

RELACIONES Y FUNCIONES

OBJETIVO GENERAL:

Al término del curso, el alumno será capaz de aplicar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en problemas, en la simplificación de expresiones algebraicas, en la simplificación de las leyes de los exponentes y los radicales, en la simplificación de las propiedades de los logaritmos, en la solución de operaciones aritméticas.

PRIMERA UNIDAD

RELACIONES Y FUNCIONES

El alumno será capaz de definir los conceptos de función y relación, de reconocerlos en situaciones concretas, de representarlos gráficamente, de determinar el dominio y el rango de una función, de operar con funciones, de resolver problemas que involucren relaciones y funciones.

Para alcanzar las alturas, el hombre tuvo que relacionarse consigo mismo, dentro y fuera de su circunstancia.

Más tarde, se dió cuenta que unos elementos pueden actuar en función de otros, lo idealizó en un plano y se lanzó al espacio.

Hoy; el cosmos es su reto y dominarlo su destino.

Cuando tratamos el producto cartesiano, diremos que: "Si A y B son conjuntos, el producto cartesiano de A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in A$ y $y \in B$, por ejemplo el producto cartesiano de los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$ es el conjunto $\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$."

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará los conceptos de relación y función.

OBJETIVO PARTICULAR:

El Alumno será capaz de:

- 1.- Definir los conceptos de función y relación.
- 2.- Definir el plano cartesiano,
- 3.- Graficar pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- 4.- Diferenciar, analíticamente y gráficamente, cuando una relación es función.
- 5.- Determinar el dominio y rango de una relación y/o función.
- 6.- Graficar los distintos tipos de funciones y relaciones.

RELACIONES Y FUNCIONES

1.- INTRODUCCION: Al inicio de nuestro estudio, cuando tratamos lo referente a los conjuntos y sus operaciones, quedaron establecidas las bases necesarias mediante las cuales se estructura el razonamiento matemático.

Así, iniciamos el estudio de las relaciones o correspondencias entre conjuntos. Al igual que sus propiedades. Entonces, dejamos -- plenamente señalado el hecho de que: "La función es un caso particular de las relaciones".

La vida del hombre en general, tiene un propósito definido, -- igualmente, todo lo que crea, descubre e inventa.

No podemos, de manera alguna, concebir la existencia de una -- ciencia totalmente aislada de los demás.

Así, las matemáticas auxilian al desarrollo de las ciencias en general (exactas, naturales y sociales).

Para entender lo anterior es preciso que estudiemos más a fondo la estructura de las matemáticas y en forma particular, lo referente a las funciones o aplicaciones ya que en ellas descansan los mecanismos indispensables para que esta ciencia cumpla con el propósito de servir a todas las ciencias.

2.- RELACIONES: Para definir el concepto de relación, diremos que -- es un conjunto de parejas ordenadas de números.

Cuando tratamos el producto cartesiano, dijimos que: "Si A y B son conjuntos, el conjunto producto o producto cartesiano es una relación por que nos refleja un conjunto de parejas ordenadas (x,y) -- tales que $x \in A$ y $y \in B$, así por ejemplo si tenemos que:

$A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, Entonces:

$A \times B$ es la relación formada por las parejas ordenadas.

$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

Ahora diremos que el conjunto de los primeros elementos de las parejas ordenadas de la relación, se le llama dominio y lo representamos con la letra "D".

Por otro lado, al conjunto de los segundos elementos de las parejas ordenadas de la relación, se le conoce con el nombre de contradominio o rango y lo representamos con la letra "R"

Así tenemos que en el ejemplo anterior:

$D = \{a, b\}$ y $R = \{1, 2, 3\}$

Ejemplo: si hacemos $y = x + 3$ y deseamos formar una relación donde los valores de "x" sean $-1, 0, 1, 2$.

Tendremos que:

El dominio esta dado por la totalidad de cada uno de los valores de "x", en tanto que el rango lo obtendremos sustituyendo en la condición marcada el valor que en cada caso tenga la "x" para formar las parejas ordenadas que exige la relación.

Así diremos que: $y = x + 3$

CADA VALOR DE:	REFLEJA UN CORRESPONDIENTE VALOR PARA:
X	Y
-1	2
0	3
1	4
2	5

y hemos formado la relación:

$\{(-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$ a la que podemos representarla en esta forma o bien haciendo uso de un tabulador ya sea horizontal o vertical.

x	y
-1	2
0	3
1	4
2	5

PAREJAS
ORDENADAS

x	-1	0	1	2
y	2	3	4	5

$D = \{-1, 0, 1, 2\}$
 $R = \{2, 3, 4, 5\}$

3.- FUNCIONES: Antes de definir el término función, observemos los siguientes ejemplos de relaciones:

a) Si una relación entre "x" y "y" está definida por $Y = 2x + 1$ encuéntrase el valor de "y" para $x = -1, 0, 1, 2$, y 3.

x	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7

b) Si una relación entre "x" y "y" esta definida por $Y^2 = 9x$, encontrar el valor de "y" para $x = 0, 1, 4, 9$.

Solución: Si $y^2 = 9x$, entonces tendremos que:

$$y = \pm 3\sqrt{x} \text{ por tanto:}$$

x	0	1	4	9
y	0	± 3	± 6	± 9

Podemos advertir que en el primer caso, por cada elemento del dominio existe uno y sólo un elemento del rango, en tanto que, en el segundo caso, salvo el primer elemento del dominio, todos los demás tienen más de un elemento para su correspondiente valor en "x".

En base a esto, podemos decir que:

Función es toda relación donde a cada elemento del primer conjunto o dominio le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto, contradominio o rango como imagen.

Por tanto, toda función es una relación, más, no toda relación es una función.

Así, en los ejemplos tratados en este punto, vemos que en el primer caso, cada elemento del dominio tiene un valor único de "y" para cada valor de "x" y consecuentemente es, a la vez, relación y función.

Por lo que en el segundo caso podemos observar que el conjunto rango tiene dos valores de "y" para cada valor de "x", es una relación pero no una función.

Al segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función le llamamos imagen y nos representa el valor de la función correspondiente al valor del primer elemento de la pareja ordenada.

El valor de una función en "x", generalmente lo representamos con la expresión $f(x)$, que leemos como "f de x". Debemos hacer conciencia en el hecho de que tal expresión no es un producto, sino una forma específica de nombrar la dependencia que cada elemento del dominio tiene sobre cada elemento del rango.

Así, en la expresión $y = 2x + 1$ podemos decir que la "y" está en función de cada valor asignado a la "x" y se expresa como:

$$f(x) = y \text{ o bien } f(x) = 2x + 1$$

Asignado a "x" el valor de 4 diremos que:

$$y = 2x + 1 \text{ como } f(x) = y, \text{ tenemos:}$$

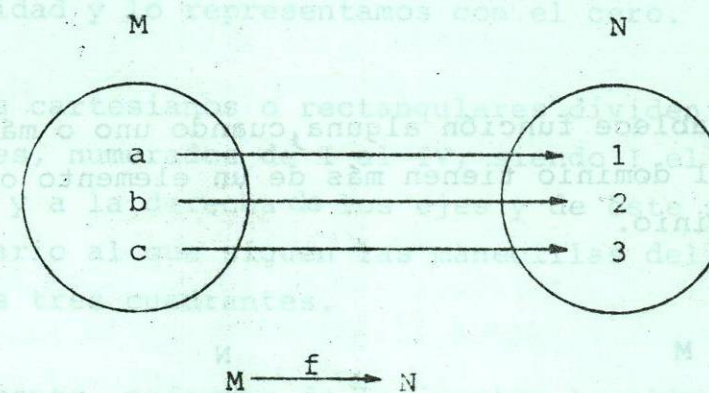
$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(4) = 2(4) + 1 = 9$$

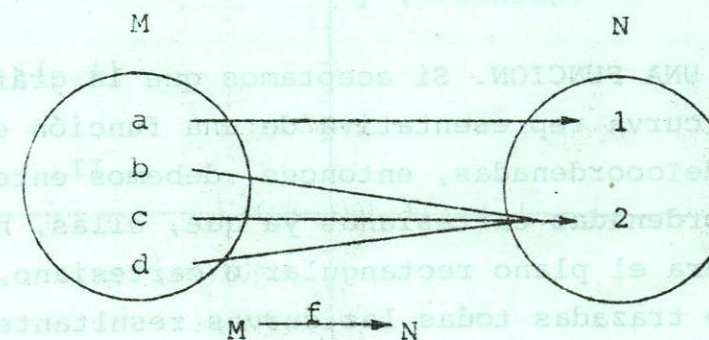
O sea, que para este caso en particular, cuando la "x" vale 4, la "y" tiene un valor de 9. Porque es una dependiente que refleja la imagen del valor asignado a su correspondiente elemento del dominio para formar la pareja ordenada (x,y) ó (4,9) en este caso.

Analicemos gráficamente con diagramas de Venn, cada una de las siguientes situaciones.

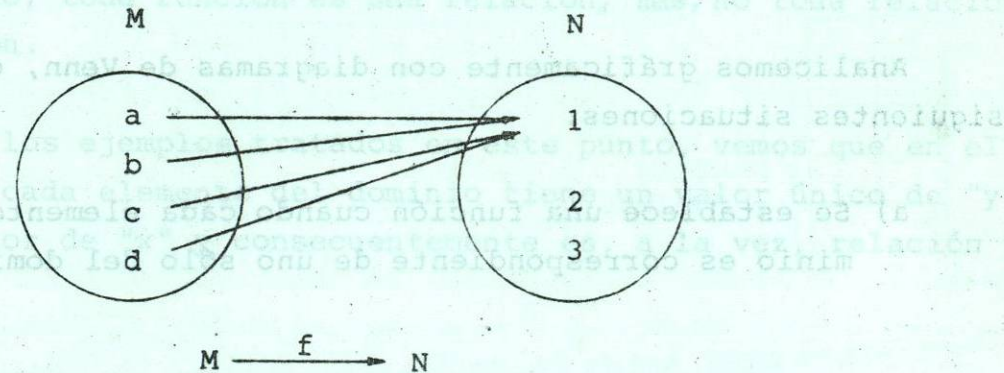
- a) Se establece una función cuando cada elemento del contradominio es correspondiente de uno sólo del dominio.



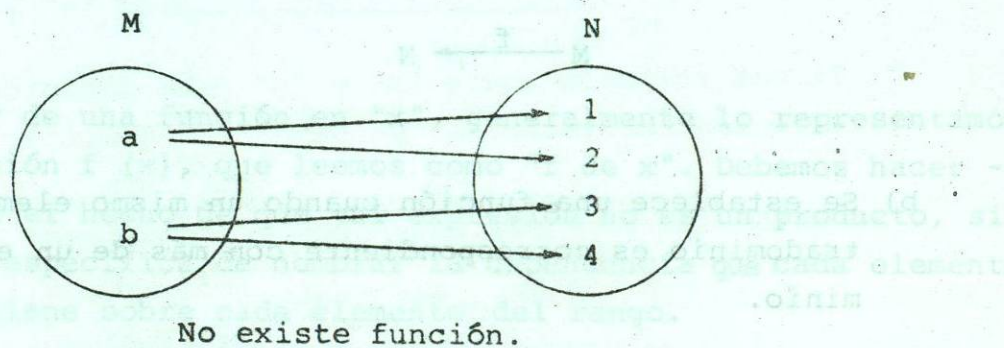
- b) Se establece una función cuando un mismo elemento del contradominio es correspondiente con más de un elemento del dominio.



c) Se establece una función cuando un mismo elemento del contradominio es correspondiente a todos los elementos del dominio.



d) No se establece función alguna, cuando uno o más de los elementos del dominio tienen más de un elemento o imagen en el contradominio.



4.- LA GRAFICA DE UNA FUNCION. Si aceptamos que la gráfica de una función es la curva representativa de una función en un determinado sistema de coordenadas, entonces, debemos entender lo que significan coordenadas cartesianas ya que, ellas, hicieron posible que surgiera el plano rectangular o cartesiano, lugar éste, donde han sido trazadas todas las curvas resultantes de las distintas funciones que el hombre ha manejado.

5.- COORDENADAS RECTANGULARES. Hacia 1637 el matemático y filósofo francés René Descartes introdujo un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas que consiste en dos ejes numéricos que al intersecarse o cruzarse en su origen; forman entre sí un ángulo recto.

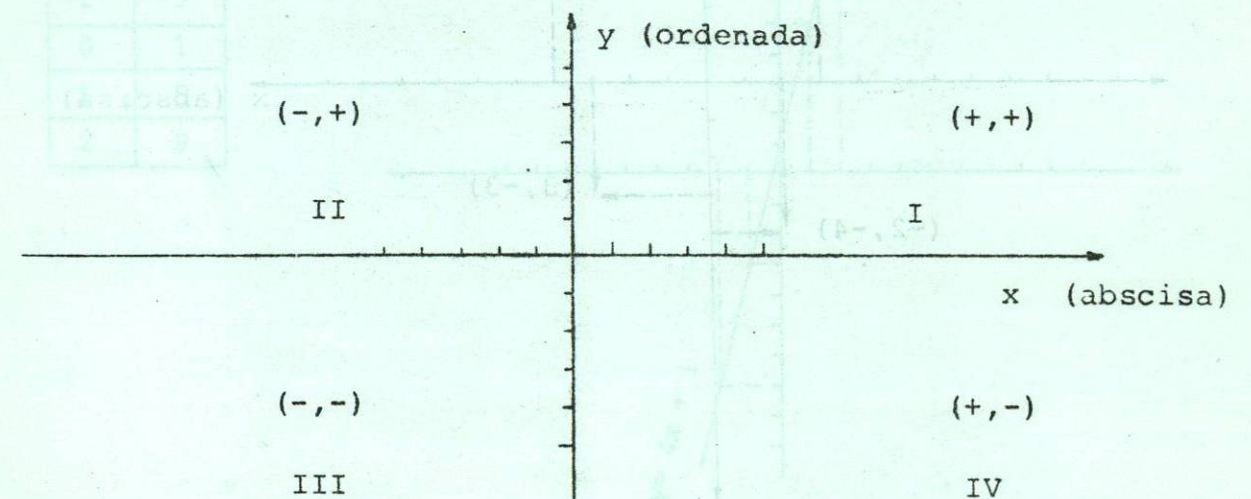
Por conveniencia los ejes numéricos deben ser uno horizontal - al que llamamos eje de las "x" o abscisa y otro vertical al que se nombra eje de las "y" u ordenada. La longitud unitaria de cada uno de ellos, es la misma.

El punto de intersección de ambos ejes le llamamos origen o punto de nulidad y lo representamos con el cero.

Los ejes cartesianos o rectangulares dividen al plano en cuatro cuadrantes, numerados de I al IV, siendo I el que se localiza hacia arriba y a la derecha de los ejes y de éste siguiendo un movimiento contrario al que siguen las manecillas del reloj, localizamos los otros tres cuadrantes.

Gradualmente, cada uno de los puntos localizados hacia la derecha o hacia arriba del punto cero, son positivos.

Por contra, todos los puntos localizados hacia la izquierda o hacia abajo del punto de nulidad son negativos.



COORDENADAS CARTESIANAS O RECTANGULARES