En tal caso, estamos cayendo en un campo de números que se salen del contexto de los reales y les llamamos números imaginarios, mismos que analizaremos cuando nos corresponda tratar el campo de los números complejos.

Un radicando Real (Positivo o Negativo) tiene exactamente una sola raíz de orden impar siendo su signo igual al singo de radicando que le dió origen.

Así tenemos que:

$$\sqrt{36} = \pm 6 \; ; \; -\sqrt{81} = -9 \; ; \; \sqrt[3]{-27} = -3; \; \sqrt[5]{-32} = -2$$

C) EXPONENTES FRACCIONARIOS.

Si utilizamos la ley de la potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{mn}$, entonces, estamos en posibilidad de demostrar que una expresión algebraica en forma de radical puede presentarse como una expresión algebraica con exponencial fraccionario m/n donde "m" es un entero positivo o negativo y "n" es un entero positivo.

Esto es, haciendo $m = \frac{1}{n}$ podemos tener $a^{1/n}$, aplicando la potencia de una potencia obtendremos la siguiente igualdad:

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

Tal igualdad nos demuestra que la n-ésima potencia de $a^{1/n}$ es igual a " a ". Siendo lo mismo, que $a^{1/n}$ es la n-ésima raíz de "a" de donde inferimos una nueva definición diciendo:

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

Para tal definición si el índice "n", es del orden par, la "a" deberá ser positiva, no así cuando el índice "n" representa a un número del orden impar.

En base a la misma ley y haciendo $m \neq 1$ tendremos que:

$$\boxed{a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

o bien

$$\boxed{a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m}$$

La simple observación nos permite asegurar que: cuando una expresión algebraica es exponencial fraccionaria, al cambiarla a la forma de radical, el denominador de la fracción exponencial está representando al índice del radical; por ejemplo:

Expresiones Algebraicas:

Forma Exponencial Fraccionaria:		Forma Radical:
$a^{3/4}$	=	$\sqrt[4]{a^3}$
$x^{3/5}$	=	$\sqrt[5]{x^3}$
$3ax^{1/2}$	=	$3a\sqrt{x}$
$(-4xyz)^{3/5}$	=	$\sqrt{(-4xyz)^3}$

D) Reducción de exponentes fraccionarios a su mínima expresión.

La misma ley de la potencia de una potencia nos permite ahora demostrar que cuando a los exponentes fraccionarios se les aplican los principios de divisibilidad, las expresiones algebraicas de esta naturaleza, se reducen a su mínima expresión, así encontraremos que:

$$\boxed{a^{cm/cn} = (a^{m/n})^{c/c} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Por ejemplo: Simplifiquemos cada expresión completamente y dejémosla libre de exponentes negativos o nulos.

a) $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$ o bién:

$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b) $16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(2^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{12}}}$

$= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $(-243)^{3/5} = \sqrt[5]{(-243)^3} = \sqrt[5]{(-3^5)^3} = \sqrt[5]{-3^{15}} = -3^3$

$= -27$

d) $\left(\frac{9a^{-1/3}}{b^{2/3}c^{-2}}\right)^{-1/2} = \frac{3^{-2/2}\ a^{1/6}}{b^{-2/6}c^{2/2}} = \frac{a^{1/6}\ b^{1/3}}{3c}$

$= \frac{a^{1/6}\ b^{1/3}}{3c}$

e) $\left(a^{5/3}b^{3/4}\right)\left(a^{1/3}b^{5/4}\right) = a^{5/3 + 1/3}b^{3/4 + 5/4} = a^{6/3}b^{8/4} = a^2b^2$

EJERCICIO 4 - 2

Expresar los siguientes radicales en su forma más simple.

1.- $\sqrt{25} =$ 2.- $\sqrt[3]{-8} =$

3.- $\sqrt{36x^4y^2} =$ 4.- $\sqrt{49a^4b^2} =$

5.- $\sqrt[4]{81a^8b^4} =$ 6.- $\sqrt[4]{625x^4y^{12}} =$

En las siguientes expresiones cambiar su forma de exponencial a radical.

7.- $(3)^{1/2} =$ 8.- $(ab)^{1/3} =$

9.- $(2xy)^{2/3} =$ 10.- $(5ab)^{2/3} =$

11.- $(3x^2)^{1/4} =$ 12.- $(a^{1/3})^{1/3} =$

Simplificar cada expresión dejándola libre de exponentes negativos o nulos.

13.- $\frac{5^{-3}.\ 5^4}{5^3} =$ 14.- $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2} =$

15.- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} =$ 16.- $(5^{-2} + 3^{-2})^{-2} =$

17.- $(3^2 + 7^3)^0 =$ 18.- $\frac{3\ (a + b)}{(a - b)^{-1}} =$

Encontrar el valor de cada expresión.

19.- $25^{-1/2}$ = 20.- $9^{3/2}$ = 21.- $27^{-1/3}$ =

22.- $\left(\frac{27}{125}\right)^{2/3}$ = 23.- $\left(\frac{81}{16}\right)^{1/4}$ = 24.- $\left(\frac{49}{36}\right)^{-3/2}$ =

4.- LAS LEYES DE LOS RADICALES.

Así como las leyes con que operamos la resta y la división se desprendieron respectivamente de las propiedades de adición y la - multiplicación, ahora, de las propiedades de los exponentes surgen una serie de leyes que aplicamos en el tratamiento de radicales, - condicionándolas a radicandos exclusivamente positivos en el caso de índices de orden par y denominadores > 0 en el exponente fraccionario.

Así diremos:

Leyes de los Radicales
- a) Raíz Exacta
- b) Productos
- c) Cocientes
- d) Simplificación
- e) Raíz de Raíz
- f) Productos con Indices diferentes.

RAIZ EXACTA.

A) $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; porque $(a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a$

Producto de radicales de igual indice.

B) $\sqrt[n]{ab} = \left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{b}\right)$ porque $(ab)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)\left(b^{1/n}\right)$

Cociente de Radicales de igual indice.

C) $\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ porque $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

Simplificación de Radicales.

D) $\sqrt[cn]{a^{cm}} = \sqrt[n]{a^m}$ porque $a^{cm/cn} = a^{m/n}$

La Raís de una Raíz.

E) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ porque $\left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/nm}$

Producto de los Radicales con Indices diferentes.

F) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt{a^{mq + np}}$ porque $a^{m/n} . a^{p/q} = a^{\frac{mq + np}{nq}}$

Las leyes aquí descritas las utilizamos para simplificar radicales aplicándolas también en las operaciones fundamentales.

5.- SIMPLIFICACION DE RADICALES.

Los casos más comúnes de simplificación son, entre otros:

A) Simplificación del radicando.
B) Racionalización de fracciones que poseen radicales.
C) Simplificación del índice del radical.
D) Inclusión de factores al símbolo de radical.
E) La Raíz de una Raíz.

A).- Simplificación del radicando.- Un número real tiene tantas representaciones como nosotros queramos o necesitemos, basta tan solo aplicar con acierto las propiedades de los reales para - advertirlo.

Ahora, nos encontramos ante una nueva situación a la que denominamos "Simplificación de Radicales". Esta operación consiste en presentar un radical en su forma más simple o en su mínima expresión.

Cuando el radicando es una potencia exacta del índice señalado en el radical, su simplificación no presenta dificultad alguna puesto que se reduce a la simple extracción de la raíz solicitada como cuando decimos:

Ilustración $\sqrt[n]{a^n} = a$

Ejemplo: Obtengamos las raíces solicitadas.

$\sqrt{4} = \pm 2; \quad \sqrt[3]{8x^6} = 2x^2; \quad \sqrt[5]{-243x^{10}y^{15}}; \quad -3x^2y^3;$

$\sqrt{64a^4b^6} = \pm 8a^2b^3 \quad ; \quad -\sqrt[4]{16x^4} = -2x$

En cambio, cuando se trata de radicandos cuya raíz no es exacta o de potencias no exactamente divisibles entre el índice del radical, la situación se torna un poco más delicada y su simplificación consiste en descomponer el radicando en dos factores, tales que, uno de ellos, sea divisible entre el índice del radical, mismo al que le extraeremos la raíz indicada, dejándola fuera de los alcances del radical en tanto que, el otro factor, quedará dentro del radical y su raíz señalada.

Ilustración: $\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m . a^n} = a\sqrt[n]{a^m}$

Por ejemplo:

Simplifiquemos el radicando en cada uno de los siguientes casos.

a) $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{16} . \sqrt{3} = \pm 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt[3]{8.3}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} = 2/3 \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{72a^3b^2} = \sqrt{36.2a^2.a.b^2} = \pm 6ab\sqrt{2a}$

d) $\sqrt[3]{8(a+b)^{10}} = \sqrt[3]{2^3(a+b)^9(a+b)} = 2(a+b)^3\sqrt[3]{(a+b)}$

e) $\sqrt[5]{64x^6} = \sqrt[5]{2^5.2x^5.x} = 2x\sqrt[5]{2x}$

B) Racionalización de Fracciones.- Racionalizar una fracción, significa dejarle su denominador libre de expresiones radicales, para lograrlo utilizamos el recurso del elemento de identidad para la multiplicación expresado a nuestra entera conveniencia.

Racionalicemos los denominadores en las siguientes fracciones.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{\frac{-3}{4a^2}} = \frac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{4a^2}} . \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}} = \frac{\sqrt[3]{-6a}}{\sqrt[3]{8a^3}} = \frac{\sqrt[3]{-6a}}{2a} = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{-6a}$

c) $\sqrt[5]{\frac{b}{16x^4}} = \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{16x^4}} . \frac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{2x}} = \frac{\sqrt[5]{2bx}}{\sqrt[5]{32x^5}} = \frac{\sqrt[5]{2bx}}{2x} \frac{1}{2x}\sqrt[5]{2bx}$

C) Simplifiación del Indice del Radical.- Cuando hablamos de fracciones, buscamos su equivalente aplicando los principios de divisibilidad y logramos reducirlas a su mínima expresión.

Ahora, encontraremos radicales cuyo índice y radicandos expresan raíces muy elevadas y que, haciendo uso de los mismos principios, podemos reducirlas para representarlas como radicales de un orden menor.

Ilustración: $\sqrt[cn]{a^c} = \sqrt[n]{a}$

Por ejemplo: Reduzcamos el orden de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{36x^2} = \sqrt[4]{(6x)^2} = \sqrt{6x}$

b) $\sqrt[6]{27x^3y^6} = \sqrt[6]{(3xy^2)^3} = \sqrt{3xy^2} = y\sqrt{3x}$

c) $\sqrt[6]{81a^9b^4} = \sqrt[6]{(3a^2b)^4} = \sqrt[3]{9a^4b^2} = a\sqrt[3]{9ab^2}$

d) $\sqrt{\dfrac{32x^5y^{10}}{z^5}} = \sqrt{\left(\dfrac{2xy^2}{z}\right)^5} = y\sqrt{\dfrac{2x}{z}} = y/z\sqrt{2xz}$

e) $\sqrt[5]{\dfrac{243a^5b^{10}}{c^5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{3ab^2}{c}\right)^5} = \dfrac{3ab^2}{c}$

D) **Inclusión de factores al símbolo de Radical.** Si fuimos capaces de simplificar el radicando de un radical mediante el uso de la factorización y el principio de la divisibilidad estimamos que, vía la multiplicación y potenciación, podemos ahora incluir dentro de cualquier radical a los factores o coeficientes que nos propongamos.

Ilustración: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$

Ejemplos: Incluyamos dentro del signo de radical los coeficientes contenidos en las siguientes expresiones.

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{5(4)} = \sqrt{20}$

b) $3x\sqrt[3]{2y} = \sqrt[3]{2y(3x)^3} = \sqrt[3]{54x^3y}$

c) $2a\sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}} = \sqrt{4a^2\left(1+\dfrac{1}{4a^2}\right)} = \sqrt{4a^2+1}$

d) $\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{3y^3}{x}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}\left(\dfrac{3y^3}{x}\right)} = \sqrt{3xy}$

E) **La Raíz de una Raíz.**- Cuando hablamos de las bases y principios aplicables en la multiplicación, analizamos las leyes de los exponentes y entre otras, vimos el comportamiento de la potencia de una potencia y dejamos establecido que: $(a^m)^n = a^{mn}$, pues bien ahora nos encontramos ante la raíz de otra raíz y tal vez de otra, esta operación según veremos, se reduce a la simple multiplicación de los índices de las raíces solicitadas.

Ilustración: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ porque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/m}$

$= a^{1/mn}$

$= \sqrt[mn]{a}$

Ejemplos: Expresamos las siguientes raíces de raíces con un solo índice.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{5}}} = \sqrt[24]{45}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt{3x}} = \sqrt[6]{12x}$ d) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

E J E R C I C I O 4 - 3

Simplificar al máximo los siguientes radicales.

1.- $\sqrt{28}$ 2.- $\sqrt{20}$ 3.- $\sqrt[3]{54}$

4.- $\sqrt[3]{-40}$ 5.- $\sqrt{18x^2y^4}$ 6.- $\sqrt[3]{125x^5y^6}$

7.- $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ 8.- $\sqrt{\dfrac{2x}{5y}}$ 9.- $\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$

10.- $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{25}}$ 11.- $\sqrt[4]{\dfrac{y}{9a^2}}$ 12.- $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

13.- $\sqrt[5]{\dfrac{-32x^{10}}{y^4}}$ 14.- $\sqrt{32x^5}$ 15.- $\sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 10x + 25}{25x^2}}$

Aplicando las leyes de exponentes y radicales introducir el coeficiente como parte de los factores del radicando.

16.- $3\sqrt{5}$ 17.- $3a\sqrt{b}$ 18.- $5a\sqrt{\dfrac{a+1}{25a^2}}$

19.- $3x\sqrt{\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{x^2}}$ 20.- $\dfrac{m}{n}\sqrt{\dfrac{5n^3}{m^5}}$ 21.- $\dfrac{7m}{n^2}\sqrt{\dfrac{3n^5}{49}}$

Empleando las leyes de los radicales, expresar cada uno de los siguientes problemas en función de un solo radical.

22.- $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ 23.- $\sqrt[3]{\sqrt{m^6}}$ 24.- $\sqrt{3\sqrt[3]{81}}$

25.- $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}$ 26.- $\sqrt{2a\sqrt[3]{8a^4}}$ 27.- $\sqrt{x\sqrt[4]{256x^7}}$