$$y \text{ que } \operatorname{Tan}^2\theta = \frac{\operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}$$

Sustituyendo los valores tenemos que:

$$\frac{1 - \dfrac{\operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}}{1 + \dfrac{\operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}} = 1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta$$

Simplificando
$$\frac{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}}{\dfrac{\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}} = 1\text{-}2\operatorname{Sen}^2\theta$$

Continua la Simplificación
$$\frac{(\operatorname{Cos}^2\theta)(\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta)}{(\operatorname{Cos}^2\theta)(\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta)} = 1\text{-}2\operatorname{Sen}^2\theta$$

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta} = 1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta$$

Ahora

Si $\underline{\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta} = 1$

y, $\underline{\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta} = (1\text{-}\operatorname{Sen}^2\theta)$

Sustituyendo estos valores en la igualdad tenemos que:

$$\frac{(1 - \operatorname{Sen}^2\theta) - \operatorname{Sen}^2\theta}{1} = 1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta$$

$$1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta$$

Ejemplo 2

Demostrar que: Senθ. Sec θ = Tan 0- Transformemos nuevamente el término de la izquierda.

$$\operatorname{Sen}\theta \operatorname{Sec}\theta = \operatorname{Tan}\theta$$

$$\operatorname{Sen}\theta \frac{1}{\operatorname{Cos}\theta} = \operatorname{Tan}\theta$$

$$\frac{\operatorname{Sen}\theta}{\operatorname{Cos}\theta} = \operatorname{Tan}\theta$$

$$\operatorname{Tan}\theta = \operatorname{Tan}\theta$$

Antes de elaborar otro ejemplo y algunos ejercicios es conveniente leer estos consejos.

1.- Memorizar bien todas las identidades trigonométricas incluyendo las posibles variaciones en las mismas.
2.- Tratar, cuando sea posible, de manejar todas las funciones en términos de senos y cosenos.
3.- Ver la posibilidad de factorizar para simplificar el problema.
4.- No use radicales, de ser posible.
5.- Una simplificación antes de iniciar el problema nos indicará un posible camino de solución.
6.- Elija siempre un miembro de la igualdad para efectuar el trabajo.

Ejemplo 3

Demostrar que $\operatorname{Sec}^2 x - \operatorname{Csc}^2 x = \operatorname{Tan}^2 x - \operatorname{Cot}^2$

Transforme el miembro de la izquierda con las siguientes igualdades:

$\operatorname{Sec}^2 x = \operatorname{Tan}^2 x + 1$

$\operatorname{Csc}^2 x = 1 = \operatorname{Cot}^2 x$

Sustituyendo.

$$\operatorname{Tan}^2 x + 1 - (1 + \operatorname{Cot}^2 x) = \operatorname{Tan}^2 x - \operatorname{Cot}^2 x$$

$$\operatorname{Tan}^2 x + 1 - 1 - \operatorname{Cot}^2 x =$$

$$\operatorname{Tan}^2 x - \operatorname{Cot}^2 x = \operatorname{Tan}^2 x - \operatorname{Cot}^2 x$$

Ejemplo 4

Demostrar que:

$\operatorname{Sen}^4 x - \operatorname{Cos}^4 x = 2 \operatorname{Sen}^2 x - 1$

Tomemos el miembro de la izquierda; veamos que se puede factorizar como una diferencia de dos cuadrados.

$(\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x)\ (\operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x) = 2 \operatorname{Sen}^2 x - 1$

Sustituyendo.

$$[\operatorname{Sen}^2 x - (1 - \operatorname{Sen}^2 x)] = 2 \operatorname{Sen}^2 x - 1$$

$\operatorname{Sen}^2 x - 1 + \operatorname{Sen}^2 x = 2 \operatorname{Sen}^2 x - 1 = 2 \operatorname{Sen}^2 x - 1$

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas,

Demostrar que:

1.- $\dfrac{\operatorname{Cos} x}{1 - \operatorname{Sen} x} = \dfrac{1 + \operatorname{Sen} x}{\operatorname{Cos} x}$

2.- $\dfrac{\operatorname{Tan}^2 \theta + 1}{2 \operatorname{Cos}(-\theta) - \operatorname{Sen}(90 - \theta)} = \operatorname{Sen}^3$

3.- $\operatorname{Cos}^4 x - \operatorname{Sen}^4 x = 1 - 2 \operatorname{Sen}^2 x$

4.- $\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Sec}^2 x + \operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Csc}^2 x = \operatorname{Sec}^2 x$

5.- $\operatorname{Tan} x \operatorname{Sen} x \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sec} x$

6.- $\operatorname{Sec}^2 x\ (1 - \operatorname{Sen}^2 x) = 1$

7.- $\dfrac{\operatorname{Cot} \theta - \operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Cos}^3 \theta} = \dfrac{\operatorname{Csc} \theta}{1 + \operatorname{Sen} \theta}$

8.- $\dfrac{1 - \operatorname{Cos}^6 x}{\operatorname{Sen}^2 x} = 1 + \operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Cos}^4 x$

9.- Complete la siguiente tabla expresando cada función en términos de las otras siguiendo el ejemplo del primer renglón.

	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
sen θ	sen θ	$\pm\ 1-\cos^2\theta$	$\frac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\theta}}{\sec\theta}$	$1/\csc\theta$
cos θ		cos θ				
tan θ			tan θ			
cot θ				cot θ		
sec θ					sec θ	
csc θ						csc θ

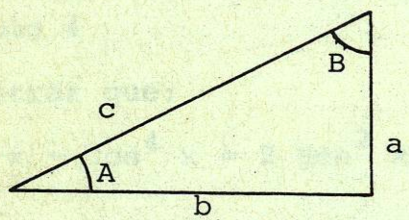
RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Tenemos que los elementos de un triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.

La resolución de un triángulo consiste en realizar las operaciones necesarias para determinar tres de sus elementos cuando tres son conocidos, siempre que uno de ellos por lo menos sea un lado.

Para resolver un triángulo rectángulo se deben de dar dos elementos, además del ángulo recto, habiendo de ser uno de ellos un lado.

A continuación veremos algunos casos que pueden ocurrir, los cuales se pueden resolver por completo utilizando las siguientes identidades o fórmulas.



$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\text{Sen } B = \frac{b}{c}$

$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\text{Cos } B = \frac{a}{c}$

$\text{tg } A = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\text{tg } B = \frac{b}{a}$

<u>Caso I</u>.- Cuando los elementos dados son un lado y un ángulo.

En este caso se emplea la función del ángulo que contenga el lado dado y el lado pedido.

Ejercicio 1.- Dado A= 15° y c=7. Hallar los lados <u>a</u> y <u>b</u> y el ángulo <u>B</u>.

Haciendo uso de un ángulo rectángulo, tenemos:

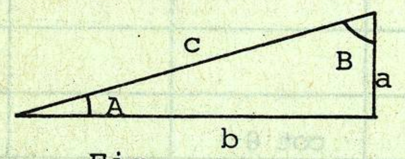


Fig.

usando la función seno:

$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$ despejando <u>a</u>.

Tenemos a=c. sen A sustituyendo los valores correspondientes:

a= 7 sen 15°, para encontrar los valores de la función de un ángulo determinado haremos uso de las tablas trigonométricas que vienen al final de la unidad.

Tenemos que sen 15°- .25882

por lo tanto: a= 1.81174

Ahora usando la función coseno, tenemos:

$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$, despejando b:

b= c Cos A

Sustituyendo los valores:

b= 7 Cos 15°

b= 6.76

Para determinar el ángulo B, tenemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180° entonces:

$$A + B + C = 180° \qquad \text{Sí } A = 15°,\ C = 90°$$

Despejando B:

B= 180° - A-C

B= 180° - 15 - 90

B = 75°

E J E R C I C I O 13

I.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos.

1) Dado A= 15°	c= 7	
2) Dado B= 67°	a= 5.	
3) Dado B= 50°	b= 20	
4) Dado a= .35	c= .62	
5) Dado a=273	b= 418	
6) Dado A= 38°	a= 8.09	
7) Dado B= 75°	c= ,014	
8) Dado b= 58.6	c= 76.3	
9) Dado A= 9°	b= 937	
10) Dado a= 3.414	b= 2.875	
11) Dado A=84°16'	a= .0033503	
12) Dado A= 46°23'	c= 5278.6	
13) Dado a= 529.3	c= 902.7	
14) Dado B= 23°9'	b= 75.48	
15) Dado B= 18°38'	c= 2.5432	

RESOLUCION DE TRIANGULOS OBICUANGULOS

Para resolver o encontrar las partes faltantes (ángulos,-lafos) de cualquier triángulo, haremos uso de las siguientes propiedades de los triángulos.

I.- En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; es decir, basándonos en los triángulos si--guientes:

Fig. 44

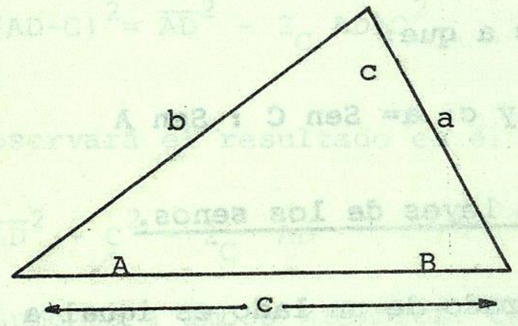
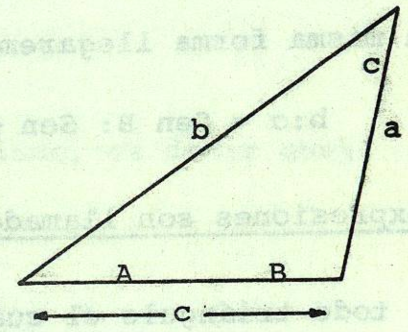


Fig. 45

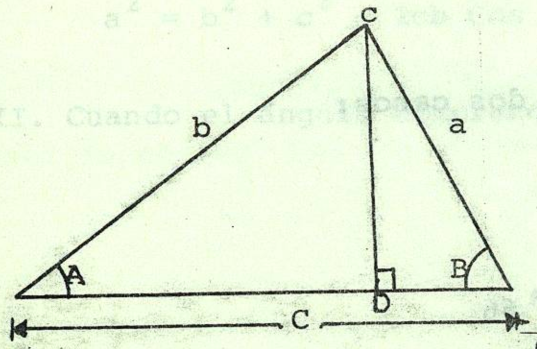


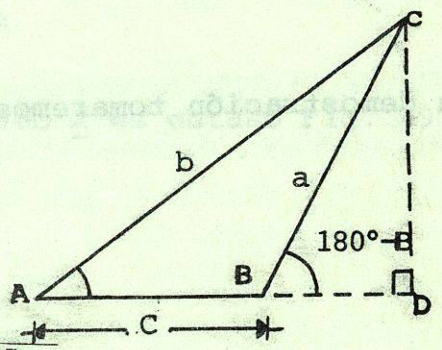
a.b = Sen A: Sen B

Esta propiedad la demostraremos enseguida mediante dos ca sos:

Una cuando los ángulos A y B son agudos (Fig. 44) y otro caso - - cuando uno de ellos sea obtuso (Fig. 45).

En cada caso trazaremos una línea perpendicular CD al lado AB. - (Fig. 46 y Fig. 47).





Entonces basándonos en cada figura tendremos que: CD= a Sen B (Fig. 46) y por la Fig. 47 tenemos que CD= a Sen CBD y a - Sen (180°-B= a Sen B, entonces, por lo tanto: CD= a Sen B; así - por uno y otro caso:

$$\boxed{b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B}$$

Por lo tanto, si lo ponemos en forma de proporciones, tenemos que:

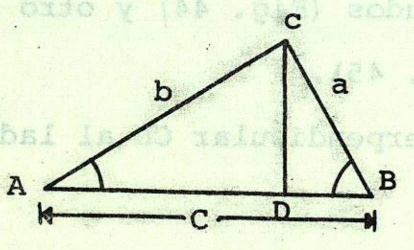
$$a:b = \text{Sen } A : \text{Sen} B$$

y de la misma forma llegaremos a que:

$$b:c = \text{Sen } B : \text{Sen } C \quad y \quad c : a = \text{Sen } C : \text{Sen } A$$

Estas expresiones son llamadas leyes de los senos.

II.- En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido: es decir, del triángulo ABC.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$

Para su demostración tomaremos dos casos:

Caso I.- Cuando el ángulo comprendido A sea agudo y el ángulo B será también agudo, Fig. 46 o cuando el ángulo B sea obtuso Fig. 47.

Entonces, de la Fig. 46 tenemos:

BD = C-AD y en la Fig. 47

BD = AD-C

Elevando el cuadrado, obtendremos:

$$\overline{BD}^2 = (C-AD)^2 = C^2 - 2c\ AD + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BD}^2 = (AD-C)^2 = \overline{AD}^2 - 2c\ AD + C^2$$

como observará el resultado es el mismo, es decir que:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + C^2 - 2c\ AD$$

Ahora sumemos a ambos miembros: $\overline{CD}^2$

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + C^2 - 2c\ AD$$

Pero como observará en cada figura, tenemos que:

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^1 = a^2 \qquad y \qquad \overline{AD} + \overline{CD}^2 = b^2$$

y AD = b Cos A

y por lo tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \text{ Cos } A$$

Caso II. Cuando el ángulo comprendido A es obtuso Fig. 49.