6.- ADICION Y SUSTRACCION DE RADICALES.

Al tratar la adición y sustracción de términos algebraicos, dejamos establecido que cada término se suma o se resta con su semejante.

Hoy, el principio sigue vigente, salvo que, ahora, el concepto se amplía a lo que llamaremos "radicales semejantes", diciendo que son aquellos cuyo índice y radicandos son iguales, de donde, podemos afirmar que la adición y sustracción de radicales se concreta a la suma y resta de los coeficientes de radicales semejantes, dejando indicada la operación cuando se trata de radicales no semejantes.

Ahora bien, si los radicales a sumar o restar, están dispuestos en forma tal que aparenten no ser semejantes, hasta donde sea posible, debemos aplicarles las leyes de los radicales estudiados y mediante su simplificación, detectar su semejanza para efectuar las operaciones solicitadas.

Ejemplos:

Simplificar y efectuar las operaciones que en cada caso se indican.

a) $3\sqrt{20} + 6\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$

$= 3\sqrt{(4)(5)} + 6\sqrt{(9)(5)} - 3\sqrt{(16)(5)}$

$= 6\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

$= 24\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$

$= 12\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{x^2y} + \sqrt{4x^2y} - \sqrt{25x^2y}$

$= 3x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} - 5x\sqrt{y}$

$= 5x\sqrt{y} - 5x\sqrt{y}$

$= 0$

c) $2\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{9}$

$= 2\sqrt{9.3} - \frac{6}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{3x^4} - 3\sqrt[3]{81x} - \sqrt{3x}$

$= x\sqrt[3]{3x} - 9\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

$= (x - 9)\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

$= (x - 9)\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3x}$

La operación la dejamos indicada por tratarse de radicales no semejantes.

$\sqrt[3]{3x}$ y $\sqrt{3x}$

e) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{y}\sqrt{xy} + \frac{1}{x}\sqrt{xy}$

$= \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\sqrt{xy} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)\sqrt{xy}$

E J E R C I C I O 4 - 4

Realizar las operaciones indicadas y simplificar lo más posible tratando de obtener radicales semejantes.

1.- $\sqrt{98} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$

2.- $\sqrt{250} - \sqrt{40} + \sqrt{160}$

3.- $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

4.- $\sqrt{245} - \sqrt{80} - \sqrt{125}$

5.- $\sqrt{24} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - 3\sqrt{6}$

6.- $\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{1}{6}} + 5\sqrt{\frac{2}{3}}$

7.- $\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{27}}$

8.- $\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - \sqrt{80}$

9.- $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625}$

10.- $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{54}$

11.- $\sqrt{9x^3y} + \sqrt{16xy^3} - \sqrt{4xy}$

12.- $\sqrt{50x^3} - 3\sqrt{98x} + \sqrt{8x}$

13.- $\sqrt{3xy^2} + \sqrt{27x^3y^4} - 5\sqrt{12x^5y^6}$

14.- $\sqrt[3]{3xy} - \sqrt[3]{24x^4y^4} - \sqrt[3]{81xy^7}$

15.- $\sqrt[3]{2a^4} - \sqrt[3]{16ab^3} + \sqrt[3]{54a^4b^6}$

16.- $\sqrt[3]{135a^2b^5} + \sqrt[3]{40a^5b^5} - \sqrt[3]{5a^5b^2}$

17.- $\sqrt[3]{54m^4} - \sqrt[3]{24m} + \sqrt[3]{27m^6}$

18.- $\sqrt[4]{4m^2} - \sqrt{18m^3} + \sqrt{32m}$

19.- $\sqrt{5m^3} - \sqrt[4]{25m^6} + \sqrt[6]{125m^6}$

20.- $\sqrt{\frac{3}{a}} - \sqrt{\frac{1}{3a}} - \sqrt{\frac{a}{3}}$

21.- $\sqrt{12m^3} + 5\sqrt[4]{9m^2} - 9\sqrt[6]{27m^3}$

22.- $\sqrt{\frac{3b}{2a}} - \sqrt{\frac{2a}{3b}} + \sqrt{\frac{1}{6ab}}$

7.- MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES.

En base a las leyes de los radicales, podemos decir que el producto o el cociente de dos radicales del mismo índice, se encuentra, respectivamente, mediante la multiplicación o la división de sus radicandos.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad ó \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Cuando deseamos hallar un producto cuyos radicales contengan índices diferentes, precisamos expresarlos en un solo radical donde el índice sea mayor y represente al m.c.m. de los índices dados.

En tal caso, elevamos el ó los índices de los radicales considerados como factores haciendo uso de la ley que expresa el producto de radicales de índices diferentes cuya representación simbólica es:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq + np}}$$

Ejemplos: encontremos en cada caso el producto de radicales solicitado.

a) $2\sqrt[3]{3x} \cdot 5\sqrt[3]{3x^2y} = 10\sqrt[3]{9x^3y} = 10x\sqrt[3]{9y}$

b) $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 6\sqrt{25} - 11\sqrt{10} + 4\sqrt{4}$

$= 30 - 11\sqrt{10} + 8$

$= 38 - 11\sqrt{10}$

c) $(7\sqrt{x} - 4\sqrt{y})^2 = 49x - 56\sqrt{xy} + 16y$

d) $3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt[3]{2} = 15\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = 15\sqrt[6]{108}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = 3\sqrt[4]{3}$

En cambio para llegar al cociente de dos radicales lo hacemos aplicando la ley que nos dice $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ cuando se trata de radicales de índices iguales, en cambio si son diferentes, debemos igualarlos para someterlos luego a la ley de referencia.

El cociente de radicales lo determinamos cuando racionalizamos las fracciones y el numerador de la misma lo presentamos en su forma más simple.

Ejemplo: Determinemos los cocientes en cada una de las siguientes fracciones con radicales.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = 1/\,5\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2x}{3a^2}} = \sqrt[3]{\frac{18ax}{27a^3}} = \frac{1}{3a}\sqrt[3]{18ax}$

c) $\sqrt[4]{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)^3}} = \sqrt[4]{\frac{(a + b)^3}{(a + b)^4}} = \frac{1}{a + b}\sqrt[4]{(a + b)^3}$

d) $\sqrt[3]{\frac{(2x + 1)^2}{9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{3x\,(2x + 1)^2}{27x^3}} = \frac{1}{3x}\sqrt[3]{12x^3 + 12x^2 + 3x}$

e) $\frac{8\sqrt[3]{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt[3]{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt[6]{3^2 \cdot 2^3}}{2\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt[6]{72}}{4} = 2\sqrt[6]{72}$

E J E R C I C I O 4 - 5

A.- Multiplica y simplifica los siguientes radicales.

1.- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

2.- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}$

3.- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{12}$

4.- $\sqrt{8xy^2} \cdot \sqrt{3x^3y}$

5.- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10}$

6.- $\sqrt[3]{12x^2} \cdot \sqrt[3]{9x}$

7.- $\sqrt{3}\,(\sqrt{6} + \sqrt{18})$

8.- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

9.- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

10.- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

11.- $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$

12.- $\sqrt{3}\;.\;\sqrt[4]{18}$

13.- $\sqrt{3}\;.\;\sqrt[3]{4}$

14.- $\sqrt{5}\;.\;\sqrt[3]{16}$

15.- $\sqrt{7}\;.\;\sqrt[3]{7}\;\;\sqrt[4]{7}$

16.- $\sqrt{3x}\;.\;\sqrt[3]{3x}\;.\;\sqrt[4]{3x^2}$

17.- $\sqrt{x+\sqrt{y}}\;.\;\sqrt{x-\sqrt{4}}$

18.- $\sqrt{x+\sqrt[3]{y}}\;.\;\sqrt{x-\sqrt[3]{y}}$

B.- Racionaliza y simplifica las divisiones que se solicitan.

19.- $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$

20.- $\sqrt{5}\div\sqrt{20}$

21.- $\sqrt{2a^2}\div\sqrt{32a}$

22.- $\sqrt{3a}\div\sqrt{27a^4}$

23.- $3\sqrt{5a^3}\div\sqrt{45a}$

24.- $10\sqrt{5x^3}\div 2\sqrt{20x}$

25.- $\sqrt[3]{54}\div\sqrt[3]{2}$

26.- $3\sqrt{a}\div\sqrt[3]{3a^2}$

27.- $\sqrt[3]{18a^4}\div\sqrt[3]{9a}$

28.- $\sqrt[3]{x}\div\sqrt{x}$

29.- $\sqrt{2x^2}\div\sqrt[3]{4x}$

30.- $\sqrt[3]{5x}\div\sqrt{5x}$

31.- $\dfrac{5}{5-\sqrt{5}}$

32.- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

33.- $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

34.- $\dfrac{7}{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}$

35.- $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

36.- $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

AUTOEVALUACION

I.- Sobre cada línea escribe la respuesta que complete correctamente la proposición dada.

1.- ______________________ Es el resultado de elevar una base a un exponente determinado.

2.- ______________________ Representa a la operación inversa de la potenciación.

3.- ______________________ Significa dejarle su denominador libre de expresiones radicales.

4.- ______________________ Símbolo mediante el cual representamos la radicación.

5.- ______________________ No tiene raíces reales de orden -- par porque no existe base que elevada a un exponente par nos - resulte una potencia negativa.

6.- ______________________ Es el número que podemos expresar como cociente de dos enteros.

7.- ______________________ Consiste en llevar un radical a su mínima expresión.

8.- ______________________ Radicales que tienen tanto el índice como el radicando iguales.

II.- Relaciona ambas columnas escribiendo dentro de cada paréntesis el número que establezca la correspondencia adecuada.

1.- $a^m \cdot a^n$

2.- $(ab)^m$

3.- $(a^m)^n$

4.- $\frac{a^m}{a^n}$

5.- $\left(\frac{a}{b}\right)^m$

6.- x^9

7.- 1

8.- ab^m

9.- x

10.- $\frac{4x^{-3}y^{-5}}{3^{-1}x^2y^{-7}}$

11.- $\frac{2^2x^{-7}y^4}{3^0x^{-2}y^{-2}}$

( ) $\frac{a^m}{b^m}$

( ) a^{mn}

( ) a^{m+n}

( ) $12\frac{y^2}{x^5}$

( ) a^mb^m

( ) a^{m-n}

( ) $x^5 \cdot x^4$

( ) $x^6 \cdot x^{-2} \cdot x^{-4}$

( ) $4\frac{y^6}{x^5}$

( ) $\frac{x^9}{64y^6}$

12.- $\left(\frac{x^3}{4y^2}\right)^3$

13.- $\frac{x^3 \cdot x^3}{8y^2 \cdot 8y^3}$

III.- Realiza lo solicitado en cada caso.

A) Simplifica cada expresión, efectuando las operaciones indicadas y dejando el resultado sin exponentes nulos o negativos.

1.- $4^5 \cdot 4^2 =$

2.- $(a^4)^4 =$

3.- $(5 \cdot 3)^0 =$

4.- $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1} =$

5.- $\left[(m-1)^3\right]^2 =$

6.- $\frac{9^{-2} \cdot 9^{-3}}{3^{-9} \cdot 3} =$

7.- $\frac{a^{-4} + b^{-4}}{a^{-4} - b^{-4}} =$

8.- $\frac{16a^3b^2c^{-3}}{4ab^{-5}c^{-6}} =$

9.- $\left(\frac{2a^{-2}b^{-3}}{4a^{-4}b^{-3}}\right)^2 \left(\frac{3ab^2}{a^2b^3}\right)^3 =$

10.- $\left(\frac{6ab^2}{b^3}\right)^2 \left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 =$

B) Presenta cada uno de los siguientes radicales en la forma más -- simple.

1.- $\sqrt{12} =$

2.- $\sqrt{\frac{2}{3}}$ =

3.- $\sqrt[3]{\frac{2a}{3b}}$ =

4.- $\sqrt[3]{\frac{a^4 b^4}{c^2}}$ =

5.- $\sqrt[4]{\frac{4a^6}{a^2 - 2a + 1}}$ =

C) Cambia cada expresión a su forma radical y simplifícala.

1.- $8^{5/2}$ =

2.- $9^{-3/2}$ =

3.- $27^{2/3}$ =

4.- $64^{-1/3}$ =

5.- $x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ =

D) Las siguientes raíces de raíces, preséntalas en función de un solo radical simplificado al máximo.

1.- $\sqrt[4]{\sqrt{5}}$ =

2.- $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$ =

3.- $\sqrt[4]{64\sqrt{64}}$ =

4.- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$ =

5.- $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{6}}$ =

IV.- Efectúa las operaciones señaladas en cada inciso, aplicando leyes de radicales y simplificando al máximo cada resultado.

A) ADICION Y SUSTRACCION.

1.- $2\sqrt{128} - \sqrt{200}$ =

2.- $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ =

3.- $\sqrt{20} - 2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}$ =

4.- $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{54}$ =

5.- $\sqrt{\frac{8}{3}} + 5\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{6}}$ =

B) MULTIPLICACION Y DIVISION.

1.- $\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{10}$ =

2.- $\sqrt{3ab} \cdot \sqrt{18a^2b^4}$ =

3.- $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2}$ =

4.- $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{4}$ =

5.- $\sqrt{72} \div \sqrt{8}$ =

6.- $\sqrt{68} \div \sqrt{17}$ =

7.- $\sqrt[3]{21a} \div \sqrt[3]{7a^2}$ =

8.- $\sqrt{63} \div \sqrt{7}$ =