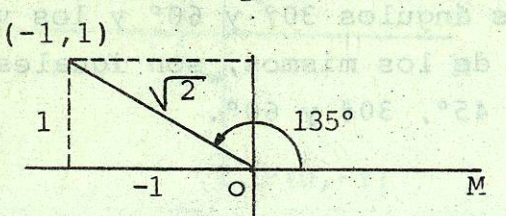
b) Funciones de 135°

Para determinar el valor de las funciones de este ángulo usamos los valores ya conocidos del ángulo 45°.



abcisa = -1
ordenada = 1
distancia = $\sqrt{2}$

Sen 135° $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

Cos 135° $= \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

Tan 135° $= \frac{1}{1} = -1$

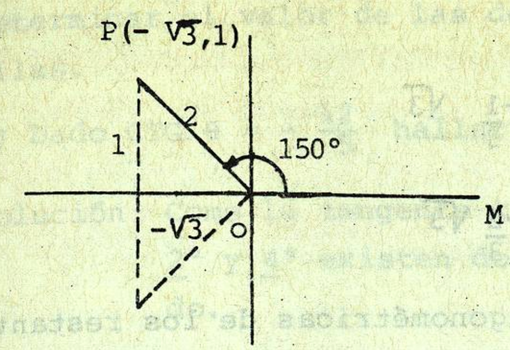
CTG 135° $= \frac{-1}{1} = -1$

CEC 135° $= \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

CEC 135° $= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

c) Funciones de 150°.

Para determinar el valor de las funciones de este ángulo utilizamos los valores encontrados para el ángulo de 30°.



distancia = 2
abcisa = $\sqrt{3}$
ordenada = -1

Sen 150° $= \frac{1}{2}$

Cos 150° $= -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$

Tan 150° $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{3} \sqrt{3}$

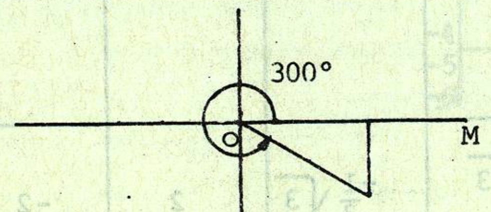
CTG 150° $= \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

SEC 150° $= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{-2}{3} \sqrt{3}$

CSC 150° $= \frac{2}{2} = 2$

d) Funciones de 300°.

Para determinar los valores de las funciones de este ángulo lo usamos los valores encontrados para el ángulo 60°.



Abcisa = 1
ordenada = - $\sqrt{3}$
distancia = 2

Sen 300° $= \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$

Tan 300° $= \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

Sec 300° $= \frac{2}{1} = 2$

Cos 300° $= \frac{1}{2}$

$$CTG\ 300° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$CSC\ 300° = \frac{2}{\sqrt{\ }} = \frac{-2}{\sqrt{\ }} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ }} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

El valor de la funciones trigonométricas de los restantes ángulos se dejan como ejercicio al estudiante, mismos que tabulará en la siguiente tabla de valores.

ANGULO	SEN	COS	TAN	CTG	SEC	CSC
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
210°						
225°						
240°						
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°						
330°						

Determinar el valor de las demas funciones, dado el de una de - - ellas.

1) Dado $CTG\ \theta = -\frac{12}{5}$ hallar el valor de las demás funciones.

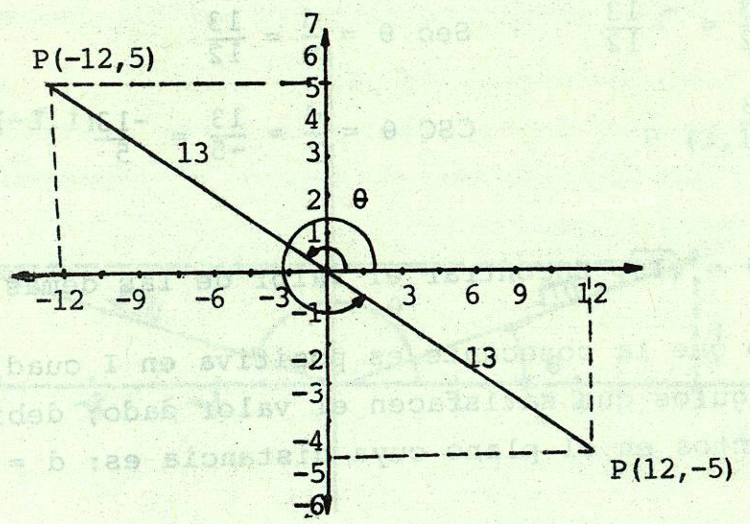
Solución: Como la tangente tiene valor negativo en los cuadrantes $\underline{2°}$ y $\underline{4°}$ existen dos ángulos que satisfacen el valor dado.

$CTG\ \theta = \frac{abcisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$; existen dos opciones

abcisa negativa
$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{5}$

ordenada negativa
$CTG\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{-5}$

GRATIFICANDO LOS PUNTOS:



La distancia la encontramos con el teorema de Pitagoras.

$$d= \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d= \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$$

$d = \sqrt{144 + 25}$

$d = \sqrt{169}$

$\boxed{d = 13}$

II CUADRANTE $\begin{cases} x = -12 \\ y = 5 \\ d = 13 \end{cases}$

$\text{Sen } \theta \; \frac{y}{d} = \frac{5}{13}$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}$

$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$

$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$

$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{5}$

IV CUADRANTE $\begin{cases} x = 12 \\ y = -5 \\ d = 13 \end{cases}$

$\text{Den } \theta = \frac{y}{d} = \frac{-5}{13} = \frac{-5}{13}$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{12}{13}$

$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} = \frac{-5}{12}$

$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{12}$

$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = \frac{-13}{5}$

2.- Dado CSC $\theta = \sqrt{10}$; Encontrar el valor de las demas funciones.

Solución: Dado que la cosecante es positiva en I cuad. II cuad. - tenemos dos ángulos que satisfacen el valor dado; debido a que -- existen dos puntos en el plano cuya distancia es: $d = \sqrt{10}$

$\text{CSC } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$; existen dos opciones

$\text{CSC } \theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

abcisa positiva
$x = ?$
$d = \sqrt{10}$
$y = 1$

abcisa negativa
$x = ?$
$d = \sqrt{10}$
$y = 1$

La "abcisa" la encontramos por el teorema de Pitagoras

$x = \sqrt{d^2 - y^2}$

La "abcisa" la encontramos por el teorema de Pitagoras.

$x = \sqrt{d^2 - y^2}$

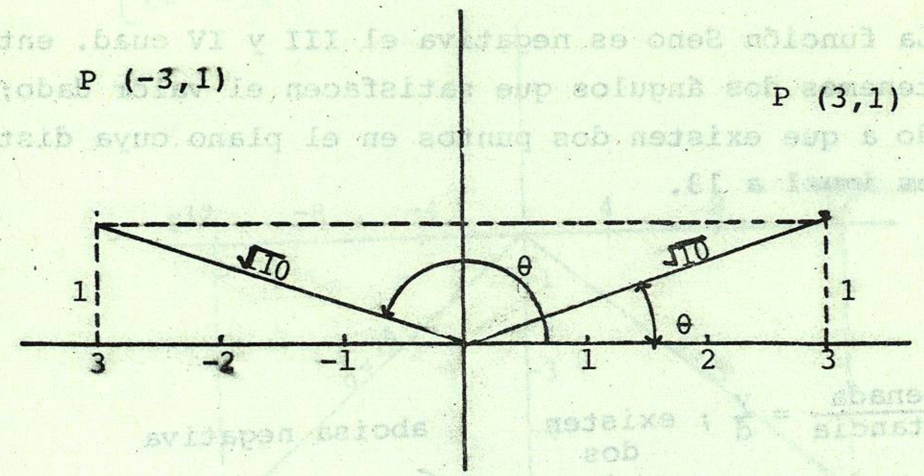
$x = \sqrt{(10)^2 - (1)^2}$

$x = \sqrt{10-1}$

$x = \sqrt{9}$

$x = \pm 3 \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

GRAFICANDO LOS PUNTOS:



I CUADRANTE $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ d = \sqrt{10} \end{cases}$

$\text{Sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

II CUADRANTE $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ d = \sqrt{10} \end{cases}$

$\text{Sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{1} = 3$

$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

$\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{1} = -3$

$\text{Sec } \theta = \frac{-d}{x} = \frac{\sqrt{10}}{-3} = \frac{-1\sqrt{10}}{3}$

3.- Dado $\text{Sen } \theta = \frac{5}{13}$; encontrar el valor de las demas funciones.

Solución: La función Seno es negativa el III y IV cuad. entonces tenemos dos ángulos que satisfacen el valor dado; debido a que existen dos puntos en el plano cuya distancia **es igual a** 13.

$\text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$; existen dos opciones

abcisa negativa

$$\begin{cases} x = ? \\ d = 13 \\ y = -5 \end{cases}$$

$\text{Sen } \theta = \frac{-5}{13}$ El signo negativo pertenece a la ordenada - ya que la distancia -- siempre es positiva.

abcisa **positiva**

$x = ?$

$d = 13$

$y = -5$

La "abcisa" la encontramos por el Teorema de **Pitagoras.**

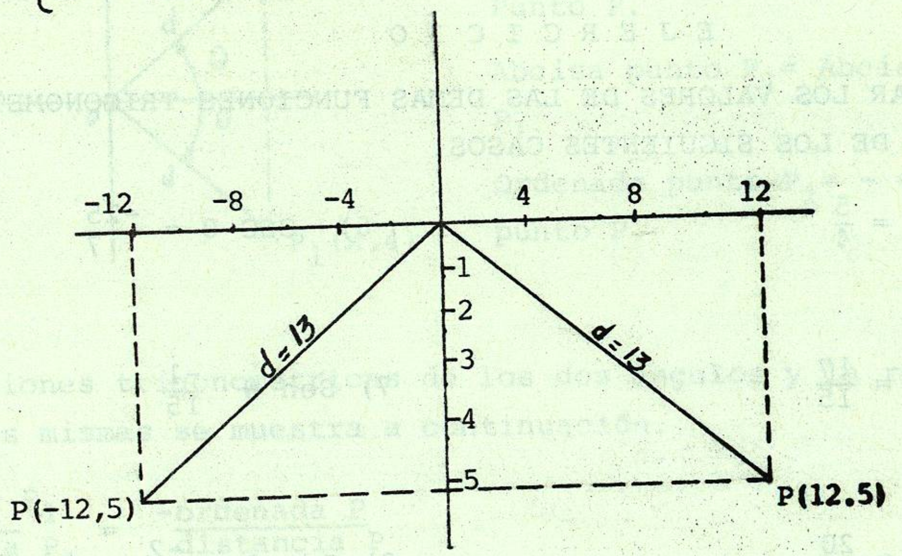
$x = \sqrt{d^2 - y^2}$

$x = \sqrt{(13)^2 - (-5)^2}$

$x = \sqrt{169-25}$

$x = \sqrt{144}$

$$x = \pm 12 \begin{cases} x = 12 \\ x = -12 \end{cases}$$



III CUADRANTE $x = -12$, $y = -5$, $d = 13$

IV CUADRANTE $x = 12$, $y = -5$, $d = 13$

$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{-12}{13} = \frac{12}{13}$	$\text{Cos } \theta = \frac{x}{d} = \frac{12}{13}$
$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$	$\text{Tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{12} = \frac{-5}{12}$
$\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$	$\text{CTG } \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{-5} = \frac{-12}{5}$
$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{-12} = \frac{13}{12}$	$\text{Sec } \theta = \frac{d}{x} = \frac{13}{12}$
$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = \frac{13}{5}$	$\text{CSC } \theta = \frac{d}{y} = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}$

E J E R C I C I O

DETERMINAR LOS VALORES DE LAS DEMAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CASOS.

1) $\text{Sec } \theta = \frac{5}{4}$

2) $\text{CSC } \theta = \frac{17}{15}$

3) $\text{Sen } \theta = \frac{20}{29}$

4) $\text{Tan } \theta = -3$

6) $\text{CSC } \theta = \frac{-25}{7}$

7) $\text{Sen } \theta \ \frac{-1}{15}$

8) $\text{Cos } \theta = \frac{-2}{7}$

9) $\text{CTG } \theta = \frac{12}{5}$

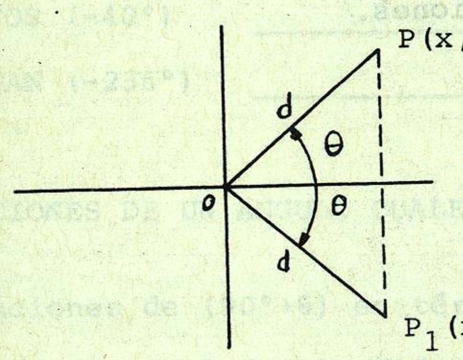
5) $\text{Cos } \theta = \frac{-7}{41}$

10) $\text{Cos } \theta = \frac{24}{25}$

FUNCIONES DE UN ANGULO NEGATIVO EN TERMINOS DE UN POSITIVO.

FUNCIONES DE $(-\theta)$ EN TERMINOS DE θ

Para determinar las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas de dos ángulos que tienen la misma magnitud pero que son de signo contrario, graficaremos ambos ángulos y tomando un punto de las dos líneas terminales que estén a la misma distancia del origen, encontramos que sus coordenadas están relacionadas; como lo muestra la siguiente figura:



Distancia punto P_1 = Distancia - Punto P.

Abcisa punto P_1 = Abcisa punto P.

Ordenada punto P_1 = - ordenada punto P.

Las funciones trigonométricas de los dos ángulos y la relación - entre las mismas se muestra a continuación.

$$\frac{\text{ordenada } P_1}{\text{distancia } P_1} = \frac{-\text{ordenada } P}{\text{distancia } P}$$

$$\boxed{\text{Sen } (\theta) = - \text{Sen } \theta}$$

$$\frac{\text{Abcisa } P_1}{\text{Distancia } P_1} = \frac{\text{Abcisa } P}{\text{Distancia } P}$$

$$\boxed{\text{Cos } (-\theta) \text{ Cos } \theta}$$

$$\frac{\text{abcisa } P_1}{\text{ordenada } P_1} = \frac{\text{Abcisa } P}{-\text{ordenada } P}$$

$$\boxed{\text{CTG } (-\theta) = - \text{CTG } \theta}$$