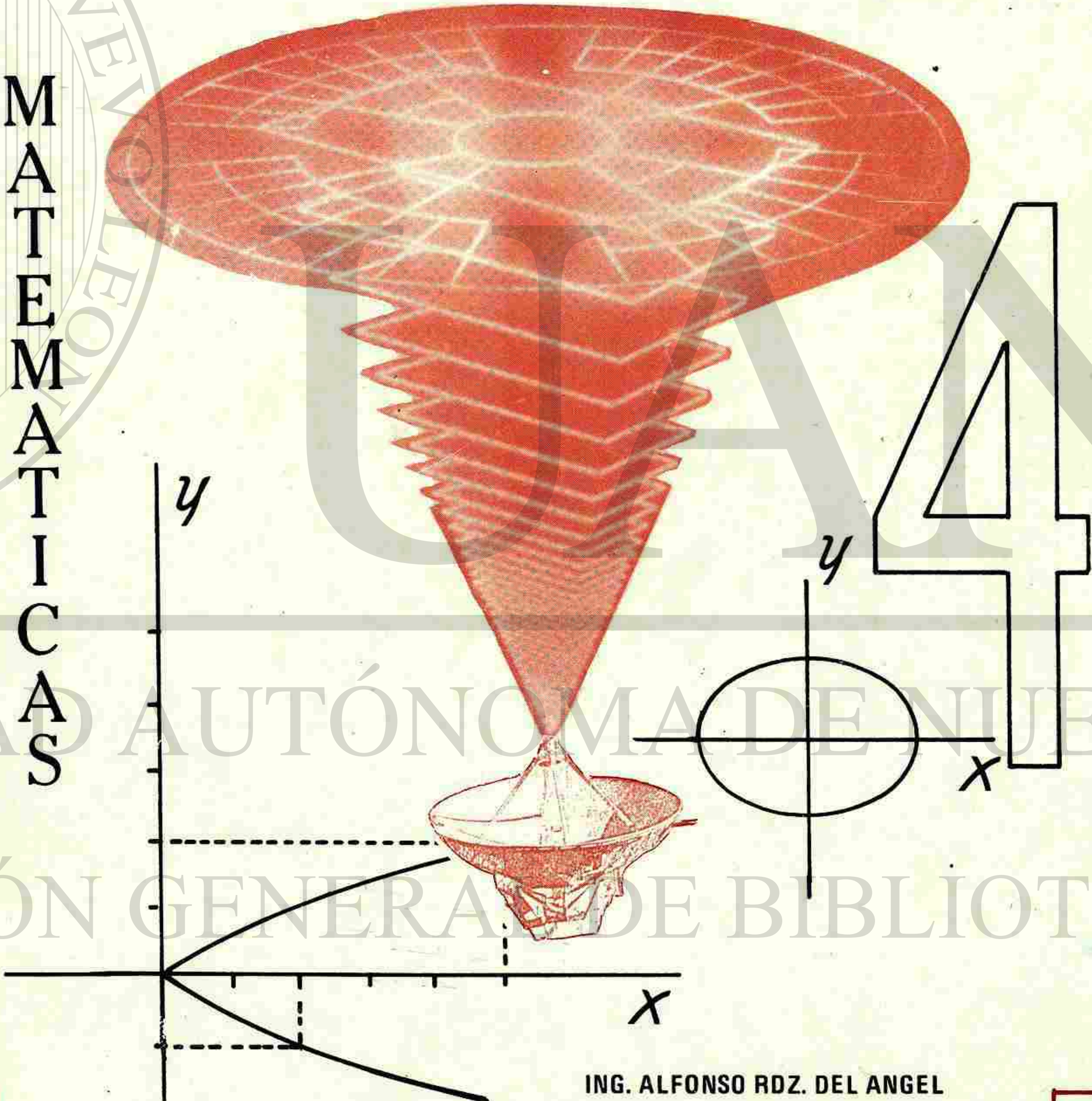
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

ESCUELA PREPARATORIA No. 2

MATEMATICAS 4



ING. ALFONSO RDZ. DEL ANGEL
ING. JOSE ANGEL OVALLE GZZ.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

ESCUELA PREPARATORIA No. 2

MATEMATICAS IV

ING. ALFONSO RODRIGUEZ DEL ANGEL
ING. JOSE ANGEL OVALLE GONZALEZ

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

La presente edición fue elaborada para los alumnos de la Universidad Autónoma de Nuevo León, de acuerdo al programa aprobado por la Comisión Académica del H. Consejo Universitario, en Julio de 1982.

4a. Edición - Enero - 1988.
Ediciones Preparatoria No. 2
Monterrey, N.L.

Elaborado por: ING. ALFONSO RODRIGUEZ DEL ANGEL
ING. JOSE ANGEL OVALLE GONZALEZ

Mecanografía: MA. ANTONIETA GUERRA CANTU

Dibujos: RICARDO DELGADO

Asesora Pedagógico: LIC. ANGELICA VAZQUEZ MIRANDA

I N D I C E

Pág.

UNIDAD I. TRIGONOMETRIA

- OBJETIVOS PARTICULARES 7
- OBJETIVOS ESPECIFICOS 8
- DEFINICION DE TRIGONOMETRIA 10
- DEFINICION DE TRIANGULO RECTANGULO 10
- PROPIEDADES DEL TRIANGULO RECTANGULO 11
- FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO 11
- ANGULOS DE 30°, 45° y 60° 16
- ANGULOS EN GENERAL (FUNCIONES) 19
- FUNCIONES COMBINADAS DE ANGULOS FUNDAMENTALES Y LOS TRES ANGULOS AGUDOS BASICOS 120°, 135°, 150°, ETC. . . 41
- FORMAS GENERALES, DEMOSTRACIONES Y EJERCICIOS 43
- SOLUCION DE DIVERSOS CASOS DE TRIANGULOS. 47
- LEYES DE SENOS Y COSENOS Y SUS APLICACIONES. 47

UNIDAD II. GEOMETRIA ANALITICA

- OBJETIVOS PARTICULARES 84
- OBJETIVOS ESPECIFICOS 85
- DEFINICION DE GEOMETRIA ANALITICA 87
- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. 87
- PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO 93
- PENDIENTE DE UNA LINEA RECTA Y SUS FORMAS DE LA ECUACION. 94
- PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS. 96
- DEFINICION DE CIRCUNFERENCIA. 120
- CASOS DE FORMAS REDUCIDA Y GENERAL DE LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA. 124
- EJEMPLOS DE DISTINTAS FORMAS DE LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA, DADOS SUS ELEMENTOS. 127
- PARABOLA CON EJE DE SIMETRIA HORIZONTAL Y VERTICAL CUYO VERTICE ESTA EN EL ORIGEN. 152
- ECUACION DE UNA PARABOLA Y SU GRAFICA A PARTIR DE CIERTOS DATOS DADOS. 153

Pág.

- DETERMINACION DE TODOS LOS ELEMENTOS DE UNA PARABOLA, DADA SU ECUACION. 156
- DEFINICION DE ELIPSE Y SUS ELEMENTOS. 176
- ELIPSE CON EJE DE SIMETRIA VERTICAL Y HORIZONTAL, CON CENTRO EN EL ORIGEN. 177
- ECUACION DE UNA ELIPSE A PARTIR DE CIERTOS DATOS, CONSTRUYENDO SU GRAFICA. 183
- OBTENCION DE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA ELIPSE, DADA SU ECUACION. 187
- TABLAS TRIGONOMETRICAS AUXILIARES. I

UNIDAD I

TRIGONOMETRIA

Pág.

- DETERMINACION DE TODOS LOS ELEMENTOS DE UNA PARABOLA, DADA SU ECUACION. 156
- DEFINICION DE ELIPSE Y SUS ELEMENTOS. 176
- ELIPSE CON EJE DE SIMETRIA VERTICAL Y HORIZONTAL, CON CENTRO EN EL ORIGEN. 177
- ECUACION DE UNA ELIPSE A PARTIR DE CIERTOS DATOS, CONSTRUYENDO SU GRAFICA. 183
- OBTENCION DE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA ELIPSE, DADA SU ECUACION. 187
- TABLAS TRIGONOMETRICAS AUXILIARES. I

U N I D A D I

TRIGONOMETRIA

O B J E T I V O S   P A R T I C U L A R E S

Al término de la unidad, el alumno:

Aplicará los conceptos fundamentales de la trigonometría plana en la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Demostrará algunas identidades trigonométricas.

O B J E T I V O S   E S P E C I F I C O S

El alumno:

-Definirá el concepto de trigonometría plana.

-Definirá, dado un triángulo rectángulo, las funciones trigonométricas de uno de sus ángulos agudos.

-Encontrará el valor de las demás funciones trigonométricas, dada el valor de una de ellas.

-Encontrará los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 60° y 45°.

-Definirá las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

-Determinará los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0° y 360°, 90°, 180° y 270°.

-Determinará los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 120°, 135°, 150° etc.

-Determinará los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

-Demostrará las siguientes identidades trigonométricas fundamentales:

a) Recíprocas

b) Pitagóricas

c) Senos, cosenos y tangentes de $(x \pm y)$

d) Angulo doble y semiángulo

-Aplicará los conceptos trigonométricos en la resolución de triángulos rectángulos, en sus diferentes casos.

-Enunciará las leyes de los enos y los cosenos.

-Aplicará las leyes de los senos y los cosenos en la resolución de triángulos oblicuángulos, en sus diferentes casos.

TRIGONOMETRIA

INTRODUCCION.- La palabra trigonometría indica exactamente el objeto original de esta rama de las Matemáticas.

Las tres palabras griegas que la forman TRI-GONO-METRIA significan: TRES-ANGULO-MEDIDA. E indican que cuando se adoptó el nombre, el tema que trataba principalmente estaba relacionado con las medidas de un triángulo.

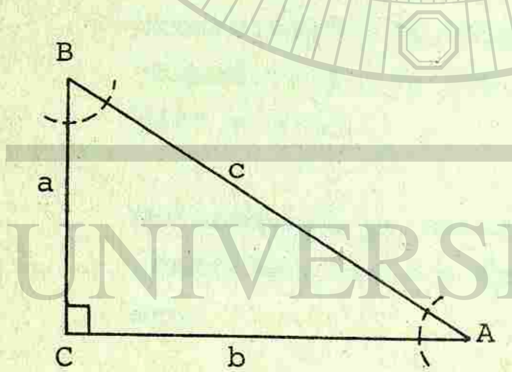
TRIGONOMETRIA: Rama de las Matemáticas que trata de la medida y propiedades de los ángulos y triángulos.

TRIGONOMETRIA PLANA: Trata de las figuras planas, es decir, aquellas que se encuentran sobre un plano.

TRIANGULO RECTANGULO Y FUNCIONES TRIGONOMETRIAS DE UN ANGULO AGUDO.

TRIANGULO RECTANGULO: Es aquel triángulo que posee un ángulo recto (cuya medida es 90°).

Ejemplo: El triángulo ABC es Rectángulo.



Nota: Usaremos letras minúsculas para designar los lados del triángulo que corresponden a la letra del vértice del ángulo opuesto. Por ejemplo: El lado "a" se opone al ángulo "A", etc.

PROPIEDADES DE UN TRIANGULO RECTANGULO

1) En todo triángulo, el lado mayor recibe el nombre de hipotenusa (c) y los otros dos lados, catetos (a y b).

2) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos (Teorema de Pitágoras).

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ o bien $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

3) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

$\boxed{a^2 = c^2 - b^2}$ o bien $\boxed{a = \sqrt{c^2 - b^2}}$

$\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$ o bien $\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$

4) Los ángulos de un triángulo rectángulo son agudos y además complementarios; es decir la suma de los mismos es igual a 90°.

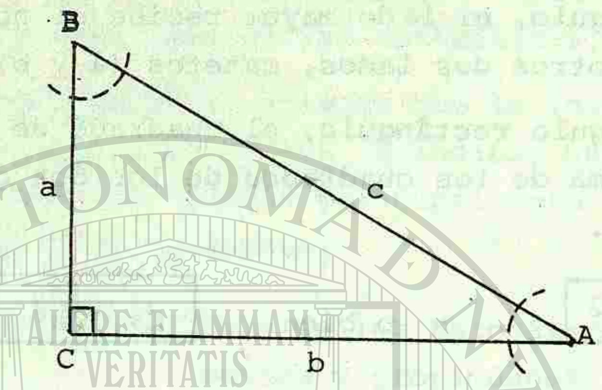
$\boxed{\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°}$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, resultan de la comparación, por cociente de un par de lados de un triángulo rectángulo, esta comparación es la razón existente entre dos números; o sea el cociente que resulta de dividir el primero de dichos números entre el segundo. Entonces si utilizamos los tres lados del triángulo, resultará evidente que podremos plantear seis posibles razones o funciones.

Cada una de ellas, como pronto aprenderemos y aplicaremos recibe un nombre especial.

Definiremos estas razones para el ángulo agudo ∢A: Utilizando el triángulo siguiente.



c= hipotenusa

a= cateto opuesto al ángulo ∢A; b= cateto opuesto al ángulo ∢B.

B= cateto adyacente al ángulo ∢A

a= cateto adyacente al ángulo ∢B.

1) FUNCION SENO ∢A: En la razón que existe entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$\text{Seno } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}; \quad \boxed{\text{Sen } A = \frac{a}{c}}$$

2) FUNCION COSENO ∢A: Es la razón que existe entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

$$\text{Coseno } \sphericalangle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}; \quad \boxed{\text{Cos } A = \frac{b}{c}}$$

3) FUNCION TANGENTE ∢A: Es la razón que existe entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{Tangente } \sphericalangle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad \boxed{\text{Tan } A = \frac{a}{b}}$$

4) FUNCION CONTANGENTE ∢A: Es la razón que existe entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$\text{Cotangente } \sphericalangle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}; \quad \boxed{\text{CTG } A = \frac{b}{a}}$$

5) FUNCION SECANTE ∢ A: Es la razón que existe entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$\text{Secante } \sphericalangle A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}; \quad \boxed{\text{SEC } A = \frac{c}{b}}$$

6) FUNCION COSECANTE ∢A: Es la razón que existe entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$\text{Cosecante } \sphericalangle A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}; \quad \boxed{\text{CSC } A = \frac{c}{a}}$$

Las funciones trigonométricas para el ángulo ∢B estarían definidas de la siguiente forma:

$$\text{Sen } B = \frac{b}{c} \qquad \text{Cos } B = \frac{a}{A}$$

$$\text{Tan } B = \frac{b}{a} \qquad \text{CTG } B = \frac{a}{b}$$

$$\text{Sec } B = \frac{c}{a} \qquad \text{CSC } B = \frac{c}{b}$$

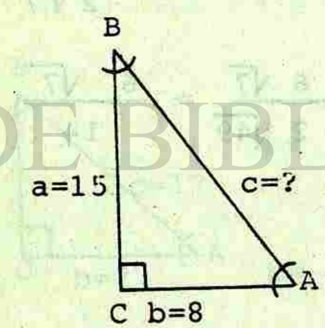
Encontrar el valor de las demás funciones trigonométricas, dado el valor de una de ellas.

1.- Dado Tan A= $\frac{15}{18}$, hallar el valor de las de más funciones.

Solución.= Como la función tangente asocia cateto opuesto y adyacente tenemos:

$$\text{Tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} = \frac{15}{8}; \text{ luego calcularemos -}$$

la hipotenusa.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{Sen } A = \frac{a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = \sqrt{(15^2 + (8)^2} \qquad \text{Cos } A = \frac{b}{c} = \frac{8}{17}$$

$$c = \sqrt{225 + 64} \qquad \text{ceg } A = \frac{b}{a} = \frac{8}{15}$$

$c= \sqrt{289}$ $\qquad$ $\text{Sec } A = \frac{c}{b} = \frac{17}{8}$

$\boxed{c= 17}$ $\qquad$ $\text{CSC } A = \frac{c}{a} = \frac{17}{15}$

2.- Dado Sen A = $\frac{18}{30}$; hallar el valor de las demás

Solución: La función seno asocia cateto opuesto con la hipotenusa luego será necesario hallar el otro cateto.

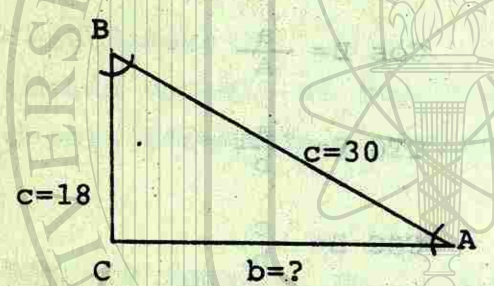
$\text{Sen } A = \frac{18}{30} = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\text{Cos } A= \frac{b}{c} = \frac{24}{30}$

$b= \sqrt{c^2 - a^2}$ $\qquad$ $\text{Tan } A= \frac{a}{b} = \frac{18}{24}$

$b= \sqrt{(30)^2 - (18)^2}$ $\qquad$ $\text{CTG } A= \frac{b}{a} = \frac{24}{18}$

$b= \sqrt{900-324}$ $\qquad$ $\text{Sec } A= \frac{c}{b} = \frac{30}{24}$

$b= \sqrt{576}$ $\qquad$ $\text{CSC } A= \frac{c}{a} = \frac{30}{18}$



$\boxed{b= 24}$

3.- Dado Cos A= $\frac{2\sqrt{7}}{8}$; hallar las demás funciones.

$\text{Cos } A= \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{7}}{8}$ $\qquad$ $\text{Sen } A= \frac{a}{c} = \frac{6}{8}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\qquad$ $\text{Tan } A= \frac{a}{b} = \frac{6}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$a = \sqrt{(8)^2 - (2\ 7)^2}$ $\qquad$ $\frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{49}} = \frac{6\sqrt{7}}{14}$

$a = \sqrt{64 - 4(7)}$

$a= \sqrt{64-28}$ $\quad$ 14

$a= \sqrt{36}$

$\boxed{a= 6}$

OPERACION PARA RACIONALIZAR EL DENOMINADOR

$\text{CTG } A= \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{6}$

$\text{SEC } A= \frac{c}{b} = \frac{8}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{2\sqrt{49}} = \frac{8\sqrt{7}}{2.7} = \frac{8\sqrt{7}}{14}$

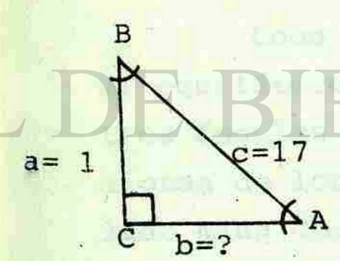
$\text{CSC } A= \frac{c}{a} = \frac{8}{6}$

4.- Dado CSC A=7; hallar el valor de las demás funciones.

Solución: La cosecante asocia hipotenusa y cateto opuesto -- por lo tanto:

$\text{CSC } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat.opuesto}} = \frac{7}{1}$ $\quad$ $\frac{c}{a}$

Nota: El valor de las funciones trigonométricas no depende de -- los lados del triángulo, depende exclusivamente del ángulo si éste cambia, el valor de la función cambia. Por lo que- el cociente 7 se puede obtener como: $\frac{7}{1}$; $\frac{14}{2}$; $\frac{28}{4}$; $\frac{56}{8}$ -- etc. Usaremos el más sencillo.



$b= \sqrt{c^2 - a^2}$ $\qquad$ $\text{SEN } A= \frac{a}{c} = \frac{1}{7}$

$b= \sqrt{(7)^2 - (1)^2}$ $\qquad$ $\text{COS } A= \frac{b}{c} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

$b= \sqrt{49-1}$ $\qquad$ $\text{TAN } A= \frac{a}{b} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

$b = \sqrt{48}$ $\qquad$ CTE $A = \frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{3}$

$b = \sqrt{16.3}$

$\boxed{b = 4\sqrt{3}}$ $\qquad$ SEC $A = \frac{-7}{4\sqrt{3}} \; \frac{3}{\sqrt{}} = \frac{7\;3}{4\sqrt{9}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$

E J E R C I C I O

Encontrar en cada uno de los siguientes ejercicios el valor de las demás funciones trigonométricas.

1.- Sen $A = \frac{4}{5}$

2.- Cos $A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

3.- Tan $A = \frac{9}{40}$

4.- CSC $A = \frac{29}{20}$

5.- CTG $A = \frac{5}{12}$

6.- Sec $A = 5$

7.- CSC $A = \frac{25}{7}$

8.- CTG $A = 3$

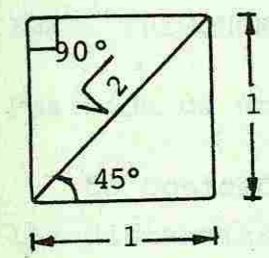
9.- Cos $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10.- Tan $A = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE:
45°, 30°, 60°.

ANGULO DE 45°

El ángulo de 45°, se puede considerar como el ángulo mitad de un ángulo recto (90°). Para representar este ángulo, usaremos un cuadrado que posee cuatro ángulos rectos y dividiremos uno de ellos en dos ángulos iguales; arbitrariamente asignaremos como uno las dimensiones del cuadrado y en base a este valor encontraremos el valor de las funciones trigonométricas del ángulo 45°.



Sen 45° $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$

Cos 45° $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$

Usando el teorema de Pitágoras encontraremos la diagonal del cuadrado que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Diagonal $= \sqrt{1^2 + 1^2}$

Diagonal $= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} = 1.4142$

Tan 45° $= \frac{1}{1} = 1$

CTG 45° $= \frac{1}{1} = 1$

Sec 45° $= \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142$

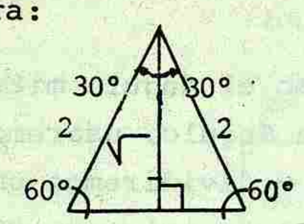
CSC 45° $= \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142$

Nota: los valores de las funciones trigonométricas serán los mismos si usamos otra dimensión para el cuadrado.

ANGULOS DE 30° Y 60°

Unos de los triángulos más comunes y de más utilidad es el equilátero, triángulo que posee sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales a 60°. Para determinar el valor de las funciones de los ángulos 30° y 60° consideramos un equilátero cuyo lado mida dos unidades.

Toda la información la concentraremos en la siguiente figura:



Altura del= $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Funciones de 30°

Sen 30° $= \frac{1}{2} = 0.5$

Cos 30° $= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.8660$

Tan 30° $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = 0.5773$

CTG 30° $= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1.732$

SEC 30° $= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547$

CSC 30° $= \frac{2}{1} = 2.$

Funciones de 60°

Sen 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.8660$

Cos 60° $= \frac{1}{2} = 0.5$

Tan 60° $= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1.732$ SEC 60° $= \frac{2}{1} = 2$

CTG 60° $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5773$ CSC 60° $= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.15$

De acuerdo con los valores, encontramos que: el seno de un ángulo tiene el mismo valor que el coseno de su complemento- y viceversa:

Sen 30°$= \frac{1}{2}$ = Cos 60° Cos 30° = 0.8660 = Sen 60°

Igualmente, cualquier función de un ángulo es igual a la confución de su complemento.

Tan 50° = ctg 40°

Cos 20° = Sen 70°

Ctg 1° = Tan 89°

Sen 58° = Cos 32°

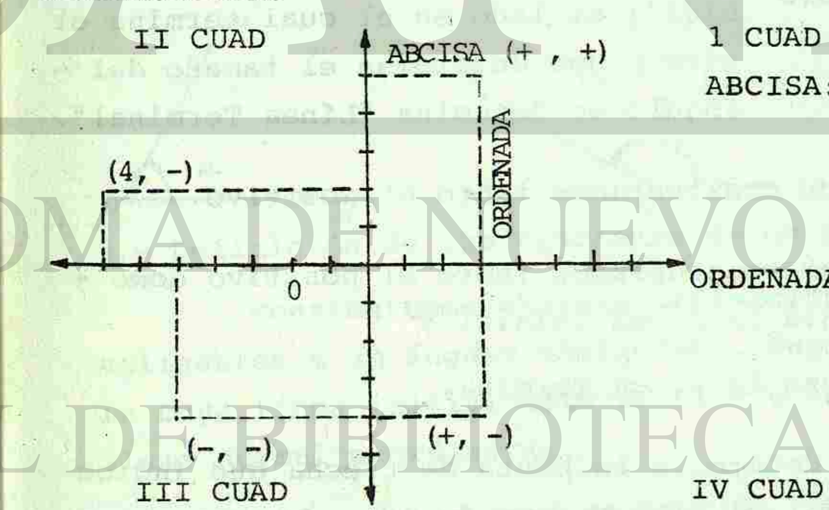
Estos valores los podremos verificar consultando una tabla de valores de las funciones- trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD.

1.- Posición de un punto en un plano:

La posición de un punto en un plano, queda determinada - por las distancias a las que se encuentra de dos rectas perpendiculares entre sí; estas distancias se llaman "Coordenadas Rectangulares" y las rectas perpendiculares "Ejes".

La recta horizontal se llama eje "X" o eje de "Abcisas"- y la vertical recibe el nombre de eje "Y" o eje de las ordenadas; el punto donde se cortan es el origen de coordenadas, dichos - - ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes, como se muestran a - continuación:



ABCISA: Es la distancia perpendicular trazada desde- un punto al eje vertical.

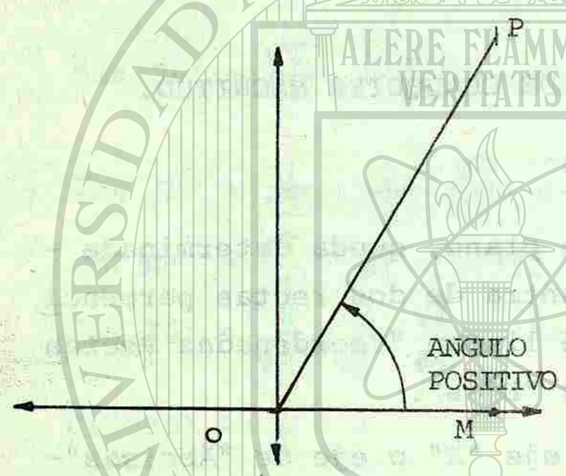
ORDENADA: Es la distancia per-- pendicular trazada desde un punto al eje horizontal.

Las medidas se consideran positivas cuando se toman ha-- cia la derecha del eje vertical y hacia arriba del horizontal.

Las medidas se consideran negativas cuando se toman hacia la izquierda del eje vertical y hacia abajo del horizontal.

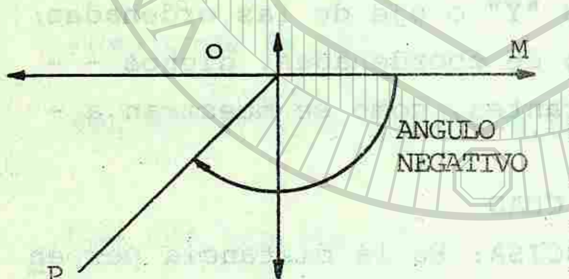
2.- Angulo de cualquier magnitud.

Para una mejor comprensión de la trigonometría se necesita una definición más amplia de "angulo" que la que la Geometría Elemental nos proporciona. Para esto consideremos una recta OP girando alrededor de un punto fijo 0 que pertenece a otra recta OM.



La magnitud del giro de OP desde su posición original OM, recibe el nombre de ángulo. Cuando el giro es contrario al de las manecillas del reloj el ángulo generado es positivo.

Cuando el giro es favorable a las manecillas del reloj el ángulo generado es negativo.



El lado del ángulo a partir del cual comienzo el giro se llama "Línea Inicial"; el lado en el cual termina el giro y que determina el tamaño del ángulo se denomina "Línea Terminal".

En los ángulos que consideramos tanto el positivo

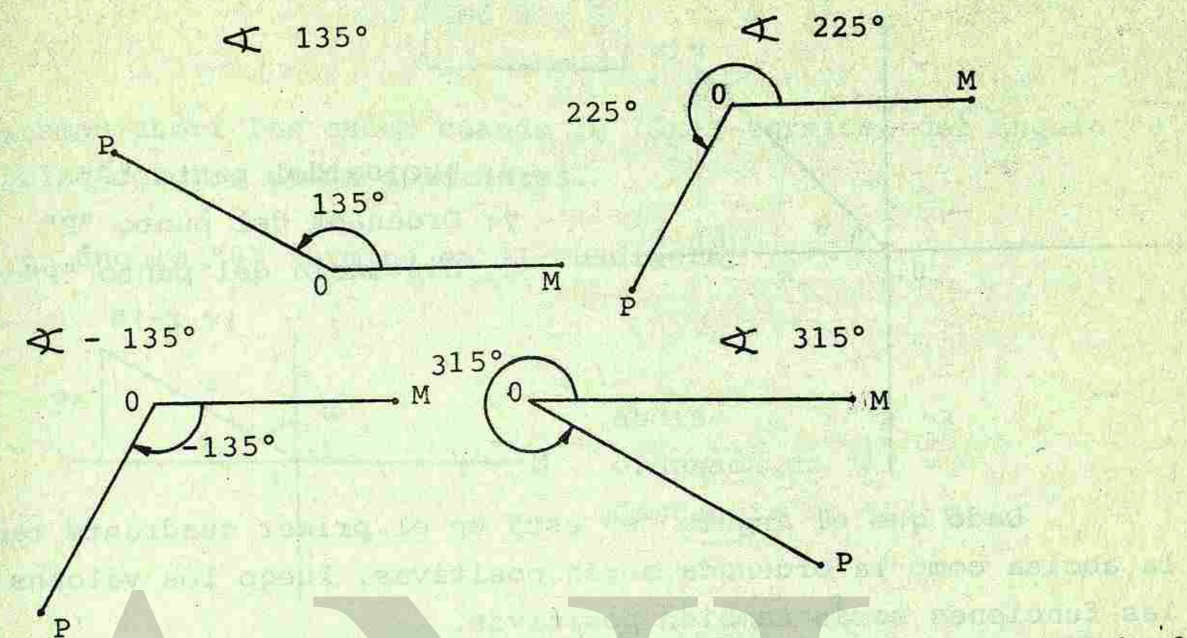
En los ángulos que consideramos tanto el positivo como el negativo; OM representa la linea Inicial y

OP representa la linea Terminal.

y el signo del ángulo lo determina la punta de flecha que indica el sentido del giro. Además, se dice que un ángulo pertenece a un determinado cuadrante cuando la linea terminal detiene su movimiento rotacional en dicho cuadrante. Si la Linea Terminal coincide con uno de los ejes a 90°, 180°, 270°, 360° se dice que el

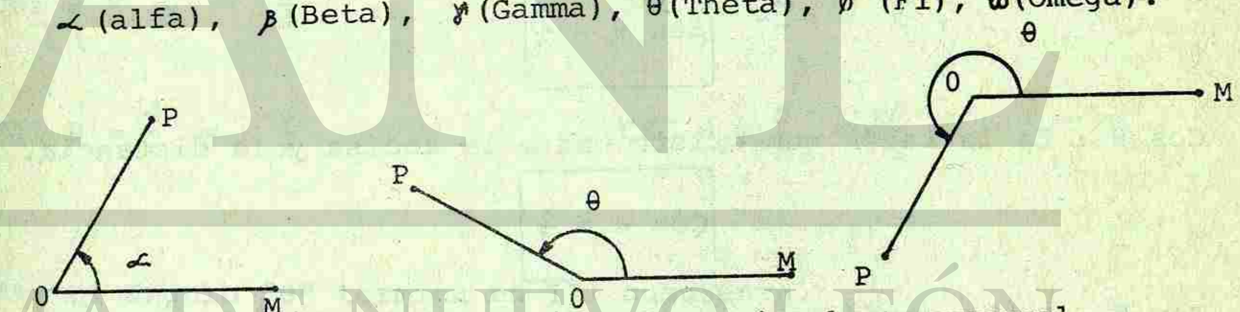
ángulo es de un **cuadrante** o **múltiplo de** un cuadrante.

A continuación se muestra la gráfica de algunos ángulos.



En trigometría, se emplean con frecuencia letras del alfabeto griego para representar de un modo general, el número de grados de un ángulo. Algunas letras griegas son:

α (alfa), β (Beta), γ (Gamma), θ (Theta), ϕ (Fi), ω (Omega).

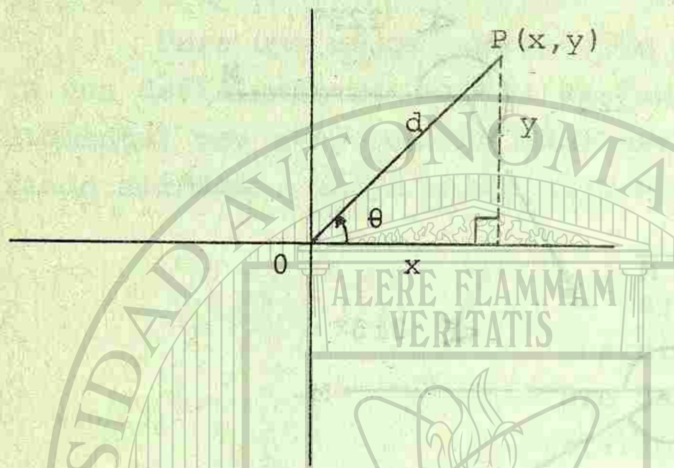


3.- Definición de las funciones de un ángulo en general.

Consideremos ahorala definición general de las funciones aplicables a un ángulo cualquiera. Supongamos para esto un ángulo cuya linea inicial esté en el eje horizontal. Posición que se llama normal u ordinaria.

Ahora si efectúa un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj, en torno al origen determinará un ángulo positivo θ. Tomando un punto cualesquiera de la linea terminal, trazamos una perpendicular hasta el eje horizontal, de esta manera se forma un triángulo rectángulo de referencia en el cual uno de sus la--

dos será la abcisa (x) del punto y el otro será la ordenada (y), la hipotenusa será la distancia (d) del punto al origen de coordenadas y siempre será positiva.



x: Abcisa del punto "P"
y: Ordenada del punto "P"
d: Distancia del punto "P"

Dado que el ángulo "θ" está en el primer cuadrante tanto la abcisa como la ordenada serán positivas, luego los valores de las funciones serán también positivos.

Definiciones:

Sen θ : Es la razón que existe entre la ordenada y la distancia.

$$\boxed{\text{Sen}\ \theta = \frac{y}{d}}$$

Cos θ : Es la razón que existe entre la abcisa y la distancia.

$$\boxed{\text{Cos}\ \theta = \frac{x}{d}}$$

Tan θ : Es la razón que existe entre la ordenada y la abcisa.

$$\boxed{\text{Tan}\ \theta = \frac{y}{x}}$$

ctg θ : Es la razón que existe entre la abcisa y la ordenada.

$$\boxed{\text{CTG}\ \theta = \frac{x}{y}}$$

Sec θ : Es la razón que existe entre la distancia y la abcisa.

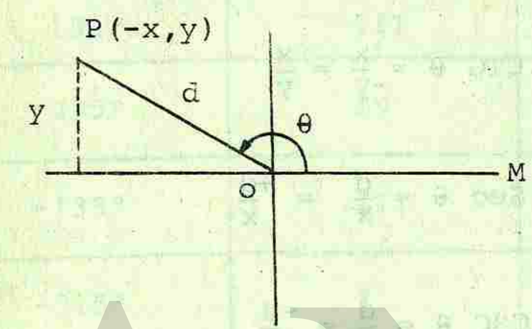
$$\boxed{\text{Sec}\ \theta = \frac{d}{x}}$$

CSC θ : Es la razón que existe entre la distancia y la ordenada

$$\boxed{\text{CSC}\ \theta = \frac{d}{y}}$$

Tratemos ahora los casos cuando la línea terminal del ángulo "θ" termine con los demás cuadrantes.

*** El ángulo "θ" termina en II cuadrante.



Abcisa de "P" = -x
ordenada de "P" = y
distancia de "P" =

$\text{Sen}\ \theta = \frac{y}{d} \quad \frac{+y}{d}$

$\text{CTG}\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$

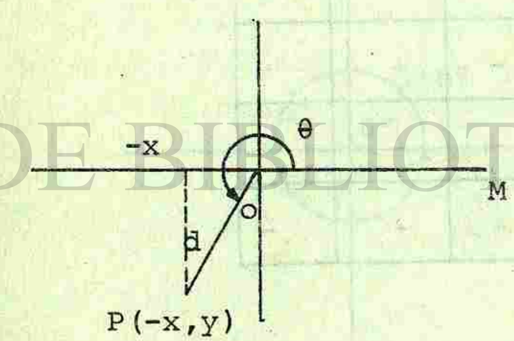
$\text{Cos}\ \theta = \frac{-x}{d} = \frac{-x}{d}$

$\text{Sec}\ \theta = \frac{d}{-x} = \frac{-d}{x}$

$\text{Tan}\ \theta = \frac{y}{-x} = \frac{-y}{x}$

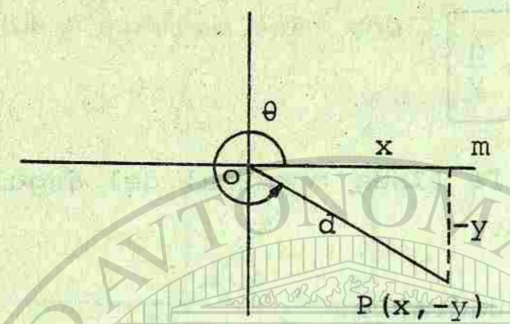
$\text{CSC}\ \theta = \frac{d}{y} = \frac{+d}{y}$

*** El ángulo "θ" termina en III cuadrante.



Abcisa de "P" = -x
ordenada de "P" = -y
distancia de "P" = d

*** El ángulo "θ" termina en IV cuadrante.



abcisa de "P" = x
ordenada de "P" = -y
diatnacia de "P" = d

$\text{Sen } \theta = \frac{-y}{d} = \frac{-y}{d}$ $\qquad$ $\text{CTG } \theta = \frac{x}{-y} = \frac{x}{y}$

$\text{Cos } \theta \ \frac{x}{d} = \frac{+x}{d}$ $\qquad$ $\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{+d}{x}$

$\text{Tan } \theta = \frac{-y}{d} = \frac{-y}{x}$ $\qquad$ $\text{CSC } \theta = \frac{d}{-y} = \frac{-d}{y1}$

El signo de las funciones para los ángulos que terminen en los - distintos cuadrantes quedan resumidos en la siguiente tabla:*

	C U A D R A N T E S			
FUNCION	I	II	III	IV
SEN	+	+	-	-
COS	+	-	-	+
TAN	+	-	+	-
CTG	+	-	+	-
SEC	+	-	-	+
CSC	+	+	-	-

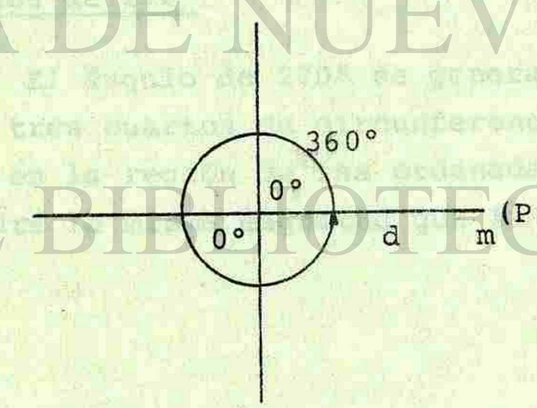
EJEMPLOS:

ANGULO	CUADRANTE	SIGNO DE SEN Y COS	SIGNO DE COS Y SEC	SIGNO DE TAN Y CTG
75°	I	+	+	+
116°	II	+	−	−
198°	III	−	−	+
295°	IV	−	+	−
-135°	III	−	−	+
-315°	I	+	+	+

Funciones trigonométricas de los ángulos : o°, 360°, 90°., 180°, 270°.

Funciones de 0° y 360°

Para los ángulos 0° y 360° o cualquier múltiplo de 360° sus lineas inicial y terminal coinciden y están sobre el eje de abcisas o eje horizontal y para este caso especial la abcisa y la distancia tienen la misma magnitud.



Abcisa = x
ordenada = y = 0
distancia = d = x

$\text{Sen } 0° = \frac{y}{d} = \frac{0}{d} = 0$ $\qquad$ $\text{Sen } 360° = 0$

$\text{Cos } 0° = \frac{x}{d} = \frac{x}{x} = 1$ $\qquad$ $\text{Cos } 360° = 1$

$\text{Tan } 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$ $\qquad$ $\text{Tan } 360° = 0$

$\text{CTG } 0° = \frac{x}{y} \quad \frac{x}{0} = \infty$ $\qquad$ $\text{CTG } 360° = \infty$

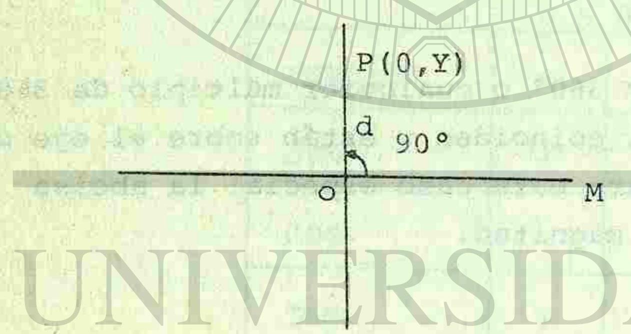
$\text{Sec } 0° = \frac{d}{x} \quad \frac{x}{x} = 1$ $\qquad$ $\text{Sec } 360° = 1$

$\text{CSC } 0° = \frac{d}{y} \quad \frac{d}{0} = \infty$ $\qquad$ $\text{CSC } 360° = \infty$

Nota: Debido a que la división por cero dá, como resultado un número indeterminado que simbolizamos como infinito (∞).

Funciones de 90°

El ángulo de 90° lo tenemos cuando la línea terminal ha girado un cuarto de circunferencia y termina sobre el eje vertical teniendo la misma magnitud la ordenada y la distancia.



abcisa $= x = 0$
ordenada $= y$
distancia $= d = y$

$\text{Sen } 90° = \frac{y}{d} = \frac{y}{y} = 1$

$\text{Cos } 90° = \frac{x}{d} = \frac{0}{d} = 0$

$\text{Tan } 90° = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = \infty$

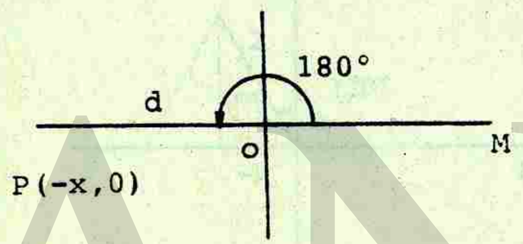
$\text{CTG } 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$

$\text{Sec } 90° = \frac{d}{x} = \frac{d}{0} = \infty$

$\text{CSC } 90° = \frac{d}{y} \quad \frac{y}{y} = 1$

Funciones de 180°

El ángulo de 180° se genera cuando la línea terminal ha girado la mitad de una circunferencia y termina sobre el eje horizontal, en la región de las abcisas negativas, donde la abcisa tendrá la misma magnitud que la distancia pero signo contrario.



abcisa $= -x$
ordenada $= y = 0$
distancia $= d = x$

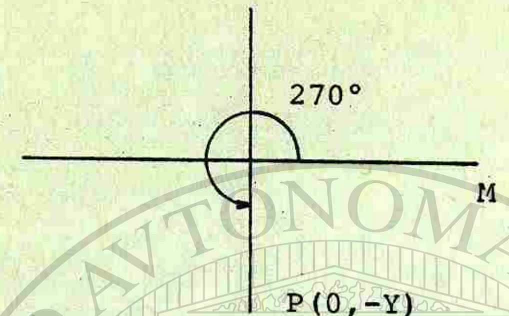
$\text{Sen } 180° = \frac{y}{d} = \frac{y}{y} = -1$ $\qquad$ $\text{Cos } 180° = \frac{-x}{d} = \frac{-x}{x} = -1$

$\text{Tan } 180° = \frac{y}{-x} = \frac{0}{-x} = 0$ $\qquad$ $\text{CTC } 180° = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{0} = \infty$

$\text{Sec } 180° = \frac{d}{\ } = \frac{x}{\ } = -1$ $\qquad$ $\text{CSC } 180° = \frac{d}{y} = \frac{d}{0} = \infty$

Funciones de 270°

El ángulo de 270° se genera cuando la línea terminal ha girado tres cuartos de circunferencia y termina sobre el eje vertical, en la región de las ordenadas negativas, donde la ordenada tendrá la misma magnitud que la distancia, pero signo contrario.



abcisa $= x = 0$

ordenada $= -y$

distancia $= d = y$

$$\text{Sen } 270° = \frac{-y}{d} = \frac{-y}{y} = 1$$

$$\text{Cos } 270° = \frac{x}{d} = \frac{0}{d} = 0$$

$$\text{Tan } 270° = \frac{-y}{x} = \frac{-y}{0} = \infty$$

$$\text{CTG } 270° = \frac{x}{-y} = \frac{0}{-y} = 0$$

$$\text{SEC } 270° = \frac{d}{x} = \frac{d}{0} = \infty$$

$$\text{CSC } 270° = \frac{d}{-y} = \frac{y}{-y} = -1$$

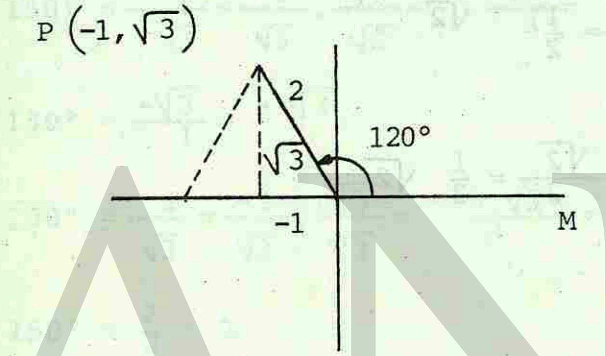
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS:

120°; 135°; 150°; 210°; 225°; 240°; 300°; 315°; 330°.

Estos ángulos son de especial interés por ser múltiplos - ya sea del ángulo 45° ó de los ángulos 30° y 60° y los valores de las funciones trigonométricas de los mismos, son iguales en magnitud mas no en signo de los de 45°, 30# y 60°.

a) Funciones de 120°.

Para encontrar el valor de las funciones de este ángulo - usamos los valores ya conocidos del ángulo 30° ó 60°.



Abcisa $= -1$

ordenada $= \sqrt{3}$

Distancia $= 2$

$$\text{Sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{Cos } 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Tan } 120° = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

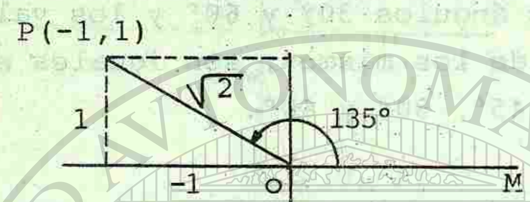
$$\text{CTG } 120° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{SEC } 120° = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{CSC } 120° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

b) Funciones de 135°

Para determinar el valor de las funciones de este ángulo usamos los valores ya conocidos del ángulo 45°.



abcisa = -1
ordenada = 1
distancia = $\sqrt{2}$

$$\text{Sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \sqrt{2}$$

$$\text{Cos } 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \sqrt{2}$$

$$\text{Tan } 135° = \frac{1}{1} = -1$$

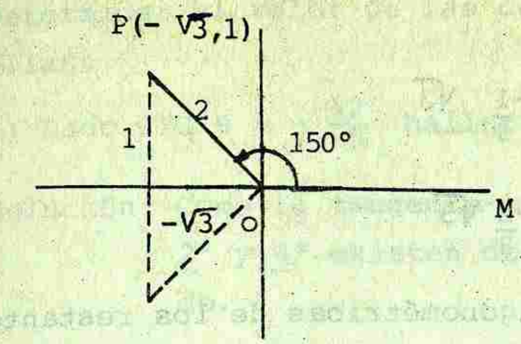
$$\text{CTG } 135° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{CEC } 135° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\text{CEC } 135° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

c) Funciones de 150°.

Para determinar el valor de las funciones de este ángulo utilizamos los valores encontrados para el ángulo de 30°.



distancia = 2
abcisa = $\sqrt{3}$
ordenada = -1

$$\text{Sen } 150° = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt{3}$$

$$\text{Tan } 150° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$$

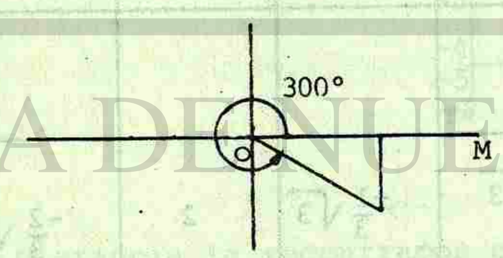
$$\text{CTG } 150° = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{SEC } 150° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{-2}{3} \quad \sqrt{3}$$

$$\text{CSC } 150° = \frac{2}{2} = 2$$

d) Funciones de 300°.

Para determinar los valores de las funciones de este ángulo lo usamos los valores encontrados para el ángulo 60°.



Abcisa = 1
ordenada = - $\sqrt{3}$
distancia = 2

$$\text{Sen } 300° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt{3}$$

$$\text{Tan } 300° = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Sec } 300° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Cos } 300° = \frac{1}{2}$$

$$CTG\ 300° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$CSC\ 300° = \frac{2}{\sqrt{\ }} = \frac{-2}{\sqrt{\ }} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ }} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

El valor de la funciones trigonométricas de los restantes ángulos se dejan como ejercicio al estudiante, mismos que tabulará en la siguiente tabla de valores.

ANGULO	SEN	COS	TAN	CTG	SEC	CSC
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
210°						
225°						
240°						
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°						
330°						

Determinar el valor de las demas funciones, dado el de una de - - ellas.

1) Dado CTG $\theta = -\frac{12}{5}$ hallar el valor de las demás funciones.

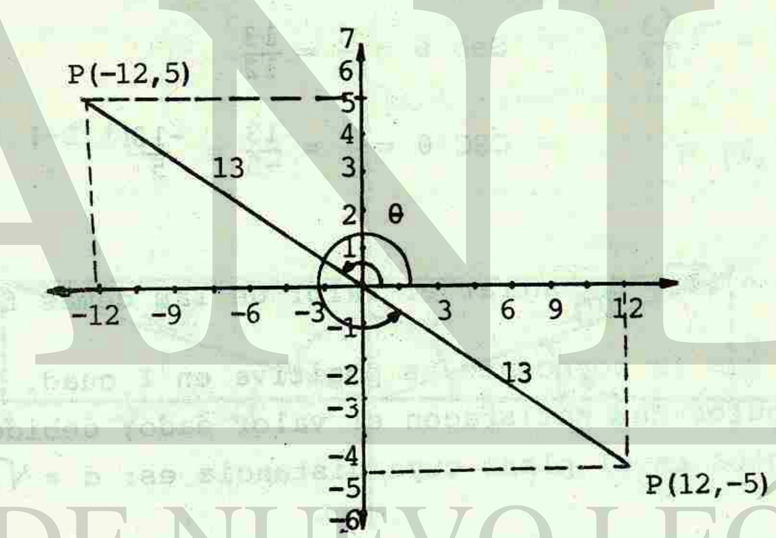
Solución: Como la tangente tiene valor negativo en los cuadrantes 2° y 4° existen dos ángulos que satisfacen el valor dado.

$CTG\ \theta = \frac{abcisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$; existen dos opciones

abcisa negativa
$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{5}$

ordenada negativa
$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{-5}$

GRATIFICANDO LOS PUNTOS:



La distancia la encontramos con el teorema de Pitagoras.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$$

$$d = \sqrt{144 + 25}$$

$$d = \sqrt{169}$$

$$\boxed{d = 13}$$

II CUADRANTE $\begin{cases} x = -12 \\ y = 5 \\ d = 13 \end{cases}$ IV CUADRANTE $\begin{cases} x = 12 \\ y = -5 \\ d = 13 \end{cases}$

$\text{Sen } \theta \; \frac{y}{d} = \frac{5}{13}$	$\text{Den } \theta = \frac{y}{d} = \frac{-5}{13} = \frac{-5}{13}$
$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}$	$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{12}{13}$
$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$	$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} = \frac{-5}{12}$
$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$	$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{12}$
$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{5}$	$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = \frac{-13}{5}$

2.- Dado CSC $\theta = \sqrt{10}$; Encontrar el valor de las demas funciones.

Solución: Dado que la cosecante es positiva en I cuad. II cuad. - tenemos dos ángulos que satisfacen el valor dado; debido a que -- existen dos puntos en el plano cuya distancia es: $d = \sqrt{10}$

$\text{CSC } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$; existen dos opciones

abcisa positiva
$x = ?$
$d = \sqrt{10}$
$y = 1$

$\text{CSC } \theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

abcisa negativa
$x = ?$
$d = \sqrt{10}$
$y = 1$

La "abcisa" la encontramos por el teorema de Pitagoras

$$x = \sqrt{d^2 - y^2}$$

La "abcisa" la encontramos por el teorema de Pitagoras.

$$x = \sqrt{d^2 - y^2}$$

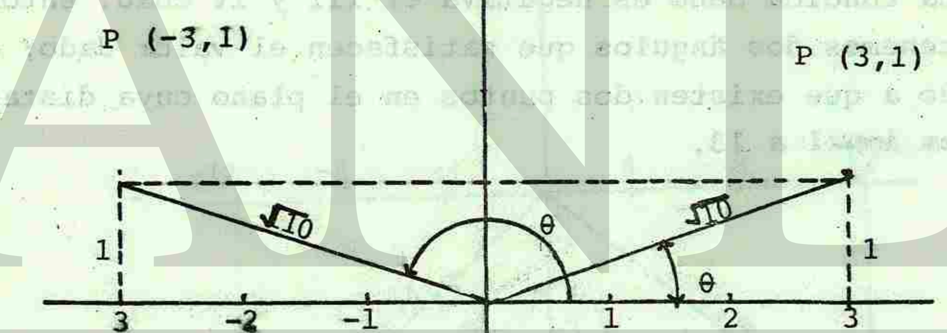
$$x = \sqrt{(10)^2 - (1)^2}$$

$$x = \sqrt{10-1}$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3 \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

GRAFICANDO LOS PUNTOS:



I CUADRANTE $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ d = \sqrt{10} \end{cases}$ II CUADRANTE $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ d = \sqrt{10} \end{cases}$

$\text{Sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$	$\text{Sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$
$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{1} = 3$

$\sec\theta = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{1} = -3$

$\sec\theta = \frac{-d}{x} = \frac{\sqrt{10}}{-3} = \frac{-1\sqrt{10}}{3}$

3.- Dado $\text{Sen}\ \theta = \frac{5}{13}$; encontrar el valor de las demas funciones.

Solución: La función Seno es negativa el III y IV cuad. entonces tenemos dos ángulos que satisfacen el valor dado; debido a que existen dos puntos en el plano cuya distancia **es igual a** 13.

$\text{Sen}\ \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$; existen dos opciones

abcisa negativa

$$\begin{cases} x = ? \\ d = 13 \\ y = -5 \end{cases}$$

$\text{Sen}\ \theta = \frac{-5}{13}$ El signo negativo pertenece a la ordenada - ya que la distancia -- siempre es positiva.

abcisa **positiva**

$x = ?$

$d = 13$

$y = -5$

La "abcisa" la encontramos por el Teorema de **Pitagoras.**

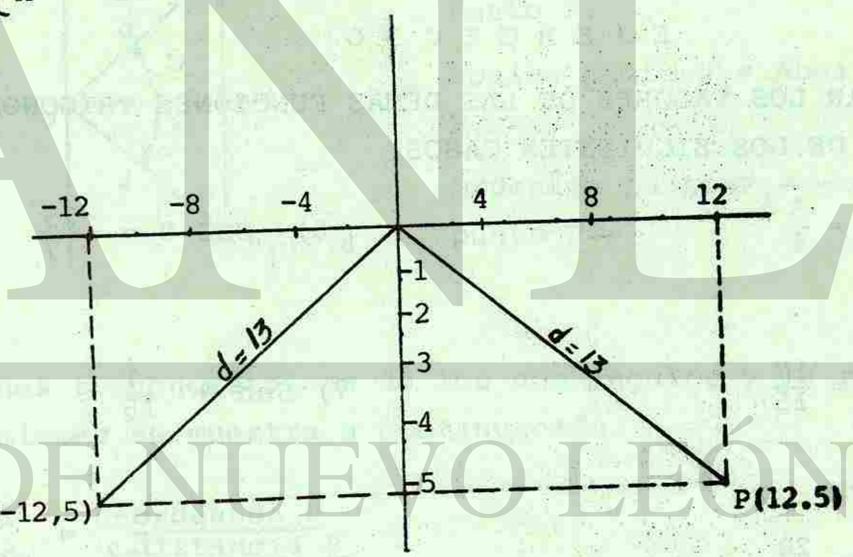
$x = \sqrt{d^2 - y^2}$

$x = \sqrt{(13)^2 - (-5)^2}$

$x = \sqrt{169-25}$

$x = \sqrt{144}$

$$x = \pm 12 \begin{cases} x = 12 \\ x = -12 \end{cases}$$



III CUADRANTE $x = -12$, $y = -5$, $d = 13$

IV CUADRANTE $x = 12$, $y = -5$, $d = 13$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-12}{13} = \frac{12}{13}$ $\qquad$ $\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{12}{13}$

$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$ $\qquad$ $\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} = \frac{-5}{12}$

$\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{-5} = \frac{-12}{5}$

$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{-12} = \frac{13}{12}$ $\qquad$ $\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{12}$

$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = \frac{13}{5}$ $\qquad$ $\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}$

E J E R C I C I O

DETERMINAR LOS VALORES DE LAS DEMAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CASOS.

1) $\text{Sec } \theta = \frac{5}{4}$

2) $\text{CSC } \theta = \frac{17}{15}$

3) $\text{Sen } \theta = \frac{20}{29}$

4) $\text{Tan } \theta = -3$

5) $\text{Cos } \theta = \frac{-7}{41}$

6) $\text{CSC } \theta = \frac{-25}{7}$

7) $\text{Sen } \theta \ \frac{-1}{15}$

8) $\text{Cos } \theta = \frac{-2}{7}$

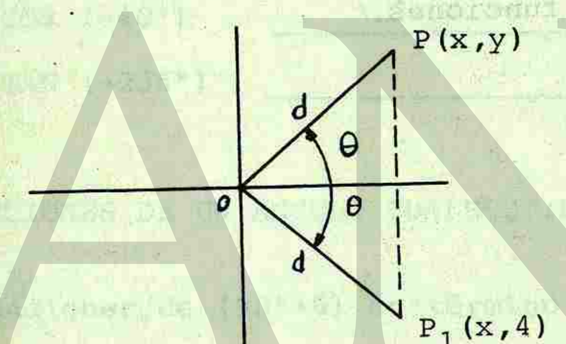
9) $\text{CTG } \theta = \frac{12}{5}$

10) $\text{Cos } \theta = \frac{24}{25}$

FUNCIONES DE UN ANGULO NEGATIVO EN TERMINOS DE UN POSITIVO.

FUNCIONES DE $(-\theta)$ EN TERMINOS DE θ

Para determinar las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas de dos ángulos que tienen la misma magnitud pero que son de signo contrario, graficaremos ambos ángulos y tomando un punto de las dos líneas terminales que estén a la misma distancia del origen, encontramos que sus coordenadas están relacionadas; como lo muestra la siguiente figura:



Distancia punto P_1 = Distancia - Punto P.

Abcisa punto P_1 = Abcisa punto P.

Ordenada punto P_1 = - ordenada punto P.

Las funciones trigonométricas de los dos ángulos y la relación - entre las mismas se muestra a continuación.

$$\frac{\text{ordenada } P_1}{\text{distancia } P_1} = \frac{-\text{ordenada } P}{\text{distancia } P}$$

$\boxed{\text{Sen } (\theta) = -\text{ Sen } \theta}$

$$\frac{\text{Abcisa } P_1}{\text{Distancia } P_1} = \frac{\text{Abcisa } P}{\text{Distancia } P}$$

$\boxed{\text{Cos } (-\theta) \text{ Cos } \theta}$

$$\frac{\text{abcisa } P_1}{\text{ordenada } P_1} = \frac{\text{Abcisa } P}{-\text{ordenada } P}$$

$\boxed{\text{CTG } (-\theta) = -\text{ CTG } \theta}$

$$\frac{\text{Ordenada } P_1}{\text{Abcisa } P_1} = \frac{\text{ordenafa } P}{\text{abcisa } P} \qquad \frac{\text{distancia } P_1}{\text{abcisa } P_1} = \frac{\text{distancia } P}{\text{abcisa } P}$$

$$\boxed{\text{Tan } (-\theta) = -\text{ Tan } \theta} \qquad \boxed{\text{SEC } (-\theta) = \text{SEC } \theta}$$

$$\frac{\text{distancia } P_1}{\text{abcisa } P_1} = \frac{\text{distancia } P}{\text{-ordenada } P}$$

$$\boxed{\text{CSC } (-\theta) = -\text{ CSC } (\theta)}$$

De lo anterior se concluye que:

"El valor de las funciones de un ángulo negativo son iguales, en valor absoluto, a las mismas funciones del ángulo positivo correspondiente, siendo del mismo signo el coseno y la secante y del signo contrario las otras cuatro funciones.

Ejemplos:

1) SEN (-30°) = -SEN 30°
2) COS (-57°)= COS 57°
3) TAN (-20°10')= -TAN 20°10'
4) -COS (-40°)= - COS 40°
5) -SEN (=38°)= +SEN 38
6) CTG (-135°)= CTG 135°
7) SEC (-213°)= SEC 213°
8) CSC (-13°40')= -CSC 13°40'
9) -TAN (=115°)= + TAN 115°
10) -SEC (-83°) = - SEC 83°

NOTA: Las mismas relaciones resultarían si consideramos el ángulo negativo (-θ) en cualesquiera de los demas cuadrantes.

E J E R C I C I O

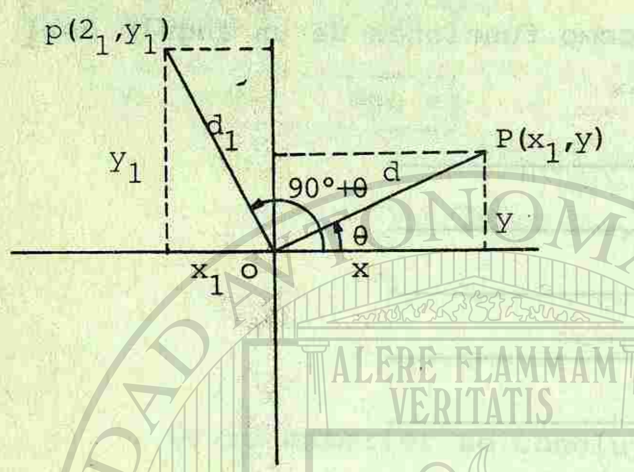
Exprese las siguientes funciones como funciones de un **ángulo positivo.**

1) COS (-80°) ____________
2) TAN (-13°) ____________
3) SEN (-126) ____________
4) SEC (-58°) ____________
5) CSC (-75°) ____________
6) SEC (-120°) ____________
7) SEN (-45°) ____________
8) CTG (-93°) ____________
9) COS (-40°) ____________
10) TAN (-236°) ____________

FUNCIONES DE UN ANGULO CUALESQUIERA EN TERMINOS DE UN ANGULO AGUDO.

*Funciones de (90°+θ) en término de θ.

Graficaremos el ángulo "θ" y el ángulo "90°+θ" y tomaremos un punto cualesquiera de sus correspondientes líneas terminales que este a la misma distancia del origen de coordenadas; entonces determinaremos la relación que existe entre sus respectivas coordenadas; de esta manera sus funciones trigonométricas estarán relacionadas como la muestra la figura y las siguientes razones.



distancia P_1 = distancia P

$d_1 = d$

abcisa P_1 = - ordenada P

$x_1 = -y$

ordenada P_1 = abcisa P

$y_1 = x$

Las funciones trigonométricas del ángulo (90°+θ) en términos de "θ" donde "θ" es un ángulo agudo, se muestran a continuación:

$\frac{y_1}{d_1} = \frac{x}{d}$ $\qquad$ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{-y}{x}$

$\boxed{\text{SEN } (90°+\theta) = \text{COS } \theta}$ $\qquad$ $\boxed{\text{CTG } (90°+\theta) = -\text{TAN } \theta}$

$\frac{x_1}{d_1} = \frac{-y}{d}$ $\qquad$ $\frac{d_1}{x_1} = \frac{d}{-y}$

$\boxed{\text{COS } (90°+\theta) = -\text{SEN } \theta}$ $\qquad$ $\boxed{\text{SEC } (90°+\theta) = -\text{CSC } \theta}$

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $\frac{d_1}{x_1} = \frac{d}{x}$

$\boxed{\text{TAN } (90°+\theta) = -\text{CTG } \theta}$ $\qquad$ $\boxed{\text{CSC } (90°+\theta) = \text{SEC } \theta}$

De acuerdo con lo anterior podemos establecer que:
El seno y la cosecante de un ángulo cualesquiera es igual y del mismo signo que el coseno y la secante respectivamente del mismo ángulo disminuido en 90°; y el coseno, tangente, cotangente y secante iguales pero de signo contrario respectivamente al seno, cotangente, tangente y cosecante del mismo ángulo disminuido en 90°.

Ejemplos: Expresar las siguientes funciones como funciones de un ángulo agudo.

SEN (123°); solución: SEN (90°+33°) = $\boxed{\text{COS } 33°}$

COS (118°); solución: COS (90°+28°) = $\boxed{-\text{SEN } 28°}$

TAN (212°); solución; TAN (180°+32°) = CTG(90°+32) = $\boxed{+\text{TAN } 32°}$

CTG (189°); solución: CTG (180°+9°) = -TAN(90°+9°) = $\boxed{+\text{CTG } 9°}$

SEC (296°): solución: SEC (270°+26°) = -CSC(180°+26) = -SEC(90°+26) = $\boxed{+\text{CSC } 26°}$

CSC (300°): solución: CSC(360° -60°) = SEC(270°-60) = -CSC(180°-60) = -SEC(90°-60°) = CSC(-60°) = $\boxed{-\text{CSC } 60°}$

TAN(180°+20) = -CTG(90°+20°) = $\boxed{+\text{TAN } 20°}$

TAN 200°

TAN(270°-70°) = -CTG(180°-70°) = +TAN(90°-70°) = -CTG (-70°) = $\boxed{\text{CTG } 70°}$

COS (180°-50°) = -SEN(90°-50) = -COS(-50°) = $\boxed{-\text{COS } 50°}$

COS 130°

COS (90°+40°) = $\boxed{-\text{SEN } 40°}$

NOTA: Las mismas relaciones serían válidas si el ángulo "θ" estuviera en los demás cuadrantes.

FORMA DIRECTA PARA REDUCIR FUNCIONES DE UN ANGULO DE CUALQUIER MAGNITUD A FUNCIONES DE ANGULOS AGUDOS.

Si observamos los ejemplos del punto anterior encontramos que los ángulos que se expresan como un número par de ángulos rectos mas o menos un ángulo agudo; la función del ángulo queda en términos de la misma función del ángulo agudo y el que se expresa como un número impar de rectos mas o menos un ángulo agudo, la función de ese ángulo queda expresada como una cofunción del ángulo agudo; el signo que tendrá el valor de la función final lo determinamos de acuerdo al cuadrante sobre el cual se encuentre el ángulo original. Resumiendo lo anterior tenemos:

1) Función [n 90°$\pm$ θ] = misma función de (θ)
Si n= Número par positivo o negativo y θ Angulo agudo.

2) Función [n 90°$\pm$ θ] = Cofunción de (θ)
Si n= Número Impar positivo o negativo y θ Angulo agudo.

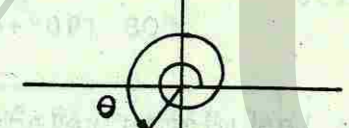
3) El signo lo determinamos de acuerdo al signo que tenga la función dada en el cuadrante al que pertenece el ángulo original.

Ejemplos: Expresar en función de "θ" las siguientes funciones don de "θ" es ángulo agudo.

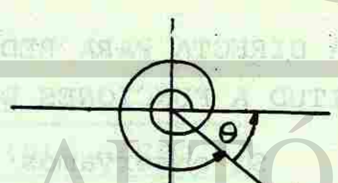
Sen (180°-θ)= Sen θ	Sen (270° +θ_= - Cos θ
Cos (180°-θ)= - Cos θ	Cos (270°+θ)= Sen θ
Tan (180°-θ)= - Tan θ	Tan (270°+θ)= - ctg θ
CTG (180°-θ)= - CTG θ	CTG (270°+θ)= - TAN θ
SEC (180°-θ)= CSC θ	SEC (270°+θ)= - SEC θ
CSC (180°-θ)= CSCθ	CSC (270°+θ)= - SEC θ
(180°-θ) está en II CUARANTE	(270°+θ) está en IV CUADRANTE

Expresar como una función de θ cada una de las siguientes funcio ciones.

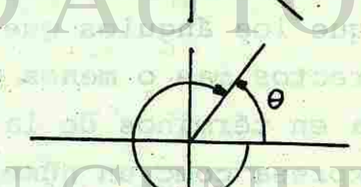
1) SEN (540° + θ); SEN[6(90°)+θ]= -SEN θ



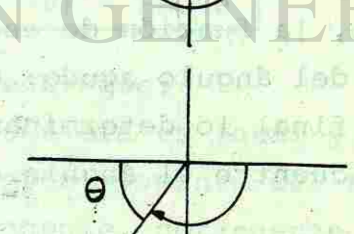
2) TAN (720°-θ); TAN [8(90°)-θ]= - TAN θ



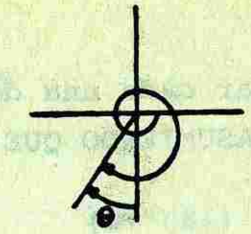
3) TAN (-360°+θ); TAN [-4(90°)+θ]= + TAN θ



4) COS (-80°+θ); COS[-2(90°)+θ]= - COS θ



5) COS (-450°- θ); COS [-5(90°)- θ]= -SEN θ



Expresar como funciones de un ángulo agudo positivo las siguien-- tes funciones:

1) SEN (130°); SEN(90°+40°)= COS 30° II CUAD. SENO (+)

2) TAN (325°); TAN (270°+55°)= -CTG 55° IC CUAD. TANGENTE (-)

3) CIS (200°); COS(270°-70°)= -SEN 70° III CUAD. COSENO (-)

4) SEN (670°); SEN (630°+40°)= -COS 40° IV CUAD. SENO (-)

5) TAN -100°); TAN[-180°+80]= TAN 80° III CUAD. TANGENTE (+)

EJERCICIO

Expresar cada una de las siguientes funciones como una función de "θ" . ASUMIENDO QUE "θ" es un ángulo agudo.

1) SEN (180°+θ)
2) TAN (270°-θ)
3) CTG (450°+θ)
4) CSC (360°-θ)
5) CTG (-270°-θ)
6) COS (-900° -θ)
7) TAN (810°-θ)
8) COS (720°-θ)
9) SEN (-630°+θ)
10) SEC (-450°+θ)

Expresar cada una de las siguientes funciones como funciones de un ángulo agudo positivo.

1) SEN (670°)
2) CSC (865°)
3) COS (457°)
4) TAN (293°)
5) CTG (930°)
6) COS (-680°)
7) TAN (-290°)
8) COS (129°40')
9) SEN (218°)
10) SEC (340°)
11) TAN (165°)
12) CSC (250°)
13) COS (310°)
14) SEN (175°)
15) CTG (289°)
16) COS (380°)
17) TAN (324°)
18) SEN (113°)
19) CSC (92°)
20) TAN (315° 20')

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

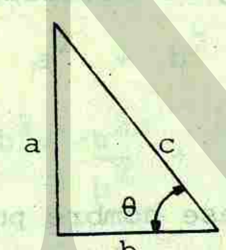
IDENTIDADES FUNDAMENTALES:

Recordemos que una identidad es un enunciado de igualdad que es cierta para todos los valores de la variable para los que las funciones estan definidas.

Hay muchas relaciones de identidad entre las funciones trigonométricas, las llamadas identidades trigonométricas incluyen:

1) Identidades en forma de cociente
2) Identidades pitagoricas
3) Identidades reciprocas

Demostraremos cada una de esta identidades basandonos en la siguiente figura:



1) Relaciones en forma de cociente:

De acuerdo con la figura definiremos las siguientes funciones:

$\text{Sen } \theta = \frac{a}{c}$; $a = c. \text{ Sen } \theta$

$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c}$; $b = c. \text{ Cos } \theta$

$\text{Tan } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\cancel{c}. \text{ Sen } \theta}{\cancel{c}. \text{ Cos } \theta} = \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}$

$$\boxed{\text{Tan } \theta = \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}}$$

$$\text{CTG } \theta = \frac{b}{a} = \frac{\cancel{c}.\ \text{Cos } \theta}{\cancel{c}.\ \text{Sen } \theta} = \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Cos } \theta}$$

$$\boxed{\text{CTG } \theta = \frac{\text{COS } \theta}{\text{Sen } \theta}}$$

Las anteriores relaciones muestran una función como el cociente - de dos funciones para un mismo ángulo.

$$\boxed{\text{Tan } \theta = \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}} \qquad \boxed{\text{CTG } \theta = \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta}}$$

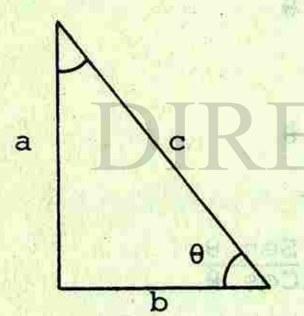
O en palabras:

"La tangente de un ángulo siempre es igual al seno del ángulo dividido por el coseno del ángulo"; "La cotangente de un ángulo - siempre es igual al coseno del ángulo dividido por el seno del ángulo".

2) IDENTIDADES PITAGORICAS

Estas relaciones reciben ese nombre porque se derivan utilizando el teorema de Pitágoras, que dice: para todo triángulo -- rectangulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

Para la demostración de estas relaciones vamos a utilizar la siguiente figura:



*Teorema de Pitágoras

** Dividiendo entre: c^2 tenemos lo siguiente:

*** Luego por definición

$$\frac{a}{c} \text{ Sen } \theta,\ \frac{b}{c} \text{ Cos } \theta$$

y sustituyendo:

$$\frac{a}{c} \text{ Sen } \theta,\ \frac{b}{c} \text{ Cos } \theta$$

y sustituyendo:

$$\boxed{\text{Sen}^2\ \theta + \text{Cos}^2\ \theta = 1}$$

* $a^2+b^2=c^2$

** $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = 1$$

*** $(\text{Sen } \theta)^2 + (\text{Cos } \theta)^2 = 1$

o en palabras: "la suma de los cuadrados del seno y del coseno - del mismo ángulo siempre es igual a uno".

Nuevamente a partir del teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

* Dividiendo entre b^2: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$

y acomodando tenemos: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

** Luego por definición:

$\frac{a}{b} = \text{Tan } \theta,\ \frac{c}{b} = \text{Sen } \theta; (\text{Tan } \theta)^2 + 1 = (\text{Sec } \theta)^2$

y sustituyendo: $\boxed{\text{Tan}^2\ \theta + 1 = \text{Sec}^2\ \theta}$

"El cuadrado de la secante de un ángulo siempre es igual al cuadrado de la tangente del ángulo mas uno".

Usando de nueva cuenta el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Dividiendo entre a^2 $\qquad \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$

Y acomodando tenemos: $\quad 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$

** Luego por definición

$\frac{b}{a} = \text{CTG } \theta, \ \frac{c}{a} = \text{CSC } \theta \qquad 1 + (\text{CTG } \theta)^2 = (\text{CSC } \theta)^2$

y sustituyendo: $\qquad \boxed{1 + \text{CTG}^2 \theta = \text{CSC}^2 \theta}$

"El cuadrado de la cosecante de un ángulo siempre es igual a uno mas el cuadrado de la cotangente del mismo ángulo".

3) <u>IDENTIDADES RECIPROCAS:</u>

El Trigonometría con frecuencia hablamos de relaciones recíprocas, es decir de aquellas relaciones cuyo producto es igual a la unidad; por la propiedad de los recíprocos.

Demostraremos algunas de ellas basandonos en el triángulo de la sección anterior.

*El seno y la cosecante están definidos en base a los mismos lados del triángulo, pero en orden distinto, luego su producto es igual a la unidad.

$\text{Sen } \theta = \frac{a}{c}$

$$\text{Sen } \theta . \text{ CSC } \theta = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{ac}{ac} = 1$$

$\text{CSC } \theta = \frac{a}{c}$

Entonces: $\boxed{\text{Cos } \theta . \text{ Sec } \theta = 1} \begin{cases} \boxed{\text{Sen } \theta = \frac{1}{\text{CSC } \theta}} \\ \boxed{\text{CSC } \theta = \frac{1}{\text{Sen } \theta}} \end{cases}$

**El coseno y la secante están definidos en base - los mismos lados del triángulo, pero en orden distintos, luego su producto debe ser igual a la unidad.

$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c} \qquad \text{Cos } \theta . \text{ Sec } \theta = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \quad \frac{ac}{ac} = 1$

$\text{Sen } \theta = \frac{c}{b}$

Entonces: $\boxed{\text{Sen } \theta . \text{ CSC } \theta = 1} \begin{cases} \boxed{\text{Sen } \theta = \frac{1}{\text{CSC } \theta}} \\ \boxed{\text{CSC } \theta = \frac{1}{\text{Sen } \theta}} \end{cases}$

***La tangente y la cotangente están definidos en base a los mismos lados del triángulo, pero en orden distinto, luego su producto es igual a la unidad.

$\text{Tan } \theta = \frac{a}{b} \qquad \text{Tan } \theta . \text{ CTG } \theta = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$

$\text{CTG } \theta = \frac{b}{a}$

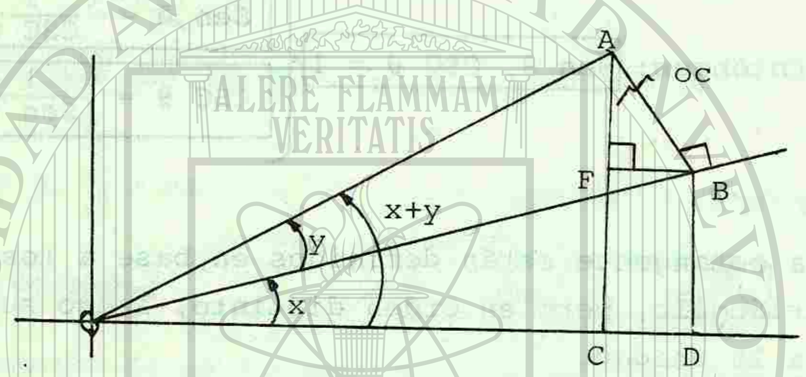
Entonces: $\boxed{\text{Tan } \theta . \text{ CTG } \theta = 1} \begin{cases} \boxed{\text{Tan } \theta = \frac{1}{\text{CTG } \theta}} \\ \boxed{\text{CTG } \theta = \frac{1}{\text{Tan } \theta}} \end{cases}$

Nota: Si dos funciones son recíprocas una de las funciones puede expresarse en términos de la otra.

FUNCIONES DE UNA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ALUMNOS

Expresar Sen (x+y) y Cos(x+y) en términos de los senos y cosenos de los ángulos "x" e "y".

Primero grafiquemos los ángulos "x" e .y. y también el - ángulo suma de los dos.



Luego trazando perpendiculares desde un punto .A" de la línea ter minal del ángulo (x+y) hacia la inicial del ángulo .x. (0c) y a - la inicial del ángulo "y" (OB) vuelve a formarse el ángulo "x" en tre esas dos líneas perpendiculares.

Por el punto "B" trazamos dos líneas perpendiculares ha-- cia las líneas "AC" y "OC" con el fin de formar otro triángulo -- donde intervenga el ángulo "x".

Entonces: Sen $(x+y) = \frac{AC}{OA}$; como AC= BD + AF

Tenemos; Sen $(x+y) = \frac{BD + AF}{OA} \quad \frac{BD}{OA} + \frac{AF}{OA}$

$\frac{BD}{OA} = \frac{BD}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{BD}{OB} \cdot \frac{OB}{OA}$ = Sen x. Cos y

La relación $\frac{AB}{AB}$ es igual a la unidad y ese lado es común a los - ángulos "x" e "y".

De donde reuniendo términos, resulta:

$$\boxed{\text{Sen}(x+y) = \text{Sen } x.\ \text{Cos } y + \text{Cos } x.\ \text{Sen } y}$$

"El seno de la suma de dos ángulos es igual al producto del seno- del primero por el coseno del segundo mas el coseno del primero - por el seno del segundo".

De la misma forma encontraremos una expresión para Cos (x+y) ba-- sandonos en la misma figura.

Entonces: Cos $(x+y) = \frac{OC}{OA}$; como OC= OD-FB

Tenemos; Cos $(x+y) = \frac{OD-FB}{OA} = \underset{*}{\frac{OD}{OA}} - \underset{**}{\frac{FB}{OA}}$

* $\frac{OD}{OA} \quad \frac{OD}{OA} \quad \frac{OB}{OB} \quad \frac{OD}{OB} \quad \frac{OB}{OA}$ = Cos x. Cos y

** $\frac{FB}{OA} = \frac{FB}{OA} \cdot \frac{AB}{AB} = \frac{FB}{AB} \cdot \frac{AB}{OA}$ = Sen x. Sen y

De donde: reuniendo términos, resulta:

$$\boxed{\text{Cos}(x+y) = \text{Cos } x.\ \text{Cos } y - \text{Sen } x\ \text{Sen } y}$$

"El coseno de una suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de los ángulos menos el producto de los senos de tales án gulos".

TANGENTE DE LA SUMA DE DOS ANGULOS: TAN(X+Y)

La función de este ángulo la expresaremos en términos de: Sen(x+y). De acuerdo a la definición de la tangente y luego la reduciremos en términos de las tangentes de cada uno de los ángulos.

$$\text{Tan}(x+y) = \frac{\text{Sen}(x+y)}{\text{Cos}(x+y)}$$

$$\text{Tan}(x+y) = \frac{\text{Sen } x.\ \text{Cos } y + \text{Cos } x.\ \text{Sen } y}{\text{Cos } x.\text{Cos } y - \text{Sen } x.\ \text{Sen } y}$$

Luego; dividiendo término a término por: Cos c.Cis y

$$\text{Tan}(x+y) = \frac{\frac{\text{Sen } x.\text{Cos } y}{\text{Cos } x.\text{Cos } y} + \frac{\text{Cos } x.\ \text{Sen } y}{\text{Cos } x.\ \text{Cos } y}}{\frac{\text{Cos } x.\text{Cos } y}{\text{Cos } x.\text{Cos } y} - \frac{\text{Sen } x.\ \text{Sen } y}{\text{Cos } x.\ \text{Cos } y}}$$

$$\text{Tan}\ (x+y) = \frac{\frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } y} + \frac{\text{Sen } y}{\text{Cos } y}}{1 - \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \cdot \frac{\text{Sen } y}{\text{Cos } y}}$$

Sustituyendo: $$\boxed{\text{Tan}(x+y) = \frac{\text{Tan } x + \text{Tan } y}{1 - \text{Tan } x.\ \text{Tan } y}}$$

FUNCIONES DE UNA DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

Para determinar estas funciones utilizaremos las que ya deducimos para las funciones de una suma de ángulos, también necesitaremos la función de un ángulo negativo en términos del correspondiente positivo, además trataremos la diferencia como la suma de un ángulo positivo y otro negativo.

$$\text{Sen}(x-y) = \text{Sen}[x+(-y)] = \text{Sen } x.\ \text{Cos}(-y) + \text{Cos } x.\ \text{Sen}(-y)$$
$$= \text{Sen } x.\ \text{Cos } y + \text{Cos } x.\ (-\text{Sen } y)$$

$$\boxed{\text{Sen}(x-y) = \text{Sen } x.\text{Cos } y - \text{Cos } x.\text{Sen } y}$$

$$\text{Cos}(x-y) = \text{Cos}[x+(-y)] = \text{Cos } x.\ \text{Cos}(-y) - \text{Sen } x.\ \text{Sen}(-y)$$
$$= \text{Cos } x.\ \text{Cos } y - \text{Sen } x.\ (-\text{Sen } y)$$

$$\boxed{\text{Cos}\ (x-y) = \text{Cos } x.\ \text{Cos } y + \text{Sen } x.\ \text{Sen } y}$$

$$\text{Tan}(x-y) = \text{Tan}[x+(-y)] = \frac{\text{Tan } x + \text{Tan}(-y)}{1 - \text{Tan } x.\ \text{Tan}\ (-y)}$$

$$= \frac{\text{Tan } x + (-\text{Tan } y)}{1 - \text{Tan } x.\ (-\text{Tan } y)}$$

$$\boxed{\text{Tan}(x-y) = \frac{\text{Tan } x - \text{Tan } y}{1 + \text{Tan } x.\ \text{Tan } y}}$$

" La tangente de una suma de ángulos es igual a la suma de las tangentes de cada uno de los ángulos dividida entre unos menos el producto de las tangentes de los dos ángulos".

FUNCIONES DEL ANGULO DOBLE

El ángulo doble lo tenemos cuando en la función de una suma de dos ángulos, -stos son iguales.

* Sen (x+y)= Sen x. Cos y + Cos x. Sen y

pero si $\boxed{x=y}$ tenemos:

Sen (x+x)= Sen x. Cos x + Cos x. Sen x

$$\boxed{\text{Sen } 2x = 2 \text{ Sen } x. \text{ Cos } x}$$

* Cos (x+y)= Cos x. Cos y- Sen x. Sen y

Pero si $\boxed{x=y}$ tenemos:

Cos (x+x)= Cos x. Cos x- Sen x. Sen x

$$\boxed{\text{Cos } 2x= \text{Cos}^2x- \text{ Sen}^2x}$$

El coseno del doble ángulo puede combinarse con una de las relaciones Pitagóricas fundamentales:

$$\boxed{\text{Sen}^2\theta = 1-\text{Cos}^2\theta}$$

$$\boxed{\text{Sen}^e\theta + \text{Cos}^2\theta=1}$$

$$\boxed{\text{Cos}^2\theta = 1-\text{Sen}^2\theta}$$

Luego sustituyendo las formas equivalentes en el coseno de 2x.

$$\text{Cos } 2x= \text{Cos}^2x-(1-\text{Cos}^2x)= \text{Cos}^2x-1+\text{Cos}^2x= 2 \text{ Cos}^2x-1$$

$$\boxed{\text{Cos } 2x= 2 \text{ Cos}^2x-1}$$

$$\text{Cos } 2x=(1-\text{Sen}^2x)- \text{Sen}^2 x= 1-\text{Sen}^2x-\text{Sen}^2x= 1-2 \text{ Sen}^2 x$$

$$\text{Cos } 2x= 1- 2 \text{ Sen}^2 x$$

$$\text{*Tan } 9x+y)= \frac{\text{Tan } x+ \text{ Tan } y}{1-\text{Tan } x. \text{ Tan } y} \quad ; \text{ pero } \boxed{x = y}$$

$$\text{Tan } (x+x) = \frac{\text{Tan } x+\text{Tan } x}{1- \text{ Tan } x. \text{ Tan } x}$$

$$\text{Entonces: } \boxed{\text{Tan } 2x = \frac{2 \text{ Tan } x}{1-\text{Tan}^2 x}}$$

D E M O S T R A C I O N E S
E J E R C I C I O

Existen muchas relaciones entre las funciones trigonomé--tricas que son VALIDAS para todos los valores de argumento para -los que las funciones tienen una definición, pero de entre esas -muchas, entre-sacaremos, las 8 identidades que consideramos fundamentales y que son:

1) $\text{Sen } \theta = \dfrac{1}{\text{CSC } \theta}$

2) $\text{Cos } \theta = \dfrac{1}{\text{Sec } \theta}$

3) $\text{Tan } \theta = \dfrac{1}{\text{Cot } \theta}$

4) $\text{Tan } \theta = \dfrac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}$

5) $\text{Cot } \theta = \dfrac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta}$

6) $\text{Sen}^2\emptyset + \text{Cos}^2\emptyset = 1$

7) $\text{Tan}^2\emptyset + 1= \text{Sec}^2\emptyset$

8) $1 + \text{Cot}^2 \emptyset = \text{Csc}^2\emptyset$

El uso de estas o identidades y en general de todas las-identidades trigonométricas, nos pueden ser muy útiles en la de-mostración de problemas diversos.

La demostraciones usando identidades trigonométricas (Fundamentales, o de complemento), son un ejercicio de gran utilidad posterior, veamos algunas de las recomendaciones para simplifi--car el trabajo:

Ejemplo 1:

Demostrar que $\dfrac{1 - \text{Tan}^2\theta}{1 + \text{Tan}^2\theta} = 1 - 2 \text{ Sen}^2 \theta$

1er. paso: Para demostrar que un miembro de una igualdad es - - igual a el otro debemos de manejar solamente uno de - los miembros de esa igualdad. En este caso usaremos -

y que $\mathrm{Tan}^2\theta = \dfrac{\mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta}$

Sustituyendo los valores tenemos que:

$$\frac{1 - \dfrac{\mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta}}{1 + \dfrac{\mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta}} = 1 - 2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

Simplificando

$$\frac{\dfrac{\mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta}}{\dfrac{\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta}} = 1\text{-}2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

Continua la Simplificación

$$\frac{(\mathrm{Cos}^2\theta)(\mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta)}{(\mathrm{Cos}^2\theta)(\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sen}^2\theta)} = 1\text{-}2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

$$\frac{\mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta}{\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sen}^2\theta} = 1 - 2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

Ahora

Si $\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sen}^2\theta = 1$

y, $\mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta = (1\text{-}\mathrm{Sen}^2\theta)$

Sustituyendo estos valores en la igualdad tenemos que:

$$\frac{(1 - \mathrm{Sen}^2\theta) - \mathrm{Sen}^2\theta}{1} = 1 - 2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

$$1 - 2\ \mathrm{Sen}^2\theta = 1 - 2\ \mathrm{Sen}^2\theta$$

Ejemplo 2

Demostrar que: $\mathrm{Sen}\theta .\ \mathrm{Sec}\ \theta = \mathrm{Tan}\ 0$- Transformemos nuevamente el término de la izquierda.

$$\mathrm{Sen}\ \theta\ \mathrm{Sec}\ \theta = \mathrm{Tan}\ \theta$$

$$\mathrm{Sen}\ \theta\ \frac{1}{\mathrm{Cos}\ \theta} = \mathrm{Tan}\ \theta$$

$$\frac{\mathrm{Sen}\ \theta}{\mathrm{Cos}\ \theta} = \mathrm{Tan}\ \theta$$

$$\mathrm{Tan}\ \theta = \mathrm{Tan}\ \theta$$

Antes de elaborar otro ejemplo y algunos ejercicios es conveniente leer estos consejos.

1.- Memorizar bien todas las identidades trigonométricas incluyendo las posibles variaciones en las mismas.
2.- Tratar, cuando sea posible, de manejar todas las funciones en términos de senos y cosenos.
3.- Ver la posibilidad de factorizar para simplificar el problema.
4.- No use radicales, de ser posible.
5.- Una simplificación antes de iniciar el problema nos indicará un posible camino de solución
6.- Elija siempre un miembro de la igualdad para efectuar el trabajo.

Ejemplo 3

Demostrar que $\text{Sec}^2\ x - \text{Csc}^2 x = \text{Tan}^2 x - \text{Cot}^2$

Transforme el miembro de la izquierda con las siguientes igualdades:

$\text{Sec}^2\ x = \text{Tan}^2\ x + 1$

$\text{Csc}^2\ x = 1 + \text{Cot}^2\ x$

Sustituyendo.

$$\text{Tan}^2\ x + 1 - (1 + \text{Cot}^2 x) = \text{Tan}^2 x - \text{Cot}^2\ x$$

$$\text{Tan}^2\ x + 1 - 1 - \text{Cot}^2 x =$$

$$\text{Tan}^2\ x - \text{Cot}^2\ x = \text{Tan}^2\ x - \text{Cot}^2\ x$$

Ejemplo 4

Demostrar que:

$\text{Sen}^4\ x - \text{Cos}^4\ x = 2\ \text{Sen}^2\ x - 1$

Tomemos el miembro de la izquierda; veamos que se puede factorizar como una diferencia de dos cuadrados.

$(\text{Sen}^2\ x + \text{Cos}^2\ x)\ (\text{Sen}^2\ x - \text{Cos}^2\ x) = 2\ \text{Sen}^2\ x - 1$

Sustituyendo.

$$[\text{Sen}^2\ x - (1 - \text{Sen}^2\ x)] = 2\ \text{Sen}^2\ x - 1$$

$\text{Sen}^2\ x - 1 + \text{Sen}^2\ x = 2\ \text{Sen}^2\ x - 1 = 2\ \text{Sen}^2\ x - 1$

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas,

Demostrar que:

1.- $\dfrac{\text{Cos}\ x}{1 - \text{Sen}\ x} = \dfrac{1 + \text{Sen}\ x}{\text{Cos}\ x}$

2.- $\dfrac{\text{Tan}^2\ \theta + 1}{2\ \text{Cos}\ (-\theta) - \text{Sen}(90 - \theta)} = \text{Sen}^3$

3.- $\text{Cos}^4\ x - \text{Sen}^4\ x = 1 - 2\ \text{Sen}^2\ x$

4.- $\text{Sen}^2\ x\ \text{Sec}^2\ x + \text{Sen}^2\ x\ \text{Csc}^2\ x = \text{Sec}^2\ x$

5.- $\text{Tan}\ x\ \text{Sen}\ x\ \text{Cos}\ x = \text{Sec}\ x$

6.- $\text{Sec}^2\ x\ (1 - \text{Sen}^2\ x) = 1$

7.- $\dfrac{\text{Cot}\ \theta - \text{Cos}\ \theta}{\text{Cos}^3\ \theta} = \dfrac{\text{Csc}\ \theta}{1 + \text{Sen}\ \theta}$

8.- $\dfrac{1 - \text{Cos}^6\ x}{\text{Sen}^2\ x} = 1 + \text{Cos}^2\ x + \text{Cos}^4\ x$

9.- Complete la siguiente tabla expresando cada función en términos de las otras siguiendo el ejemplo del primer renglón.

	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
sen θ	sen θ	$\pm\ 1-\cos^2\theta$	$\dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\theta}}{\sec\theta}$	$1/\csc\theta$
cos θ		cos θ				
tan θ			tan θ			
cot θ				cot θ		
sec θ					sec θ	
csc θ						csc θ

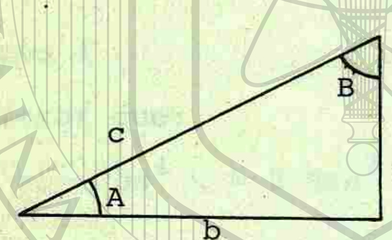
RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Tenemos que los elementos de un triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.

La resolución de un triángulo consiste en realizar las operaciones necesarias para determinar tres de sus elementos cuando tres son conocidos, siempre que uno de ellos por lo menos sea un lado.

Para resolver un triángulo rectángulo se deben de dar dos elementos, además del ángulo recto, habiendo de ser uno de ellos un lado.

A continuación veremos algunos casos que pueden ocurrir, los cuales se pueden resolver por completo utilizando las siguientes identidades o fórmulas.



$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\text{Sen } B = \frac{b}{c}$

$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\text{Cos } B = \frac{a}{c}$

$\text{tg } A = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\text{tg } B = \frac{b}{a}$

Caso I.- Cuando los elementos dados son un lado y un ángulo.

En este caso se emplea la función del ángulo que contenga el lado dado y el lado pedido.

Ejercicio 1.- Dado A= 15° y c=7. Hallar los lados a y b y el ángulo B.

Haciendo uso de un ángulo rectángulo, tenemos:

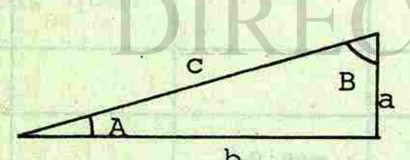


Fig.

usando la función seno:

$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$ despejando a.

Tenemos a=c. sen A sustituyendo los valores correspondientes:

a= 7 sen 15°, para encontrar los valores de la función de un ángulo determinado haremos uso de las tablas trigonométricas que vienen al final de la unidad.

Tenemos que sen 15°- .25882

por lo tanto: a= 1.81174

Ahora usando la función coseno, tenemos:

$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$, despejando b:

b= c Cos A

Sustituyendo los valores:

b= 7 Cos 15°

b= 6.76

Para determinar el ángulo B, tenemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180° entonces:

A + B + C = 180° $\quad$ Sí A= 15°, C= 90°

Despejando B:

B= 180° - A-C

B= 180° - 15 - 90

B = 75°

E J E R C I C I O 13

I.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos.

1) Dado A= 15°   c= 7

2) Dado B= 67°   a= 5.

3) Dado B= 50°   b= 20

4) Dado a= .35   c= .62

5) Dado a=273   b= 418

6) Dado A= 38°   a= 8.09

7) Dado B= 75°   c= ,014

8) Dado b= 58.6   c= 76.3

9) Dado A= 9°   b= 937

10) Dado a= 3.414   b= 2.875

11) Dado A=84°16'   a= .0033503

12) Dado A= 46°23'   c= 5278.6

13) Dado a= 529.3   c= 902.7

14) Dado B= 23°9'   b= 75.48

15) Dado B= 18°38'   c= 2.5432

RESOLUCION DE TRIANGULOS OBICUANGULOS

Para resolver o encontrar las partes faltantes (ángulos,-lafos) de cualquier triángulo, haremos uso de las siguientes propiedades de los triángulos.

I.- En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; es decir, basándonos en los triángulos si--guientes:

Fig. 44

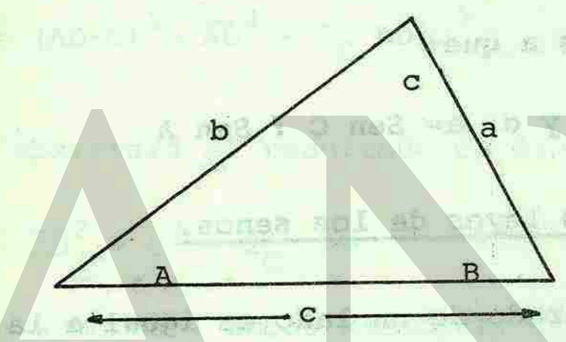
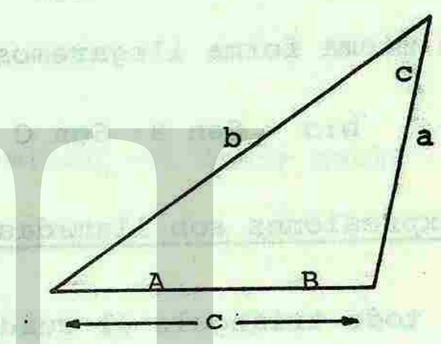


Fig. 45

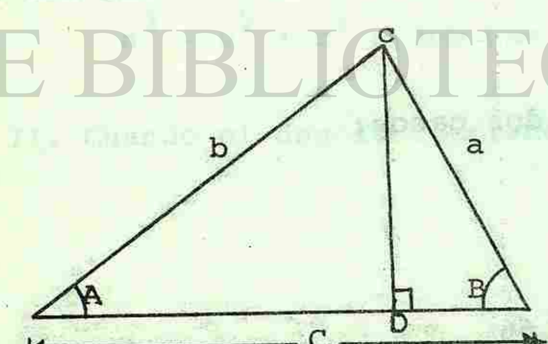


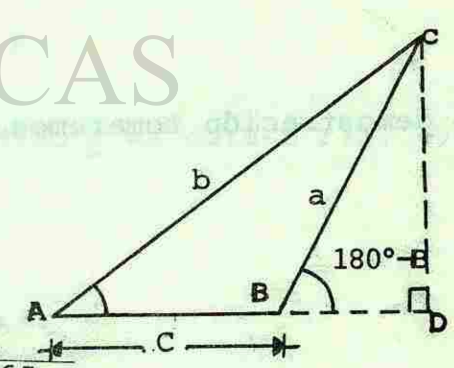
a.b = Sen A: Sen B

Esta propiedad la demostraremos enseguida mediante dos casos:

Una cuando los ángulos <u>A</u> y <u>B</u> son agudos (Fig. 44) y otro caso - - cuando uno de ellos sea obtuso (Fig. 45).

En cada caso trazaremos una línea perpendicular CD al lado AB. - (Fig. 46 y Fig. 47).





Entonces basándonos en cada figura tendremos que: CD= a Sen B (Fig. 46) y por la Fig. 47 tenemos que CD= a Sen CBD y a - Sen (180°-B= a Sen B, entonces, por lo tanto: CD= a Sen B; así - por uno y otro caso:

$$\boxed{b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B}$$

Por lo tanto, si lo ponemos en forma de proporciones, tenemos que:

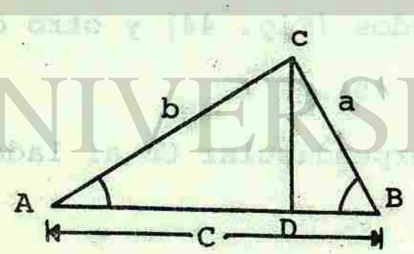
$$a:b = \text{Sen } A : \text{Sen} B$$

y de la misma forma llegaremos a que:

$$b:c = \text{Sen } B : \text{Sen } C \text{ y } c: a = \text{Sen } C : \text{Sen } A$$

Estas expresiones son llamadas leyes de los senos.

II.- En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido: es decir, del triángulo ABC.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$

Para su demostración tomaremos dos casos:

Caso I.- Cuando el ángulo comprendido A sea agudo y el ángulo B será también agudo, Fig. 46 o cuando el ángulo B sea obtuso Fig. 47.

Entonces, de la Fig. 46 tenemos:

BD = C-AD y en la Fig. 47

BD = AD-C

Elevando el cuadrado, obtendremos:

$$\overline{BD}^2 = (C-AD)^2 = C^2 - 2_C\ AD + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BD}^2 = (AD-C)^2 = \overline{AD}^2 - 2_C\ AD + C^2$$

como observará el resultado es el mismo, es decir que¼

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + C^2 - 2_C\ AD$$

Ahora sumemos a ambos miembros: $\overline{CD}^2$

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + C^2 - 2_C\ AD$$

Pero como observará en cada figura, tenemos que:

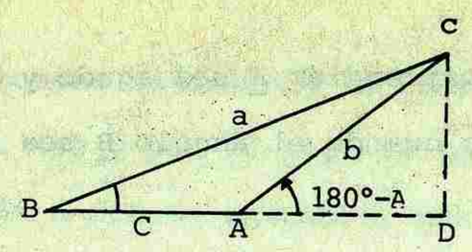
$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^1 = a^2 \quad \text{y} \quad \overline{AD} + \overline{CD}^2 = b^2$$

y AD = b Cos A

y por lo tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \text{ Cos } A$$

Caso II. Cuando el ángulo comprendido A es obtuso Fig. 49.



De la Fig. 49 tenemos que:

$$BD = AD + C$$

Elevando al cuadrado, tenemos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + 2_C AD + C^2$$

Ahora sumemos $\overline{CD}^2$ a ambos miembros.

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + C^2 + 2C\ AD$$

De la Fig. 49 tenemos que:

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = a^2 \text{ y } \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = B^2$$

y AD = b Cos CAD = b cos (180°-A) = -b Cos A

Por lo tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$

y de la misma manera se compueba que:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \text{ Cos } B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } A$$

Estas expresiones son llamadas Ley de los Cosenos.

Ahora, despejando el coseno de cada una de las igualdades tenemos que:

$$\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{Cos } B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ebc}$$

$$\text{Cos } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

A continuación aplicaresmos estas propiedades para determinar las partes faltantes de un triángulo.

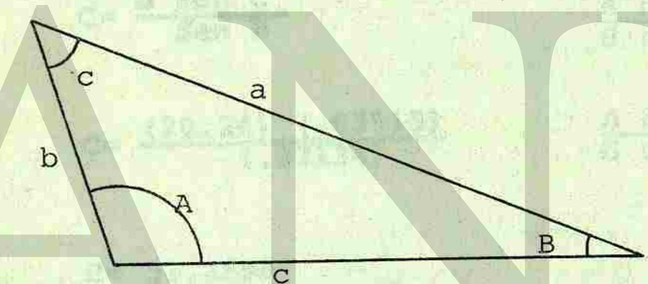
Para esto podemos distinguir cuatro casos:

Caso I.- Dado un lado y dos ángulos cualesquiera .

Por ejemplo:

Dado b=2-.24, A=103°36", B=19°21'

Determinar el ángulo C, y los lados a y c para determinar estas-partes construyamos un triángulo:



Primero encontraremos el valor del ángulo faltante C.

Renemos que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a -- 180°, por lo tanto:

$$A+B+C = 180°$$

$$C + 180° - A-B$$

Sustituyendo:

$$C = 180° - 103°36' - 19°21'$$

$$C = 180° - 12257'$$

$$\begin{array}{r} 103°\ 36' \\ 19°\ 21' \\ \hline 122°\ 57' \end{array}$$

180° lo podemos expresar como 179° 60'

Entonces:

$$C = 179° 60' - 122° 57'$$

$$c = 57° 03'$$

$$\begin{array}{r} 179° 60' \\ \underline{122° 57'} \\ 57° 03' \end{array}$$

Ahora, para determinar los lados $\underline{a}$ y $\underline{c}$ utilizaremos la propiedad.

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Sen}A}{\text{Sen}B} \quad y \quad \frac{c}{b} = \frac{\text{Sen}C}{\text{Sen}B}$$

Recordando que: a;b=Sen A: Sen A

c;b=Sen C: Sen B

Despejando $\underline{a}$ de $\frac{a}{b} = \frac{\text{Sen A}}{\text{Sen B}}$

$$a = b\,\frac{\text{Sen A}}{\text{Sen B}}$$

Tenemos que:

Sen A = Sen 103° 36'

= Sen (90°+13°36')=Cos (13° 36')

Entonces:

Sen(103° 36") = Cos 13° 36'

= .97196

SenB= Sen (19°21')

= .33134

Ahora , sustituyendo:

$$a = \frac{b \text{ Sen A}}{\text{Sen B}}$$

$$a = \frac{(20.241(.07196)}{.33134}$$

a= 59.3730

Ahora determinaremos el valor de C,

Tenemos que: $\frac{c}{b} = \frac{\text{Sen C}}{\text{Sen B}}$

Entonces: $c = \frac{b \text{ Sen C}}{\text{Sen B}}$

Tenemos que: Sen C= Sen 57° 3'

= .83915

y Sen B = .33134

Sustituyendo en:

$$C = \frac{b \text{ Sen C}}{\text{Sen B}}$$

$$C = \frac{(20.24)\ (.83915)}{(.33134)}$$

C= 51.2598

Entonces tenemos que:

el ángulo C= 57° 3'

y los lados a= 59.3730 y

C= 51.2598

E J E R C I C I O

Encuentre los datos faltantes de los siguientes triángulos, dado los siguientes datos.

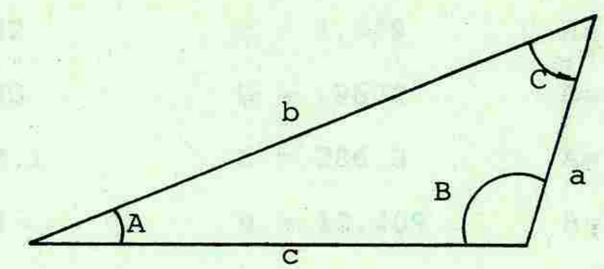
1) a= 180°	A= 38°	B= 75° 43°
2) b= .82	B= 51°42'	C= 109° 17'
3) c= 24.637	A= 83°39'	B= 38° 56'
*4) b= .6708	A= 26°10'45"	C= 44°35'12"
*5) a= 5.0454	B= 90°8'26"	C= 21°51'34"
6) c= 4592.36	A= 74°27'	c+ 61°
7) c= .93109	A= 15° 34'	C= 123° 29'
*8) b= 3.67683	A= 67°21'54"	B= 57° 48'
9) a= 71396.72	B= 42° 55'	C= 16° 4'
10) b= 254.05	A= 30°	C= 90°

Caso II. Dado dos lados y el ángulo comprendido.

Por ejemplo:

si a=82. c= 167 y B=98°14'. hallar A,C, y b

Primeramente representaremos los datos en un tirángulo.



Usando la ley de los cosenos calcularemos el valor de b, es decir:

$$B^2=a^2+c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$

Tenemos que: a= 82, c= 167

Cos= 98°14' = Cos (90+8°14')

= -Sen 8° 14

Entonces Cos 90° 14' = -Sen 8°14

Cos 90° 14' = -'14320

Sustituyendo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$

$$b^2 = (82)^2 + (167)^2 - 2(82)(167)(-'14320)$$

Entonces:

$$b= \sqrt{0724+27889+392.19616}$$

$$b= 196.30323$$

Ahora, por la expresión:

$$\text{Cos } A= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Hallaremos los valores de los ángulos A y C, tenemos que:

a = 82

b = 196.3032

c = 167

Sustituyendo, tenemos:

$$\text{Cos } A= \frac{(196.3032)^2 + (167)^2-(82)^2}{2(196.3032)\ (167)}$$

$$\text{Cos } A= .9054$$

Entonces:

$$A= \text{Cos}^{-1}\ ('9054)$$

$$A= 4°\ 25'\ 10"$$

Ahora para calcular, el ángulo C;

A+B+C= 180

C= 180°-A-B

C= 180-24°25'10"-98°14'

C= 180°-122° 39" 10"

180° lo podemos poner como:

C= 177°59'60"-122"39'10"

Entonces:

C= 57°20'50"

E J E R C I C I O

Encuentre los datos faltantes de los siguientes triángu-- los, dados los siguientes datos:

1) a = 67	c = 33	B= 36°
2) a = 886	b = 747	C= 71°54'
3) b = 4.102	c = 4.549	A= 62°9'
4) a = .5953	b = .9632	C= 134°
5) b = 1292.1	c = 286.3	A= 27°13'
6) a = 7.48	c = 12.409	B= 83°26'52"
7) a = 93.273	b = 81.512	C= 58°
8) b = 0.2615	c = .06086	A= 115°42'
9) a = 35384.82	c = 57946.34	B= 19°37'
10) b = 27.4	a = 60.59	C= 90°

Caso III.- Dados los tres lados del triángulo en c-estión.

Por ejem-plo:

Dado a = 2.52; b= 2.79; c= 2.33

Gallar los ángulos A,B,C.

Para calcular los ángulos utilizaremos las expresiones:

$$\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Sustituyendo en cada una los valores correspondientes obtendre-- mos que:

$$\text{Cos } A= \frac{(2.79)^2 + (2.33)^2 - (2.51)^2}{2(2.79)(2.33)}$$

Cos A= 0.531704

Entonces, por lo tanto:

$A = \cos^{-1}(.53170)$

$A = 57° \ 52' \ 45''$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos B = \dfrac{(2.51)^2 + (2.33)^2 - (2.79)^2}{2(2.51)(2.33)}$

$\cos B = .33726$

$B = \cos^{-1}(.33626)$

$B = 70° \ 17' \ 24'' \ 4''$

Para calcular el ángulo C, tenemos:

$A+B+C = 180°$

$C = 180° -A-B$

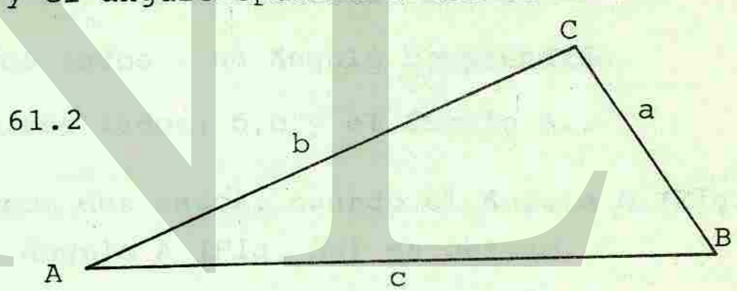
$\boxed{C= 51° \ 49' \ 51''}$

E J E R C I C I O

Encuentra las partes faltantes del triángulo en cuestión, dados los siguientes datos.

1) a = 2	b = 3	c = 4	
2) a = 5	b = 7	c = 6	
3) a = 10	b = 9	c = 8	
4) a = 5.6	b = 4.3	c = 4.9	
5) a = .85	b = .93	c = .78	
6) a = 61.3	b = 84.7	c = 47.6	
7) a = 705	b = 562	c = 639	Hallar A
8) a = 0.291	b = .0184	c = .0358	Hallar B
9) a = 3019	b = 6731	c = 4228	Hallar C

Caso IV.- Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Por ejemplo:



a = 52.1; b = 61.2

y el ángulo A = 31° 26'

Hallar: B,C y c

Para calcular el ángulo B.

Usaremos la ley de los senos: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{Sen } A}{\text{Sen } B}$

Despejando Sen B, resulta:

$\text{Sen } B = \dfrac{b \text{ Sen } A}{a}$

Sustituyendo valores:

$\text{Sen } B = \dfrac{(61.2) \text{ Sen}(31° \ 26')}{52.1}$

$\text{Sen } B = \dfrac{(61.2) \ (.52151)}{52.1}$

$$\text{Sen } B = \frac{(61.2)\ (.52151)}{52.1}$$

Sen B= 0.61256

Entonces:

$B = \text{Sen}^{-1}\ (0.61256)$

B= 37° 46' 28"

Tenemos que:

A+B+C= 180°

Entonces: C= 180° -A-B

C= 180°-31° 36'-37°46'28"

c= 110°37'32"

E J E R C I C I O

Resolver los siguientes triángulos; según los datos que se te dan:

1)	Dado a = 5.98,	b = 3.59	A = 62°50'
2)	Dado b = 74.1	c = 64.2	C = 27°18'
3)	Dado b = .2237,	c = .0982	D = 108°
4)	Dado a = 4.254,	c = 4.536,	C = 37°9'
5)	Dado a = .2789,	b = .2271,	B = 65°38'
6)	Dado a = 60.935,	c = 76097,	A = 133°41'
7)	Dado b = 74.8067	c = 98.7385	C = 81°47'
8)	Dado a = 9.51987	c = 11,	A = 59°96'
9)	Dado b = 4.521	c = 5.03,	B = 40°32'7"
10)	Dado a = 186.82	b = 394.2	B = 114°29'51"

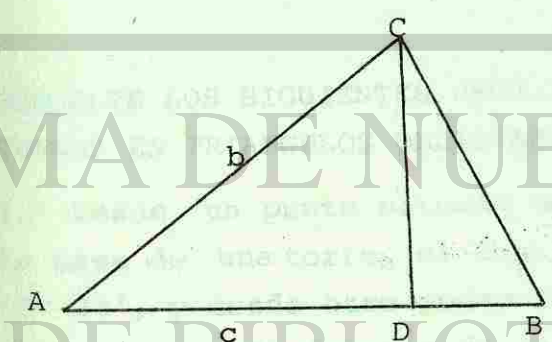
FORMULAS PARA DETERMINAR EL AREA DE UN TRIANGULO OBICUANGULO.

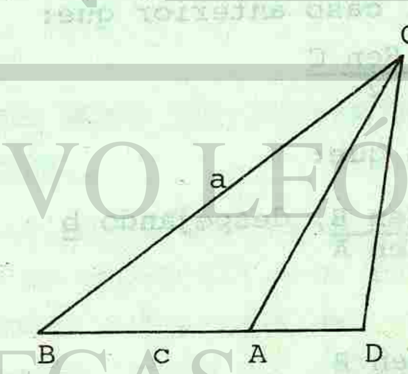
Para esto analizaremos los siguientes casos:

Caso I.- Cuando se dan dos lados y un ángulo comprendido.

Analizemos cuando se dan dos lados: b,c y el ángulo A.

Para esto tendremos dos casos, cuando el ángulo A (Fig.-53) es agudo y cuando el ángulo A (Fig. 54) es obtuso.





Tracemos en ambos triángulos una perpendicular CD al lado AB.

Representaremos con la letra k el área del triángulo.

El área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura del triángulo entre dos.

Porlo tanto en cada triángulo tenemos que:

$$K = \frac{C \times CD}{2}$$

Pero observando en la Fig. 53 encontramos que:

CD = b Sen A y en la Fig. 54 CD= b Sen CAD

Analizando el ángulo: C A D tenemos que es igual a: (180°-A)

Por lo tanto:

$$CD = b \text{ Sen } (180°-A) = b \text{ Sen } A$$

Luego en ambas figuras:

$$CD = b \text{ Sen } A$$

Por lo tanto:

$$K = bc \text{ Sen } A$$

y de igual forma:

$$K = \frac{ca \text{ Sen } B}{2}$$

$$K = \frac{ab \text{ Sen } C}{2}$$

Caso II.- Dado un lado y los tres ángulos. Por ejemplo cuando se dan el lado a y los tres ángulos: A,B,C.

Tenemos para el caso anterior que:

$$K = \frac{ab \text{ Sen } C}{2}$$

también sabemos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{Sen } B}{\text{Sen } A}, \text{ despejando } b$$

Tenemos:

$$b = \frac{a \text{ Sen } B}{\text{Sen } A}$$

Por lo tanto:

$$K = \frac{a}{2} \times \frac{a \text{ Sen } B \times \text{Sen } C}{\text{Sen } A}$$

$$K = \frac{a^2 \text{ Sen } B \text{ Sen } C}{2 \text{ Sen } A}$$

Del mismo modo, tenemos:

$$K = \frac{b^2 \text{ Sen } C \text{ Sen } A}{2 \text{ Den } B}$$

y

$$K = \frac{c^2 \text{ Sen } A \text{ Sen } B}{2 \text{ Sen } C}$$

E J E R C I C I O

Encuentre el área de los siguientes triángulos, a partir de los datos que se te dan:

1) Dado b = 6.074,	A = 70° 39'	B = 56° 23'
2) Dado b = 761.86,	= 526.02	A = 124° 6' 13"
3) Dado a = 97,	b = 83	C = 71
4) Dado a = 1.9375	A = 43° 18'	B = 29° 47' 36"
5) Dado b = .43592	A = 62° 40" 8"	C = 54° 32' 25"
6) Dado a = 39.5	b = 44.8	C = 52.3
7) _ado c = .804639	c = .357173	B = 18° 11' 49"
8) Dado c = 95.86157	B = 115° 24' 52"	C = 32° 57' 21"
9) Dado a = 02409481	b = 0.2763834	C = 81° 9' 34"
10) Dado a = 7.825	b = 6.592	C = 9.643

NOTA: En cada uno de los ejercicios de las páginas (111, 114, 115 y 117).

RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS SEGUN LOS DISTINTOS CASOS ESTUDUADOS EN TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

1.- Desde un punto situado en el plano horizontal que pasa por la base de una torre, el ángulo de elevación a su cúspide es de 52° 39', y desde otro punto situado a 100 pies del anterior y más distante que él del pie de la torre, es de 35° 16'. Hallar la altura de la torre y las distancias a ella desde cada una de los puntos de observación.

2.- Un lado de un paralelogramo es 56, y los ángulos comprendidos entre este lado y los diagonales son: 31° 14' y 45° 37'.

Hállense todos los lados del paralelogramo.

3.- En un campo ABCD, los lados AB, y Da miden 155, 336, 252, y - 105 varas respectivamente, y la diagonal AC, 311 varas. Hállese - el área del campo.

4.- El área de un triángulo es 1356, y dos de sus dos 53 y 69. -- Hállese el ángulo comprendido entre ellos.

5.- Desde la cima de un farallón, los ángulos de depresión a dos postes situados en un plano más bajo, en línea con el observador- y distante uno del otro 1000 pies, son 27° 40' y 9° 33' respectivamente. Hállese la altura del farallón sobre el plano que ocupan los postes.

6.- Para encontrar la distancia de un objeto inaccesible. A, desde una posición B, mide una línea BC de 208.3 pies de largo.

Mido los ángulos ABC y ACB y halló que son de 126° 35' y 31° 48'- respectivamente. Hállase la distancia AB.

7.- Las diagonales de un paralelogramo miden 81 y 106, y el ángulo formado por ellas es de 29° 18'.
Hallar los lados y ángulos del paralelogramo.

7.- Un asta de bandera de 40 pies de altura está situada en lo alto de una torre. Desde un punto situado cera de la base de la torre se observa que los ángulos de elevación al tope y al pie del- asta, son de 38° 53' y 20° 18' respectivamente. Hállase la distancia del punto de la torre y la altura de ésta.

UNIDAD II

GEOMETRIA ANALITICA

2.- Un lado de un paralelogramo es 56, y los ángulos comprendidos entre este lado y los diagonales son: 31° 14' y 45° 37'.

Hállense todos los lados del paralelogramo.

3.- En un campo ABCD, los lados AB, y Da miden 155, 336, 252, y 105 varas respectivamente, y la diagonal AC, 311 varas. Hállese el área del campo.

4.- El área de un triángulo es 1356, y dos de sus dos 53 y 69. -- Hállese el ángulo comprendido entre ellos.

5.- Desde la cima de un farallón, los ángulos de depresión a dos postes situados en un plano más bajo, en línea con el observador y distante uno del otro 1000 pies, son 27° 40' y 9° 33' respectivamente. Hállese la altura del farallón sobre el plano que ocupan los postes.

6.- Para encontrar la distancia de un objeto inaccesible. A, desde una posición B, mide una línea BC de 208.3 pies de largo.

Mido los ángulos ABC y ACB y halló que son de 126° 35' y 31° 48' respectivamente. Hállase la distancia AB.

7.- Las diagonales de un paralelogramo miden 81 y 106, y el ángulo formado por ellas es de 29° 18'.

Hallar los lados y ángulos del paralelogramo.

7.- Un asta de bandera de 40 pies de altura está situada en lo alto de una torre. Desde un punto situado cera de la base de la torre se observa que los ángulos de elevación al tope y al pie del asta, son de 38° 53' y 20° 18' respectivamente. Hállase la distancia del punto de la torre y la altura de ésta.

UNIDAD II

GEOMETRIA ANALITICA

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno:

Aplicará los conceptos de secciones cónicas, en la solución de problemas sencillos.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

El alumno:

2.1 Definirá el concepto de geometría analítica,

2.2 Calculará la distancia entre dos puntos.

2.3 Determinará la distancia dirigida entre dos puntos.

2.4 Calculará la distancia entre dos puntos, en un plano cartesiano.

2.5 Determinará el punto medio de un segmento.

2.6 Definirá el concepto de pendiente de una línea recta.

2.7 Determinará la pendiente de una línea recta, dados dos puntos.

2.8 Identificará las diversas formas de ecuación de una recta.

2.9 Determinará las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas.

2.10 Determinará si dos rectas dadas son paralelas o perpendiculares, o ni lo uno ni lo otro.

2.11 Graficará una recta, encontrando su ecuación, dados un punto y su pendiente.

2.12 Determinará la pendiente de una recta cuya ecuación está dada en su forma general.

2.13 Definirá el concepto de circunferencia.

2.14 Identificará las formas reducida y general, de la ecuación de la circunferencia.

2.15 Encontrará las distintas formas de la ecuación de la circunferencia, dados sus elementos.

2.16 Graficará una circunferencia convirtiendo su ecuación, de la forma general, a su forma reducida.

2.17 Definirá el concepto de parábola y todos los elementos relacionados con ella.

2.18 Identificará el teorema referente a una parábola con eje de simetría vertical y el referente a una parábola con eje de simetría horizontal, tratándose en ambos casos de parábolas con vértice en el origen.

2.19 Determinará la ecuación de una parábola, a partir de ciertos datos dados, construyendo su gráfica.

2.20 Obtendrá todos los elementos de la parábola dada su ecuación.

2.21 Definirá el concepto de elipse, y todos los elementos relacionados con ella.

2.22 Identificará el teorema referente a uan elipse con eje de simetría vertical y el referente a una elipse con eje de simetría horizontal, tratándose en ambos casos de elipses con centro en el origen.

2.23 Determinará la ecuación de una elipse, a partir de ciertos datos dados, construyendo su gráfica.

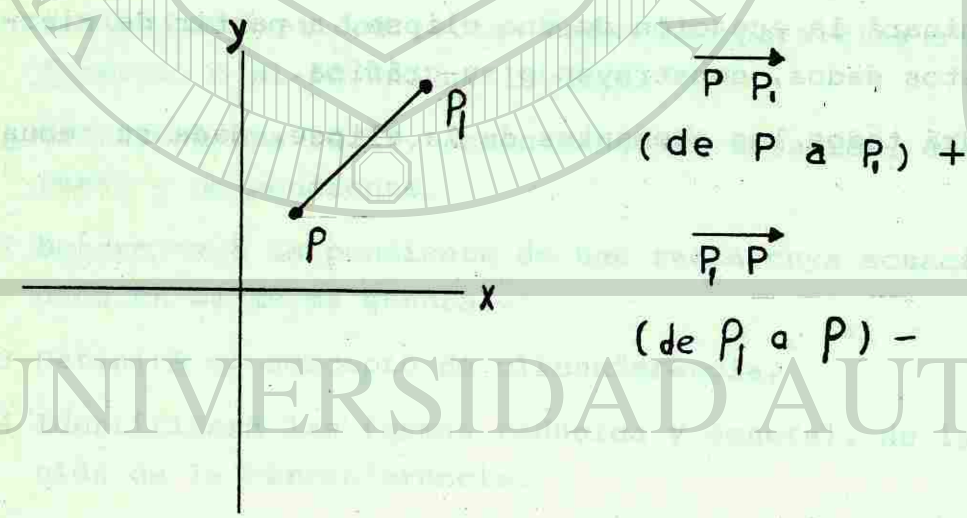
2.24 Obtendrá todos los elementos de la elipse, dada su ecuación.

DEFINICION:

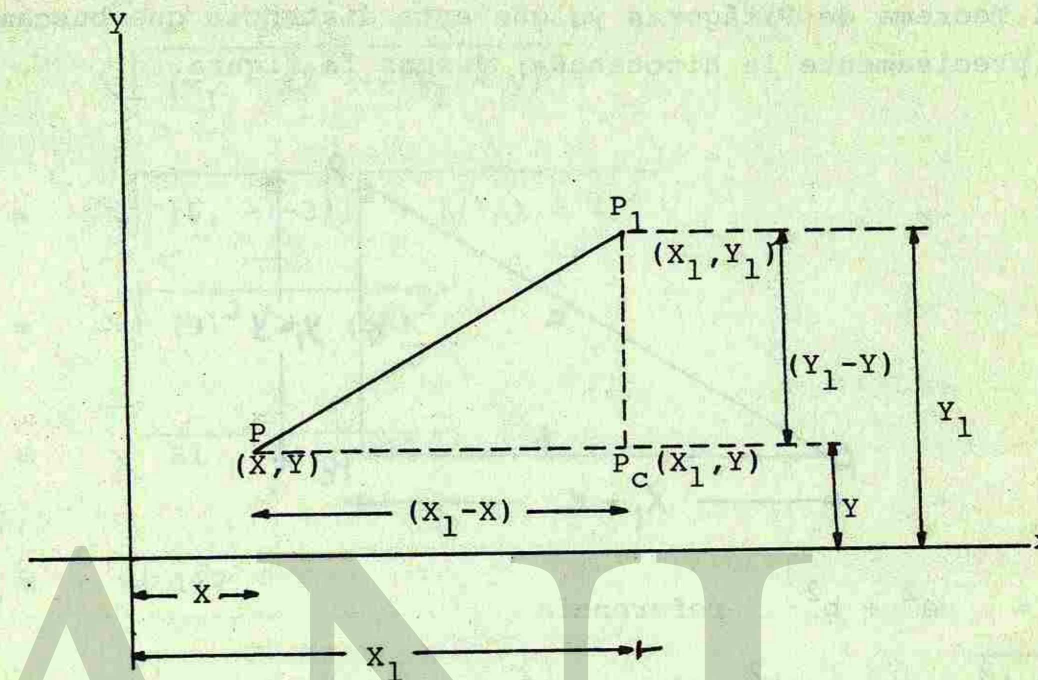
Geometría Analítica es la parte de las matemáticas que establece una conexión entre el álgebra y la geometría plana. En ella se forma una relación entre los números y el espacio, estudiando las propiedades de las figuras con procedimientos algebráicos, sujetando a todas estas a métodos generales y uniformes.

DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS.

Supongamos que en un eje de coordenadas colocamos dos puntos distintos, P. y P_1, y establezcamos que el sentido positivo de la recta es precisamente de P. a P_1 indicado con ——— , y el sentido negativo será P_1 a P., veamos gráficamente la figura.



y ahora elaboraremos otra figura y analicemos.



Las coordenadas de P son (x,y), las P_1 (x_1, y y_1). Tracemos una recta paralela al eje de las x que pasa por P., y del punto P_1 tracemos una perpendicular hasta el eje de las x , con esos trazos formamos un triángulo rectángulo, a la intersección de los dos trazos que hicimos le llamamos Pc cuyas coordenadas serán (x_1, y).

Busquemos ahora darle valores a los lados del triángulo rectángulo y establecer una fórmula para la distancia entre dos puntos.

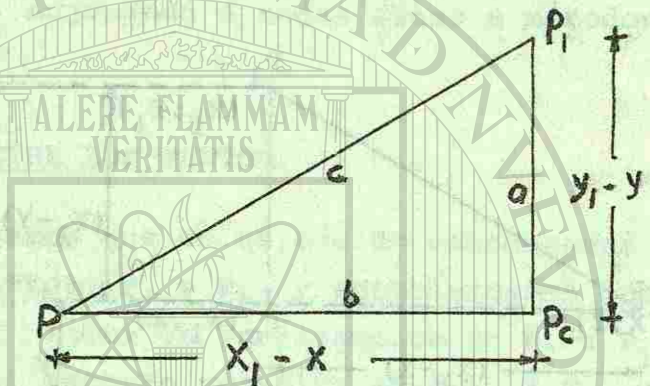
LADO

$\overline{P.\ P_1}$ = distancia entre los puntos buscado

$\overline{P.\ Pc} = x_1 - x$

$\overline{P_1 Pc} = y_1 - y.$

Como la figura es un triángulo rectángulo, para conocer la distançia entre los puntos P y P_1, es necesario hacer uso del Teorema de Pitágoras ya que esta distancia que buscamos - es precisamente la hipotenusa; veamos la figura.



$c^2 = a^2 + b^2$ referencia

$\overline{(PP_1)}^2 = (y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2$

simplificando

$\overline{P.P_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$

haciendo notar que $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y)^2$ ó que - - - $(x - x_1)^2 = (x_1 - x)^2$ por lo que la fórmula puede quedar.

$\overline{P_1P.} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$

<u>A esa fórmula le llamamos fórmula de la distancia entre dos puntos.</u>

Ejemplo: Encuentre la distancia entre los puntos P(-3,4) - - - - P_1 (6,-2). Aplicando la fórmula directamente tenemos: $x_1 = 6$, - x -3, y = -2, y = 4.

$\overline{PP_1} \quad \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$

$\overline{PP_1} = \sqrt{[6, -(-3)]^2 + [(-2) - 4]^2}$

$\overline{PP_1} = \sqrt{(9)^2 + (-6)^2}$

$\overline{PP_1} = \sqrt{81 + 36}$

$\overline{PP_1} = \sqrt{117}$

$\overline{PP_1} = \underline{10.6}$

Ejemplo: Calcular las coordenadas del punto P (x,y) que equidista de A (9,3), B (3,7) y C (-2,6)

Como las distancias del punto P hasta A,B,y C deben ser iguales, tenemos:

$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ sustituyendo de uno por uno en - las fórmulas,

$\overline{PA} = \sqrt{(x-9)^2 + (y - 3)^2}$

$\overline{PB} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 7)^2}$

$\overline{PC} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 6)^2}$

ahora hagamos $\overline{PA} = \overline{PB}$

$$\left(\sqrt{(x-9)^2+(y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-3)+(y-7)^2}\right)^2$$

$$(x-9)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-7)^2$$

$$x^2-18x+81+y^2-6y+9=x^2-6x+9\ y^2-14y+49$$

$$\cancel{x^2}-18x+81+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9}-\cancel{x^2}+6x-\cancel{9}-\cancel{y^2}+14y-49$$

$$-12x+8y+32\ =$$

OBTENIENDO

$-12x+8y+32=0$ sacando partes

$-3x+2y+8\ =0$

A continuación tomamos la distancia $\overline{PA}=\overline{PC}$ efectuamos la misma operación anterior.

$$\left(\sqrt{(x-9)^2+(y-3)^2}\ \right)^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2+y-6)^2}\ \right)^2$$

$$x^2-18x+81+y^2-6y+9=x^2+4x+4+y^2-12y+36$$

$$\cancel{x^2}-18x+81+\cancel{y^2}-6y+9=\cancel{x^2}-4x-4-\cancel{y^2}+12y-36=0$$

22

$$-20x+6y+50=0$$

$$-11X+3y+25=0$$

Formemos el sistema.

$$-3x+2y+8=0$$

$$-11x+3y+25=0$$

Y resolvamos para encontrar x e y.

$$(-3x+2y+8=0)\ (3) \qquad -9x\ +\cancel{6y}=24=0$$

$$(-11x+3y+25=0)\ (-2) \qquad +22x-\cancel{6y}-50-0$$

$$13x-0\ -26=0$$

$$13x-26=0 \qquad -3\ (2)+2y+8=0$$

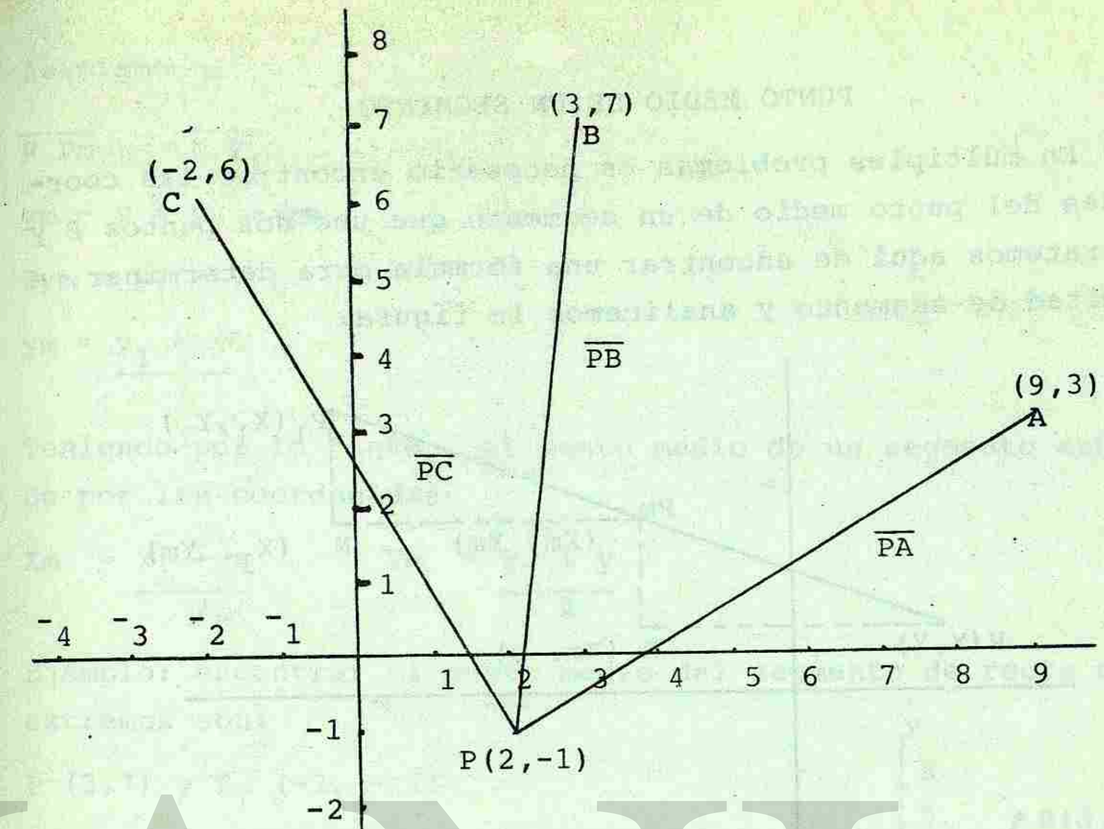
$$x=26/13 \qquad -6\ +2y+8=0$$

$$x=2 \qquad 2y+2=0$$

$$y=-2/2$$

$$y=-1$$

Las coordenadas del punto P. (x,y) son (2, - 1) veamos la figura en la siguiente página.



$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

Ejemplo: Determine si los puntos A(3,7) B(5,5), C($\bar{2}$,0) son - los vértices de un triángulo equilatero.

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-3)^2+[\ (\bar{5})+(7)^2\ ]}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{148}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{[(\bar{2})-3]^2+(0-7)^2}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{74}$$

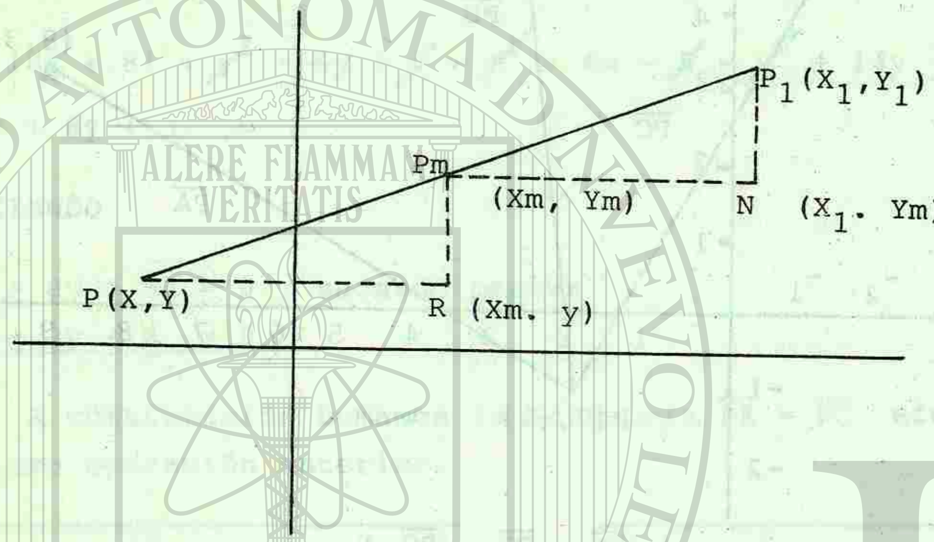
$$\overline{BC}=\sqrt{[(-2)-5]^2+(0+5)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{74}$$

RESPUESTA: Un triángulo equilatero debe tener sus tres lados iguales por lo tanto este no es triángulo equilatero.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

En múltiples problemas es necesario encontrar las coordenadas del punto medio de un segmento que une dos puntos P y P_1, tratemos aquí de encontrar una fórmula para determinar esa mitad de segmento y analicemos la figura.



Supongamos que P y P_1, son extremos de un segmento de recta que Pm es el punto medio, formemos dos triángulos rectángulos y encontremos la coordenada de R y N: y así tendremos.

$\overline{P.\ R} = \overline{PmN}$ y $\overline{P.Pm} = \overline{Pm\ P_1}$

y ahora.

$\overline{P.R} = xm - x$

$\overline{PmN} = x_1 - xm$

$xm - x = x_1 - xm$

$2xm = x_1 + x$

$\therefore\ xm = \dfrac{x_1 + x}{2}$

Asimismo

$\overline{R\ Pm} = \overline{N\ P_1}$

$ym - y = y_1 - ym$

$2ym = y_1 + y$

$ym = \dfrac{y_1 + y}{2}$

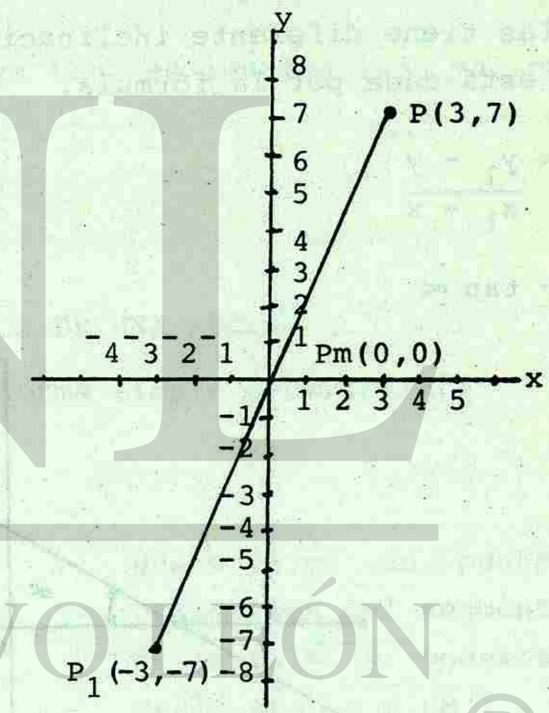
Teniendo por lo tanto el punto medio de un segmento está dado por las coordenadas.

$Xm = \dfrac{x_1 + x}{2}$ $\qquad$ $Ym = \dfrac{y_1 + y}{2}$

Ejemplo: encontrar el punto medio del segmento de recta cuyos extremos son:

P (3,7) y P_1 (-3, - 7)

Fórmula: Pm(Xm,Ym)



$Xm = \dfrac{3 + (-3)}{2}$ $\qquad$ $Ym = \dfrac{7 + (-7)}{2}$

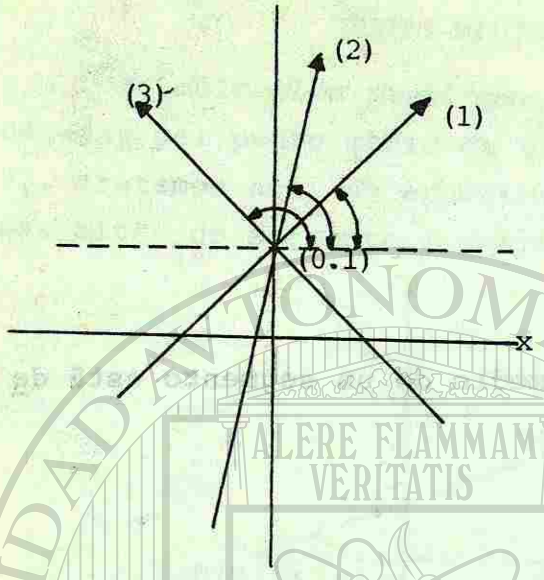
Xm = 0 $\qquad$ Ym = 0

RESULTADO (0,0)

PENDIENTE DE LA RECTA

Se entiende por pendiente de una recta el ángulo formado por la inclinación de dicha recta con la dirección positiva del eje de las x., (la pendiente es un número, la inclinación es un ángulo).

Grafiquemos las siguientes rectas.



$y = x + 1$ (1)

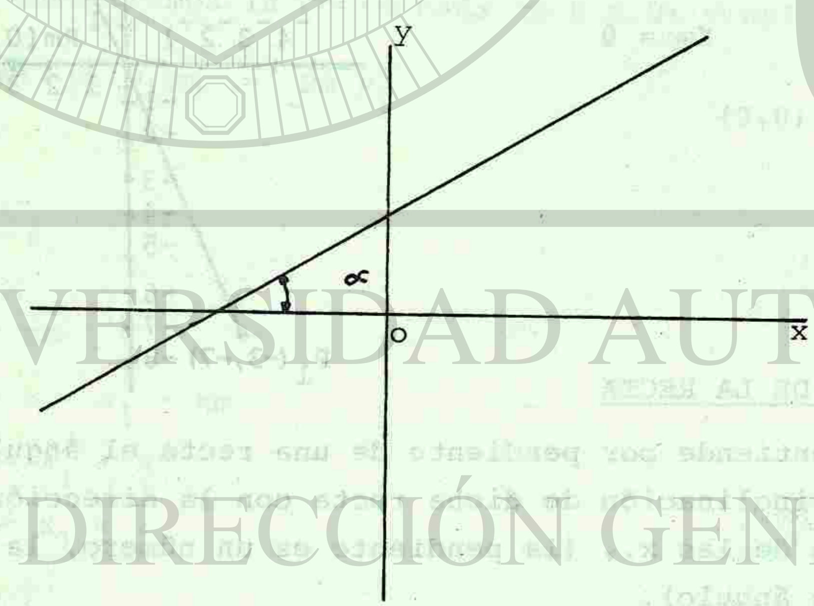
$y = 2x + 1$ (2)

$y = -x + 1$ (3)

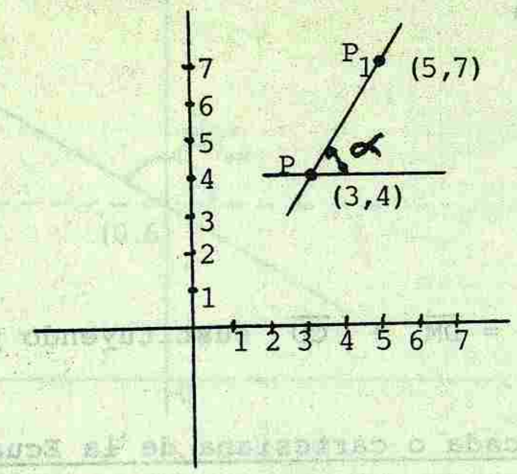
Todas pasan por el mismo punto (0,1) pero cada una de ellas tiene diferente inclinación, la pendiente m de una recta está dada por la fórmula.

$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$m = \tan \alpha$$



Ejemplos: Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos P (3,4) y P_1 (5,7).



$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$m = \frac{7 - 4}{5 - 3} = 3/2$$

$$m = 1.5$$

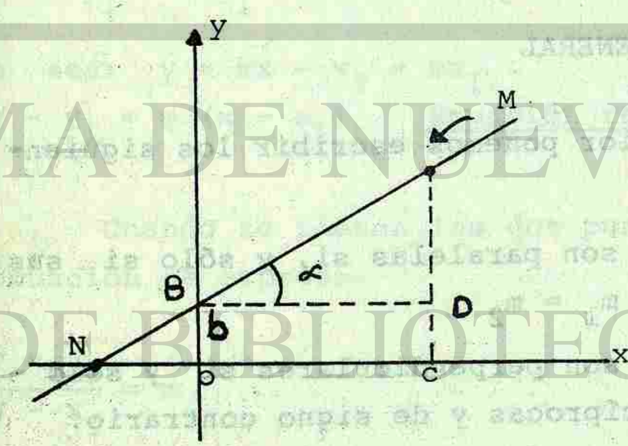
Ahora buscamos el $\measuredangle$ cuya tan. es igual a 1.5 ya que $m = \tan \alpha$

$\therefore \quad \measuredangle = 56.30°$

$m = 1.5$

DIFERENTES FORMAS DE LA ECUACION DE UNA RECTA.

Ecuación de la recta en forma simple o cartesiana



Sea M (x,y) un punto cualquiera del segmento de recta M. N; podemos decir que $y = \overline{CM}$

$\overline{CM} = \overline{CD} + \overline{DM}$

ó

$\overline{CD} = \overline{OB} = \underline{b}$

También podemos decir que

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{BD}} = \tan\alpha$$

y, como $\tan\alpha = m$

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{BD}} = m$$

como $\overline{BD} = x$

entonces $\overline{DM} = mx$

O sea que teniendo $y = \overline{DM} + \overline{CD}$ **sustituyendo por sus** equivalentes tenemos:

$y = mx + b$ **Forma simplificada o cartesiana de la Ecuación de una recta.**
Siendo b la ordenada en el origen.

Otra forma de la ecuación, la **podemos derivar de la misma** sustituyendo los valores de $m = \frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

tenemos entonces

$$y = -\frac{A}{B}x + \left(\frac{C}{B}\right)$$

ordenando y simplificando

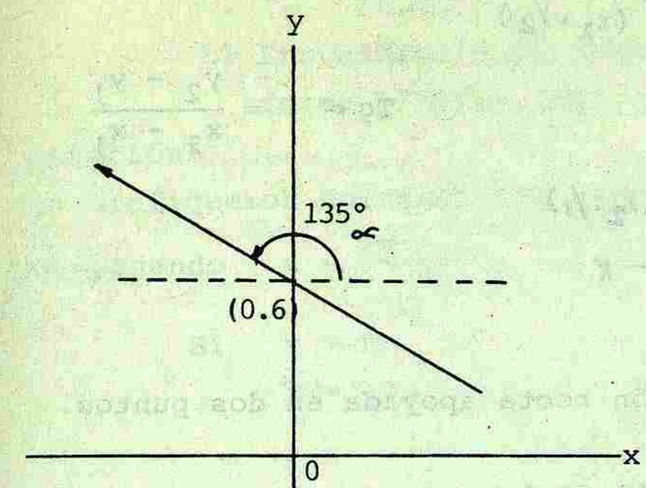
$Ax + By + C = 0$ **FORMA GENERAL**

Debido a todo lo anterior **podemos escribir los siguientes** teoremas:

1.- Dos rectas no verticales son paralelas si, y sólo si sus pendientes son iguales. $m_1 = m_2$

2.- Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{ó} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$



$\tan 135° = -1$
$m = \tan\alpha$
$m = -1$
$\therefore b = 6$
ec. $y = -x + 6$

ECUACION DE LA RECTA APOYADA EN UN PUNTO.

Encontraremos la ecuación de una recta con **pendiente** m que pasa por el punto P_1 (x_1, y_1).

La ecuación pedida es de la forma simplificada o sea - $y = mx + b$.

Como P_1, es un punto de la recta se tiene:

$y_1 = mx_1 + b$

$b = y_1 - mx_1$

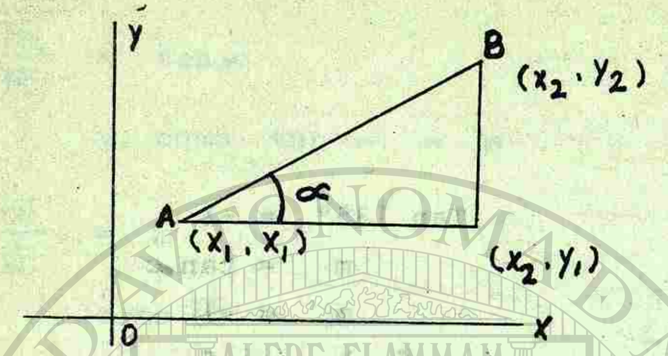
o sea: $y = mx + y_1 - mx_1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación recta apoyada en un punto (Fórmula)

Cuando se tienen los dos puntos A $(x_1 y_1)$, B $(x_2 - y_2)$ la ecuación se expresa:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Como m = tg α ver figura.



$$Tg\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$ Ecuación recta apoyada en dos puntos.

Ejemplo: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

A (2,9) y B (-2, 3)

tenemos la fórmula $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$y_1 = 9$

$y_2 = 3$

$x_1 = 2$

$x_2 = 1$

$$\frac{y - 9}{x - 2} = \frac{9 - 3}{2 + 1}$$

$$\frac{y - 9}{x - 2} = \frac{6}{3}$$

$$\left(\frac{y - 9}{x - 2}\right) = (2)$$

$$y - 9 = 2x - 4$$

$$\underline{y = 2x + 5}$$

Es la ecuación de la recta que pasa por A (2,9) B (-1,3).

Encontremos ahora la gráfica a partir de una ecuación en forma general; así como su pendiente y las coordenadas del origen.

Ejemplo a) Construya la recta cuya ecuación es:

$3x - 2y + 6 = 0$

b) Encuentre la pendiente y además representela en forma simplificada.

Solución:

a) Grafiquemos buscando los puntos sobre los ejes coordenados.

despejando $x = \frac{2y - 6}{3}$ $\qquad - y = \frac{3x - 6}{2}$

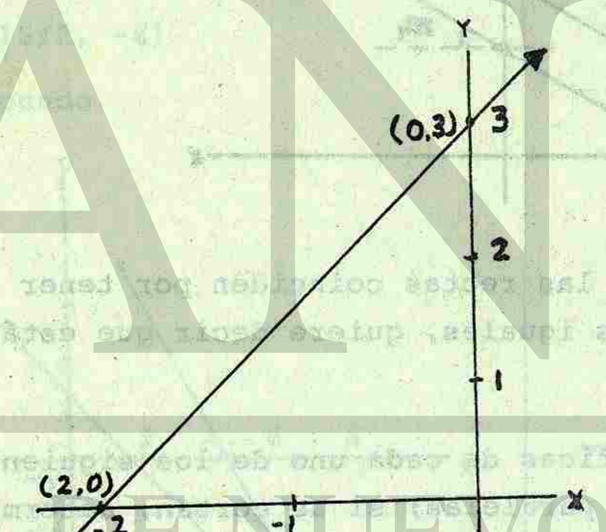
Si $y = 0$ $\qquad y = \frac{3x + 6}{2}$

$x = -2$

Si $x = 0$

$y = 3$

1er. Punto (-2,0) abscisa en el origen. Ordenada en el origen (0,3)



b) Despejando y de la ecuación dada encontraras la forma común

$y = \frac{3x + 6}{2}$

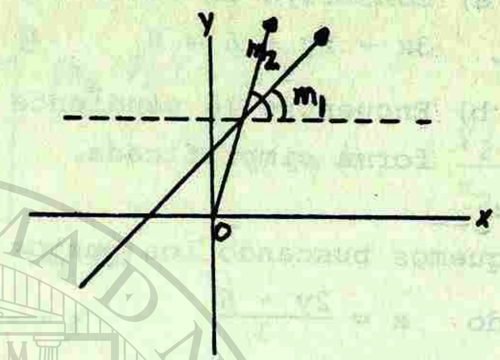
$y = 3/2\ x + 3$ de donde la pendiente es $= 3/2$ y ordenada en el origen = 3

Conociendo las pendientes de dos o más rectas en un mismo eje, podemos saber si estas son paralelas perpendiculares o superpuestas.

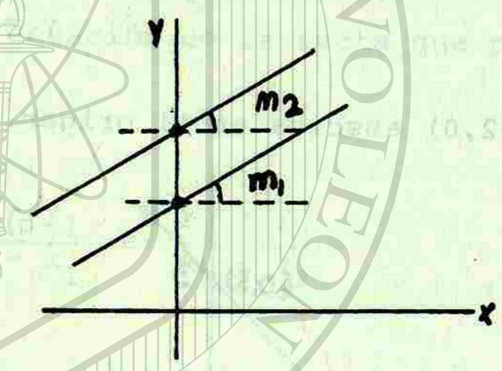
Hagamos las siguientes consideraciones:

1.- Si $m_1 \neq m_2$

las rectas se cortan.



2.- Si $M_1 = m_2$ y las ordenadas en el origen b_1 y b_2 son diferentes y las rectas son paralelas.



3.- Si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ las rectas coinciden por tener pendientes y coordenadas iguales, quiere decir que están superpuestas.

Ejemplo: Diga si las gráficas de cada uno de los siguientes sistemas se cortan o son paralelas; si se cortan, determine el punto de intersección de cada uno de los ejercicios.

1) $4x + 3y = 12$

$12x + 5y = 60$

despejando y en ambos

$y = -4/3x + 4$

$y = -12/5x + 12$

$m_1 = -4/3$

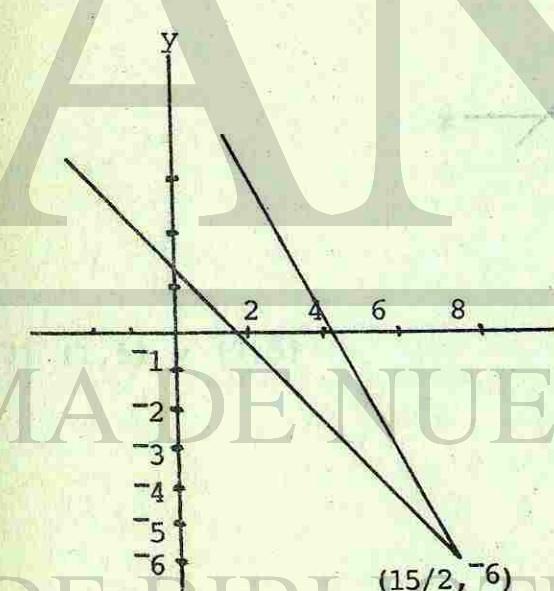
$m_2 = -12/5$

$m_1 \neq m_2$ las rectas se cortan el punto de intersección se obtiene con el método de suma y recta o sustitución (se deja al alumno la comprobación).

El resultado es:

$x = 15/2 \quad y = -6$ por lo que el punto de intersección es $P = (15/2, -6)$

Graficando.



2) $4x + 3y = 12$

$8x + 6y = 18$

despejando y en ambos

$y = -4/3x + 4$

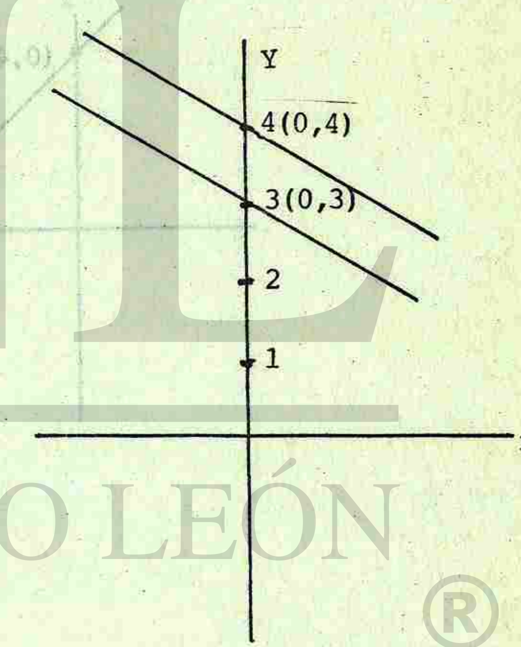
$y = -4/3x + 3$

$m_1 = -4/3, \; b_1 = 4$

$m_2 = -4/3, \; b_2 = 3$

si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ entonces las rectas son paralelas, no habiendo punto de intersección.

Graficando.



3) $4x + 3y = 12$

$8x + 6y = 24$

despejando y

$y = -4/3x + 4$

$y = -4/3x + 4$

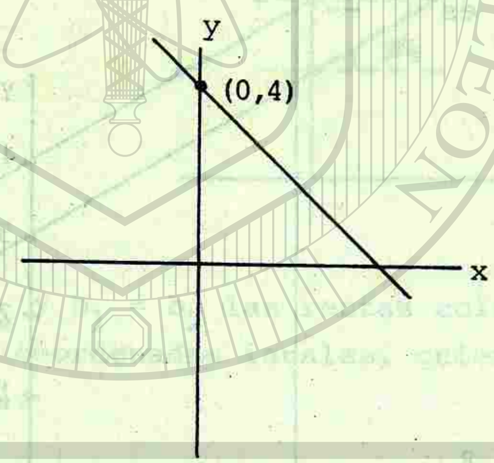
$m_1 = -4/3 \qquad b_1 = 4$

$m_2 = -4/3 \qquad b_2 = 4$

$m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$

las rectas están superpuestas y no tienen punto de intersección.

Graficando.



EJERCICIO

I.- Encuentra la distancia entre las siguientes parejas de punto.

1) $(\bar{3},2)$ y $(5,\bar{8})$

2) $(10,\bar{2})$ y $(\bar{2},\bar{5})$

3) $(1,5)$ y $(3,\bar{5})$

4) $(2,\bar{3})$ y $(3,3)$

5) $(3,4)$ y $(9,11)$

6) $(0,0)$ y $(7,\bar{5})$

II.- Encuentra el perímetro de los siguientes triángulos cuyos -- vertices están dadas por:

1.- $(6,2)$ $(\acute{4},3)$ $(0,1)$ y elabore la figura.

2.- $(0,2)$ $(2,0)$ $(5,\bar{4})$ y elabore la figura.

3.- $(\bar{3},4)$ $(2,\bar{1})$ $(5,3)$ elabore la figura.

III.- Diga si cada uno de los triángulos anteriores es equilatero, isóseles, o escaleno y determine cual de ellas es rectángulo.

IV.- ¿Equidistan de P (6,8) los puntos M (1,5) y N (9,3)? Demuéstrelo y elabore diagrama.

V.- Encuentre las coordenadas P. (x,y) que equidistan de los puntos A (4,3) y B ($\bar{2}$,9).

VI.- Encuentra el punto medio del segmento de recta dado en cada uno de los siguientes ejercicios.

a) P =)5,3) P_1 ($\bar{5}$,$\bar{3}$)

b) $P = (1,3)$ P_1 $(\bar{2},\bar{4})$

c) Siendo P $(1,\bar{9})$ y el punto medio $(\bar{1},\bar{2})$ encontrar las coordenadas del otro extremo.

VII.- Encuentre la pendiente de la recta que pasa en cada uno de - los siguientes pares de puntos. (m y)

a) $(\bar{3},4)$, $(5,4)$

b)= $(3,2)$ $(5,6)$

c)= $(2,\bar{5})$ $(\bar{3},\bar{1})$

VIII.- Demuestra que la recta que pasa por los puntos A $(\bar{3},\bar{4})$ y B (2,7), es paralela a la recta que pasa por C $(1,\bar{9})$ y D (6,2).

En cada uno de los siguientes ejercicios decir si la recta que pasa por los puntos A,B y la que pasa por C y D son paralelas o perpendiculares.

	PUNTOS DE RECTA		PUNTOS RECTA	
	A	B	C	D
a)	(2,0)	$(\bar{3},2)$	(0,3/4)	$(\bar{3}/10,0)$
b)	(1,6)	$(\bar{1},2)$	$(\bar{7},0)$	$(1,\bar{4})$

PUNTOS DE RECTA

	A	B	C	D
c)	(6,2)	(8,1)	(4,9)	(2,5)
d)	(3,0)	(0,2)	(6,0)	(0,4)

PUNTOS RECTA

XI.- En cada uno de los siguientes sistemas determina si las gráficas se cortan, en caso afirmativo encuentre las coordenadas del punto de intersección.

1.- $x + y = 10$
$x - y = 1$

2.- $6x - 3y - 2 = 0$
$2x - y + 1 = 0$

3.- $2x + y = 5$
$x + y = 2$

4.- $x - 2y = 4$
$-2x + 4y = -8$

5.- $3x - 10y = 4$
$4x + 6y = 15$

6.- $5x - 2y = 10$
$3x + y = 17$

C I R C U N F E R E N C I A

" C I R C U N F E R E N C I A "

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

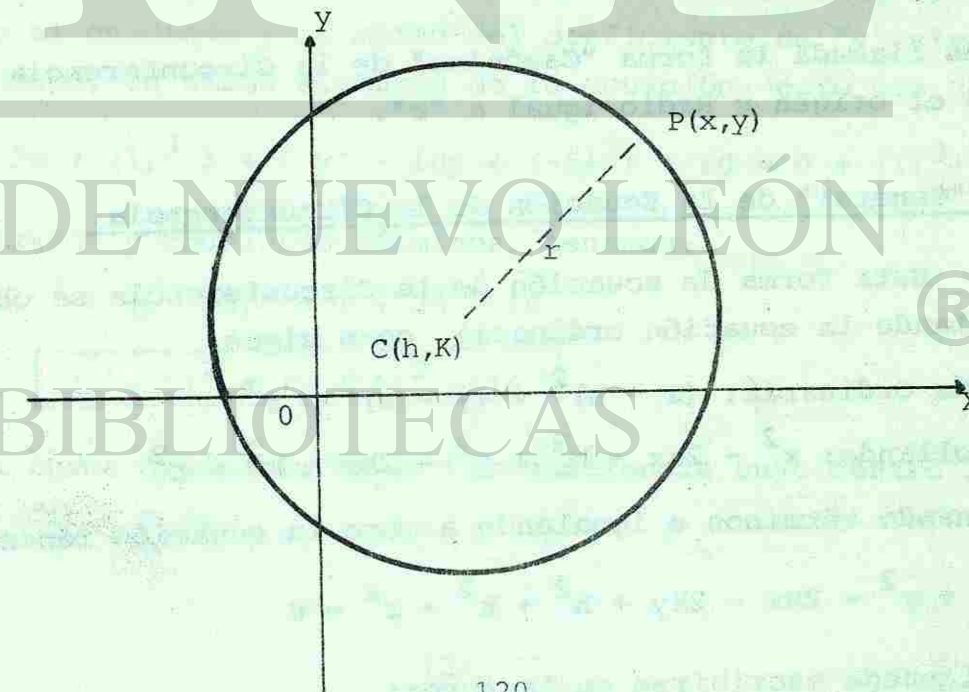
El punto fijo se llama "centro" de la circunferencia, y - la distancia constante se llama Radio (r).

Determinación de la forma ordinaria de la ecuación de la Circunferencia.

Si consideramos un punto P (x,y) que pertenece a una circunferencia cuyo centro es el punto c(h,k), y radio igual a "r" - entonces de acuerdo a la definición dada debe cumplirse que la -- distancia del punto "c" al punto "p" es igual al radio "r" es decir.

$$\boxed{\overline{CP} = r}$$

Luego ilustrando lo anterior mediante una figura y calculando la distancia de los puntos c(h,k) y P(x,y) que debe ser - - igual a la magnitud del radio "r", dará como resultado una ecua-- ción.



De la figura se observa que $\overline{CP} = r$ ó de otra forma

$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$, si eliminamos el radical de la ecuación nos queda:

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

que, es llamada la "Forma Ordinaria" de la ecuación de la circunferencia. Cuyo centro es el punto (h,k) y el Radio igual a "r".

Forma "Canónica" de la Ecuación de la Circunferencia.

Esta forma aparece cuando el centro de la Circunferencia se encuentra en el origen de coordenadas, es decir para el caso particular donde $h = 0$ y $k - 0$, el centro será el punto $(0,0)$.

Aplicando lo anterior a la forma ordinaria, tendremos:

$$(x - o)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

Luego simplificando nos queda:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

que, es llamada la forma "Canónica" de la Circunferencia cuyo centro es el origen y Radio igual a "r".

Forma "General" de la Ecuación de la Circunferencia.

Esta forma de ecuación de la Circunferencia se obtiene desarrollando la ecuación ordinaria, como sigue:

Ecuación Ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Desarrollando: $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

Y ordenando términos e igualando a cero la ecuación tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

La cual puede escribirse en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sí $D = -2h$; $E = -ek$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$

Entonces se concluye que la ecuación de una circunferencia también puede escribirse en la forma siguiente, que es llamada la Forma General de la Circunferencia.

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + ey + f = 0}$$

Los siguientes ejemplos muestran como transformar la ecuación de una circunferencia de su forma general a la forma ordinaria y viceversa.

Ejemplo 1. Expresar la siguiente ecuación de la Circunferencia -- $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$, en su forma ordinaria.

Procedimiento:

a) Reunir cada término cuadrático con su término lineal correspondiente.

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y + 10 = 0$$

b) Completar cuadrados, sumando la mitad del coeficiente de "x" elevado al cuadrado y la mitad del coeficiente de "y" elevado al cuadrado, en ambos miembros de la ecuación, esto nos dá.

$$[\ x^2 + 2x + (1)^2\ ] + [\ y^2 - 10y + (-5)^2] + 10 = 0 + (1)^2 +)-5)^2$$

c) Factorizando y reuniendo términos, tenemos:

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 1 + 25 - 10$$

$$\boxed{(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16}$$

que, es la forma ordinaria de la Circunferencia cuyo centro es: $(-1,5)$ y Radio $r = 4$.

Ejemplo 2. Expresar la siguiente ecuación de la circunferencia.

$3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$, en su forma ordinaria

Solución: En este ejemplo los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser reducidos a la unidad, para esto todos los términos de la ecuación se dividen por 3. Y después se procede igual que, en el ejemplo anterior.

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$[\,x^2 - x + (-\tfrac{1}{2})^2] + [\,y^2 + \tfrac{2}{3}y + (\tfrac{1}{3})^2\,] + \tfrac{1}{3} = 0 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{3} = \frac{9 + 4 - 12}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}}$$

Circunferencia con centro $(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3})$, Radio $= \frac{1}{6}$

Ejemplo 3. Expresar la Circunferencia:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ en su Forma General.

Solución: Esta transformación consiste en desarrollar los cuadrados en los dos Binomios, trasponiendo el término independiente e igualando a cero.

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0}$$ Forma General

Gráfica de una Circunferencia, convirtiendo su ecaución de la Forma General, a su Forma Ordinaria ó Reducida.

Para determinar la gráfica de una Circunferencia es más conveniente expresarla en la forma ordinaria, porque de esta manera conoceremos el centro (c) y el Radio (r) ilustraremos esto con algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Graficar: $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

Solución: Transformando a la forma ordinaria la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$x^2 + [y^2 - 6y + (-3)^2] + 5 = 0$$

$$x^2 + (y - 3)^2 + 5 = 0 + (-3)^2$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9 - 5$$

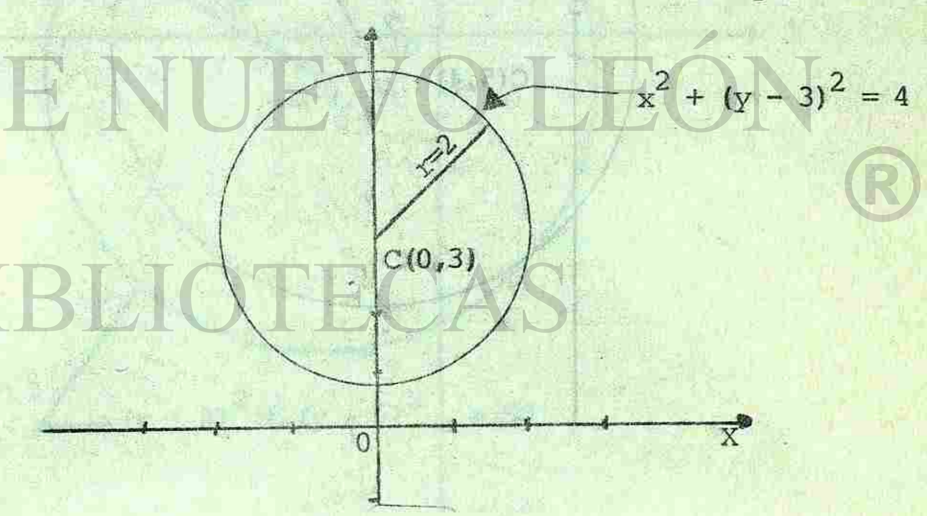
$$\boxed{x^2 + (y - 3)^2 = 4}$$

La forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Indica que: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,\ K = 3;\ C(0,3) \\ r^2 = 4;\ r = 2 \end{array} \right\}$

Luego con el centro (0,3) y el Radio = 2 se procede a Graficar:



Ejemplo 2. Graficar la Circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$$

Solución; Tranformando a la forma ordinaria la ecuación dada:

$$x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 + 8y = 0$$

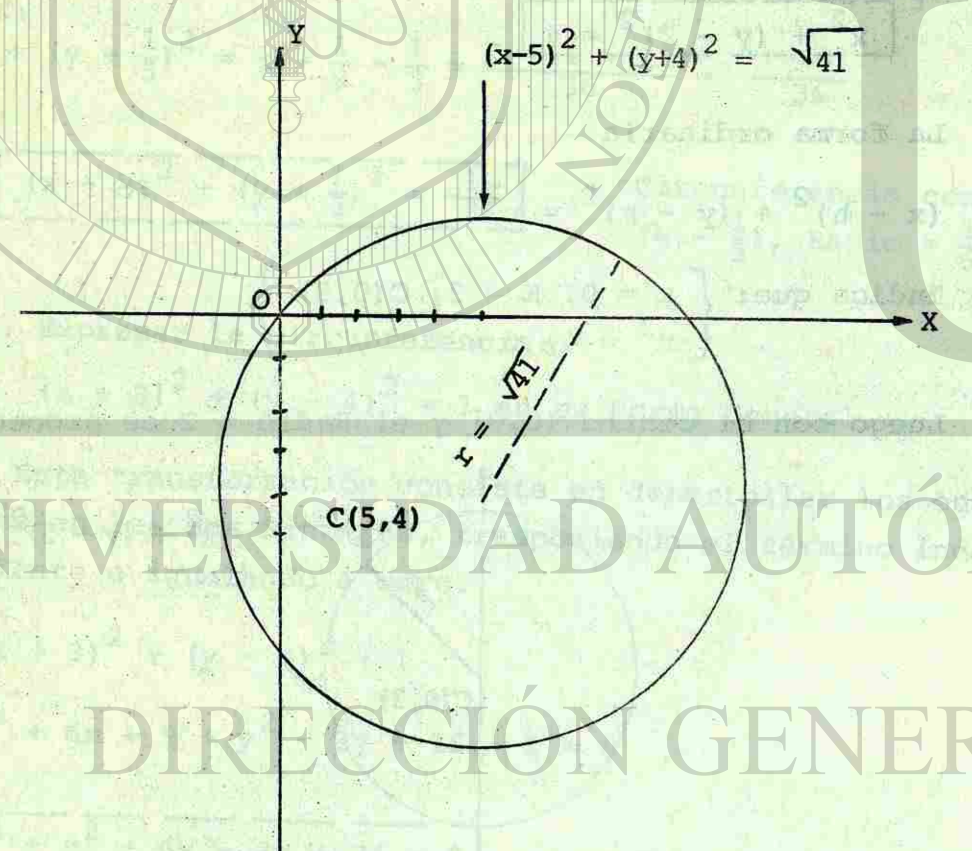
$$[x^2 - 10x + (-5)^2] + [y^2 + 8y + (4)^2] = 0 + (-5)^2 + (4)^2$$

$$\boxed{(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 41}$$

La forma ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Indica que: $\left\{\begin{array}{l} h = 5,\ k = -4;\ C(5,-4) \\ r^2 = 41;\ r = \sqrt{41} \end{array}\right\}$

Luego con el centro $(5,-4)$ y $r = \sqrt{41}$, se procede a graficar:



Ejemplo 3. Graficar la Circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Solución; Tranformando a la forma ordinaria la ecuación dada:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 2y = 40$$

$$[x^2 + 6x + (3)^2] + [y^2 + 2y + (1)^2] = 40 + (3)^2 + (1)^2$$

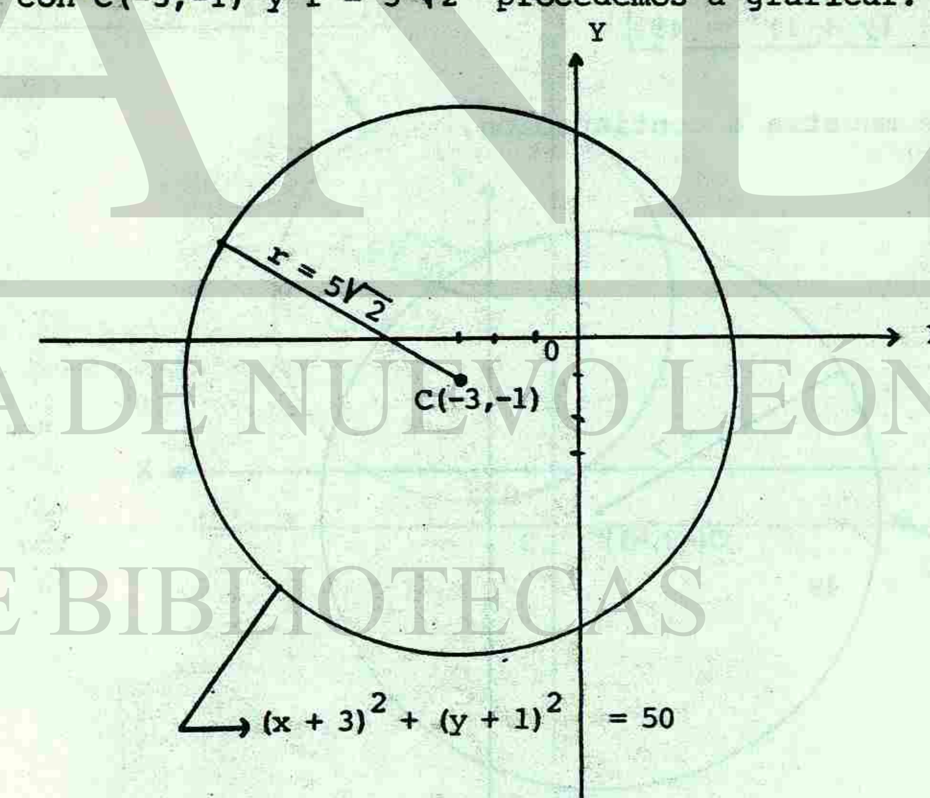
$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 40 + 9 + 1$$

$$\boxed{(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 50}$$

La forma ordinaria: $(x - h^2)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Indica que: $\left\{\begin{array}{l} h = -3,\ k = -1;\ C(-3,-1) \\ r^2 = 50;\ r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{array}\right\}$

Luego con $C(-3,-1)$ y $r = 5\sqrt{2}$ procedemos a graficar.



Determinación de las Distintas Formas de la Ecuación de la Circunferencia, dados sus Elementos.

La ecuación de una Circunferencia puede determinarse a partir de su centro y su Radio oó también de alguna otra información que permita conocer estos dos elementos importantes; los siguientes ejemplos tratan de los casos más comúnes.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la Circunferencia de centro C(-3,-1) y Radio 7.

$C(-3,-1)$, $r = 7$

$C(h,k)$ $r^2 = (7)^2$

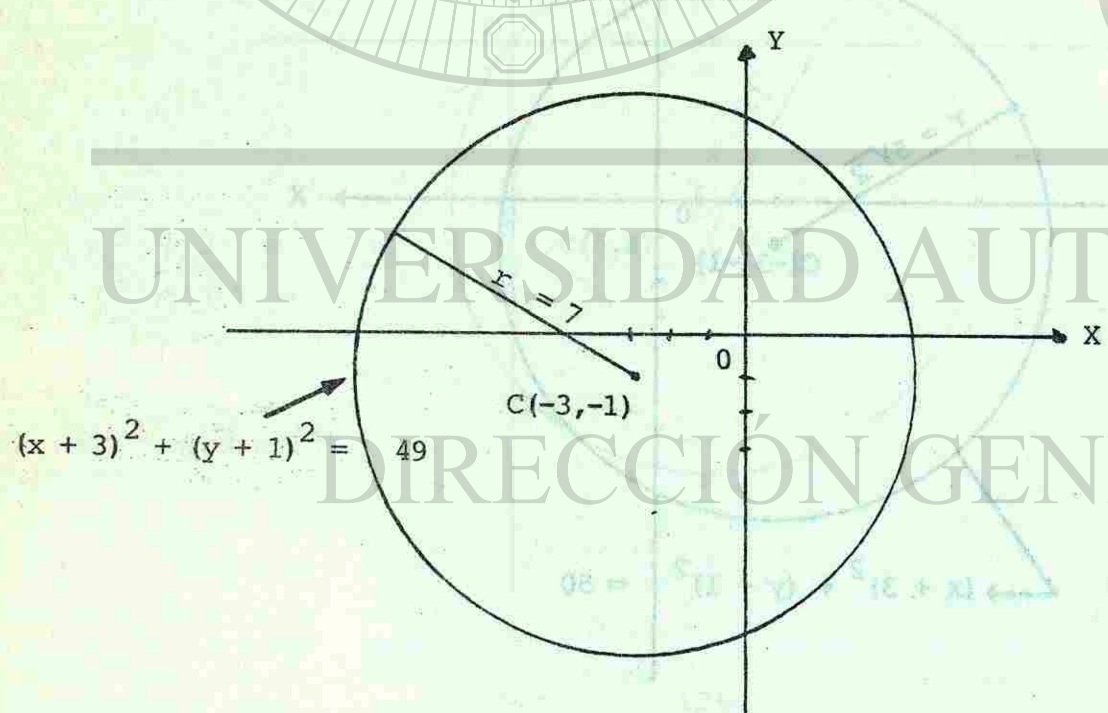
Substituyendo en la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Nos queda:

$$\boxed{(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 49}$$

La Gráfica se muestra a continuación.



Ejemplo 2. Los extremos de un diámetro de una Circunferencia son los puntos A(2,3) y B(-4,5). Hallar la ecuación de la curva.

Solución: La distancia $\overline{AB}$ es la longitud del diámetro entonces:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Luego el radio $r = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$$\boxed{r = \sqrt{10}}$$

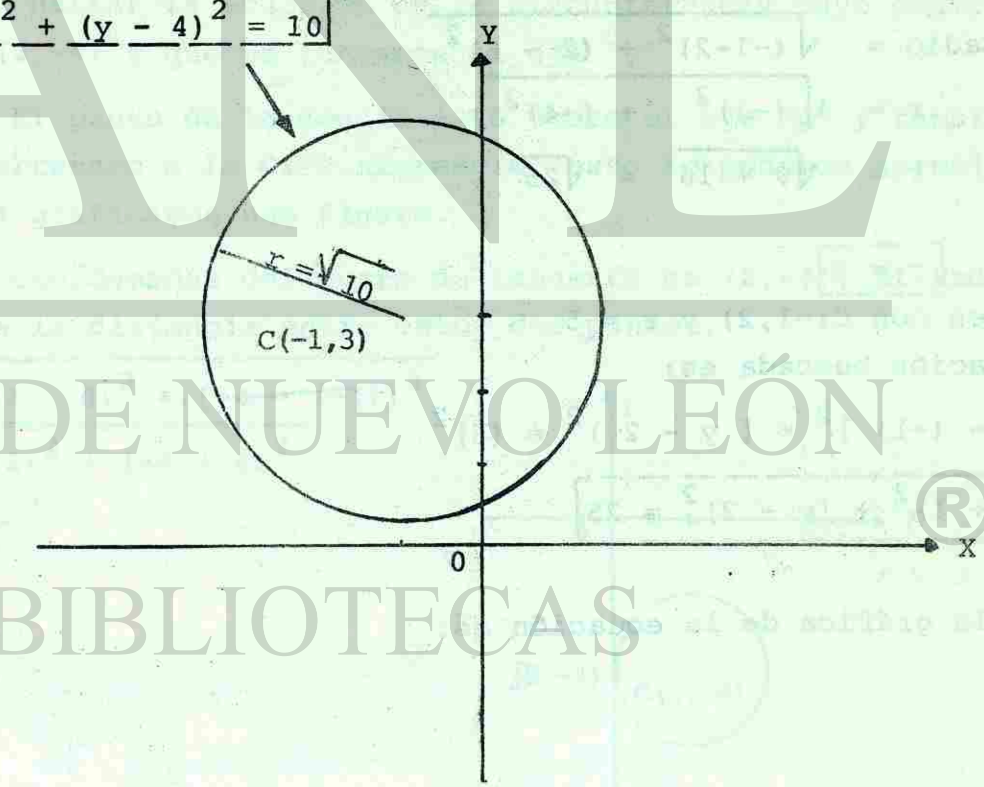
El centro es el punto medio de $\overline{AB}$ que es el diámetro.

$$Xm = \frac{x_1 + y_2}{2} = \frac{2-4}{2} \quad \frac{-2}{2} = -1 \; ; \; Ym = \frac{Y^1 + Y^2}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Entonces: $C(-4,4)$ y $r = \sqrt{10}$ donde la ecuación buscada es:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (\cancel{\sqrt{}}10)^{\cancel{2}} = 10$$

$$\boxed{(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10}$$



Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la Circunferencia con centro en el origen y su Radio igual a 3.

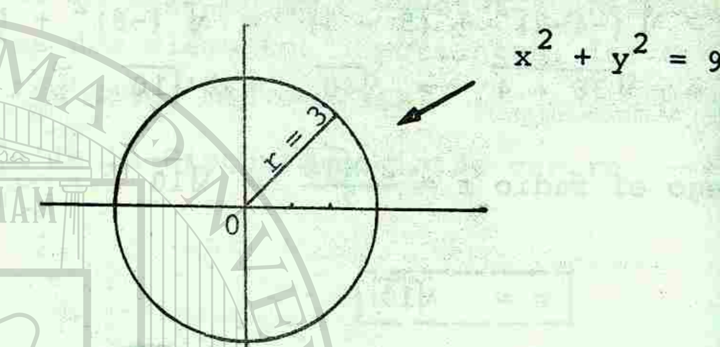
Solución: Como el centro es el punto (0,0) y r = 3 la ecuación -- tiene forma:

$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = (3)^2$

$\boxed{x^2 + y^2 = 9}$

Donde la gráfica es:



Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por el punto A(2,6) y su centro es el punto C(-1,2).

Solución: El Radio de la Circunferencia puede calcularse encontrando la distancia que hay entre los puntos "A" y "C".

$\overline{AC}$ = Radio = $\sqrt{(-1-2)^2 + (2-6)^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$

$\boxed{r = 5}$

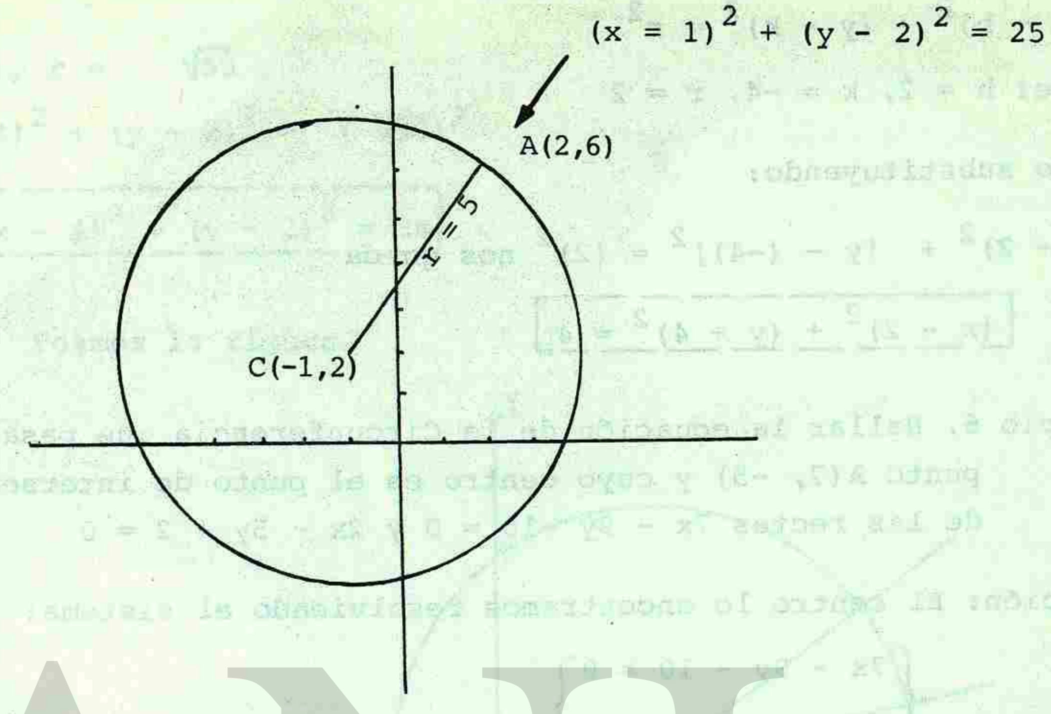
Entonces con C(-1,2) y r = 5

La ecuación buscada es:

$[\,x - (-1)\,]^2 + [\,y - 2\,)^2 = (5)^2$

$\boxed{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25}$

Luego la gráfica de la ecuación es:



Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la Circunferencia cuyo centro es C(2,-4) y que es tangente al eje "y".

Solución: El punto de tangencia está sobre el eje "y" y también - pertenece a la Circunferencia, esto lo podemos apreciar - si graficamos una figura.

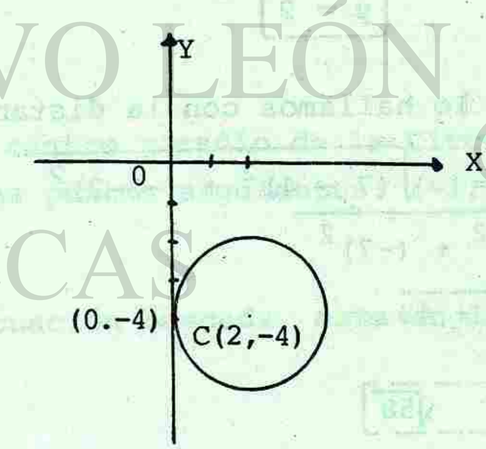
Donde las coordenadas del punto de tangente es (0,-4), El Radio - es igual a la distancia entre estos dos puntos.

$r = \sqrt{(2-0)^2 + [-4-(-4)]^2}$

$r = \sqrt{(2)^2 + (-4+4)^2}$

$r = \sqrt{4} = 2$

$\boxed{r = 2}$



La Ecuación de la Circunferencia es de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde: $h = 2$, $k = -4$, $r = 2$

Luego substituyendo:

$(x - 2)^2 + [y - (-4)]^2 = (2)^2$ nos queda

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4}$$

Ejemplo 6. Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por el punto A(7, -5) y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$

Solución: El centro lo encontramos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 7x - 9y - 10 = 0 \\ 2x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$(-2)\ [7x - 9y - 10 = 0]$$
$$(7)\ [2x - 5y + 2 = 0]$$

$$\begin{array}{r} -14x + 18y + 20 = 0 \\ \cancel{14x} - 35y + 14 = 0 \\ \hline -17y + 34 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$7x - 9(2) - 10 = 0$$
$$7x - 18 - 10 = 0$$
$$7x = 28$$
$$\boxed{x = 4}$$

Entonces el centro es:

C(4,2)

El Radio lo hallamos con la distancia de los puntos $\overline{AC}$.

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-5-2)^2}$$
$$r = \sqrt{3^2 + (-7)^2}$$
$$r = \sqrt{9 + 49}$$
$$\boxed{r = \sqrt{58}}$$

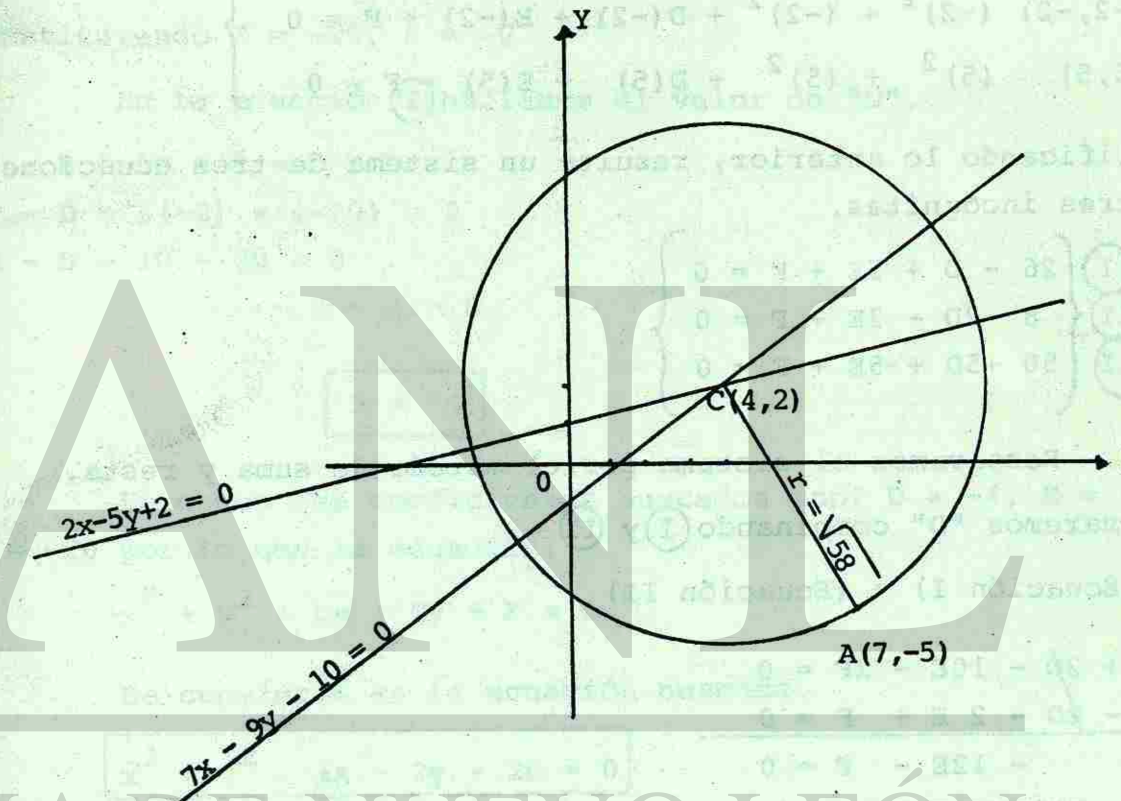
La Ecuación de la Circunferencia se encuentra con:

C(4,2), $r = \sqrt{58}$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{58})^2$$

$$\boxed{(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 58}$$

Veamos la figura.



Ejemplo 7. Hallar la ecuación, centro y radio de la Circunferencia que pasa por lostres puntos siguientes: (-1,5), (-2-2), (5,5).

Solución: Supondremos que la ecuación buscada, esta en la forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + ey + F = 0$$

En donde los coeficientes D, E y F deben ser determinados.

Luego, como los tres puntos pertenecen a la Circunferencia deben- satisfacer la ecuación anterior.

De acuerdo con esto, tendremos tres ecuaciones al substituir los valores de las variables en la ecuación es decir:

$$\begin{cases} (-1,5) & (-1)^2 + (5)^2 + D(-1) + E(5) + F = 0 \\ (-2,-2) & (-2)^2 + (-2)^2 + D(-2) + E(-2) + F = 0 \\ (5,5) & (5)^2 + (5)^2 + D(5) + E(5) + F = 0 \end{cases}$$

Simplificando lo anterior, resulta un sistema de tres ecuaciones- con tres incógnitas.

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \begin{cases} 26 - D + 5E + F = 0 \\ 8 - 2D - 2E + F = 0 \\ 50 + 5D + 5E + F = 0 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de suma y resta.

Eliminaremos "D" combinando I y II

(-2) (Ecuación I) + (Ecuación II)

$$\begin{array}{r} -52 + \cancel{2D} - 10E - 2F = 0 \\ 8 - \cancel{2D} - 2E + F = 0 \\ \hline -44 \quad - 12E - F = 0 \end{array}$$

$$\boxed{-12E - F = 44} \quad \text{A}$$

Eliminaremos "D" combinando II y III

(Ecuación II) (5) + (Ecuación III) (2)

$$\begin{array}{r} 40 - \cancel{10D} - \cancel{10E} + 5F = 0 \\ 100 + \cancel{10D} + \cancel{10E} + 2F = 0 \\ \hline 140 \quad + 7F = 0 \\ 7F = -140 \end{array}$$

$$\boxed{F = -20}$$

Substituyendo el valor.

F = -20 en la ecuación A

$$-12E - F = 44$$
$$-12E - (-20) = 44$$
$$-12E + 20 = 44$$
$$-12E = 24$$

$$\boxed{E = -2}$$

Substituyendo F = -20, E = -2

En la ecuación I hallamos el valor de "D".

$$26 - D + 5E + F = 0$$
$$26 - D + 5(-2) + (-20) = 0$$
$$26 - D - 10 - 20 = 0$$
$$-D - 4 = 0$$

$$\boxed{D = -4}$$

Entonces los coeficientes buscados son: D = -4, E = -2, - F = -20 por lo que la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se convierte en la ecuación buscada.

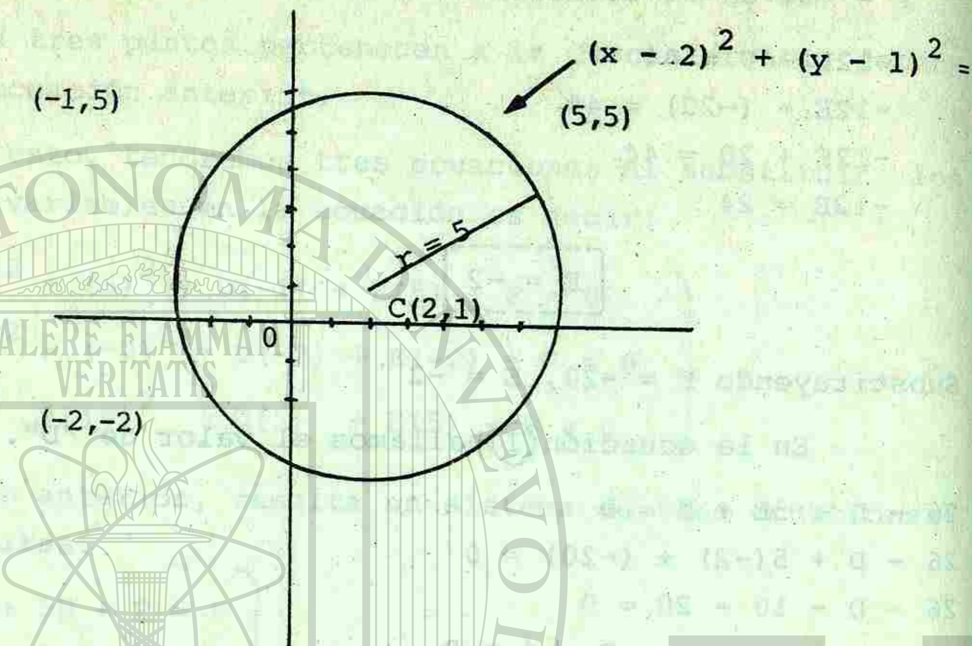
$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0}$$

Finalmente como se piede el centro y el Radio, la ecuación se convierte a la forma ordinaria.

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$
$$[x^2 - 4x + (-2)^2] + [y^2 - 2y + (-1)^2] = 20 + (-2)^2 + (-1)^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 + 4 + 1$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25} \quad \text{Donde } C(2,1) \text{ y } r = 5.$$

La figura de este problema se muestra a continuación.



EJERCICIO I

Encuentre en cada uno de los ejercicios 1 al 8 la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas y trazarla figura correspondiente.

1) Centro (3,-2) y Radio 4

2) Centro (-5,2) y Radio 5

3) Centro ($\frac{1}{2}$, - 3/2) y Radio 2

4) Centro (1/3, 0) y Radio 3

5) Centro en el origen y que pase por P(-3,5)

6) Centro en C(-4,6) y que pase por P(1,2)

7) Centro en C(-4,2) y es tangente al eje "x".

8) Centro en C(3,-5) y es tangente al eje "y"

9) Hallar la ecuación de la circunferencia donde los extremos de un diámetro son: A(4,-3) y B(-2,7).

10) Hallar la ecuación de la Circunferencia en la cual los puntos $A(3,2)$ y $B(-1,6)$ son extremos de uno de los diámetros.

11) Hallar la ecuación de la Circunferencia de Radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las Rectas $3x - 2y = 24 = 0$ y $2x + 7y + 9 = 0$

12) Una cuerda de la Circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es: $x - 7y + 25 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

13) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje "x" y que pasa por los dos puntos $A(1,3)$ y $B(4,6)$.

14) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre el eje "y" y que pasa por los puntos: A (2,2) y B(6,4).

15) Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro es: C(6,-8)

E J E R C I C I O II

Determine el centro, el Radio y la gráfica de cada una de las siguientes Circunferencias, de los ejercicios del 1 al 10.

1) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 14x + 46 = 0$

3) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

4) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

5) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

6) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

7) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$

8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

9) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

10) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$

11) Hallar el área del círculo cuya ecuación es:
$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$

12) Hallar la longitud de la Circunferencia cuya ecuación es:
$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$

13) Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por los puntos A(1,1), B(1,-1) y C(2,0).

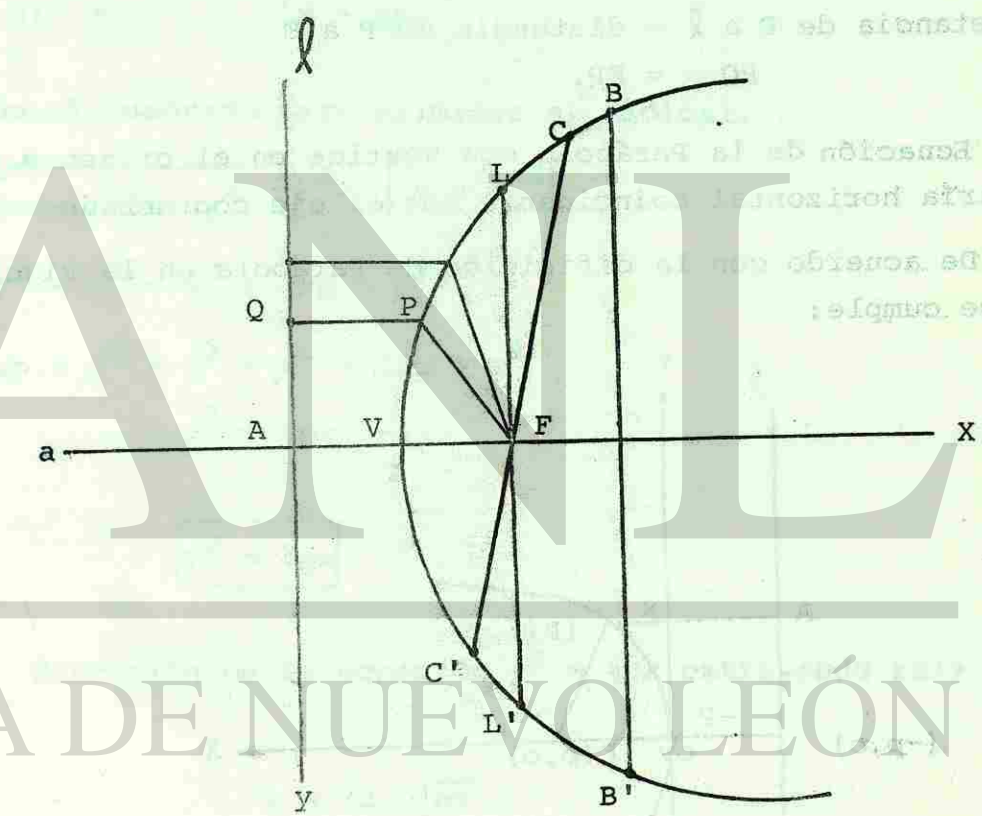
14) Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por los puntos A(0,0), B(3,6), (7,0).

P A R A B O L A

" LA PARABOLA"

Definición: Una Parábola es el lugar geométrico de un punto que - mueve en un plano, de tal manera, que su distancia da una Recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su -- distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la Recta.

El punto fijo se llama "Foco" y la recta fija se llama -- Directriz" de la Parábola.



Elementos de la Parábola:

F = Foco

V = Vértice de la Parábola y punto medio del segmento $\overline{AF}$.

ℓ = Directriz de la Parábola.

a = Eje de la Parábola ó eje de Simetría. perpendicular a "ℓ" y pasa por el Foco "F".

"A"= Punto de intersección de "a" y "ℓ"

$\overline{BB'}$= Cuerda de la Parábola.

$\overline{CC'}$= Cuerda focal pasa por el Foco.

LL'= Cuerda Focal perpendicular al eje se llama "Lado Recto".

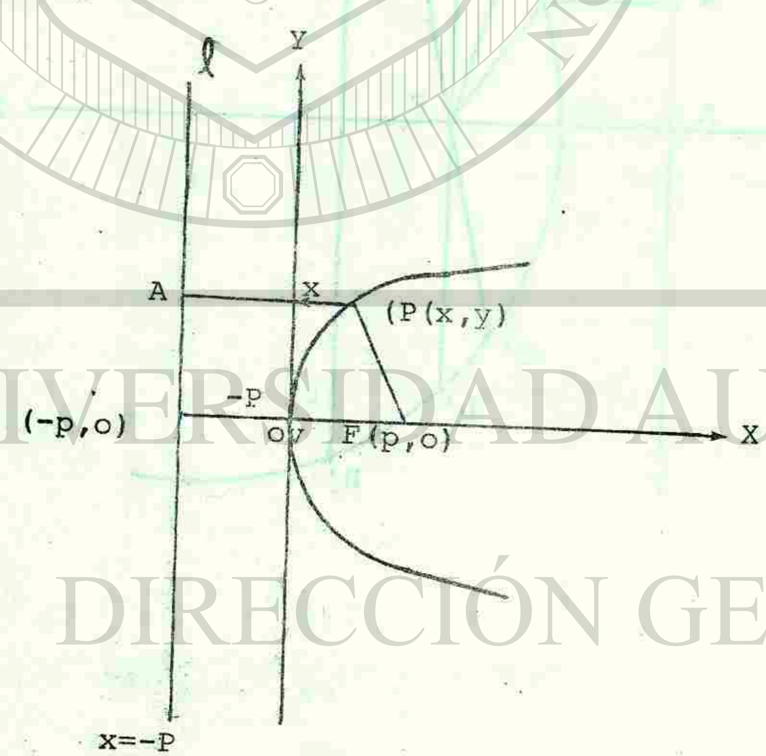
$\overline{FP}$ = Radio Focal o Radio Vector: une un punto cualesquiera de la Parábola con el Foco.

distancia de P a ℓ = distancia de P a F

PQ = FP.

Ecuación de la Parábola con vértice en el origen y eje de simetría horizontal coincidente con el eje coordenado.

De acuerdo con la difinición de Parábola en la siguiente figura se cumple:



$|\overline{FP}| = |\overline{AP}|$

Luego la distancia de "F" a "P" está dada por:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-P)^2 + (y-0)^2}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-P)^2 + y^2}$$

Y la distancia de "P" al punto "A".

$$|\overline{AP}| = x + p$$

Entonces si se igualan las dos expresiones tendremos:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} \qquad |x + p|$$

Elevando al cuadrado para eliminar el Radical.

$$\left(\cancel{\sqrt{}}(x-p)^2 + y^2\right)^{\cancel{2}} = |x + p^2|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$\cancel{x^2} - 2xp + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2}$$

$$y^2 = 4px$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Discusión de la ecuación $y^2 = 4px$ extrayendo raíz cuadrada:

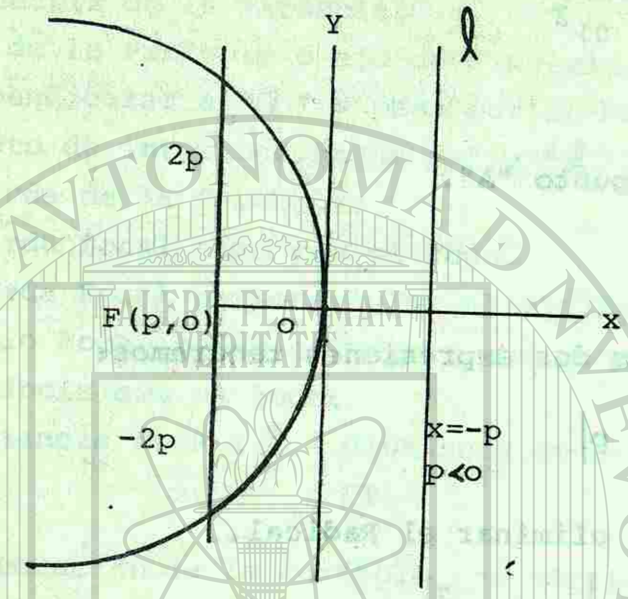
$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

Para los valores reales de "y" y diferentes de cero "p" y "x" deben tener el mismo signo, entonces:

Si $p > o$ "x" tomará solo valores positivos y los negativos quedarán excluídos y toda la curva estará a la derecha del eje "y", y hacia arriba y hacia abajo del eje "x" analogamente, si $p < o$, "x" deberá tomar puros valores negativos y los positivos excluirse. -

En este caso la Parábola aparece a la izquierda del eje "y".

De acuerdo con lo anterior la Figura sería la siguiente:



$y^2 = 4px$

$y = \pm 2\sqrt{px}$

si $x = p$

$y = \pm 2\sqrt{p2}$

$y = \pm 2p$

Long. Lado Recto =

$|2p| + |2p| = |4p|$

Resumiendo lo anterior se concluye que:

La ecuación de una Parábola de vértice en el origen y eje "x", es:

$\boxed{y^2 = 4px}$ lera. ecuación ordinaria de la Parábola

En donde el Foco es el punto (p,o) y la ecuación de la directriz es $x = -p$. si $p > o$ la Parábola se abre hacia la derecha; si $p < o$ la Parábola se abre hacia la izquierda.

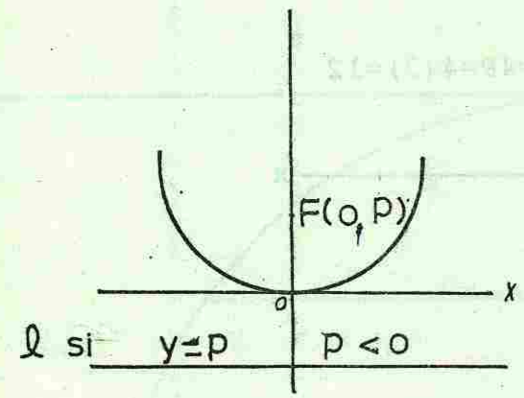
Si el eje de una Parábola coincide con el eje "y", y el vértice está en el origen, su ecuación es:

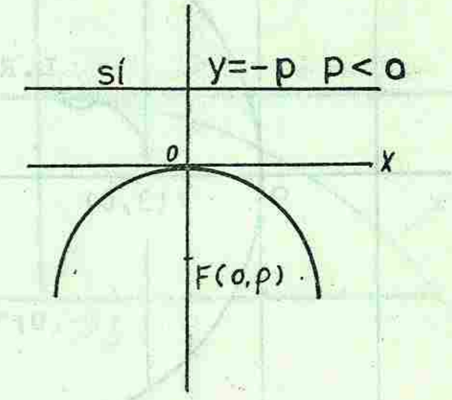
$\boxed{x^2 = 4py}$ lera. ecuación ordinaria de la Parábola

En donde el Foco es el punto (o,p), y la ecuación de la Directriz es $y = -p$. Si $p > o$ la Parábola se abre hacia arriba; si $p < o$ la Parábola se abre hacia abajo.

En cada caso, la longitud del lado recto está dado por el valor absoluto de 4p; que es el coeficiente del término de 1° Grado.

$\boxed{x^2 = 4py}$ $\boxed{x^2 = 4py}$





Determinación de la Ecuación de la Parábola y su Gráfica a partir de ciertos datos dados.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice es el origen y Foco el punto (3,0).

Solución: Vértice: (0,0)

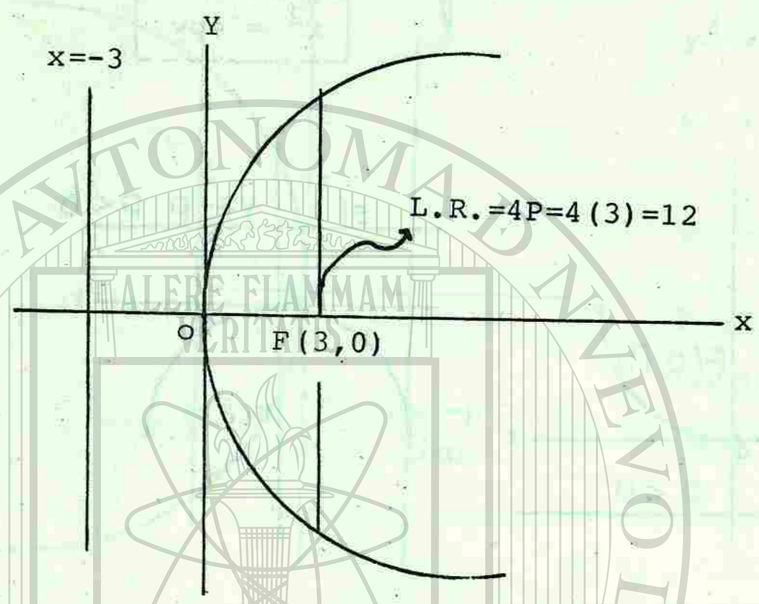
Foco ; (p,o) = (3,0)

Como el valor de p = 3, es mayor que cero. La curva se abre hacia la derecha y es de la forma: $y^2 = 4px$

Luego la Directriz es: $x = -p \longrightarrow x = -3$

Entonces la ecuación será: $y^2 = 4(3)x$

$$\boxed{y^2 = 12x}$$



Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice está en el origen y la Directriz es la recta $y - 5 = 0$

Solución: La Directriz $y = 5$ muestra que la curva se abre hacia - abajo y la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Entonces: Vértice $(0,0)$

Directriz $y = -p$

$$5 = -p$$

$$\boxed{p = -5}$$

Luego el Foco será: $(0,-5)$

La longitud del lado recto = $4p$

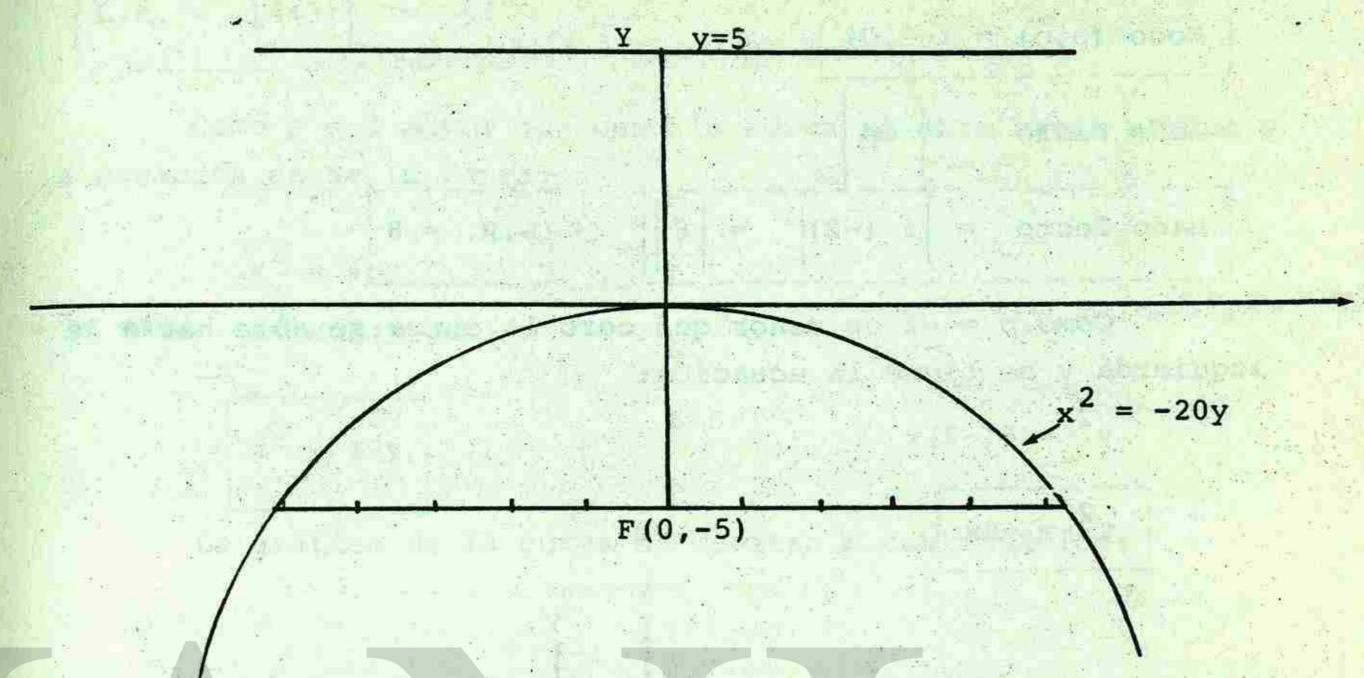
L.R. = $4\ (-5) = 20$

Ecuación de la Parábola:

$$x^2 = 4\ (-5)y$$

$$\boxed{x^2 = -20y}$$

Donde la gráfica de la curva se muestra a continuación:



Ejemplo 3. Una Parábola cuyo vértice esta en el origen y cuyo eje coincide con el eje "x" para por el punto $(-2,4)$. Hallar- la ecuación de la Parábola, las coordenadas del Foco, la ecuación de la Directriz, y la longitud de su lado recto.

Solución: Como el eje de la Elipse es horizontal la ecuación es - la forma: $y^2 = 4px$

El punto $(-2,4)$ pertenece a la curva, entonces:

$$(4)^2 = 4p(-2)$$

$$16 = -8p$$

$$\boxed{p = -2}$$

La Directriz es: $x = -p$

$$x = -(-2)$$

$$x = 2$$

Ecuación de la Directriz: $x - 2 = 0$

Foco $(p,0) = (-2,0)$

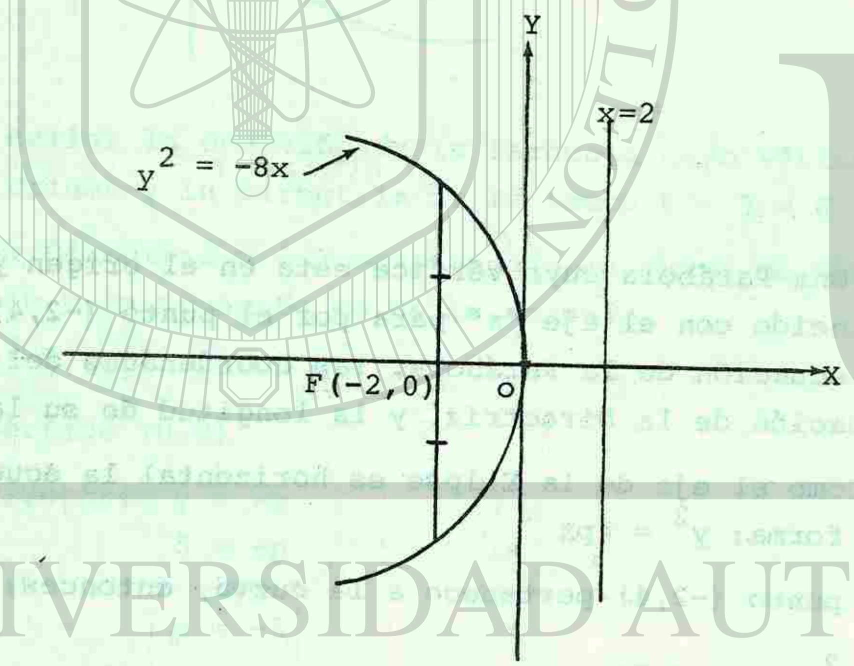
Lado Recto $= |4p|$

Lado Recto $= |4(-2)| = |8|$ L.R. $= 8$

Como $p = -2$ es menor que cero la curva se abre hacia la izquierda y se tiene la ecuación:

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$\boxed{y^2 = -8x}$$



Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la Parábola que tiene el Foco $F(0,3)$ y cuyo vértice esta en el origen y sabiendo que su eje coincide con el eje de las ordenadas.

Solución: El Foco $F(o,p) = F(0,3)$ por lo que $\boxed{p = 3}$

La Directriz: $y = -p$

$$\boxed{y = -3}$$

El lado recto $= |4p|$

$$\boxed{L.R. = |4(3)| = 12}$$

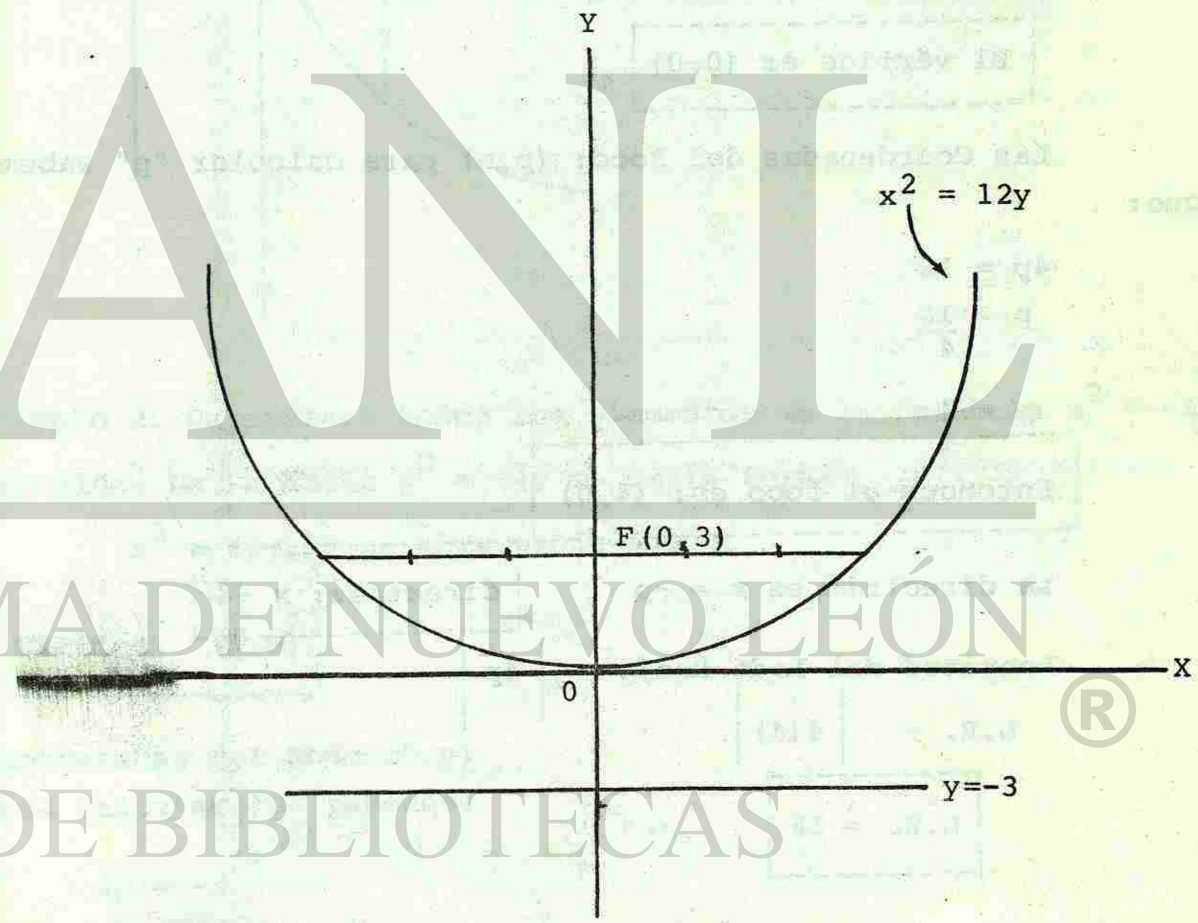
Como $p = 3$ mayor que cero la curva se abre hacia arriba y la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4(3)y$$

$$\boxed{x^2 = 12y}$$

La gráfica de la curva se muestra a contunuación:



Determinación de todos los Elementos de una Parábola a partir de su Ecuación.

En los siguientes ejemplos los elementos a determinar son:

a) Vértice
b) Coordenadas del Foco
c) Directriz
d) Longitud del Lado Recto
e) Gráfica de la Ecuación

Ejemplo 1. Determinar los elementos de la Parábola $y^2 - 16x = 0$

Solución: La Parábola $y^2 = 16x$ se abre hacia la derecha y es la - forma $y^2 = 4px$.

$\boxed{\text{El vértice es } (0,0)}$

Las Coordenadas del Foco: (p,o) para calcular "p" sabemos que:

$4p = 16$

$p = \frac{16}{4}$

$p = 4$

$\boxed{\text{Entonces el foco es: } (4,0)}$

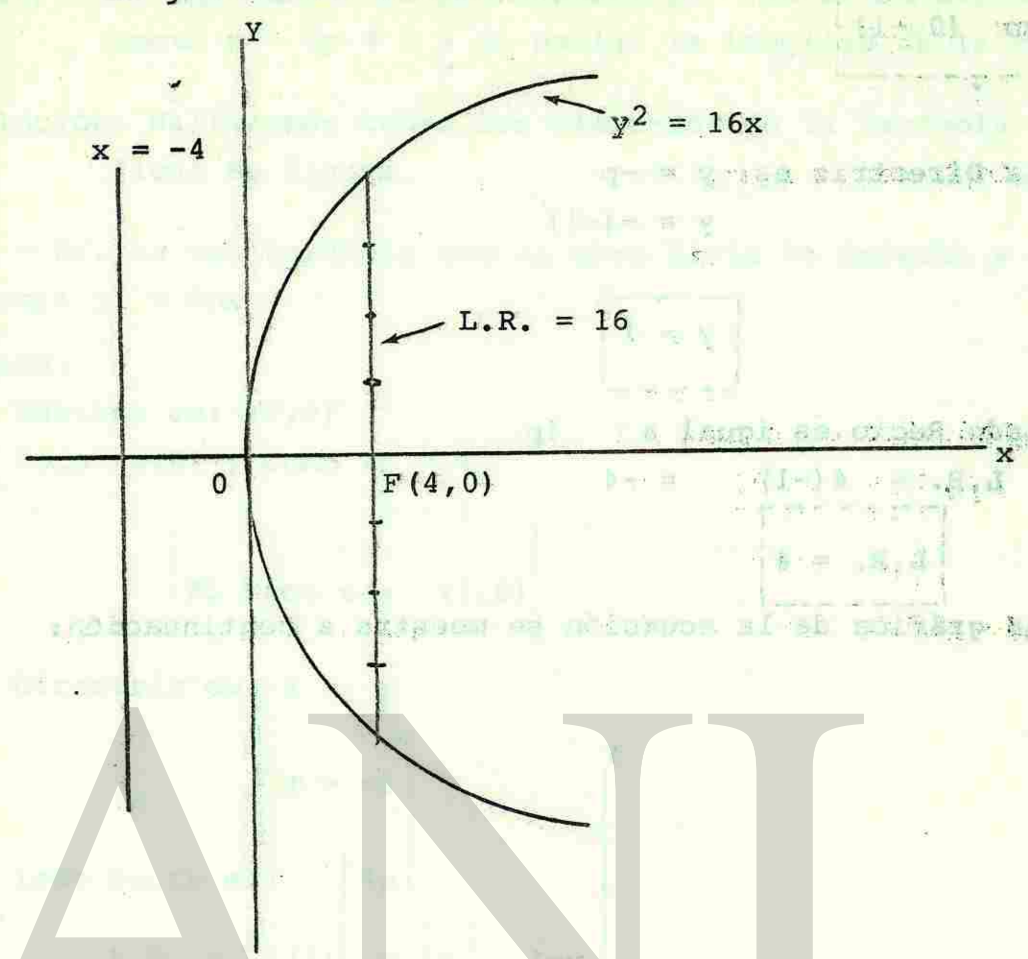
La directriz es $x = -p$ $\boxed{\text{directriz: } x = -4}$

Longitud del Lado Recto = $|4p|$

L.R. = $|4(4)|$

$\boxed{\text{L.R. } = 16}$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 2. Determinar todos los elementos de la Parábola $x^2 = -4y$

Solución: La Parábola $x^2 = -4y$ es de la forma:

$x^2 = 4py$, y se abre hacia abajo.

$\boxed{\text{Vértice: } (0,0)}$

Coordenadas del Foco (0,p)
Para calcular "p" tenemos:

$4p = -4$

$\boxed{p = -1}$

$\boxed{\text{Foco } (0,-1)}$

La Directriz es: $y = -p$

$y = -(-1)$

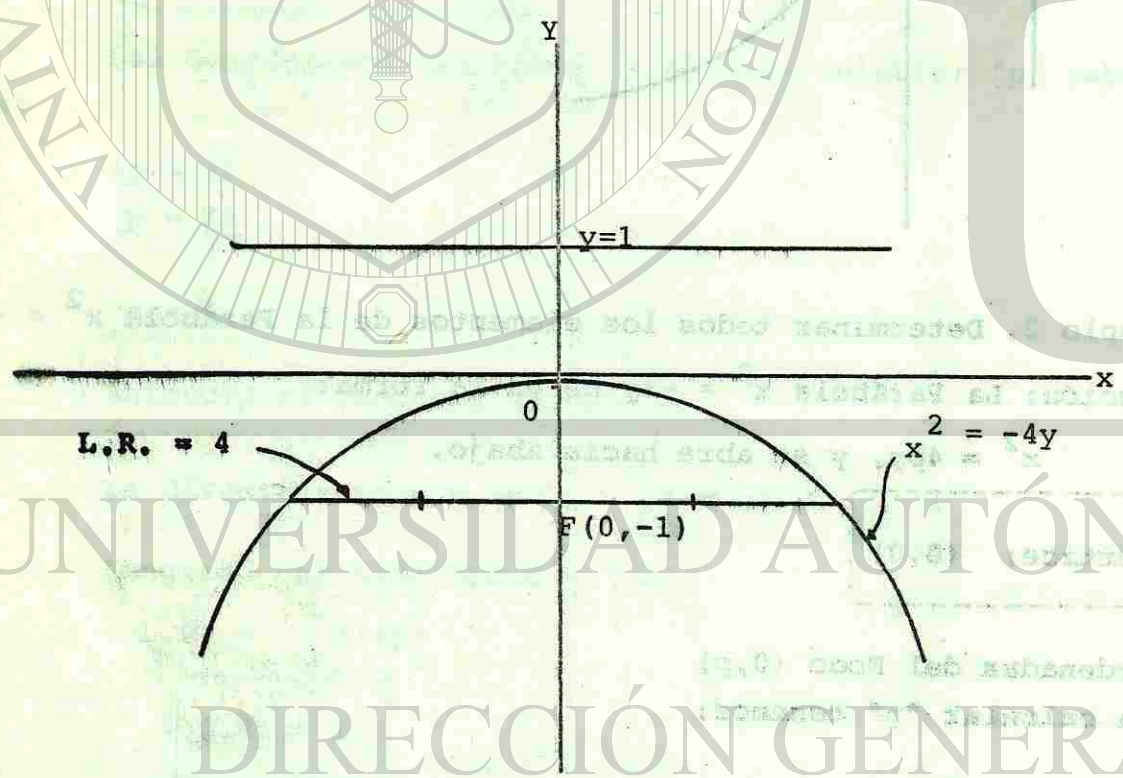
$\boxed{y = 1}$

Lado Recto es igual a $4p$

L.R. $= 4(-1) = -4$

$\boxed{\text{L.R.} = 4}$

La gráfica de la ecuación se muestra a continuación:



Ejemplo 3. Una cuerda de la Parábola $y^2 = 4x$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

Solución: Hallaremos todos los elementos de la Parábola para graficar su figura.

$y^2 = 4x$, es una Parábola que se abre hacia la derecha y es de la forma: $y^2 = 4px$

Donde:

El Vértice es: (0,0)

El foco (p,0) y como $4p = 4$

$p = 1$

$\boxed{\text{El Foco es: } (1,0)}$

La Directriz es: $x = -p$

$\boxed{x = -1}$

El lado recto es: $|4p|$

L.R. $= |4(1)| = |4|$

$\boxed{\text{L.R.} = 4}$

Luego, como la cuerda une dos puntos de la Parábola, que también pertenecen a la ecuación de la Recta dada, se establece un sistema de ecuaciones cuya solución dará dos parejas de valores que son las coordenadas de los puntos extremos de la cuerda de la Parábola.

$$\text{Sistema} \begin{cases} y^2 - 4x = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{Parábola} \\ \text{Recta} \end{matrix}$$

Este sistema se resuelve por algún método apropiado.

$x = 2y - 3$ Sustituyendo

$y^2 - 4(2y-3) = 0$

$y^2 - 8y + 12 = 0$

$(y - 6)\ (y - 2) = 0$

$y = 6 \qquad y = 2$

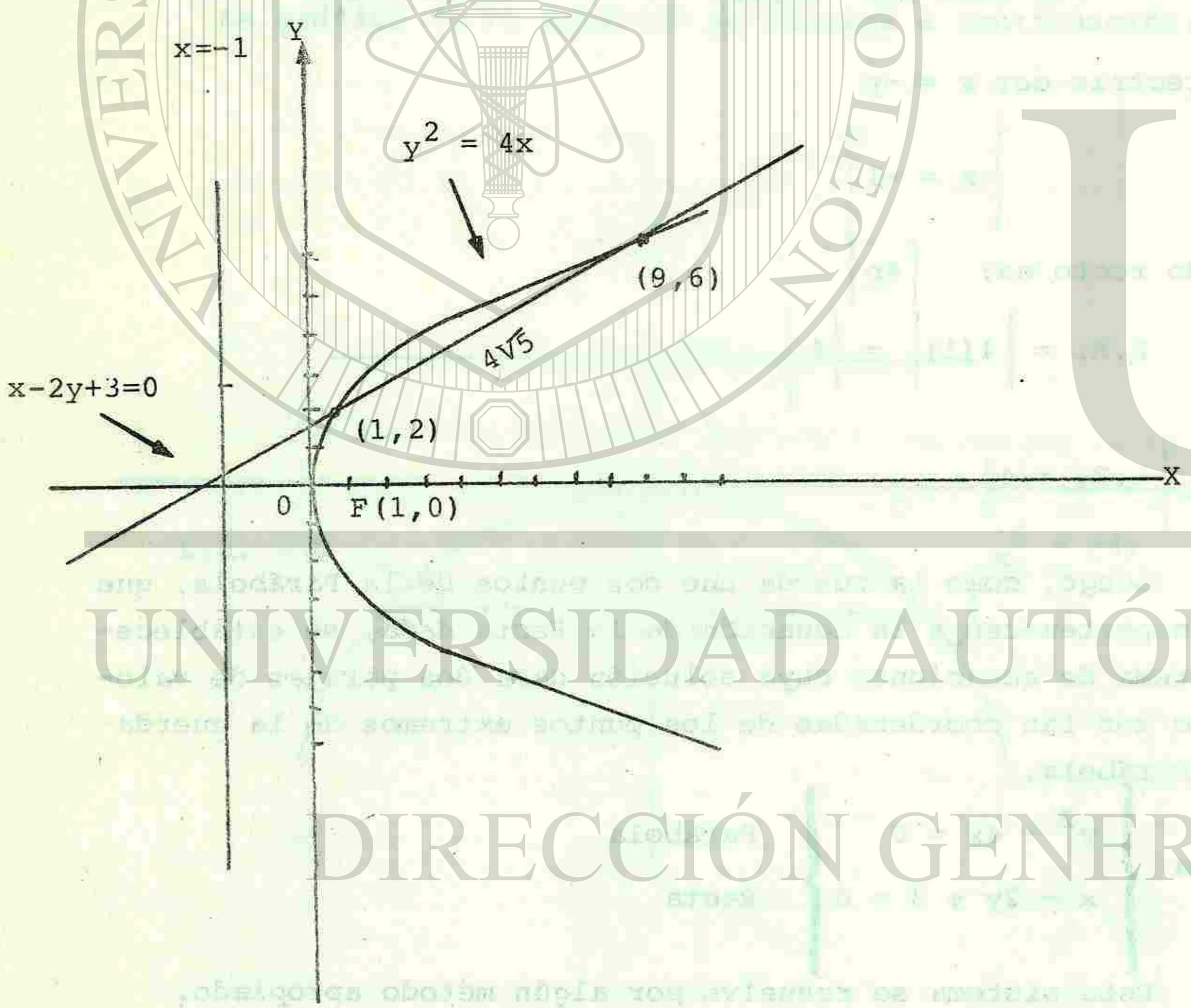
$x = 2y - 3 \qquad x = 2y - 3$

$x = 2(6) - 3 \qquad x = 2(2) - 3$

$x = 9 \qquad x = 1$

Solución: $(9,6)$, $(1,2)$

Luego gráficando la Parábola y la Recta.



La distancia entre $(1,2)$ y $(9,6)$ es la longitud de la cuerda buscada.

$$\text{Distancia} = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$\boxed{\text{Distancia} = 4\sqrt{5}}$$

EJERCICIO I

1.- Hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice está en el origen y su Foco el punto (0,-2).

2.- Hallar la ecuación de la Parábola cuyo Foco es el punto -- (3/2, 0) y el vértice es el origen de coordenadas.

En los ejercicios del 3 al 6 hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas sabiendo que:

3.- La Parábola es Simétrica con respecto al eje "x" y pasa por - el punto A(9,6).

4.- La Parábola es Simétrica con respecto al eje "x" y pasa por el punto B(-1,3).

5.- La Parábola es Simétrica con respecto al eje "y" y pasa por el punto C(1,1).

6.- La Parábola es Simétrica con respecto al eje "y" y pasa por el punto D(4,-8).

7.- Hallar la ecuación de la Parábola cuyo Foco es (-6,0) y su -- Directriz es $x = 6$.

8.- Hallar la ecuación de la Parábola cuyo Foco es (0,3) y su Directriz es $y = -3$.

9.- Hallar la ecuación de la Parábola de vértoce en el origen y - Directriz la Recta $x + 5 = 0$.

10.- Una Parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje "y" y pasa por el punto (4,-2). Hallar la -- ecuación de la Parábola, las coordenadas de su Foco, la ecuación de la Directriz y la longitud de su Lado Recto trazar - la gráfica correspondiente.

E J E R C I C I O   II

Hallar las coordenadas del vértice, coordenadas del Foco, ecuación de la Directriz, longitud del lado recto y la gráfica de cada una- de las Parábolas que se dan en los ejercicios del 1 al 6.

1) $y^2 = 24x$

2) $x^2 = 16y$

3) $x^2 + 2y = 0$

4) $y^2 + 8x = 0$

5) $x^2 = 5y$

6) $4y^2 = -5x$

7) Hallar los puntos de intersección de la recta: $x + y - 3 = 0$ y la Parábola: $x^2 = 4y$. Trazar una Figura.

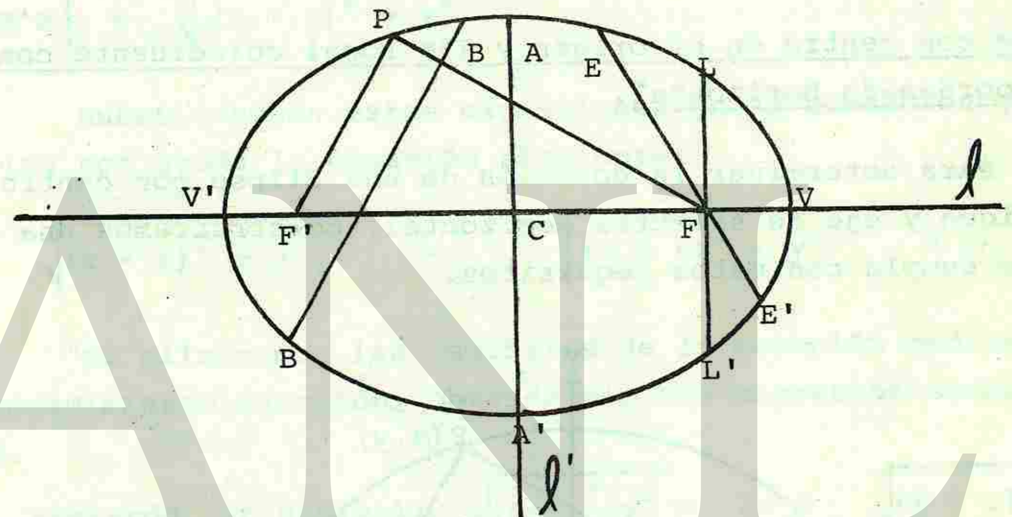
8) Hallar los puntos de intersección de la recta: $3x + 4y - 12 = 0$ y la Parábola: $y^2 = -9x$.

E L I P S E

E L I P S E

"Un Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal forma que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos".

Los dos puntos fijos se llaman focos de la Elipse, a continuación se muestra la figura que representa a este lugar geométrico.



Algunos de los elementos o partes más importantes de la Elipse son los siguientes:

F y F': Son los focos de la Elipse.

V y V': Son los Vértices de la Elipse.

l : Es la recta que corta a la Elipse en dos puntos llamados vértices y pasa por los focos, se llama "Eje Focal".

V V' : Es llamado el Eje mayor de la Elipse y es la longitud del segmento de recta comprendido entre los dos vértices.

C : Es el centro de la Elipse y es el punto medio del seg mento de recta que une los focos.

ℓ' : Es el eje normal porque es perpendicular al eje focal y corta a la Elipse en dos puntos.

A A' : Es el eje menor de la Elipse.

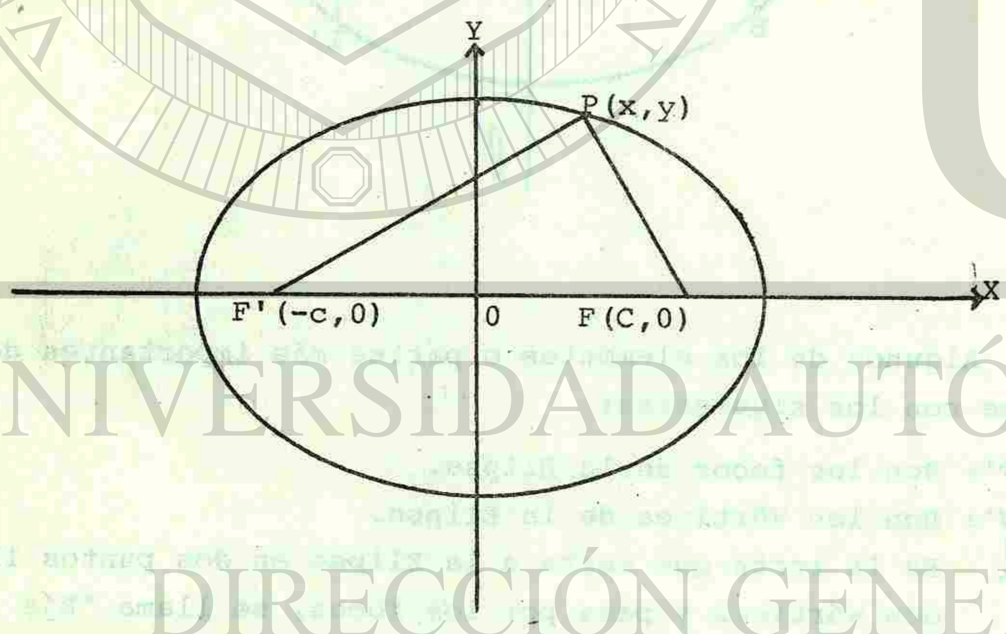
B B' : Es una cuerda de la Elipse; y puede ser cualquier segmento que, una dos puntos de una Elipse.

E E' : Es una cuerda que pasa por el foco, se llama "Cuerda Focal".

L L' : Es llamado el "Lado Recto" y es una cuerda focal que es perpendicular al eje focal.

Elipse con centro en el origen y Eje Focal coincidente con el Eje Coordenado Horizontal.

Para determinar la ecuación de una Elipse con centro en el origen y eje de simetría horizontal, construiremos una curva que cumpla con estos requisitos.



Los focos F y F' están sobre el Eje "x". Luego como el centro "O" es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, (C,O) y (-C,O), respectivamente, siendo "C" una constante positiva. Sea P (x,y) un pun

to cualquiera de la Elipse. Por la definición de la curva, el punto "P", debe satisfacer la condición geométrica siguiente:

$$|\overline{FP}| + |\overline{FP}| = 2a. \text{ (constante)}$$

En donde "a" es una constante positiva mayor que "C", luego si utilizamos la fórmula de la distancia para calcular $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ tendremos:

$$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Substituyendo estas expresiones en la condición geométrica nos queda la ecuación siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a$$

Si eliminamos las radicales de la ecuación mediante un procedimiento adecuado, obtendremos una expresión simplificada.

1. Aislando un Radical: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

2. Elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2})$$

Dividiendo la ecuación por (-4):

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado nuevamente:

$$(xc + a^2)^2 = a^2 [(x + c)^2 + y^2]$$

Desarrollando los binomios:

$$x^2c^2 + \cancel{2a^2xc} + a^4 = a^2x^2 + \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$-x^2 (a^2 - c^2) - a^2y^2 = -a^2 (a^2 - c^2)$$

Como 2a es mayor que 2c entonces a^2 es mayor que c^2. Luego el número $(a^2 - c^2)$ será un número positivo y si esta expresión la substituimos por el número positivo "b^2" tendremos que:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Donde la ecuación tendría la forma:

$$- x^2b^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$$

Dividiendo la ecuación por la expresión $(-a^2b^2)$

$$\frac{-x^2b^2}{-a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Se obtiene la primera ecuación ordinaria de la Elipse, a esta ecuación también se le conoce como forma canónica de la Elipse.

Si despejamos "y" de la forma canónica de la Elipse nos queda:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

De esto observamos que los valores permitidos para "x" están dentro del intérvalo:

$$-a \leq x \leq a$$

Si por otro lado la variable despejada es "x" nos queda:

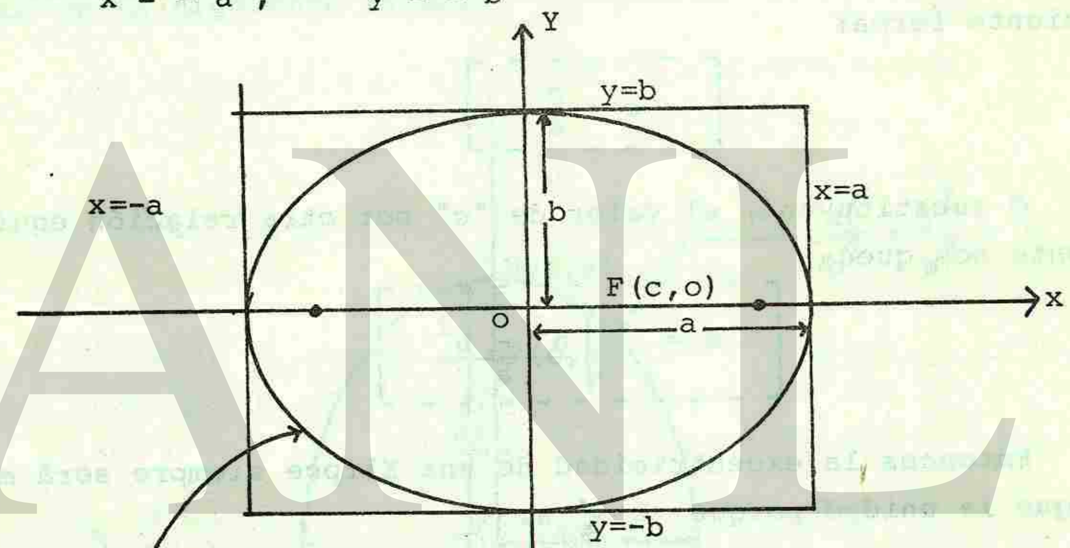
$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Donde los valores permitidos de la variable "y" están dentro del intérvalo:

$$-b \leq y \leq b$$

Para todo lo anterior se observa que la Elipse está limitada por un rectángulo cuyos lados son las rectas

$$x = \pm a, \quad y = \pm b$$



$$y = \pm \frac{b}{a} a^2 - x^2$$

$$y = \pm \frac{b}{a} a^2 - x^2$$

La abscisa del foco es "c" si en la ecuación $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ sustituimos el valor de "x" por "c" tenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

Pero como $a^2 - c^2 = b^2$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2}$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco "F" es: $\frac{2b^2}{a}$, y en forma análoga la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

$$\boxed{\text{Longitud del lado recto} = \frac{2b^2}{a}}$$

Otro elemento importante de una Elipse es su "excentricidad" (e) que se define como la razón que existe entre el valor de "c" y el de "a", luego si expresamos lo anterior de la siguiente forma:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

O substituyendo el valor de "c" por otra relación equivalente nos queda:

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$$

Entonces la excentricidad de una Elipse siempre será menor que la unidad porque $c < a$.

Elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado vertical.

Si el eje focal de la Elipse coincide con eje vertical (y) de tal forma que las coordenadas de los focos sean los puntos F(O,C) y F' (O,-C) la ecuación de la elipse será:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

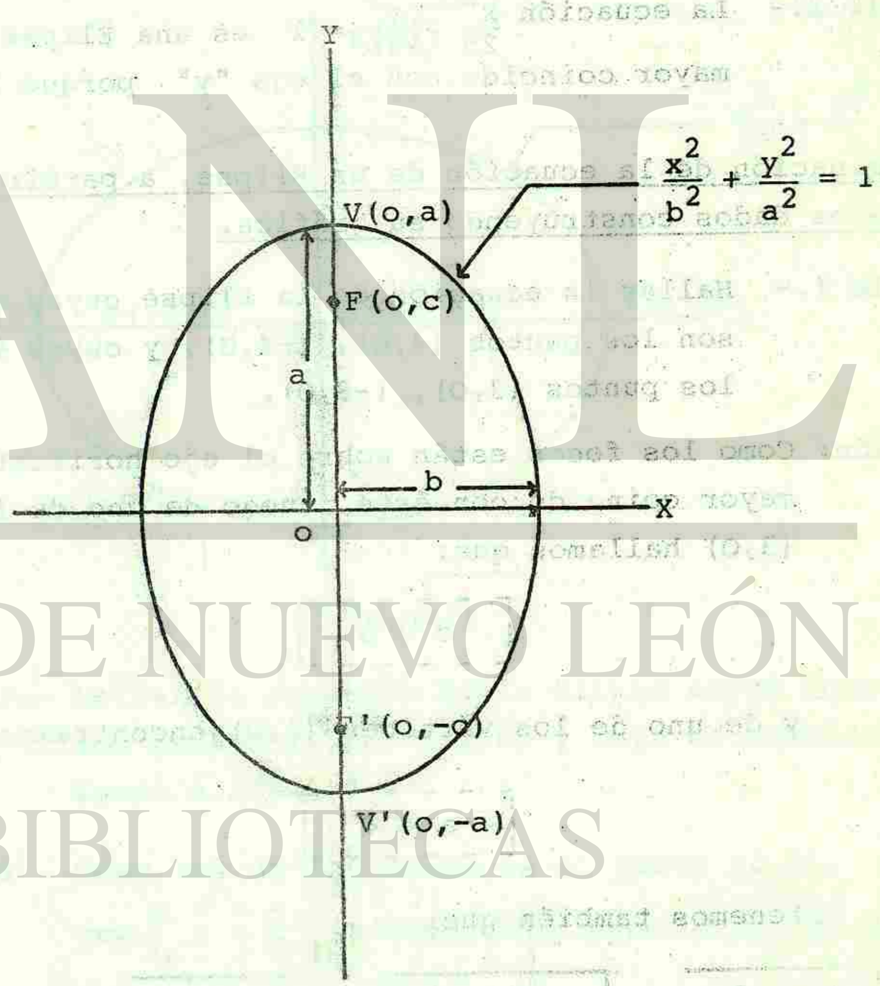
Donde para cada Elipse $\begin{cases} \text{: "a" representa la longitud del semi-eje mayor.} \\ \text{: "b" representa la longitud del semi-eje menor.} \end{cases}$

y "a", "b" y "c" están relacionados mediante la expresión

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Además para este caso de la Elipse la longitud de cada lado recto es: $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad de la elipse está dada por la misma relación $(e = c/a)$.

La gráfica de una Elipse con eje focal vertical se muestra en la siguiente figura.



De acuerdo con lo visto de las dos formas canónicas de la Elipse, se puede determinar la posición del eje mayor de la Elipse, observando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la Elipse.

Si consideramos dos ejemplos de Elipses que se encuentren en forma canónica podemos ilustrar lo expuesto anteriormente.

Ejemplo 1.- La ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ es una Elipse cuyo eje mayor coincide con el eje "x" porque 16 > 9.

Ejemplo 2.- La ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ es una Elipse cuyo eje mayor coincide con el eje "y" porque 36 > 25.

<u>Determinación de la ecuación de un Elipse, a partir de ciertos datos dados construyendo su gráfica.</u>

Ejemplo 1.- Hallar la ecuación de la Elipse cuyas vértices son los puntos (4,0), (-4,0), y cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0).

Solución: Como los focos están sobre el eje horizontal el eje mayor coincide con éste, luego de uno de los focos (3,0) hallamos que:

$$\boxed{c = 3}$$

y de uno de los vértices (4,0) encontramos que:

$$\boxed{a = 4}$$

tenemos también que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(4)^2 - (3)^2} = \sqrt{16 - 9} = \pm \sqrt{7}$$

Por lo tanto la ecuación es de la forma:

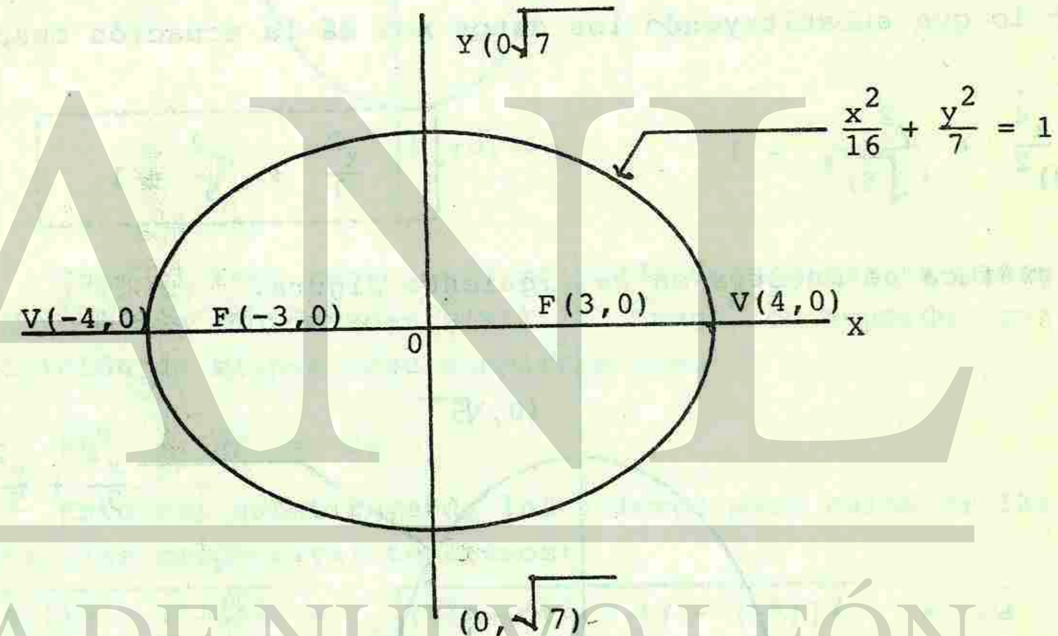
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de donde substituyendo los valores tenemos la ecuación buscada

$$\frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$$

La gráfica se muestra a continuación:



Ejemplo 2.- Hallar la ecuación de la Elipse cuyos focos son los puntos (2,0), (-2,0) y cuya excentricidad es igual a 2/3

Solución: Como uno de los focos es el punto (2,0), tenemos que $\boxed{c = 2}$ y como su excentricidad es 2/3 tenemos:

$e = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{a}$; resolviendo para "a" nos queda

$$\boxed{a = 3}$$

Tenemos también que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9 - 4} = \pm\sqrt{5}$$

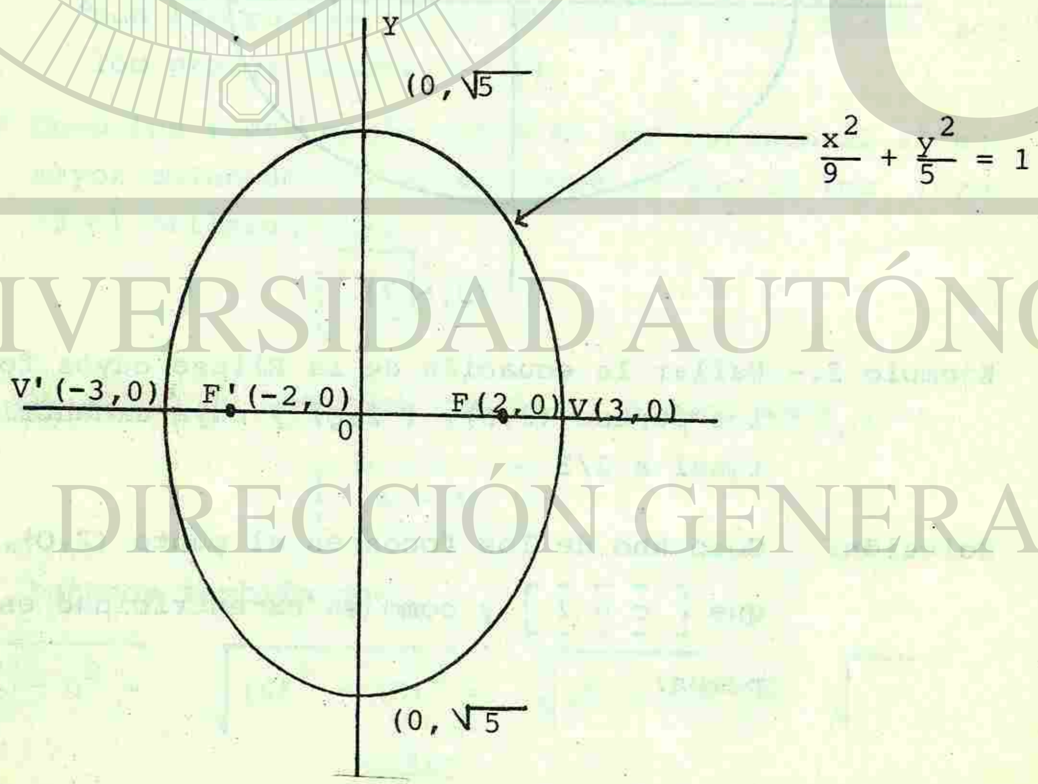
Por la posición de los focos, la ecuación de la Elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo que substituyendo los datos nos dá la ecuación buscada:

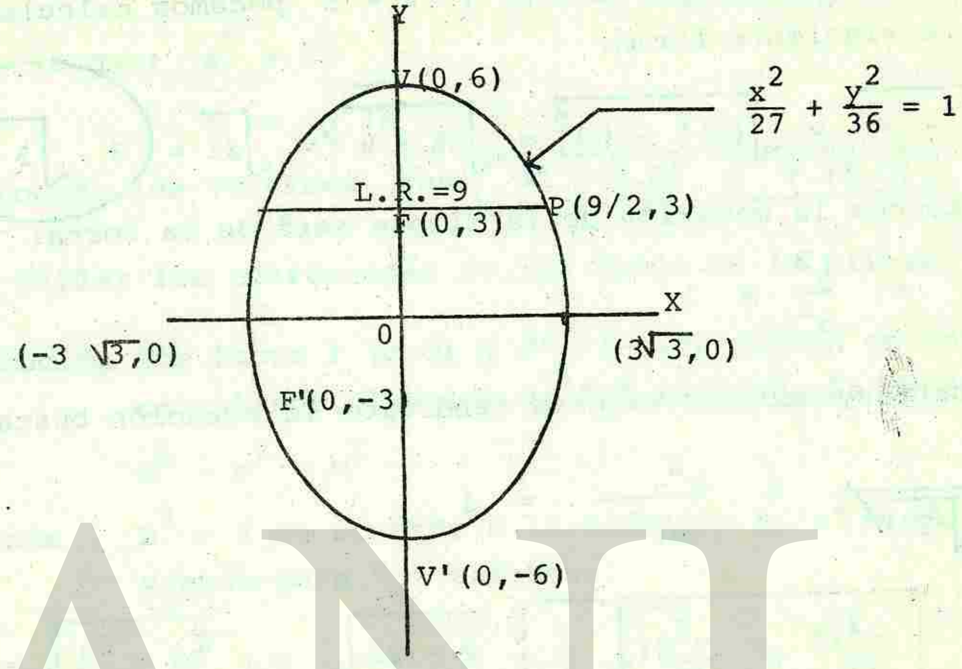
$$\frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 3.- Los focos de una Elipse son los puntos (0,3), (0,-3), y - la longitud de uno de los lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la Elipse.

Solución: Graficaremos una figura con los datos que tenemos:



Como el lado recto es 9 se puede determinar un punto de la Elipse con coordenadas P(9/2,3), luego, de acuerdo con la definición de Elipse debe cumplirse que:

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$$

Entonces substituyendo los valores para calcular las - distancias respectivas tendremos:

$$\sqrt{(9/2)^2 + (3-3)^2} + \sqrt{(9/2 - 0)^2 + [3 - (-3)]^2} = 2a$$

$$\sqrt{(9/2)^2} + \sqrt{(9/2)^2 + (6)^2} = 2a$$

$$\sqrt{81/4} + \sqrt{81/4 + 36} = 2a$$

$$9/2 + \sqrt{225/4} = 2a$$

$$9/2 + 15/2 = 2a$$

$$24/2 = 2a$$

$$12 = 2a$$

$$\boxed{6 = a}$$

Como el valor determinado de "a" es 6, los vértices de la Elipse, cuyo eje mayor está sobre el eje vertical serán los puntos: (0,6), (0,-6).

Con los valores de: a = 6 y c = 3 podemos calcular "b" de la siguiente forma:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(6)^2 - (3)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Entonces la ecuación de la Elipse será de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Substituyendo los valores tendremos la ecuación buscada.

$$\frac{x^2}{(\cancel{\sqrt{27}})^{\cancel{2}}} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1}$$

Obtención de todos los elementos de una Elipse, dada su ecuación.

Ejemplo 4.- Dada la ecuación de la Elipse:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

a) Expresarla en su forma "canónica".

Solución: El término independiente debe ser reducido a la unidad por lo que toda la ecuación debe ser dividida por el número 225. Y los coeficientes de las variables deben simplificarse.

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$ Forma Canónica

b) Hallar las coordenadas de los vértices de la Elipse:

V' (-a, 0) y V (a,0)

Solución: La ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por lo que: $a^2 = 25$

$$a = \sqrt{25} = \pm 5$$

Entonces los vértices son: $\boxed{V' (-5,0) \text{ y } V (5,0)}$

c) Hallar las coordenadas de los focos de la Elipse:

Solución Los focos F (c,0) y F' (-c,0) pueden encontrarse calculando el valor de "c" mediante la relación

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Donde $b^2 = 9$ de acuerdo a la ecuación y, $a^2 = 25$ y resolviendo para "c" tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \pm 4$$

Entonces los focos son: $\boxed{F' (-4,0) \text{ y } F (4,0)}$

d) Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución: Eje mayor = 2a = 2(5) = 10

$$\boxed{2a = 10}$$

eje menor = 2b = 2(3) = 6

$$\boxed{2b = 6}$$

e) Hallar la excentricidad de la Elipse:

Solución: La excentricidad está dada por: $e = c/a$

Entonces: $\boxed{e = \frac{4}{5}}$

f) Hallar la longitud del lado recto de la Elipse.

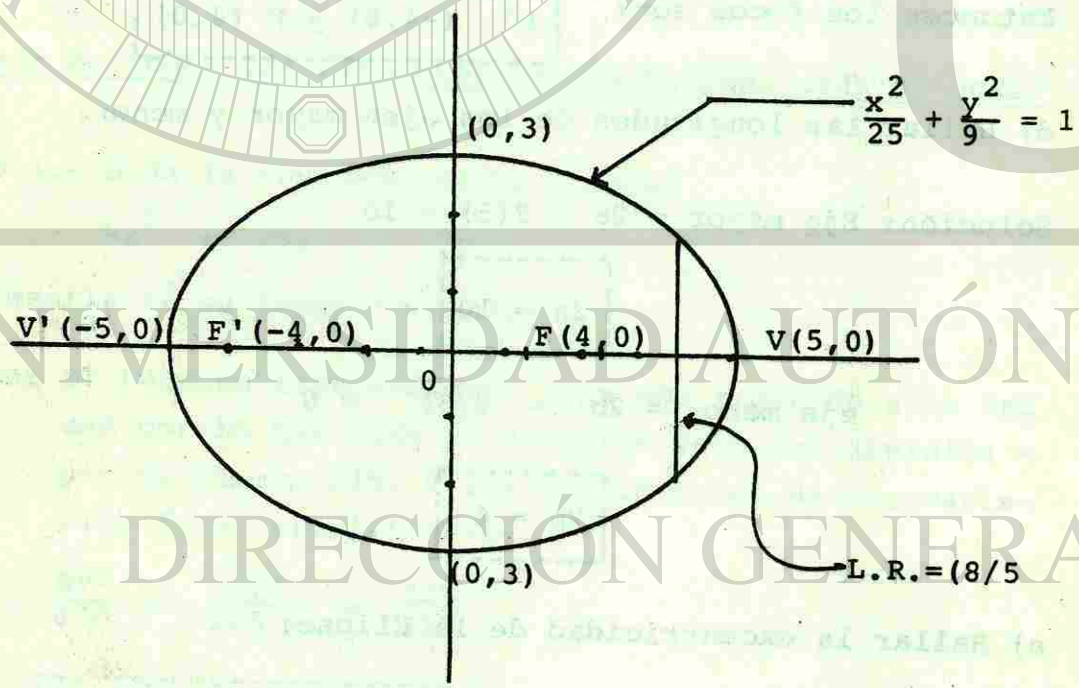
Solución: El lado recto (L-R) esta dado por:

$L.R. = \frac{2b^2}{a}$; luego substituyendo $b = 3$ y $a = 5$

$$L.R. = \frac{2(3)^2}{5} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\boxed{L.R. = \frac{18}{5}}$$

g) Construir la gráfica de la Elipse.



Ejemplo 5.- Dada la ecuación de la Elipse:

$$4x^2 + 9y^2 = 25$$

Hallar:

a) La forma canónica de la ecuación
b) Las coordenadas de los vértices
c) Las coordenadas de los focos
d) Las longitudes de los ejes mayor y menor
e) La excentricidad
f) Longitud del lado recto
g) Gráfica de la curva.

Solución:

a) La ecuación: $4x^2 + 9y^2 = 25$ se divide término a término por el independiente; y se obtiene la ecuación en su forma canónica.

$$\frac{4x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = \frac{25}{25}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{(25/4)} + \frac{y^2}{(25/9)} = 1}$$

b) La ecuación de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por lo que los -- vértices están sobre el eje de abcisas y son $V'(-a,0)$ y -- $V(a,0)$.

Por tanto: $a^2 = \frac{25}{4}$

$$a = \sqrt{25/4} = \pm\ 5/2$$

Entonces los vértices son: $\boxed{V'\ (-5/2,0) \text{ y } V\ (5/2,0)}$

c) Los focos F' (-c,0) y F(c,0) pueden encontrarse calculando el valor de "c". mediante la relación:

$a^2 - c^2 = b^2$

Donde $b^2 = \frac{25}{9}$ y $a^2 = \frac{25}{4}$, de acuerdo a la ecuación y resolviendo para "c" tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{125}{36}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Entonces los focos son: $\boxed{F'\left(-\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right) \text{ y } F\left(\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right)}$

d) Las longitudes de los ejes son:

eje mayor $= 2a \longrightarrow 2(\frac{5}{2}) = \frac{10}{2} = 5$

$$\boxed{2a = 5}$$

Eje menor $= 2b$ como $b^2 = \frac{25}{9}$, $b = \sqrt{25/9} = \pm\ 5/3$

$2b = 2(5/3) = \frac{10}{3}$

$$\boxed{2b = \frac{10}{3}}$$

e) La excentricidad de la Elipse está dada por: $e = \frac{c}{a}$

Entonces: $e = \dfrac{\frac{5\sqrt{5}}{6}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{\cancel{10}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{30}_{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{5}{3}}}$$

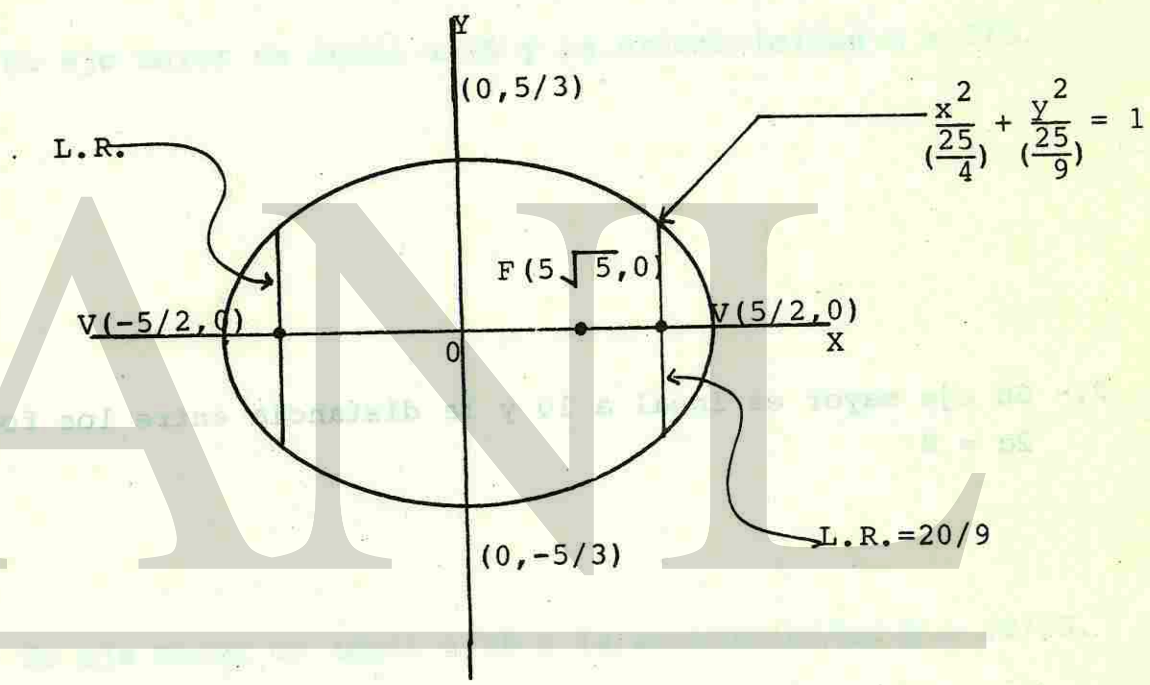
f) La longitud del lado recto esta dado por: $\frac{2b^2}{a}$, luego substituyendo;

b = 5/3 y a = 5/2

$$L.R. = \frac{2b^2}{} = \frac{2(\frac{5}{3})^2}{\frac{5}{2}} = \frac{2(\frac{25}{9})}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{50}{9}}{\frac{5}{2}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}$$

$$\boxed{L.R. = \frac{20}{9}}$$

g) Construir la gráfica de la Elipse.



EJERCICIO

*Hallar la ecuación de la Elipse cuyos focos están en el eje de abcisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas de acuerdo a las condiciones dadas en cada uno de los siguientes ejercicios; Graficar una figura para cada problema.

1.- Sus semiejes son iguales a 5 y a 2.

2.- Su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre los focos: $2c = 8$

3.- Su eje menor es igual a 24 y la distancia entre los focos: $2c = 10$.

4.- Su eje mayor es igual a 20 y la excentricidad $e = 3/5$.

5.- Su eje menor es igual a 10 y la excentricidad $e = 12/13$.

*Hallar la ecuación de la Elipse cuyos focos están en el eje de ordenadas (vertical) y son simétricos con respecto al -- origen de coordenadas, de acuerdo a las condiciones dadas - en cada uno de los ejercicios siguientes, y graficar una figura para cada uno de los problemas 6,7 y 8.

6.- Sus semiejes son iguales respectivamente a 7 y 2.

7.- La distancia entre sus focos 2c = 24 y la excentricidad - e = 12/13.

8.- Su eje menor es igual 16 y la excentricidad e = 3/5.

9.- Los vértices de una Elipse son los puntos (0,6), (0-6), y sus focos son los puntos (0,4), (0-4).
Hallar su ecuación.

*En cada uno de los ejercicios del 1 al 10 hallar:

a) La forma canónica (si es desconocida)

b) Las coordenadas de los vértices

c) Las coordenadas de los focos

d) Las longitudes de los ejes mayor y menor

e) La excentricidad

f) La longitud de sus lados rectos

g) La gráfica de la curva

De cada una de las Elipses correspondientes

1) $9x^2 + 4y^2 = 36$

2) $x^2 + 3y^2 = 6$

3) $4x^2 + 9y^2 = 36$

4) $16x^2 + 25y^2 = 400$

5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

6) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{} = 1$

7) $x^2 + 25y^2 = 25$

8) $16x^2 + y^2 = 16$

9) $x^2 + 4y^2 = 1$

10) $x^2 + 5y^2 = 15$