EJERCICIO Nº32

EJEMPLO Nº1 Sea $w=x^2y^3\,\text{sen}\,z+e^{xz}$, Encuentre $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$

SOLUCION:

$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3\,\text{sen}\,z + ze^{xz}$; $\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2\,\text{sen}\,z$; $\frac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3\cos z + xe^{xz}$

Ejemplo Nº2 Encuentre las segundas derivadas parciales de "f" suponiendo que $f(x,y)=x^3y^2-2x^2y+3x$

SOLUCION:

Como $f_x(x,y)=3x^2y^2-4xy+3$ y $f_y=f_y(x,y)=2x^3y-2x^2$ tenemos que:

$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2-4xy+3)=6xy^2-4y$

$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2-4xy+3)=6x^2y-4x$

$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y-2x^2)=6x^2y-4x$

$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y-2x^2)=2x^3$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 15 encuentre las primeras derivadas parciales.

Nº1 $f(x,y)=3x^3-4x^2y+3xy^2+7x-8$ Nº2 $f(x,y)=6x+3y-7$ Nº3 $f(x,y)=3xy+6x-y^2$

Nº4 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ Nº5 $f(x,y)=2x^4y^3-xy^2+3y+1$ Nº6 $f(x,y)=(x^3-y^2)^2$

Nº7 $f(\theta,\varnothing)=\text{sen}\,3\theta\cos 2\varnothing$ Nº8 $f(u,w)=\text{arc tan}(u/w)$

Nº9 $f(x,y)=x\cos(x/y)$ Nº10 $f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}\sec x$

Nº11 $f(x,y,z)=4xyz+\ln(2xyz)$ Nº 12 $f(r,\theta,\varnothing)=4r^2\text{sen}\theta+5e^r\cos\theta\,\text{sen}\varnothing-2\cos\varnothing$

Nº13 $f(x,y,z)=(y^2+z^2)^x$ Nº14 $f(r,s,v)=(2r+3s)^{\cos v}$

Nº15 $f(r,s,v,p)=r^3\tan s+\sqrt{s}\,e^{v^2}-v\cos 2p$

SOLUCION:

Nº1 $f_x(x,y)=9x^2-8xy+3y^2+7$, $f_y(x,y)=-4x^2+6xy-8$

Nº2 $f_x(x,y)=6$; $f_y(x,y)=3$

Nº3 $f_x(x,y)=3y+6$; $f_y(x,y)=3x-2y$

Nº4 $f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Nº5 $f_x(x,y)=8x^3y^3-y^2$; $f_y(x,y)=6x^4y^2-2xy+3$

Nº6 $f_x(x,y)=6x^5-6x^2y^2$; $f_y(x,y)=-4x^3y-4x^3$

Nº7 $f_\theta(\theta,\varnothing)=3\cos 2\varnothing\cos 3\theta$; $f_\varnothing(\theta,\varnothing)=-2\text{sen}3\theta\,\text{sen}\,2\varnothing$

Nº8 $f_u(u,w)=\frac{w}{u^2+w^2}$; $f_w(u,w)=\frac{-u}{w^2+u^2}$

Nº9 $f_x(x,y)=\frac{-x}{y}\text{sen}(x/y)+\cos(x/y)$; $f_y(x,y)=\frac{x^2}{y^2}\text{sen}(x/y)$

Nº10 $f_x(x,y)=\sec x\tan x\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x\sec x}{\sqrt{4x^2-y^2}}$; $f_y(x,y)=-\frac{y\sec x}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

Nº11 $f_x(x,y,z)=4yz+1/x$, $f_y(x,y,z)=4xz+1/y$; $f_z(x,y,z)=4xy+1/z$

Nº12 $f_r(r,\theta,\varnothing)=8r\text{sen}\theta+5e^r\cos\theta\,\text{sen}\varnothing$; $f_\theta(r,\theta,\varnothing)=4r^2\cos\theta-5e^r\text{sen}\theta\,\text{sen}\varnothing$

$f_\varnothing(r,\theta,\varnothing)=5e^r\cos\theta\cos\varnothing+2\text{sen}\varnothing$

Nº13 $f_x(x,y,z)=(y^2+z^2)^x\ln(y^2+z^2)$; $f_y(x,y,z)=2xy(y^2+z^2)^{x-1}$; $f_z(x,y,z)=2xz(y^2+z^2)^{x-1}$

Nº14 $f_r(r,s,v)=2\cos v\,(2v+3s)^{\cos v-1}$; $f_s(r,s,v)=3\cos v\,(2r+3s)^{\cos v-1}$;

$f_v(r,s,v)=-\text{sen}v(2r+3s)^{\cos v}\ln(2r+3s)$

Nº15 $f_r(r,s,v,p)=3r^2\tan s$; $f_s(r,s,v,p)=r\sec^2 s+\frac{e^{v^2}}{2\sqrt{5}}$; $f_v(r,s,v,p)=2r\sqrt{s}\,e^{v^2}-\cos{:}2p$

$f_p(r,s,v,p)=2v\,\text{sen}\,2p$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 16 al 20 verifique que $W_{xy}=W_{yx}$

Nº16 $W=xy^4-2x^2y^3+4x^2-3y$ Nº17 $W=\frac{x^2}{x+y}$ Nº19 $W=y^2e^{x^2}+\frac{1}{x^2y^3}$

Nº18 $W=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$

Nº20 $W=x^2\cosh(z/y)$

Nº21 Sea $W=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$ encuentre W_{xyz}; $W_{xyz}=18xy^2+16y^3z$

Nº22 Sea $W=u^4vt^2-3uv^2t^3$ encuentre w_{tut} ; $W_{tut}=8u^3v-18v^2t$

Nº23 Sea $W=\frac{x^2}{y^2+z^2}$ encuentre $\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial y^2}$; $\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial y^2}=\frac{8x^2z(y^2+z^2)^2-48x^2y^2z(y^2+z^2)}{(y^2+z^2)^5}$

Nº24 Sea $W=r^4s^3t-3s^2e^{rt}$ verifique que $W_{rrs}=W_{rsr}=W_{srr}$

$W_{rrs}=W_{rsr}=w_{srr}=36r^2s^2t-6st^2e^{rt}$

EJERCICIO Nº33

Ejemplo Nº1 sean $W=u^3+e^{2v}$, $u=xy^2$ y $u=x^3\text{sen}y$ encuentre $\frac{\partial W}{\partial x}$ y $\frac{\partial W}{\partial y}$

Solución

$\frac{\partial W}{\partial x}=(3u^2)(y^2)+(2e^{2v})(3x^2\text{sen}y)=3u^2y^2+6e^{2v}x^2\text{sen}y$

$\frac{\partial W}{\partial y}=(3u^2)(2xy)+(2e^{2v})(x^3\cos y)=6u^2xy+2e^{2v}x^3\cos y$

Si deseamos expresar estas derivadas parciales en terminos de "x" y "y" solamente, podemos hacerlo sustituyendo xy^2 en lugar de u y $x^3\text{sen}y$ en lugar de v

Problemas propuestos:

En los ejercicios 1 y 2 encuentre $\partial W/\partial x$ y $\partial W/\partial y$

Nº1 $W=u^2\text{sen}v$, $u=x^3-2y^3$, $v=xy^2$ Nº2 $W=u^3+u^2v-3v$, $u=\text{sen}xy$, $v=y\ln x$

En los ejercicios 3 y 4 encuentre $\partial W/\partial r$ y $\partial W/\partial s$

Nº3 $W=\sqrt{u^2+v^2}$, $u=re^{-s}$, $v=s^2e^{-r}$ Nº4 $W=e^{t/v}$, $t=r^2-s^2$, $v=r^3+s^3$

En los ejercicios 5 y 6 encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$

Nº5 $z=\frac{r+s}{v}$, $r=x\cos y$, $s=y\,\text{sen}\,x$, $v=2x-y$ Nº6 $z=uv^2+v\ln W$, $u=2x-y$, $v=x-2y$, $W=-2x+2y$

En los ejercicios 7 y 8 encuentre $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$, $\partial r/\partial t$

Nº7 $r=x^3+3y-xy^2$, $x=u+v\ln t$, $y=v^2-\ln ut$ Nº8 $r=x\cos y$, $x=u^2-vt$, $y=v^2-ut$

Nº9 Encuentre $\partial p/\partial r$ suponiendo que $p= u^2 \cos vw$, $u=xye^{rs}$, $v=\operatorname{sin} xyr$
$w=ys + r\operatorname{sen} x$

Nº10 Encuentre $\partial s/\partial y$ suponiendo que $s= tr^2 \tan^{-1} uv$, $t=x+y^2 z$
$r= x^2 +3yz$; $u=xz^2$, $v=xyz$

Solución:

Nº1 $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (2u\operatorname{sen} v)(3x^2) + (u^2\cos v)(y^2)$; $\dfrac{\partial W}{\partial y} = (2u \operatorname{sen} v)(-6y) + (u^2 \cos v)(2xy)$

Nº2 $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (3u^2+2uv)(y\cos xy) + (u^2-3)(y/x)$; $\dfrac{\partial W}{\partial y} = (3u^2 +2uv)(x\cos xy) + (u^2 -3) \ln x$

Nº3 $W_r = \dfrac{u e^{-s}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \dfrac{vs^2 e^{-r}}{\sqrt{u^2+v^2}}$; $W_s = \dfrac{-ure^{-s}}{\sqrt{u^2+v^2}} + 2vse^{-r} \Big/ \sqrt{u^2+v^2}$

Nº4 $\dfrac{\partial W}{\partial r} = \dfrac{e^{t/v}}{v}(2r) + \dfrac{-te^{t/v}}{v^2}(3r^2)$; $\dfrac{\partial W}{\partial s} = (-2s)\dfrac{e^{t/v}}{v} + (3s^2)\dfrac{-te^{t/v}}{v^2}$

Nº5 $Z_x= v^{-1}\cos y + v^{-1}y\cos x - 2(r+s)v^{-2}$; $Z_y= -v^{-1}x \operatorname{sen} y + v^{-1}\operatorname{sen} x + (r+s) v^{-2}$

Nº6 $Z_x= 2v^2 + (2uv +\ln w) -2vw^{-1}$; $Z_y= -v^2 + (2uv + \ln w)(-2) +2vw^{-1}$

Nº8 $r_u = \cos y(2u) + (x\operatorname{sen} y)(t)$; $r_v = \cos y(-t) + 2v(-x\operatorname{sen} y)$
$r_t = \cos y(-v) + (-x\operatorname{sen} y)(-u)$

Nº9 $P_r = (2u\cos vw)(Sxye^{rs}) + (-u^2w \operatorname{sen} vw)(s/r) + (-u^2v\operatorname{sen} vw)(\operatorname{sen} x)$

Nº10 $\dfrac{\partial s}{\partial y} = (r^2\tan^{-1}uv)(2yz) + (2rt \tan^{-1}uv)(3z) + \dfrac{\partial s}{\partial u}(0) + \dfrac{tr^2u}{1+u^2v^2}(xz)$