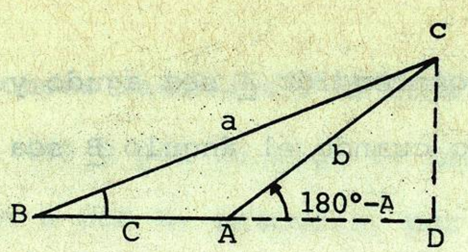


De la Fig. 49 tenemos que:

$$BD = AD + C$$

Elevando al cuadrado, tenemos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + 2_C AD + C^2$$

Ahora sumemos $\overline{CD}^2$ a ambos miembros.

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + C^2 + 2C \quad AD$$

De la Fig. 49 tenemos que:

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = a^2 \text{ y } \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = B^2$$

y AD = b Cos CAD = b cos (180°-A)= -b Cos A

Por lo tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$

y de la misma manera se compueba que:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \text{ Cos } B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } A$$

Estas expresiones son llamadas Ley de los Cosenos.

Ahora, despejando el coseno de cada una de las igualdades tenemos que:

$$\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{Cos } B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ebc}$$

$$\text{Cos } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

A continuación aplicaresmos estas propiedades para determinar las partes faltantes de un triángulo.

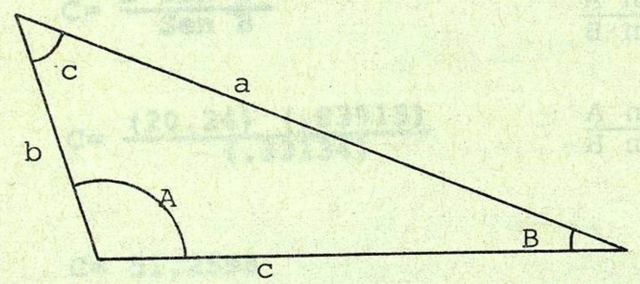
Para esto podemos distinguir cuatro casos:

Caso I.- Dado un lado y dos ángulos cualesquiera .

Por ejemplo:

Dado b=2-.24, A=103°36", B=19°21'

Determinar el ángulo C, y los lados a y c para determinar estas-partes construyamos un triángulo:



Primero encontraremos el valor del ángulo faltante C.

Renemos que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a -- 180°, por lo tanto:

$$A+B+C = 180°$$

$$C+ 180° - A-B$$

Sustituyendo:

$$C= 180° - 103°36' - 19°21'$$

$$C= 180° - 12257'$$

$$\begin{array}{r} 103°\ 36' \\ 19°\ 21' \\ \hline 122°\ 57' \end{array}$$

180° lo podemos expresar como 179° 60'

Entonces:

$$C = 179° 60' - 122° 57'$$

$$c = 57° 03'$$

$$\begin{array}{r} 179° 60' \\ \underline{122° 57'} \\ 57° 03' \end{array}$$

Ahora, para determinar los lados a y c utilizaremos la propiedad.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{\text{SenA}}{\text{SenB}} \qquad y \qquad \frac{c}{b} \quad \frac{\text{SenC}}{\text{SenB}}$$

Recordando que: a;b=Sen A: Sen A

c;b=Sen C: Sen B

Despejando a de $\frac{a}{b}$ $\frac{\text{Sen A}}{\text{Sen B}}$

$$a = b \, \frac{\text{Sen A}}{\text{Sen B}}$$

Tenemos que:

$$\text{Sen A} = \text{Sen } 103° 36'$$

$$= \text{Sen } (90°+13°36') = \text{Cos } (13° 36')$$

Entonces:

$$\text{Sen}(103° 36") = \text{Cos } 13° 36'$$

$$= .97196$$

$$\text{SenB} = \text{Sen } (19°21')$$

$$= .33134$$

Ahora , sustituyendo:

$$a = \frac{b \text{ Sen A}}{\text{Sen B}}$$

$$a = \frac{(20.241(.07196)}{.33134}$$

$$a = 59.3730$$

Ahora determinaremos el valor de C,

Tenemos que: $\frac{c}{b} = \frac{\text{Sen C}}{\text{Sen B}}$

Entonces: $c = \frac{b \text{ Sen C}}{\text{Sen B}}$

Tenemos que: $\text{Sen C} = \text{Sen } 57° 3'$

$$= .83915$$

y Sen B = .33134

Sustituyendo en:

$$C = \frac{b \text{ Sen C}}{\text{Sen B}}$$

$$C = \frac{(20.24)\ (.83915)}{(.33134)}$$

$$C = 51.2598$$

Entonces tenemos que:

el ángulo C= 57° 3'

y los lados a= 59.3730 y

C= 51.2598

E J E R C I C I O

Encuentre los datos faltantes de los siguientes triángulos, dado los siguientes datos.

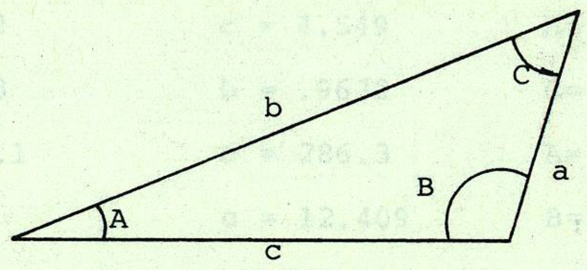
1) a= 180°	A= 38°	B= 75° 43°
2) b= .82	B= 51°42'	C= 109° 17'
3) c= 24.637	A= 83°39'	B= 38° 56'
*4) b= .6708	A= 26°10'45"	C= 44°35'12"
*5) a= 5.0454	B= 90°8'26"	C= 21°51'34"
6) c= 4592.36	A= 74°27'	c+ 61°
7) c= .93109	A= 15° 34'	C= 123° 29'
*8) b= 3.67683	A= 67°21'54"	B= 57° 48'
9) a= 71396.72	B= 42° 55'	C= 16° 4'
10) b= 254.05	A= 30°	C= 90°

Caso II. Dado dos lados y el ángulo comprendido.

Por ejemplo:

si a=82. c= 167 y B=98°14'. hallar A,C, y b

Primeramente representaremos los datos en un tiángulo.



Usando la ley de los cosenos calcularemos el valor de b, es decir:

$$B^2=a^2+c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$

Tenemos que: a= 82, c= 167

Cos= 98°14' = Cos (90+8°14')

= -Sen 8° 14

Entonces Cos 90° 14' = -Sen 8°14

Cos 90° 14' = -'14320

Sustituyendo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$

$$b^2 = (82)^2 + (167)^2 - 2(82)(167)(-'14320)$$

Entonces:

$$b= \sqrt{0724+27889+392.19616}$$

b= 196.30323

Ahora, por la expresión:

$$\text{Cos A}= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Hallaremos los valores de los ángulos <u>A</u> y <u>C</u>, tenemos que:

a = 82

b = 196.3032

c = 167

Sustituyendo, tenemos:

$$\text{Cos A}= \frac{(196.3032)^2 + (167)^2 - (82)^2}{2(196.3032)\ (167)}$$

Cos A= .9054

Entonces:

$$A= \text{Cos}^{-1}\ ('9054)$$

A= 4° 25' 10"

Ahora para calcular, el ángulo C;

A+B+C= 180

C= 180°-A-B

C= 180-24°25'10"-98°14'

C= 180°-122° 39" 10"

180° lo podemos poner como:

C= 177°59'60"-122"39'10"

Entonces:

C= 57°20'50"

E J E R C I C I O

Encuentre los datos faltantes de los siguientes **triángu--**
los, dados los siguientes datos:

1) a = 67	c = 33	B= 36°
2) a = 886	b = 747	C= 71°54'
3) b = 4.102	c = 4.549	A= 62°9'
4) a = .5953	b = .9632	C= 134°
5) b = 1292.1	c = 286.3	A= 27°13'
6) a = 7.48	c = 12.409	B= 83°26'52"
7) a = 93.273	b = 81.512	C= 58°
8) b = 0.2615	c = .06086	A= 115°42'
9) a = 35384.82	c = 57946.34	B= 19°37'
10) b = 27.4	a = 60.59	C= 90°

<u>Caso III</u>.- Dados los tres lados del triángulo en c-estión.

Por ejem-plo:

Dado a = 2.52; b= 2.79; c= 2.33

Gallar los ángulos A,B,C.

Para calcular los ángulos utilizaremos las expresiones:

$$\text{Cos A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Sustituyendo en cada una los valores correspondientes obtendre--
mos que:

$$\text{Cos A}= \frac{(2.79)^2 + (2.33)^2 - (2.51)^2}{2(2.79)(2.33)}$$