$$CTG\ \theta = \frac{b}{a} = \frac{\cancel{c}.\ \text{Cos}\ \theta}{\cancel{c}.\ \text{Sen}\ \theta} = \frac{\text{Cos}\ \theta}{\text{Cos}\ \theta}$$

$$\boxed{CTG\ \theta = \frac{COS\ \theta}{\text{Sen}\ \theta}}$$

Las anteriores relaciones muestran una función como el cociente de dos funciones para un mismo ángulo.

$$\boxed{\text{Tan}\ \theta = \frac{\text{Sen}\ \theta}{\text{Cos}\ \theta}} \qquad \boxed{CTG\ \theta = \frac{\text{Cos}\ \theta}{\text{Sen}\ \theta}}$$

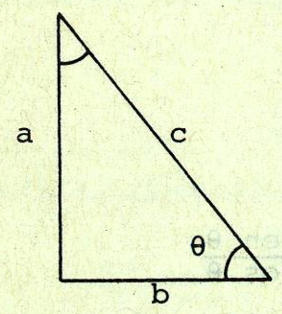
O en palabras:

"La tangente de un ángulo siempre es igual al seno del ángulo dividido por el coseno del ángulo"; "La cotangente de un ángulo siempre es igual al coseno del ángulo dividido por el seno del ángulo".

2) IDENTIDADES PITAGORICAS

Estas relaciones reciben ese nombre porque se derivan utilizando el teorema de Pitágoras, que dice: para todo triángulo rectangulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

Para la demostración de estas relaciones vamos a utilizar la siguiente figura:




*Teorema de Pitágoras
** Dividiendo entre: $c^2$
tenemos lo siguiente:
*** Luego por definición

$$\frac{a}{c}\ \text{Sen}\ \theta,\ \frac{b}{c}\ \text{Cos}\ \theta$$

y sustituyendo:



$$\frac{a}{c}\ \text{Sen}\ \theta,\ \frac{b}{c}\ \text{Cos}\ \theta$$

y sustituyendo:

$$\boxed{\text{Sen}^2\ \theta + \text{Cos}^2\ \theta = 1}$$

* $a^2+b^2=c^2$

** $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = 1$$

*** $(\text{Sen}\ \theta)^2 + (\text{Cos}\ \theta)^2 = 1$

o en palabras: "la suma de los cuadrados del seno y del coseno del mismo ángulo siempre es igual a uno".

Nuevamente a partir del teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

* Dividiendo entre $b^2$: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$

y acomodando tenemos: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

** Luego por definición:

$\frac{a}{b}$ = Tan θ, $\frac{c}{b}$ = Sen θ; $(\text{Tan}\ \theta)^2 + 1 = (\text{Sec}\ \theta)^2$

y sustituyendo: $\boxed{\text{Tan}^2\ \theta + 1 = \text{Sec}^2\ \theta}$

"El cuadrado de la secante de un ángulo siempre es igual al cuadrado de la tangente del ángulo mas uno".

Usando de nueva cuenta el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

*Dividiendo entre $a^2$

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

y acomodando tenemos: $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$

** Luego por definición

$\frac{b}{a} = \text{CTG } \theta, \frac{c}{a} = \text{CSC } \theta$ $\qquad 1 + (\text{CTG } \theta)^2 = (\text{CSC } \theta)^2$

y sustituyendo: $\boxed{1 + \text{CTG}^2\ \theta = \text{CSC}^2\theta}$

"El cuadrado de la cosecante de un ángulo siempre es igual a uno mas el cuadrado de la cotangente del mismo ángulo".

3) <u>IDENTIDADES RECIPROCAS:</u>

El Trigonometría con frecuencia hablamos de relaciones recíprocas, es decir de aquellas relaciones cuyo producto es igual a la unidad; por la propiedad de los recíprocos.

Demostraremos algunas de ellas basandonos en el triángulo de la sección anterior.

*El seno y la cosecante están definidos en base a los mismos lados del triángulo, pero en orden distinto, luego su producto es igual a la unidad.

$\text{Sen } \theta = \frac{a}{c}$

$$\text{Sen } \theta . \text{ CSC } \theta = \frac{a}{c} . \frac{c}{a} = \frac{ac}{ac} = 1$$

$\text{CSC } \theta = \frac{a}{c}$

Entonces: $\boxed{\text{Cos } \theta. \text{ Sec } \theta = 1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Sen } \theta = \dfrac{1}{\text{CSC } \theta}} \\ \boxed{\text{CSC } \theta = \dfrac{1}{\text{Sen } \theta}} \end{array} \right.$



**El coseno y la secante están definidos en base - los mismos lados del triángulo, pero en orden distintos, luego su producto debe ser igual a la unidad.

$\text{Cos } \theta = \frac{b}{c}$ $\qquad \text{Cos } \theta. \text{ Sec } \theta = \frac{b}{c} . \frac{c}{a} \quad \frac{ac}{ac} = 1$

$\text{Sen } \theta = \frac{c}{b}$

Entonces: $\boxed{\text{Sen } \theta. \text{ CSC } \theta = 1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Sen } \theta = \dfrac{1}{\text{CSC } \theta}} \\ \boxed{\text{CSC } \theta = \dfrac{1}{\text{Sen } \theta}} \end{array} \right.$

***La tangente y la cotangente están definidos en base a los mismos lados del triángulo, pero en orden distinto, luego su producto es igual a la unidad.

$\text{Tan } \theta = \frac{a}{b}$ $\qquad \text{Tan } \theta. \text{ CTG } \theta = \frac{a}{b} . \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$

$\text{CTG } \theta = \frac{b}{a}$

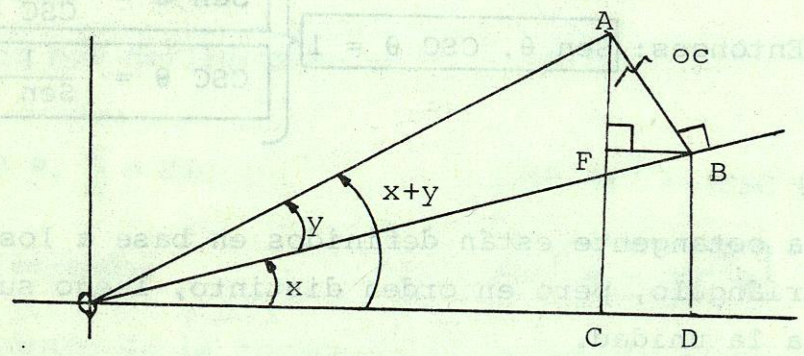
Entonces: $\boxed{\text{Tan } \theta. \text{ CTG } \theta = 1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Tan } \theta = \dfrac{1}{\text{CTG } \theta}} \\ \boxed{\text{CTG } \theta = \dfrac{1}{\text{Tan } \theta}} \end{array} \right.$

Nota: Si dos funciones son recíprocas una de las funciones puede expresarse en términos de la otra.

FUNCIONES DE UNA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ALUMNOS

Expresar Sen (x+y) y Cos(x+y) en términos de los senos y cosenos de los ángulos "x" e "y".

Primero grafiquemos los ángulos "x" e .y. y también el - ángulo suma de los dos.




Luego trazando perpendiculares desde un punto .A" de la línea terminal del ángulo (x+y) hacia la inicial del ángulo .x. (Oc) y a - la inicial del ángulo "y" (OB) vuelve a formarse el ángulo "x" entre esas dos líneas perpendiculares.

Por el punto "B" trazamos dos líneas perpendiculares hacia las líneas "AC" y "OC" con el fin de formar otro triángulo -- donde intervenga el ángulo "x".

Entonces: $\text{Sen }(x+y) = \frac{AC}{OA}$ ; como AC= BD + AF

Tenemos; $\text{Sen }(x+y) = \frac{BD + AF}{OA} \quad \frac{BD}{OA} + \frac{AF}{OA}$

$\frac{BD}{OA} = \frac{BD}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{BD}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = \text{Sen } x.\ \text{Cos } y$

La relación $\frac{AB}{AB}$ es igual a la unidad y ese lado es común a los - ángulos "x" e "y".

De donde reuniendo términos, resulta:

$$\boxed{\text{Sen}(x+y) = \text{Sen } x.\ \text{Cos } y + \text{Cos } x.\ \text{Sen } y}$$



"El seno de la suma de dos ángulos es igual al producto del seno del primero por el coseno del segundo mas el coseno del primero - por el seno del segundo".

De la misma forma encontraremos una expresión para Cos (x+y) basandonos en la misma figura.

Entonces: $\text{Cos }(x+y) = \frac{OC}{OA}$ ; como OC= OD-FB

Tenemos; $\text{Cos }(x+y) = \frac{OD-FB}{OA} = \underset{*}{\frac{OD}{OA}} - \underset{**}{\frac{FB}{OA}}$

$* \ \frac{OD}{OA} \quad \frac{OD}{OA} \quad \frac{OB}{OB} \quad \frac{OD}{OB} \quad \frac{OB}{OA} = \text{Cos } x.\ \text{Cos } y$

$** \ \frac{FB}{OA} = \frac{FB}{OA} \cdot \frac{AB}{AB} = \frac{FB}{AB} \cdot \frac{AB}{OA} = \text{Sen } x.\ \text{Sen } y$

De donde: reuniendo términos, resulta:

$$\boxed{\text{Cos}(x+y) = \text{Cos } x.\ \text{Cos } y - \text{Sen } x\ \text{Sen } y}$$

"El coseno de una suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de los ángulos menos el producto de los senos de tales ángulos".

## TANGENTE DE LA SUMA DE DOS ANGULOS: TAN(X+Y)

La función de este ángulo la expresaremos en términos de: Sen(x+y). De acuerdo a la definición de la tangente y luego la reduciremos en términos de las tangentes de cada uno de los ángulos.

$$\mathrm{Tan}(x+y) = \frac{\mathrm{Sen}(x+y)}{\mathrm{Cos}(x+y)}$$

$$\mathrm{Tan}(x+y) = \frac{\mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Sen}\ y}{\mathrm{Cos}\ x.\mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Sen}\ y}$$

Luego; dividiendo término a término por: Cos c.Cis y

$$\mathrm{Tan}(x+y) = \frac{\dfrac{\mathrm{Sen}\ x.\mathrm{Cos}\ y}{\mathrm{Cos}\ x.\mathrm{Cos}\ y} + \dfrac{\mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Sen}\ y}{\mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y}}{\dfrac{\mathrm{Cos}\ x.\mathrm{Cos}\ y}{\mathrm{Cos}\ x.\mathrm{Cos}\ y} - \dfrac{\mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Sen}\ y}{\mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y}}$$

$$\mathrm{Tan}\ (x+y) = \frac{\dfrac{\mathrm{Sen}\ x}{\mathrm{Cos}\ y} + \dfrac{\mathrm{Sen}\ y}{\mathrm{Cos}\ y}}{1 - \dfrac{\mathrm{Sen}\ x}{\mathrm{Cos}\ x} \cdot \dfrac{\mathrm{Sen}\ y}{\mathrm{Cos}\ y}}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\mathrm{Tan}(x+y) = \frac{\mathrm{Tan}\ x + \mathrm{Tan}\ y}{1 - \mathrm{Tan}\ x.\ \mathrm{Tan}\ y}}$$



## FUNCIONES DE UNA DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

Para determinar estas funciones utilizaremos las que ya deducimos para las funciones de una suma de ángulos, también necesitaremos la función de un ángulo negativo en términos del correspondiente positivo, además trataremos la diferencia como la suma de un ángulo positivo y otro negativo.

$$\mathrm{Sen}(x-y) = \mathrm{Sen}[x+(-y)] = \mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Cos}(-y) + \mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Sen}(-y)$$
$$= \mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Cos}\ x.\ (-\mathrm{Sen}\ y)$$

$$\boxed{\mathrm{Sen}(x-y) = \mathrm{Sen}\ x.\mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Cos}\ x.\mathrm{Sen}\ y}$$

$$\mathrm{Cos}(x-y) = \mathrm{Cos}[x+(-y)] = \mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}(-y) - \mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Sen}(-y)$$
$$= \mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Sen}\ x.\ (-\mathrm{Sen}\ y)$$

$$\boxed{\mathrm{Cos}\ (x-y) = \mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Sen}\ x.\ \mathrm{Sen}\ y}$$

$$\mathrm{Tan}(x-y) = \mathrm{Tan}[x+(-y)] = \frac{\mathrm{Tan}\ x + \mathrm{Tan}(-y)}{1 - \mathrm{Tan}\ x.\ \mathrm{Tan}\ (-y)}$$
$$= \frac{\mathrm{Tan}\ x + (-\mathrm{Tan}\ y)}{1 - \mathrm{Tan}\ x.\ (-\mathrm{Tan}\ y)}$$

$$\boxed{\mathrm{Tan}(x-y) = \frac{\mathrm{Tan}\ x - \mathrm{Tan}\ y}{1 + \mathrm{Tan}\ x.\ \mathrm{Tan}\ y}}$$

" La tangente de una suma de ángulos es igual a la suma de las tangentes de cada uno de los ángulos dividida entre unos menos el producto de las tangentes de los dos ángulos".

## FUNCIONES DEL ANGULO DOBLE

El ángulo doble lo tenemos cuando en la función de una suma de dos ángulos, -stos son iguales.

* $\text{Sen }(x+y) = \text{Sen } x.\ \text{Cos } y + \text{Cos } x.\ \text{Sen } y$

pero si $\boxed{x=y}$ tenemos:

$\text{Sen }(x+x) = \text{Sen } x.\ \text{Cos } x + \text{Cos } x.\ \text{Sen } x$

$$\boxed{\text{Sen } 2x = 2 \text{ Sen } x.\ \text{Cos } x}$$

* $\text{Cos }(x+y) = \text{Cos } x.\ \text{Cos } y - \text{Sen } x.\ \text{Sen } y$

Pero si $\boxed{x=y}$ tenemos:

$\text{Cos }(x+x) = \text{Cos } x.\ \text{Cos } x - \text{Sen } x.\ \text{Sen } x$

$$\boxed{\text{Cos } 2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x}$$

El coseno del doble ángulo puede combinarse con una de las relaciones Pitagóricas fundamentales:

$$\boxed{\text{Sen}^2\theta = 1-\text{Cos}^2\theta}$$

$$\boxed{\text{Sen}^e\theta + \text{Cos}^2\theta=1}$$

$$\boxed{\text{Cos}^2\theta = 1-\text{Sen}^2\theta}$$

Luego sustituyendo las formas equivalentes en el coseno de 2x.

$$\text{Cos } 2x = \text{Cos}^2 x-(1-\text{Cos}^2 x) = \text{Cos}^2 x - 1 + \text{Cos}^2 x = 2\ \text{Cos}^2 x - 1$$

$$\boxed{\text{Cos } 2x = 2\ \text{Cos}^2 x - 1}$$

$$\text{Cos } 2x = (1-\text{Sen}^2 x) - \text{Sen}^2 x = 1-\text{Sen}^2 x - \text{Sen}^2 x = 1-2\ \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Cos } 2x = 1-2\ \text{Sen}^2 x$$

*$\text{Tan } 9x+y) = \dfrac{\text{Tan } x + \text{Tan } y}{1-\text{Tan } x.\ \text{Tan } y}$ ; pero $\boxed{x = y}$

$$\text{Tan }(x+x) = \frac{\text{Tan } x+\text{Tan } x}{1-\text{Tan } x.\ \text{Tan } x}$$

Entonces: $\boxed{\text{Tan } 2x = \dfrac{2 \text{ Tan } x}{1-\text{Tan}^2 x}}$



## D E M O S T R A C I O N E S
## E J E R C I C I O

Existen muchas relaciones entre las funciones trigonométricas que son VALIDAS para todos los valores de argumento para los que las funciones tienen una definición, pero de entre esas muchas, entre-sacaremos, las 8 identidades que consideramos fundamentales y que son:

1) $\text{Sen } \theta = \dfrac{1}{\text{CSC } \theta}$

2) $\text{Cos } \theta = \dfrac{1}{\text{Sec } \theta}$

3) $\text{Tan } \theta = \dfrac{1}{\text{Cot } \theta}$

4) $\text{Tan } \theta = \dfrac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta}$

5) $\text{Cot } \theta = \dfrac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta}$

6) $\text{Sen}^2\emptyset + \text{Cos}^2\emptyset = 1$

7) $\text{Tan}^2\emptyset + 1 = \text{Sec}^2\emptyset$

8) $1 + \text{Cot}^2\ \emptyset = \text{Csc}^2\emptyset$

El uso de estas o identidades y en general de todas las identidades trigonométricas, nos pueden ser muy útiles en la demostración de problemas diversos.

La demostraciones usando identidades trigonométricas (Fundamentales, o de complemento), son un ejercicio de gran utilidad posterior, veamos algunas de las recomendaciones para simplificar el trabajo:

Ejemplo 1:

Demostrar que $\dfrac{1-\text{Tan}^2\theta}{1+\text{Tan}^2\theta} = 1-2\ \text{Sen}^2\ \theta$

1er. paso: Para demostrar que un miembro de una igualdad es igual a el otro debemos de manejar solamente uno de los miembros de esa igualdad. En este caso usaremos -