V.- RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS.

1) $x + y + z = 12$

$10x - 2y + 2z = -4$

$6x - 3y + 4z = 9$

2) $3x + 10y = -2$

$2x - 7z = 5$

$4y - 3z = -7$

VI.- ESTABLEZCA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y RESUELVA POR CUALQUIERA DE LOS METODOS ALGEBRAICOS CONOCIDOS.

1) En una alcancía hay 80 monedas cuyos valores son de \$20.00 y 50.00. Si la cantidad ahorrada es de \$3,160.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación?

2) En una alcancía hay 120 monedas cuyos valores son \$50.00 y \$100.00. Si la cantidad ahorrada es de \$8,500.00 ¿Cuántas monedas hay de cada denominación.

CUARTA UNIDAD

EXPONENTES Y RADICALES

Nuestra imaginación viaja al punto más alto del universo o al más profundo de la tierra, de ahí, se transporta a otros puntos y así sucesivamente.

Sin embargo, jamás olvidemos el origen para volver al lugar de partida...la tierra que pisamos.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará las leyes de los exponentes y de los radicales, en la simplificación de ejercicios con expresiones algebraicas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

El alumno:

1.- Definirá los conceptos de exponente, base y potencia.

2.- Enunciará las leyes de los exponentes.

3.- Utilizará las leyes de los exponentes, para la simplificación de expresiones algebraicas, que contengan radicales, para las operaciones fundamentales.

4.- Identificará los elementos de una expresión radical: Radical, Indice de un radical, Radicando y Raíz.

5.- Enunciará las leyes de los exponentes.

6.- Obtendrá la enésima raíz principal de una expresión radical.

EXPONENTES Y RADICALES

1.- HACIA DONDE VAMOS.

Hemos visto, hasta el momento, cómo de los principios y propiedades de los números reales han surgido un sin fin de juegos matemáticos que amplían y simplifican a la vez, la capacidad de raciocinio que poseemos.

Nos percatamos también, de la importancia implícita de las operaciones básicas y las leyes que las rigen, así como su aparición en toda relación de igualdad que celebramos.

Ahora, las mismas bases y principios generales, serán aplicados específicamente en dos nuevas operaciones, que brotan como consecuencia lógica de lo estudiado.

La potenciación con su respectivo inverso, la radicación, ambas, con los principios o leyes que son de su particular propiedad.

2.- EXPONENTES ENTEROS Y EXPONENTE CERO, SUS LEYES.

Por definición sabemos que $a^n = a.a.a....a$ (n factores).

Así por ejemplo tenemos que; $5^3 = 5.5.5 = 125$, es decir, una expresión exponencial puede presentarse en forma de potencia y ambas, a la vez, se desprenden de la multiplicación de una o varias bases multiplicadas por sí mismas "n" o "m" veces, según lo indique el exponente que posean.

Así, cualquier real puede escribirse en términos de sus factores primos como cuando decimos:

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$$1000 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \overbrace{5 \times 5 \times 5}^{5^3}$$

Representarlo así nos resulta largo y tendioso, cansado e impráctico, pudiendo con facilidad decir que $1000 = 2^3 \times 5^3$ y más fácil aún $(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1000$.

Observese como dos bases distintas al ser afectadas por igual exponente, mediante la propiedad asociativa, se reduce a una simple operación con una sola base, en este caso, (10), un solo exponente, (3) y una potencia, en el ejemplo, 1000, de aquí inferimos que: potencia es el resultado de elevar una base a un exponente determinado.

Tal operación le llamamos a partir de hoy potenciación y la describimos como: $\boxed{b^e = P}$

$$\boxed{\text{base}}^{\boxed{\text{exponente}}} = \boxed{\text{Potencia}}$$

V:gr.

$$3^4 = 81$$
$$(5a)^3 = 125a^3$$
$$(2xy)^2 = 4x^2y^2$$

Cuando analizamos la multiplicación y división con expresiones algebraicas, vimos el significado de a^n siendo $(a \neq 0)$ y "n" un entero positivo y demostramos los teoremas:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{Si } m > n \\ a^{m-n} = a^\circ = 1 & \text{Si } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{Si } m < n \end{cases}$$

Ahora, deseamos ampliar el concepto diciendo que tales leyes son aplicables cuando n (exponente) es un entero, dígase positivo, negativo o cero. Y aún más, según veremos después, podemos extenderlos a cualquier n (exponente) racional como:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^\circ$$

luego: $a^\circ = 1$ ahora si: $a^{n-n} = a^\circ$

$$a^{n-n} = a^n . a^{-n} = 1$$

$$\therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Así podemos definir

$$\boxed{a^0 = 1,\ a \in R,\ a \neq 0}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in R,\ a \neq 0}$$

Con la última definición, es posible simplificar la ley de los exponentes que dice: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ cuando $m < n$ porque cuando esto sucede, entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$, de modo que, sin importar que "m" o "n" sea mayor o menor podemos decir que:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$, siendo m, n $\in$ reales o lo que es mismo:

Cualquier factor puede ser transferido del numerador al denominador o viceversa, con el simple cambio del signo de su exponente.

Por ejemplo:

$$\frac{3x^{-2}y^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-3}} = \frac{6a^3b^3}{x^2y^4} \quad ; \quad \frac{8^0x^{-5}y^2}{6^{-2}x^2y^{-5}} = \frac{36y^7}{x^7}$$

Cuando los exponentes m y n son iguales, la propiedad anterior también es aplicable diciendo:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{n-m} = a^0 = 1$$

De esto desprendemos importantes teoremas que una vez demostrados los utilizamos como leyes de los exponentes diciendo:

Si a y b $\in$ R, $(a,b \neq 0)$ y $m,n \in R$ (enteros) entonces:

A) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Multiplicación de bases iguales con exponentes distintos o iguales.

B) $(a \cdot b)^m = a^m b^m$ La potencia de un producto.

C) $(a^m)^n = a^{mn}$ La potencia de una potencia.

D) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ El cociente de dos potencias.

E) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ La potencia de un cociente.

Ejemplos: Simplifiquemos al máximo cada expresión dejando los resultados libres de exponentes negativos o nulos.

a) $x^4 \cdot x^5 = x^{4+5} = x^9$

b) $(x^4)^2 = x^{(4)(2)} = x^8$

c) $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$

d) $\left(\frac{x^2}{5y}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{(5y)^3} = \frac{x^6}{125y^3}$

e) $\frac{3^{n+2}x^{2m}}{3^n x^m} = 3^2x^m = 9x^m$

f) $(-5)^2(-5)^{-2} = (-5)^0 = 1$

g) $b^5 \cdot b^{-4} = b^{5-4} = b$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}} = \frac{b^3}{a^3}$

i) $\frac{ax^{-3}}{by^{-4}} = \frac{ay^4}{bx^3}$

j) $\frac{1}{x^{-3}+y^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}$

$$\frac{1}{\frac{x^3+y^3}{(x^3)(y^3)}} = \frac{x^3y^3}{x^3+y^3}$$

Es importante observar que la transferencia del numerador al denominador con el simple cambio del signo del exponente se aplica exclusivamente cuando se trata de factores.

E J E R C I C I O 4 - 1

Efectuar las operaciones indicadas, haciendo uso de las leyes - de los exponentes.

1.- $4^3 \cdot 4^7 =$ 2.- $7^2 \cdot 7^5 =$

3.- $3^{-3} \cdot 3^4 \cdot 3^0 =$ 4.- $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^0 =$

5.- $9^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^5 \cdot 9^{-8} =$ 6.- $a^2 \cdot a^4 =$

7.- $x^5 \cdot x^2 \cdot x^2 =$ 8.- $(x+y)^3 \cdot (x+y)^5 =$

9.- $(3ab)^{-2} \cdot (2ab)^3 =$ 10.- $a(a+2)^3 \cdot a^3(a+2)^4 =$

11.- $(a^2 \cdot b^{-2})^{-1} \cdot (a^3 \cdot b^0)^2 =$ 12.- $(2m^5)^3 \cdot (3mn^2)^2 \cdot (m^2n^2)^2 =$

13.- $(-m^3)^4 =$ 14.- $-(m^3)^4 =$

15.- $(x \cdot y^{-2}) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1})^{-1} =$ 16.- $(5x^2y^3)^{-2} \cdot (15x^3y^2)^3 =$

17.- $3m^2n^3(4mn^2 + 7m^2n) =$ 18.- $\dfrac{a^{-3} \cdot b^{-2}}{a^{-4}\, b^{-3}} =$

19.- $\dfrac{5^{-1}a^{-3} \cdot b^2}{7^{-1}\, a^{-5}\, b} =$ 20.- $\left(\dfrac{4x^2}{2xy}\right) \cdot \left(\dfrac{y}{8x^2}\right) =$

21.- $\dfrac{(8x^3y^2)^3}{(4x^5y^4)^4} =$ 22.- $\left(\dfrac{m^{-2}n^{-3}}{5^0p^{-2}}\right)^{-3} =$

23.- $\dfrac{27(m+n)^2 \cdot (m-n)^3}{18(m+n)^3 \cdot (m-n)^2} =$ 24.- $\dfrac{3^{-1}\ 5 + 4 + 5 + 2^{-1}}{3^{-1}\ \ 2^{-1}} =$

25.- $\dfrac{x^{-1}y + xy^{-1}}{x^{-2} + y^{-2}} =$

3.- LOS RADICALES Y SU RELACION CON EXPONENTES FRACCIONARIOS.

A) Radicación.- Al analizar las operaciones básicas dejamos claro - el hecho de que la adición tiene su inverso llamado sustracción y la división es la operación inversa a la multiplicación.

Acabamos de tratar la potenciación y decimos que, al igual que las demás, tiene su operación inversa a la que damos el nombre de Radicación.

Observemos el comportamiento exponencial en los siguientes ejemplos.

Si $x = 3$ decimos que: $x^2 = 9$ y $x^3 = 27$

$x = 4$ $x^2 = 16$ y $x^5 = 1024$

$x = 2$ $x^2 = 4$ y $x^7 = 128$

Invirtiendo el proceso diremos.

Si $x^2 = 9$ y $x^3 = 27$ entonces $x = 3$

" $x^2 = 16$ y $x^5 = 1024$ " $x = 4$

" $x^2 = 4$ y $x^7 = 128$ " $x = 2$

En el primer caso partimos de un número para encontrar el valor de una determinada potencia, en tanto; en el segundo, determinamos - la base que originó a la potencia dada. A esta operación le llamamos extracción de raíz, dígase cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, sexta, etc., cuando se trata de la extracción de una raíz cuadrada, simplemente le denominamos extracción de raíz.

Ejemplos:

Si: $(3a)^2 = 9a^2$ entonces: $\sqrt{9a^2} = 3a$

$(7a^3b^2)^3 = 343a^9b^6$ " $\sqrt[3]{343a^9b^6} = 7a^3b^2$

$(2a^2b^3c)^4 = 16a^8b^{12}c^4$ " $\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4} = 2a^2b^3c$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ " $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$

$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ " $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = x + 5$

La radicación la representamos mediante el símbolo $\sqrt[n]{x}$ donde la "n" n-ésima recibe el nombre de índice del radical y nos indica la raíz que deseamos encontrar. El símbolo $\sqrt{}$ se llama radical y la "x" representa al radicando, es decir, la potencia que resultó de elevar una base a un exponente "n" y de la cual deseamos encontrar la base o raíz que le originó.

B) Raíz principal y raíz negativa.

Si partimos del hecho de que cualquier base, elevada a un exponente par nos resulta una potencia real, positiva, entonces diremos que cualquier potencia real positiva tiene exactamente una pareja de raíces: una positiva llamada Principal y la otra denominada raíz Negativa.

Un número negativo no tiene raíces reales de orden par porque no existe base que elevada a un exponente par nos resulte una potencia negativa.

Así tenemos que:

$(2)^2 = 4$ y: $(-2)^2 = 4$ por lo que: $\sqrt{4} = \pm 2$

$(3)^2 = 9$ $(-3)^2 = 9$ " $\sqrt{9} = \pm 3$

$(2)^4 = 16$ $(-2)^4 = 16$ " $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

$(3)^4 = 81$ $(-3)^4 = 81$ " $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

En cambio qué base real podrá hacer verídica cualquiera de -- las siguientes relaciones de igualdad.

$$\left.\begin{array}{lll} (x)^2 = -4 & \text{para poder decir:} & \sqrt{-4} \\ (x)^2 = -9 & \text{"} & \sqrt{-9} \\ (x)^4 = -16 & \text{"} & \sqrt[4]{-16} \\ (x)^4 = -81 & \text{"} & \sqrt[4]{-81} \end{array}\right\} \text{No existe una Raíz Real.}$$