_______________ Es toda relación donde a cada elemento del primer conjunto o dominio le corresponde un y sólo un elemento del rango - como imagen.

_______________ Es el segundo elemento de una pareja numérica perteneciente a una función.

_______________ Es una relación, más no toda relación - puede ser una.

_______________ Concentra al conjunto de puntos positivos que podemos localizar en un plano - cartesiano.

_______________ Parte del plano cartesiano donde las ordenadas valen cero.

_______________ En una relación sus valores siempre serán f(x).

_______________ Parte del plano cartesiano donde las -- abscisas valen cero.

SEGUNDA UNIDAD

ECUACIONES LINEALES

El hombre se descubre igual a sí mismo. Más tarde, se identifica con los demás sin llegar a conocerse y convierte su destino en una constante interrogación.....

La ecuación de su diaria existencia.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará los diferentes teoremas y propiedades del álgebra, en la solución de problemas.

OBJETIVO PARTICULAR:

El alumno estará en condiciones de:

1.- Definir el concepto de ecuación lineal en una variable, a partir de una función lineal.

2.- Resolver ecuaciones lineales de una variable.

3.- Resolver problemas cuya solución implique ecuaciones lineales en una variable.

ECUACIONES LINEALES

1.- IGUALDADES.- Cuando hablamos de los números reales dejamos establecido que en el sistema numérico el signo de igualdad (=) siempre nombrará una relación de identidad que también podemos llamar relación de igualdad.

Así por ejemplo, la expresión $a = b$ quiere decir que a y b son símbolos que representan al mismo valor numérico, independientemente de la forma en que éste sea presentado.

Por lo tanto, el signo de igualdad o identidad, nos permite que relacionemos dos miembros entre sí y que, aplicando distintas propiedades a cada uno de ellos, realicemos infinidad de transformaciones que nos llevan a la solución práctica de múltiples problemas que nos presenta la vida cotidiana.

De lo descrito inferimos que:

Primer miembro	=	Segundo miembro
Miembro izquierdo	=	Miembro derecho

Ejemplos: $3 + 5 = 8$, $6 - 3 = 2 + 1$, $4(2) = \frac{24}{3}$

En el supuesto de que un miembro no establezca equivalencia con el otro, estaremos cayendo en el campo de las desigualdades, en cuyo caso utilizamos el signo $\neq$ que significa (es diferente a) y que posteriormente trataremos. De momento recordemos las propiedades aplicables a todos los elementos de los números reales en cualquier relación de igualdad.

2.- PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES.

a) Reflexiva.- Todo número o valor es igual a sí mismo.
$a = a$, $6 = 6$, $x + y = x + y$, $4 + 2 = 4 + 2$.

b) <u>Simétrica</u>.- Los miembros de una igualdad pueden permutarse sin que la identidad se altere.

Si $a = b$, entonces $b = a$

$6 = 4 + 2$ como $4 + 2 = 6$

$a + b = 7$ como $7 = a + b$

$x + y = z$ como $z = x + y$

c) <u>Transitiva</u>.- Si dos números son iguales a un tercero, los tres son iguales entre sí.

Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$

$3 + 2 = 5$ y $5 = \frac{15}{3}$ entonces $3 + 2 = \frac{15}{3}$

$m = 4 + 3$ y $n = 4 + 8$ entonces $m = n$

Ahora bien, si recordamos el axioma básico de las igualdades que dice: "Si con valores iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán siempre iguales", vendrán a nuestra memoria las propiedades aditiva y multiplicativa estudiadas, junto con las anteriores cuando analizamos los números reales.

d) <u>Aditiva</u>.- Si a ambos miembros de una igualdad les sumamos o restamos un mismo valor, obtendremos otra ---- igualdad.

$6 + 3 = 9$ | $a + b = c$

Sumando 2 | Sumando x

$(6 + 3) + 2 = 9 + 2$ | $(a + b) + x = c + x$

$11 = 11$ | $a + b + x = c + x$

$8 + 5 = 13$ | $a + b = c$

Restando 3 | Restando y

$(8 + 5) - 3 = 13 - 3$ | $(a + b) - y = c - y$

$10 = 10$ | $a + b - y = c - y$

e) <u>Multiplicativa</u>.- Si los dos miembros de la igualdad los multiplicamos o dividimos por un mismo factor, obtenemos otra igualdad.

$4 + 3 = 7$ | $a + b = c$

Multiplicando por 3 | Multiplicando por x

$3(4 + 3) = 3 \times 7$ | $x(a + b) = c \cdot x$

$21 = 21$

$9 + 3 = 12$ | $a + b = c$

Dividiendo entre 4 | Dividiendo entre x; $x \neq 0$

$\frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4}$ | $\frac{a + b}{x} = \frac{c}{x}$

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$

De todo esto, podemos deducir que dos o más igualdades pueden sumarse o restarse miembro a miembro trayendo como consecuencia lógica una nueva igualdad.

Si tenemos:

$$\begin{array}{rl} & 10 + 4 = 8 + 6 \\ + & 3 + 5 = 4 + 4 \\ \hline & 13 + 9 = 12 + 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 6 + 3 = 8 + 1 \\ + & 9 + 4 = 6 + 7 \\ \hline & 15 + 7 = 14 + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 7 + 9 = 11 + 5 \\ - & 3 + 4 = 6 + 1 \\ \hline & 4 + 5 = 5 + 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & a + b = c + d \\ - & m + n = o + p \\ \hline & a - m + b - n = c - o + d - p \end{array}$$

f) <u>sustitutiva</u>.- Cualquier valor puede ser sustituído por su --- igual:

Si en las igualdades:	hacemos:	entonces:
$a + b = c$	$x = a$	$x + b = c$
$x + 8 = 12$	$x = 4$	$4 + 8 = 12$
$x - 6 = 12$	$x = 18$	$18 - 6 = 12$

3.- IDENTIDADES Y ECUACIONES.- Cuando la igualdad se encuentra formada por expresiones algebraicas; éstas traen consigo dos situaciones importantes que permiten considerar a la igualdad como una identidad o bién como una ecuación condicional.

Decimos que, una igualdad es identidad, cuando cualquier grupo de valores para los que han sido definidos ambos miembros, satisfacen a las variables o letras que las formen.

Así por ejemplo, cuando tenemos:

$$3x + x + 5x = 9x \quad \text{ó} \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x - 2)} \quad \text{siendo } x \neq 0$$

Cualquier valor que asignemos a las variables dadas satisfacen plenamente lo propuesto, en cambio, si tenemos:

$$x - 6 = 2 \quad \text{ó} \quad x^2 - x - 6 = 0$$

Para que resulten verídicas estas expresiones, en el primer caso solo haciendo $x = 8$ es valedera y en el segundo ejemplo, será cierta la igualdad únicamente con $x = 3$ o bien $x = -2$, ningún otro valor las hace verdaderas.

Cuando esto sucede, la igualdad recibe el nombre de ecuación condicional o simplemente ecuación, por tanto:

Ecuación es toda igualdad que se cumple o satisface únicamente, para ciertos grupos de valores que se asignan a sus letras o variables.

4.- ECUACIONES.- Habiéndola definido, podemos decir de ella que, por ser una igualdad, consta de dos miembros, cada uno de ellos formado por uno o más términos numéricos o literales.

Las letras que forman los términos de la ecuación y de cuyo valor depende su veracidad, reciben el nombre de incógnitas.

Ahora bien, una ecuación puede contar con una o más incógnitas. Cuando la ecuación se encuentra integrada en ambos miembros por una sola incógnita, podemos determinar su grado por el mayor exponente que tenga la incógnita en cualquiera de sus términos.

Así tendremos que:

$4x - 6 = x + 3$	Es de primer grado, porque el mayor exponente de "x" es 1.
$x^2 + 6 = -5x$	Ecuación de segundo grado, el mayor exponente de x es 2.
$x^3 + 27x = 9x^2 + 26$	Es de tercer grado, porque el mayor exponente de x es 3.

El valor o valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad porque satisfacen la ecuación planteada, reciben el nombre de raíces de la ecuación.

En $x + 9 = 13$
$(4) + 9 = 13$
$13 = 13$

La raíz es 4 porque haciendo $x = 4$ se convierte en verdadera.

En $8y - 2 = 5y + 1$
$8(1) - 2 = 5(1) + 1$
$6 = 6$

La raíz es 1 porque haciendo $y = 1$ nos resulta cierta.

En $x^2 + 9x = -18$

haciendo $x = -3$ tenemos:

$$(-3)^2 + 9(-3) = -18$$
$$9 - 27 = -18$$
$$-18 = -18$$

Las raíces son:
$x = -3$ y $x = -6$ porque ambas hacen que la ecuación sea verdadera.

Haciendo $x = (-6)$, tenemos:

$$(-6)^2 + 9(-6) = -18$$
$$36 - 54 = -18$$
$$-18 = -18$$

Por las distintas características que las ecuaciones presentan, podemos decir que la ecuación se llama numérica cuando en sus términos no existen más letras que las incógnitas que poseen sus miembros.

$2x - 4 = x + 1$ $\qquad$ $\frac{y + 2}{5} = x$

$x = \frac{y - 4}{5}$ $\qquad$ $n^2 - 5n + 6 = 0$

Nótese que en estas ecuaciones existen términos con incógnitas y términos independientes.

La ecuación es literal si en sus miembros además de las incógnitas aparecen otras literales que se presuponen son valores conocidos.

$6x - 4a = 4x - a;$ $\quad$ $ax - b = 5$

Cuando dos o más ecuaciones admiten la misma solución, se llaman equivalentes, así tenemos que las ecuaciones:

$3x - 4 = x + 6$, $\quad$ y $\quad$ $x + 2 = 7$

Son equivalentes porque la única solución que admiten, es:

$x = 5$

5.- SOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA O VARIABLE.

Resolver una ecuación para la incógnita o variable, significa encontrar el valor o raíz de la misma.

Para lograrlo, precisamos aplicar propiedades de las igualdades que estudiamos con anterioridad, llegando mediante ellas a ecuaciones equivalentes y finalmente a las raíces de la ecuación.

El proceso de transformar la ecuación original en equivalente, lleva como propósito fundamental el de agrupar en el primer miembro a la (s) incógnita (s) y en el segundo a los términos independientes o valores conocidos, utilizando la debida aplicación de las propiedades, de la igualdad y su correcta realización en las operaciones indicadas, llegando a la raíz de la incógnita.

En esta sección resolveremos ecuaciones del tipo $ax + b = 0$ ó bien, que pueden ser reducidas a esa forma donde "a" representa cualquier valor $\neq 0$.

Ejemplos:

a) Resolvamos la ecuación $3x + 5 = 8x - 5$

Solución:

$3x + 5 = 8x - 5$	Ecuación dada.
$-5x = -10$	Sumando algebraicamente en ambos miembros $-8x - 5$
$5x = 10$	Multiplicando ambos miembros por (-1).
$x = 2$	Dividiendo ambos miembros entre 5.