del ejemplo anterior puede traducirse a su forma logarítmica y esta es: ( )

a) $\log_n a=y$ b) $\log_a y=n$ c) $\log_z n=y$

3.- Una multiplicación aritmética se puede resolver: ( )

a) Sumando los logaritmos de sus factores.

b) Multiplicando los logaritmos de sus factores.

c) Multiplicando el exponente por la suma de los logaritmos de sus factores.

d) Restando los logaritmos de sus factores.

4.- La parte entera de un logaritmo se llama: ( )

a) Base b) Característica c) Mantisa

5.- Si la parte entera de un logaritmo es negativa eso significa que el número es: ( )

a) Negativo b) Positivo y mayor que 1

c) Positivo y menor que 1

II.- Determina cuáles son la base y el log de cada una de las siguientes igualdades expresadas en forma exponencial.

6.- $2^4 = 16$ $\log_{(\ )} 16 =$ ( )

7.- $3^3 = 27$ $\log_{(\ )} 27 =$ ( )

8.- $5^2 = 25$ $\log_{(\ )} 25 =$ ( )

9.- $7^2 = 49$ $\log_{(\ )} 49 =$ ( )

10.- $10^4 = 10,000$ $\log_{(\ )} 10,000 =$ ( )

III.- Expresa, mediante el uso de propiedades logarítmicas, cada una de las siguientes opreraciones.

11.- $x \cdot y$ ____________

12.- $\frac{a}{b}$ ____________

13.- $a \cdot (x \cdot y)^n$ ____________

14.- $x \cdot (\frac{a}{b})^n$ ____________

15.- $x \cdot n \ \frac{a^2b}{c^3}$ ____________

IV.- Si sabemos que, log 2 = 0.3010, log 3 = 0.4771 y log 7 = 0.8451 encontrar:

16.- $\log 15 =$

17.- $\log 25 =$

18.- $\log (1.2)^3 =$

19.- $\log \sqrt{0.18} =$

20.- $\log 47 \cdot \sqrt[3]{0.0036} =$

V.- Utilizando tablas de logaritmos y antilogaritmos, calcula las siguientes operaciones aritméticas.

21.- $\frac{(0.0043)^2 (3.05)^3}{(25.3)^3 (42.4)^4} =$

22.- $\frac{84.96}{0.0007942} =$

23.- $(0.003854)(390.3) =$

24.- $3 \ \frac{(38)^2 (40.6)^3}{(53)^3} =$

25.- $\frac{(241)(326)}{48} =$

TABLA 1. POTENCIAS Y RAICES

No.	Cuad.	Raíz cuad.	Cubo	Raíz cúb.	No.	Cuad.	Raíz cuad.	Cubo	Raíz cúb.
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,551	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,925	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.292	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.644	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

LOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales (P. P.) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1782	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	3	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

LOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales (P. P.) 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTILOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.98	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

B R E V A R I O

Sintetizar las acciones del hombre, significa abreviar el camino recorrido hasta determinado punto, para, a partir de él, continuar la senda que lo lleve a la verdad buscada.

ANTILOGARITMOS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Partes proporcionales (P. P.)

BREVARIO

Sintetizar las acciones del hombre, significa abreviar el camino recorrido hasta determinado punto, para, a partir de él, continuar la senda que lo lleve a la verdad buscada.

B R E V A R I O:

1.- Aritmética General.

2.- Algebra General.

B R E V I A R I O:

1.- ARITMETICA GENERAL.

NUMEROS NATURALES

primer número natural es el cero odos, a excepción de él, tienen un esor N + 1. Se representan de la uiente manera:

N = (0,1,2,3,4,5,6,. . .)

operaciones de los números urales son: Suma o Adición, Res- Multiplicación, División, Poten- ción, Radicación.

SUMA Y SUS PROPIEDADES

$\underbrace{6 + 9}_{\text{sumandos}} = 14$ suma o total

opiedades

rradura 2 + 3 = 5
nmutativa (5 + 8) = (8 + 5)
ociativa 4 + (2 + 6) = (4 + 2) + 6
mento neutro 5 + 0 = 5

RESTA O DIFERENCIA

la operación inversa a la suma:

9 − 3 = 6 resta o diferencia

inuendo sustraendo

minuendo debe ser mayor que el traendo.

MULTIPLICACION PRODUCTO

una operación binaria de dos nú- eros (factores), de la que obtene- os un tercero llamado *producto*:

$\underbrace{6 \times 9}_{\text{factores}} = 54$ producto

ropiedades

erradura
X 8 = 40
onmutativa
X 6) = (6 X 4)
ociativa
X (2 X 3) = (5 X 2) X 3

Elemento neutro
7 X 1 = 7
Distributiva
4(5 + 2) = (4 X 5) + (4 X 2)

LA DIVISION O COCIENTE

Se puede indicar así: $\frac{8}{4}$, 4 |8 ó 8 ÷ 4

Sus elementos son:

dividendo $\frac{12}{6} = 2$ cociente
divisor

POTENCIACION

Es un producto abreviado:

5 X 5 X 5 X 5 = 5^4 = 625

5^{4} (exponente) = $\underbrace{5 X 5 X 5 X 5}_{\text{factores}}$ = 625 potencia
base

RADICACION

Indice radical

$\sqrt{64} = 8$ raíz cuadrada

Subradical

$\sqrt{1} = 1$ porque 1 X 1 = 1

$\sqrt{4} = 2$ porque 2 X 2 = 4

$\sqrt{9} = 3$ porque 3 X 3 = 9

$\sqrt{16} = 4$ porque 4 X 4 = 16

NUMEROS ENTEROS

E = (. . . −5, −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, +5. . . .)

RECTA NUMERICA

Partiendo del 0 hacia la derecha, son enteros positivos y hacia la izquierda, números negativos.
Un número a la derecha, en la recta numérica, es mayor.
El cero no es positivo ni negativo.

Negativos Positivos

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

OPERACIONES

SUMA

a) La suma de dos enteros positivo es positiva: (+9) + (+4) = +13

b) La suma de dos enteros negativo es negativa: (−10) + (−2) = −12

c) Para sumar un entero positivo co un negativo, o viceversa se toma signo del mayor valor absoluto, y lo valores se restan: (+8) + (−2) = +
(−15) + (+4) = −11

RESTA

Al minuendo se le suma el inver aditivo (simétrico) del sustraendo.

(+15) − (+6) = (+15) + (−6)
= +9

(−8) − (−3) = (−8) + (+3)
= −5

MULTIPLICACION

Ley de los signos

(+) (+) = + (+4) (+8) = +32

(−) (−) = + (−8) (−3) = +24

(+) (−) = − (+5) (−3) = −15

(−) (+) = − (−6) (+3) = −18

DIVISION

Ley de los signos

(+) ÷ (+) = + (+10) ÷ (+2) = +5

(−) ÷ (−) = + (−20) ÷ (−4) = +5

(+) ÷ (−) = − (+25) ÷ (−5) = −5

(−) ÷ (+) = − (−30) ÷ (+5) = −6

POTENCIACION

$(-3)^2$ = (−3) (−3) = +9

$(+4)^3$ = (+4) (+4) (+4) = +64

$(-2)^4$ = (−2) (−2) (−2) (−2) = ·

RADICACION

Sólo podemos extraer raíz cuadrada a los números positivos.

$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{-16} = ?$

(Indeterminada por pertenecer a los números imaginarios.)

Nota: La suma y la multiplicación tienen las mismas propiedades que los números naturales.

NUMEROS RACIONALES (FRACCIONES)

Son el cociente de dos números enteros.

$\frac{9}{12}$ — numerador (partes tomadas de una unidad)
— denominador (partes en que se divide la unidad)

SUMA

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$$

RESTA

$$\frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5 - 3}{9} = \frac{2}{9}$$

MULTIPLICACION

Se multiplican numerador por numerador, y denominador por denominador:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

DIVISION

El dividendo se multiplica por el inverso del divisor:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} \quad ó \quad \frac{5}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{15}{16}$$

POTENCIACION

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

RADICACION

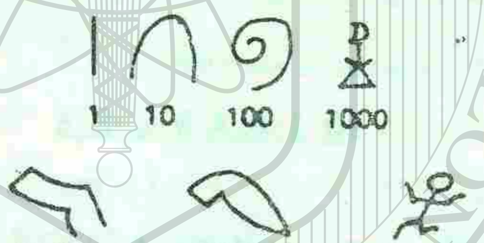
$$\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4}$$

SISTEMAS DE NUMERACION

I ANTIGUOS

EGIPCIO

Los valores de sus símbolos se suman aunque no estén ordenados (principio aditivo).



ROMANO

Sólo se puede repetir el mismo símbolo tres veces.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Principio aditivo

Todo número escrito a la derecha de otro suma su valor:

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

Principio sustractivo

Un número de menor valor a la izquierda de otro mayor se resta:

XC = 100 − 10
= 90

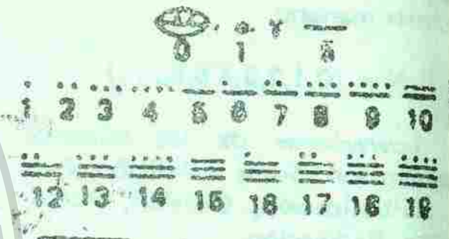
Principio multiplicativo

Una pequeña línea horizontal escrita sobre un número indica multiplicación por 1000:

$\overline{M}$ = 1000 X 1000 = 1000,000

MAYA

Es un sistema posicional de base 20; sólo se emplean 3 símbolos:



20^2 400 X 5 = 2000
20^1 20 X 1 = 20
20^0 1 X 1 = 1
2021

Se escriben de abajo hacia arriba y se suman los valores de cada posición.

II MODERNOS

Binario (base 2).

Emplea las potencias de dos, cada potencia es el valor de una posición; sólo se usan dos símbolos: 0 y 1.

$\ldots 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0,$
32 16 8 4 2 1

1 = 1
10 = 2
11 = 3
100 = 4
101 = 5

Para convertir de base 10 a binario usamos divisiones sucesivas tomando los residuos

23 11 5 2 1
2 | 46 2 | 23 2 | 11 2 | 5 2 | 2
0 03 1 1 0
1

$46_{10} = 101110_2$

Decimal (base 10).

Se emplean las potencias de 10. Cada potencia es el valor de una posición, se usan 10 símbolos llamados dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).

10^7	10^6	10^5
10,000,000	1000,000	100,000

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10,000	1000	100	10	1

A cada posición se le llama *orden*. Tres órdenes forman *una clase*, y *dos clases* dan lugar a un *periodo*.

Ordenes. unidad, decena, centena

Clase. unidad, decena, o centena simple, de millar, de millón, etcétera.

Periodo. unidades, millones, billones, etcétera.

CLASIFICACION DE NUMERALES

Para lograr esta clasificación, la Criba de Eratóstenes nos muestra el camino:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Número Unitario. Está representado por el 1 y recibe este nombre por tener un solo divisor: él mismo.

Números Primos. Son aquellos que tienen dos divisores: Ellos mismos y la unidad.

El número 2 es el primer número primo y el primer número *par.*

Números Compuestos. Son los que tienen más de dos divisores.

FACTORIZACION

Factorizar es descomponer un número en el producto de sus factores.

12 = 1 X 12, 2 X 6, 3 X 4
20 = 1 X 20, 2 X 10, 4 X 5

Toda cantidad es susceptible de factorizar. La factorización única la conseguimos si descomponemos un número en sus factores primos.

Para descomponer un número en sus factores primos analizamos si es divisible entre 2, 3, 5, 7 . . . , en este orden.

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$2^6 = 64$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$81 = 3^4$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40 = 2^3 \times 5$

DIVISIBILIDAD

Un número es divisible entre otro cuando el residuo es igual a cero.

CARACTERES DE LA DIVISIBILIDAD

Un entero es divisible entre:

2 si termina en cero, o en cifra par: 10, 20, 32, 106, . . .

3 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3: 3, 24, 9, 27, 72, . . .

4 si termina en cero, o sus dos últimas cifras son múltiplo de 4: 200, 316, 244, . . .

5 si termina en 0, o en 5; 300, 105

6 si al mismo tiempo es divisible entre 2 y + 3.

7 si descomponemos un número en grupos de tres cifras y la diferencia entre la suma del grupo par, y la del grupo impar es múltiplo de 7.

8 si termina en tres ceros, o con tres cifras que constituyen un número múltiplo de 8.

9 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9.

10 si termina en 0, o en 10.

11 si la diferencia entre la suma de sus cifras de orden par y las de orden impar, contadas de derecha a izquierda, es cero, o múltiplo de 11.

15 si es divisible + 3 y + 5.

25 si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 25: 25, 50, 75,

125 si terminan en tres ceros, o tres cifras que constituyan un múltiplo de 125.

MAXIMO COMUN DIVISOR, METODOS PARA HALLARLO

1. *Por la intersección del conjunto de divisores:*

M. C. D. de 24 y 40

Divisores de 24 = (1,2,3,4,6,8,12,24)

Divisores de 40 = (1,2,4,5,8,10,20,40)

$D_{24} \cap D_{40} = (8)$

M. C. D. de 24 y 40 = 8

2. *Por descomposición en factores primos:*

Se descomponen las cantidades en sus factores primos:

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

300
150
75
25
5
1

tornan todos los factores primos forma exponencial:

$0 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$
$0 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$
$0 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

tornan todos los factores comunes n su menor exponente:

C. D. $= 2^2 \times 3 \times 5$
$= 4 \times 3 \times 5$
$= 60$

MINIMO COMUN MULTIPLO

METODOS PARA HALLARLO

Por la intersección del conjunto de últiplos:

determinan los múltiplos de los úmeros hasta una cantidad igual.

.c.m. de 20, 40, y 60

Múltiplos de 20

0,20,40,60,80,100,120,140,160,
80, 200, . . .)

Múltiplos de 40

0,40,80,120, 160,200, . . .)

Múltiplos de 60

0,60,120,180,240, . . .)

Se toma el menor múltiplo común, sin contar el cero)

m.c.m. de 20,40 y 60 = 120.

Por descomposición en factores primos:

m.c.m. de 60, 80 y 120

Se descomponen al mismo tiempo en factores primos, y se multiplican entre sí.

60	80	120	2
30	40	60	2
15	20	30	2
5	10	15	2
	5	5	3
1	1	1	5

m. c. m. $= 2^4 \times 3 \times 5$
$= 16 \times 3 \times 5$
$= 48 \times 5$
$= 240$

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZON

Es la comparación de dos cantidades:

$\frac{4}{8}$ 4:8 se lee 4 es a 8

En donde:

4 es el antecedente y 8, el consecuente

PROPORCION

Es la igualdad de dos razones:

$\frac{4}{8} = \frac{12}{24}$ 4: 8::12:24

Se lee 4 es a 8 como 12 es a 24
4 y 24 son extremos
8 y 12 son los medios

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

"EL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS ES SIEMPRE IGUAL AL PRODUCTO DE LOS MEDIOS"

$$E \times E = M \times M$$

Si desconocemos un extremo, o un medio, aplicamos las siguientes fórmulas para calcularlos:

$$E = \frac{M \times M}{E} \qquad M = \frac{E \times E}{M}$$

Cada uno de los términos de una proporción se llama: *cuarta proporcional.*

Cuando se desconocen los dos extremos, o los dos medios, le llamamos *Media proporcional* y los calculamos

$$M = \sqrt{E \times E} \qquad E = \sqrt{M \times M}$$

TANTO POR CIENTO

Es una razón de partes a 100:

10 centavos de cada 100 representan impuestos. Esta proposición puede representarse en tres formas:

$$\frac{10}{100},\ 0.10,\ ó\ 10\%.$$

Para calcular un porcentaje aplicamos la fórmula:

$$p = \frac{c \times \%}{100}$$

También es posible obtenerlo si se multiplica la cantidad por la forma decimal de %:

El 25% de 290 = 290 × .25
= 72.50

El 40% de 750 = 750 × .40
= 300

Para determinar interés; capital, % o tiempo.

$$I = \frac{c \times \% \times t}{100} \qquad C = \frac{I \times 100}{\% \times T}$$

$$\% = \frac{I \times 100}{c \times T} \qquad T = \frac{I \times 100}{c \times \%}$$

En donde:

I = Interés
C = Capital
T = Tiempo
% = Tanto por ciento

2.- ALGEBRA GENERAL.

MONOMIOS Y POLINOMIOS

lenguaje algebraico emplea letras minúsculas del alfabeto para generalizar conceptos, fórmulas, etcétera.

Expresión algebraica. Aquella en la que se combinan números, literales y signos.

ELEMENTOS QUE FORMAN UNA EXPRESION ALGEBRAICA

La base o literal: representada por una letra minúscula.
El exponente.
El coeficiente: representado por un numeral. (Cuando es igual a 1 no se escribe.)

Coeficiente ← 5 x^2 ← exponente
base o literal

Si se tiene una expresión algebraica en la que únicamente exista la operación de multiplicación se le llama *término.*

Ejemplo: axy, $2a^2$, 5ax, etcétera.

CLASIFICACION DE EXPRESIONES

MONOMIOS: un término

Ejemplos: ax^2, 4a, $6a^2b$

POLINOMIOS:

BINOMIOS: dos términos.

Ejemplos: a + b, $2a^2 - 7a$, a − b

TRINOMIOS: tres términos

Ejemplos: a + b + c, $6z^2 + abc - 2m^3$

Para saber el grado de un monomio se suman los exponentes de las variables y el resultado será el grado al que pertenecen.

Ejemplos:

4abc es de tercer grado
x es de primer grado
$-3xy^2$ es de tercer grado
5 es de grado cero

Para encontrar el grado de un polinomio se analizará cada término por separado, y el más alto grado que alcance uno de los términos será el grado que le corresponda al polinomio.

Ejemplo:

$2ax^3 + a^2x + 5ax + 6$ → Polinomio de cuarto grado

Los polinomios pueden ordenarse en forma ascendente, o descendente con respecto a una de sus literales.

Ejemplo:

$$a^2 + 7a + 6a^3 - 3$$

ascendente $-3 + 7a + a^2 + 6a^3$
descendente $6a^3 + a^2 + 7a - 3$

Para calcular el valor numérico de un polinomio, se sustituye el valor de la variable dentro del polinomio.

Ejemplo:

$3x^2 - 2x + 8$ Si x = 4
$= 3(4)^2 - 2(4) + 8$
$3(16) - 2(4) + 8$
$48 - 8 + 8 = 48$

TERMINOS SEMEJANTES

Serán aquellos que coincidan en literales y exponentes; difieren solamente en signos y coeficientes.

Ejemplo:

$5a^2x$ es semejante a: $-3a^2x$
$-8xyz^2$ es semejante a: $-xyz^2$

LEYES DE LOS EXPONENTES

$(a^3)(a) = a^{3+1} = a^4$

$(a^x)^n = a^{xn}$ $(b^2)^3 = b^{2\times3} = b^6$

$(opq)^2 = o^2p^2q^2$ $(abc)^2 = a^2b^2c^2$

$\frac{b^2}{b} = b^{2-1}$ $= \frac{ba^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$a^0 = 1$

LEYES DE LOS SIGNOS

PARA LA SUMA

(+) + (+) = +

(−) + (−) = −

(+) + (−) = (El resultado lleva el signo del sumando de mayor valor absoluto.)

PARA LA MULTIPLICACION

(+) (+) = +

(−) (−) = +

(−) (+) = −

(+) (−) = −

REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES

Solamente se hacen operaciones con los coeficientes; las literales y exponentes no se modifican.

Ejemplos:

2ab + 6ab = (2 + 6) ab = 8ab

$3x^2y - 7x^2y = (3 - 7)x^2y = -4$

$-5bc^2 - bc^2 = (-5 - 1)bc^2 = -$

Si $x = \dfrac{11 - 5y}{7}$ y $y = -2$

$\therefore x = \dfrac{11 - 5(-2)}{7}$

$x = \dfrac{11 + 10}{7}$

$x = \dfrac{21}{7}$

$\boxed{x = 3}$

PRODUCTOS NOTABLES

CUADRADO DE UN BINOMIO

Es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplos:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

BINOMIOS CONJUGADOS

Será igual al cuadrado del primer elemento menos el cuadrado del segundo.

Ejemplos:

$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$

$(o + p)(o - p) = o^2 - p^2$

BINOMIOS CON TERMINO COMUN

Ejemplo

$(x + 3)(x + 6) = x^2 + 3x + 6x + 18$
$= x^2 + 9x + 18$

FACTORIZACION

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Es igual a la raíz cuadrada del primer término, signo del segundo término, y la raíz cuadrada del tercer término.

Ejemplos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Es igual al producto de *binomios conjugados*, y se encuentra extrayendo la raíz cuadrada al primer término, que será el primer elemento de cada binomio; la raíz cuadrada del segundo representa los segundos elementos de los binomios; el primer binomio será positivo y el segundo elemento del segundo binomio será negativo.

Ejemplo: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

El *trinomio* de la forma $x^2 + bx + c$ será igual a un par de binomios con término común. La raíz cuadrada del primer término es el primer elemento de cada binomio. Se buscan dos números que sumados sean igual al segundo término, y que multiplicados sean igual al tercer término.

Ejemplos:

$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

INCOMPLETAS

De la forma $ax^2 + c = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 - \cancel{12} + \cancel{12} = 12$

$\frac{1}{3}(3x^2 = 12)$

$\frac{3}{3}x^2 = \frac{12}{3}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

$\boxed{x_1 = 2}$ $\boxed{x_2 = -2}$

De la forma $ax^2 + bx = 0$

$x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$\boxed{x_1 = 0}$
$x + 3 = 0$
$x + 3 - 3 = -3$
$\boxed{x_2 = -3}$

COMPLETAS

Forma general $ax^2 + bx + c = 0$

Utilizando la fórmula general.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo: $x^2 + 5x - 24 = 0$

$a = 1$ $b = 5$ $c = -24$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2}$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{2}$

$x = \dfrac{-5 \pm 11}{2}$

$x_1 = \dfrac{-5 + 11}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$x_2 = \dfrac{-5 - 11}{2} = -\dfrac{16}{2} = -8$

$\boxed{x_1 = 3}$ $\boxed{x_2 = -8}$

COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$x^2 + 10x + 16 = 0$

Por inverso aditivo

$x^2 + 10x + \cancel{16} - \cancel{16} = -16$

Se suma la mitad al cuadrado del término en x (lineal)

$x^2 + 10x + 5^2 = -16 + 5^2$

Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros

$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{9}$

Se factoriza el primer miembro de la ecuación en un binomio al cuadrado

$(x + 5)^2 = -16 + 25$

Por operaciones

$x + 5 = \pm 3$

Por inverso aditivo

$x + 5 - 5 = \pm 3 - 5$

Se toma el primer valor de la raíz

$x_1 = 3 - 5$

$\boxed{x_1 = -2}$

Se utiliza el segundo valor de la raíz

$x_2 = -3 - 5$

$\boxed{x_2 = -8}$