QUINTA UNIDAD

LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

Actualmente:

Calcular Productos, Cocientes, Potencias y Raíces es sorprendente; conocer el origen de tales logros, resulta maravilloso.

OBJETIVO GENERAL:

Al término de la unidad, el alumno aplicará las diferentes propiedades o leyes de los logaritmos, para simplificar operaciones -- aritméticas.

OBJETIVOS PARTICULARES:

El alumno:

1.- Definirá el concepto de logaritmo.

2.- Distinguirá las partes de cualquier logaritmo común.

3.- Usará las tablas de los logaritmos, para encontrar el logaritmo y antilogaritmo de cualquier número.

4.- Enunciará las propiedades de los logaritmos.

5.- Utilizará las porpiedades de los logaritmos y sus tablas, en el cálculo de operaciones aritméticas complejas.

LOS LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES.

1.- CURIOSA SITUACION.- Se ha dicho que la artimética es la parte de la matemática llamada de "las cuatro operaciones", aunque en realidad sean dos con sus respectivas inversas.

Durante mucho tiempo, el hombre pensó y creyó que el mundo matemático se concretaba tan solo al campo aritmético y sus cuatro operaciones.

Fué durante el siglo XVI y gracias al abogado francés VIETA, a quién se le considera "el padre del álgebra", cuando por vez primera se comienzan a usar letras y símbolos a fin de descifrar códigos y - claves empelando la ecuación para solucionar incógnitas.

A partir de entonces y gracias a los estudiosos de los principios algebraicos sentados, se fueron incrementando el número de operaciones surgiendo la "quinta operación" llamada también "Potenciación" o elevación de Potencias, pero, aquí, aparece una curiosa situación: a diferencia de la suma y la multiplicación que cuentan cada una de ellas con su respectiva operación inversa, la Potenciación $\boxed{b^e = P}$, trae aparejadas dos inversas.

La primera consiste en la búsqueda de la base "b", es decir la - extracción de la raíz o radicación. La segunda inversa se preocupa -- por la localización de "e", o sea el exponente al qué fue elevada la base "b" para que nos resulta la Potencia "P", a esta nueva operación le llamamos Logaritmación u operación logarítmica, conocida también como la séptima operación matemática.

Por esta razón hay quienes dicen que el álgebra es "la aritmética de las siete operaciones".

2.- ALGO DE HISTORIA.- Gracias al descubrimiento de los logaritmos, realizado por el matemático inglés Juan Néper, las operaciones de cálculo se aceleraron y simplificaron a la vez.

Con la aparición de las primeras tablas logarítmicas, el agotamiento físico y mental de los científicos de su época se vió reducido y el rendimiento exaltado.

Los inventos de Néper sirvieron de fundamento para que Briggs, contemporáneo de áquel, inventara la famosa tabla de logaritmos decimales y ambos, han sido la base para que en la actualidad nosotros gocemos de las bondades que ofrecen las reglas de cálculo, las máquinas calculadoras y las sofisticadas computadoras.

3.- LOGARITMOS.

A) Sus partes y definición.- Mediante el empleo de los exponentes y sus leyes, realizamos, en forma simplificada multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, tanto con números como con variables y vimos que el fundamento con que operan, se basa en los principios de la adición y sustracción.

En este capítulo, nos daremos cuenta de que las citadas operaciones pueden simplificarse todavía más, logrando encontrar más rápida y fácilmente, los resultados deseados, mediante el empleo de logaritmos.

Aseguramos que $2^3 = 8$ porque 3 es el exponente al que fue elevada la base 2 para que la igualdad sea cierta.

Ahora, considerando al 3 respecto del 8, podemos decir que 3 es el logartimo de 8 y la base es 2.

De esto formamos una nueva igualdad que resulta equivalente a la anterior diciendo:

Logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3. Expresado en signos diremos: $\boxed{\log_2 8 = 3}$

Así, decimos que cualquier ecuación, expresada en forma exponencial, puede ser presentada o quizá sustituída por su igual o equivalente en forma logarítmica.

Ecuación Exponencial:	Ecuación Logarítmica:
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$b^e = P$	$\log_b P = e$

De donde inferimos que las partes de un logaritmo son la base, la potencia y el exponente y deducimos que:

El logaritmo de un número o potencia es el exponente al que debe elevarse una base para obtener dicho número o potencia.

E J E R C I C I O 5 - 1

I.- Cambia a la forma logarítmica las ecuaciones exponenciales que se te ofrecen.

1.- $4^y = 17$	________	6.- $2^4 = 16$	________
2.- $3^3 = 27$	________	7.- $4^3 = 64$	________
3.- $x^2 = 16$	________	8.- $6^2 = 36$	________
4.- $3^x = 34$	________	9.- $2^5 = 32$	________
5.- $5^3 = 125$	________	10.- $10^2 = 100$	________

II.- Espresa cada ecuación logarítmica en forma exponencial.

1.- $\log_4 16 = 2$ ________	6.- $\log_4 64 = 3$ ________
2.- $\log_3 27 = 3$ ________	7.- $\log_7 49 = 2$ ________
3.- $\log_2 32 = 5$ ________	8.- $\log_5 125 = 3$ ________
4.- $\log_5 25 = 2$ ________	9.- $\log_{11} 121 = 2$ ________
5.- $\log_2 64 = 6$ ________	10.- $\log_6 36 = 2$ ________

III.- Determina los siguientes logaritmos.

1.- $\log_{10} 10000 =$ ________	6.- $\log_9 81 =$ ________
2.- $\log_7 49 =$ ________	7.- $\log_4 64 =$ ________
3.- $\log_5 25 =$ ________	8.- $\log_6 36 =$ ________
4.- $\log_3 27 =$ ________	9.- $\log_8 64 =$ ________
5.- $\log_{12} 12 =$ ________	10.- $\log_2 64 =$ ________

IV.- Sustituye x por su valor.

$\log_x 125 = 3$	$x =$
$\log_x 8 = 3$	$x =$
$\log_x 81 = 4$	$x =$
$\log_9 x = 3$	$x =$
$\log_5 x = 2$	$x =$
$\log_4 x = 3$	$x =$
$\log_3 27 = x$	$x =$
$\log_7 49 = x$	$x =$
$\log_{12} 144 = x$	$x =$
$\log_{10} 1000 = x$	$x =$

B) Sus propiedades.

Los logaritmos cuentan también con una serie de leyes o principios que les son muy propios, entre ellas, encontramos las siguientes:

a) El logaritmo de 1 es 0.

Si partimos del hecho de que $b^0 = 1$ "Cualquier base $\neq 0$, elevada al exponente cero es igual a la unidad", entonces diremos que $\log_x 1 = 0$ sea cual fuese el valor de x, hecha excepción del 0.

b) El logaritmo de la base es igual a 1.

Sabiendo que: "Cualquier base elevada al exponente uno es --- igual a sí misma", diremos que: $b^1 = b$ por lo que para cualquier - valor de x tenemos que: $\log_x x = 1$.

c) Logaritmo de un producto.

Recordando aquello de: "Cuando multiplicamos bases iguales -- con exponentes distintos o iguales, el producto será igual a la -- misma base sumando sus exponentes", podemos afirmar que:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

Ahora bien, si hacemos $A = b^x$ y $B = b^y$, entonces diremos -- que $\log_b A = x$ y $\log_b B = y$

De tales igualdades, también podemos establecer que $(A)(B) = (b^x)(b^y)$ o lo que es lo mismo, $A\,B = b^{x+y}$,

$$\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B.$$

De igual manera, el logaritmo del producto xyz, será igual a $\log_b (xyz) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$.

Por lo que podemos afirmar que:

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

Ejemplos:

$\log_b (5)(8) = \log_b 5 + \log_b 8.$

$\log_b (6)(3)(7) = \log_b 6 + \log_b 3 + \log_b 7.$

d) Logaritmo de un cociente.

Con las bases analizadas, dado que la división es la operación inversa a la multiplicación, recordemos que: "Cuando dividimos bases iguales con exponentes distintos o iguales, su cociente es igual a la misma base, restando, según el lugar que ocupa en la fracción, del exponente mayor, el menor". Por lo que, si hacemos:

$A = a^m$ y $B = a^n$, entonces:

$\log_a A = m$ y $\log_a B = n$; de donde decimos que:

$\frac{A}{B} = \frac{a^m}{a^n}$, o bien $\frac{A}{B} = a^{m-n}$

Utilizando la forma logarítmica, también podemos expresar que:

$\log_a \frac{A}{B} = m - n$ y haciendo uso de la sustitución podemos inferir que: $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$;

Es decir:

El logaritmo de un cociente se encuentra restando al logaritmo del dividendo el logaritmo de divisor.

Ejemplos:

$\log_a \frac{38}{5} = \log_a 38 - \log_a 5$

$\log_x 13/7 = \log_x 13 - \log_x 7$

$\log_y 7 \times 5/3 = \log_y 7 + \log_y 5 - \log_y 3$

$\log_z 9/2 \times 6/5 = (\log_z 9 + \log_z 6) - (\log_z 2 + \log_z 5)$

e) El logartimo de una potencia. Cuando tratamos la potencia de una potencia, establecimos que:

$(a^m)^n = a^{mn}$, supongamos ahora que $A = a^m$ y se nos solicita que determinemos el logaritmo de A^n.

Con tales antecedentes, nuestro análisis tendrá que partir de: $\log_a A = m$. Ahora bien, como ya establecimos que $A = a^m$, entonces claramente advertimos que $A^n = (a^m)^n$ o lo que es lo mismo $A^n = a^{mn}$, esto, expresado en forma logarítmica nos permite establecer la igualdad:

$\log_a A^n = m\,n$ y haciendo uso de la propiedad sustitutiva afirmamos que:

$\log_a A^n = n\,(\log_a A)$

es decir:

El logaritmo de una potencia será igual al producto que resulte de multiplicar el exponente de la base por su logaritmo.

Ejemplo:

$\log_x 8^3 = 3\ (\log_x 8)$

$\log_y 67^5 = 5\ (\log_y 67)$

f) Logaritmo de una raíz. En base a lo anterior, recordemos tan solo que cualquier expresión presentada en forma de radical, puede ser sustituída por otra con exponente fraccionario, $\sqrt[n]{a^m} = (a)^{m/n}$, de donde, el logaritmo de una raíz se encontrará aplicando el fundamento del logaritmo de una potencia.

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n}(\log_b a)$$

Ejemplos: Localicemos el logaritmo en base "b" de:

a) $\sqrt[5]{87}$, b) $\sqrt[3]{64}$, c) $\sqrt{81}$

Soluciones:

a) $\log_b \sqrt[5]{87} = \log_b (87)^{1/5} = 1/5\ (\log_b 87) = \log_b 87$

b) $\log_b \sqrt[3]{64} = \log_b (64)^{1/3} = \log_b (2^6)^{1/3} = \log_b 2^2 = 2 \log_b 2$

c) $\log_b \sqrt{81} = \log_b 9.$

E J E R C I C I O 5 - 2

Aplicando las propiedades de los logaritmos, expresa en su forma correspondiente cada uno de los siguientes casos.

1.- $\log_x (9)(3) =$

2.- $\log_a (71.3)(1.35) =$

3.- $\log_y (785)(643.1) =$

4.- $\log_z (79.3)(15)(153.2) =$

5.- $\log_b (7.42)(78)^3 =$

6.- $\log_x \frac{87}{23.1} =$

7.- $\log_b \frac{15.341}{26.5} =$

8.- $\log_b \frac{(43)(24)}{37^{1/3}} =$

9.- $\log_y \frac{(11.1)(19.3)(20.31)}{(58)(13.5)} =$

10.- $\log_x \frac{1231}{20513} =$

11.- $\log_x 1234^3 =$

12.- $\log_y 413^{-5} =$

13.- $\log_a \sqrt{75} =$

14.- $\log_x \sqrt[3]{125} =$

15.- $\log_a \sqrt{153} =$

4.- LOGARITMOS COMUNES O DECIMALES: Sus partes.

Los procesos logarítmicos simplifican cualquier cálculo numérico. Si nuestro sistema de numeración es el decimal, entonces, los logaritmos que convenientemente debemos usar son los de base 10 a los que nosotros les hemos dado el nombre de logartimos comunes ó decimales.

Al adoptar los logaritmos comunes para nuestro sistema, convenimos en que la base es 10, por lo mismo, a partr de este momento omitiremos su inscripción en la relación de igualdad, dejando solo la abreviatura log (en minúscula). Así, para referirnos al logaritmo de 8, diremos tan solo log 8.

A continuación, observemos el comportamiento de la siguiente tabla de potencias de 10 mayores que 1.

$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^3 = 1{,}000$	$\log 1{,}000 = 3$
$10^4 = 10{,}000$	$\log 10{,}000 = 4$
$10^5 = 100{,}000$	$\log 100{,}000 = 5$
$10^6 = 1{,}000{,}000$	$\log 1{,}000{,}000 = 6$