C I R C U N F E R E N C I A

CAPILLA ALFONSINA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

CAPILLA ALFONSINA

"CIRCUNFERENCIA"

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

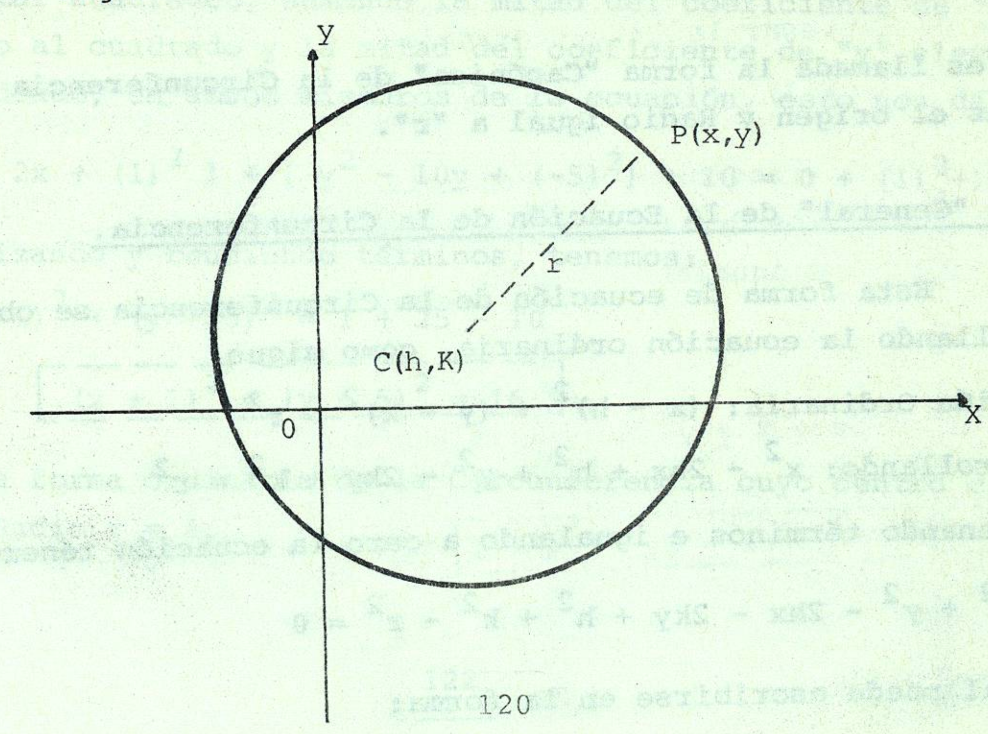
El punto fijo se llama "centro" de la circunferencia, y la distancia constante se llama Radio (r).

Determinación de la forma ordinaria de la ecuación de la Circunferencia.

Si consideramos un punto P (x,y) que pertenece a una circunferencia cuyo centro es el punto c(h,k), y radio igual a "r" entonces de acuerdo a la definición dada debe cumplirse que la distancia del punto "c" al punto "p" es igual al radio "r" es decir.

$$\boxed{\overline{CP} = r}$$

Luego ilustrando lo anterior mediante una figura y calculando la distancia de los puntos c(h,k) y P(x,y) que debe ser igual a la magnitud del radio "r", dará como resultado una ecuación.



De la figura se observa que $\overline{CP} = r$ ó de otra forma

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$, si eliminamos el radical de la ecuación nos queda:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

que, es llamada la "Forma Ordinaria" de la ecuación de la circunferencia. Cuyo centro es el punto (h,k) y el Radio igual a "r".

Forma "Canónica" de la Ecuación de la Circunferencia.

Esta forma aparece cuando el centro de la Circunferencia se encuentra en el origen de coordenadas, es decir para el caso particular donde h = 0 y k - 0, el centro será el punto (0,0).

Aplicando lo anterior a la forma ordinaria, tendremos:

$$(x-o)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

Luego simplificando nos queda:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

que, es llamada la forma "Canónica" de la Circunferencia cuyo centro es el origen y Radio igual a "r".

Forma "General" de la Ecuación de la Circunferencia.

Esta forma de ecuación de la Circunferencia se obtiene desarrollando la ecuación ordinaria, como sigue:

Ecuación Ordinaria: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Desarrollando: $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

Y ordenando términos e igualando a cero la ecuación tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

La cual puede escribirse en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + f = 0$$

Sí $D = -2h$; $E = -ek$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$

Entonces se concluye que la ecuación de una circunferencia también puede escribirse en la forma siguiente, que es llamada la Forma General de la Circunferencia.

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + ey + f = 0}$$

Los siguientes ejemplos muestran como transformar la ecuación de una circunferencia de su forma general a la forma ordinaria y viceversa.

Ejemplo 1. Expresar la siguiente ecuación de la Circunferencia -- $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$, en su forma ordinaria.

Procedimiento:

a) Reunir cada término cuadrático con su término lineal correspondiente.

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y + 10 = 0$$

b) Completar cuadrados, sumando la mitad del coeficiente de "x" - elevado al cuadrado y la mitad del coeficiente de "y" elevado al cuadrado, en ambos miembros de la ecuación, esto nos dá.

$$[\,x^2 + 2x + (1)^2\,] + [\,y^2 - 10y + (-5)^2] + 10 = 0 + (1)^2 +)-5)^2$$

c) Factorizando y reuniendo términos, tenemos:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 1 + 25 - 10$$

$$\boxed{(x+1)^2 + (y-5)^2 = 16}$$

que, es la forma ordinaria de la Circunferencia cuyo centro es: - (-1,5) y Radio r = 4.

Ejemplo 2. Expresar la siguiente ecuación de la circunferencia.

$3x^2 + 3y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$, en su forma ordinaria

Solución: En este ejemplo los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser reducidos a la unidad, para esto todos los términos de la ecuación se dividen por 3. Y después se procede igual que, en el ejemplo anterior.

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$[\, x^2 - x + (-\tfrac{1}{2})^2] + [\, y^2 + \frac{2}{3}y + (\frac{1}{3})^2 \,] + \frac{1}{3} = 0 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{9 + 4 - 12}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}}$$

Circunferencia con centro $(\tfrac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, Radio $= \frac{1}{6}$

Ejemplo 3. Expresar la Circunferencia:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ en su Forma General.

Solución: Esta transformación consiste en desarrollar los cuadrados en los dos Binomios, trasponiendo el término independiente e igualando a cero.

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0}$$ Forma General

Gráfica de una Circunferencia, convirtiendo su ecuación de la Forma General, a su Forma Ordinaria ó Reducida.

Para determinar la gráfica de una Circunferencia es más conveniente expresarla en la forma ordinaria, porque de esta manera conoceremos el centro (c) y el Radio (r) ilustraremos esto con algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Graficar: $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

Solución: Transformando a la forma ordinaria la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$x^2 + [y^2 - 6y + (-3)^2] + 5 = 0$$

$$x^2 + (y - 3)^2 + 5 = 0 + (-3)^2$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9 - 5$$

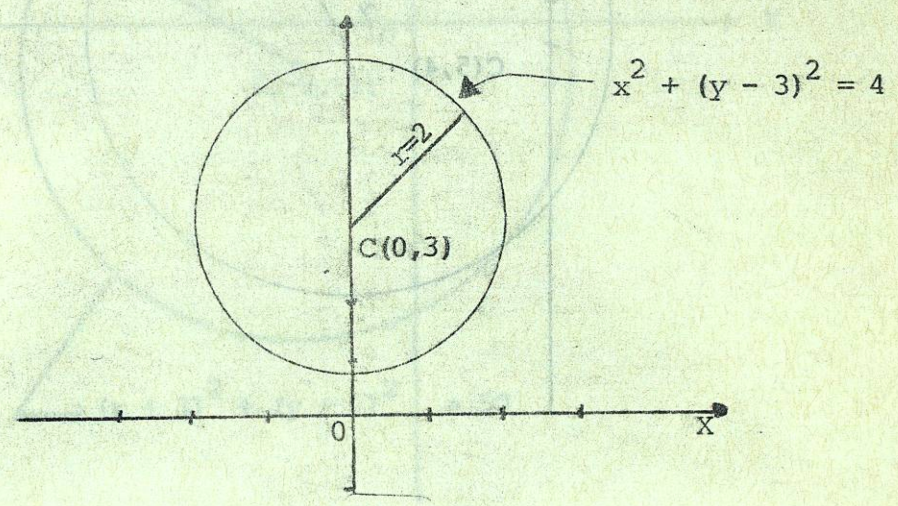
$$\boxed{x^2 + (y - 3)^2 = 4}$$

La forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Indica que: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,\ K = 3;\ C(0,3) \\ r^2 = 4;\ r = 2 \end{array} \right\}$

Luego con el centro (0,3) y el Radio = 2 se procede a Graficar:



Ejemplo 2. Graficar la Circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$$

Solución; Tranformando a la forma ordinaria la ecuación dada:

$$x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 + 8y = 0$$

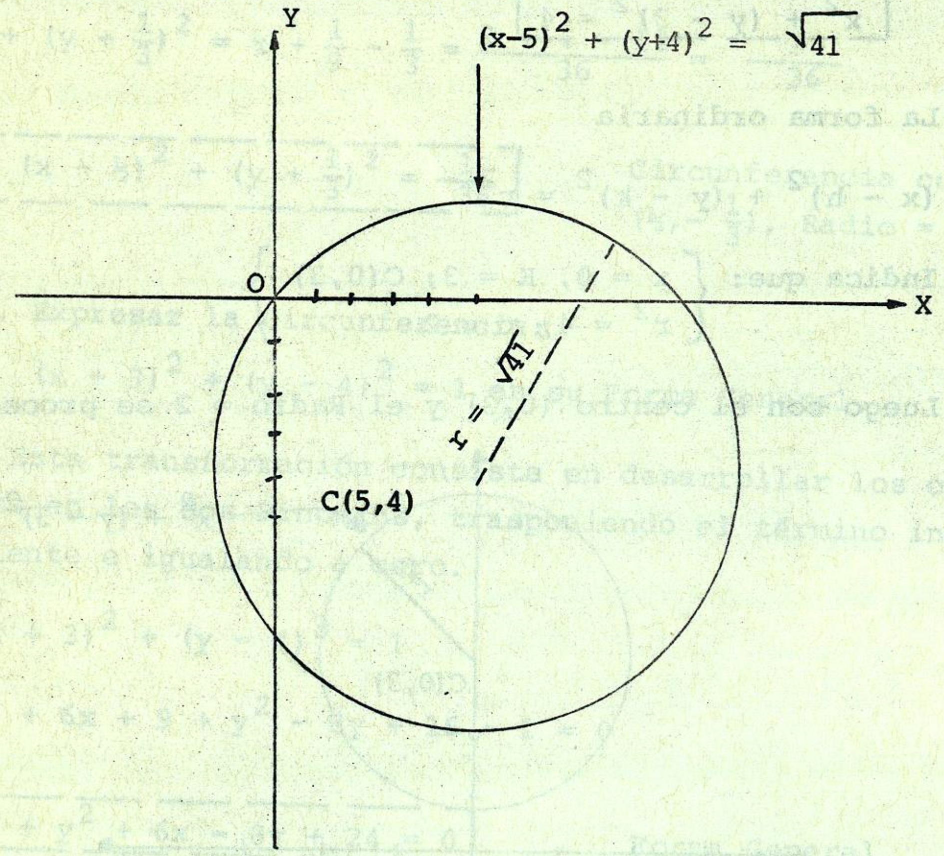
$$[x^2 - 10x + (-5)^2] + [y^2 + 8y + (4)^2] = 0 + (-5)^2 + (4)^2$$

$$\boxed{(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 41}$$

La forma ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Indica que: $\left\{\begin{array}{l} h = 5,\ k = -4;\ C(5,-4) \\ r^2 = 41;\ r = \sqrt{41} \end{array}\right\}$

Luego con el centro $(5,-4)$ y $r = \sqrt{41}$, se procede a graficar:



Ejemplo 3. Graficar la Circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Solución; Tranformando a la forma ordinaria la ecuación dada:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 2y = 40$$

$$[x^2 + 6x + (3)^2] + [y^2 + 2y + (1)^2] = 40 + (3)^2 + (1)^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 40 + 9 + 1$$

$$\boxed{(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 50}$$

La forma ordinaria: $(x - h^2)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Indica que: $\left\{\begin{array}{l} h = -3,\ k = -1;\ C(-3,-1) \\ r^2 = 50;\ r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{array}\right\}$

Luego con $C(-3,-1)$ y $r = 5\sqrt{2}$ procedemos a graficar.