Determinación de las Distintas Formas de la Ecuación de la Circunferencia, dados sus Elementos.

La ecuación de una Circunferencia puede determinarse a -- partir de su centro y su Radio oó también de alguna otra información que permita conocer estos dos elementos importantes; los siguientes ejemplos tratan de los casos más comúnes.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la Circunferencia de centro --- C(-3,-1) y Radio 7.

$C(-3,-1)$, $r = 7$

$C(h,k)$ $r^2 = (7)^2$

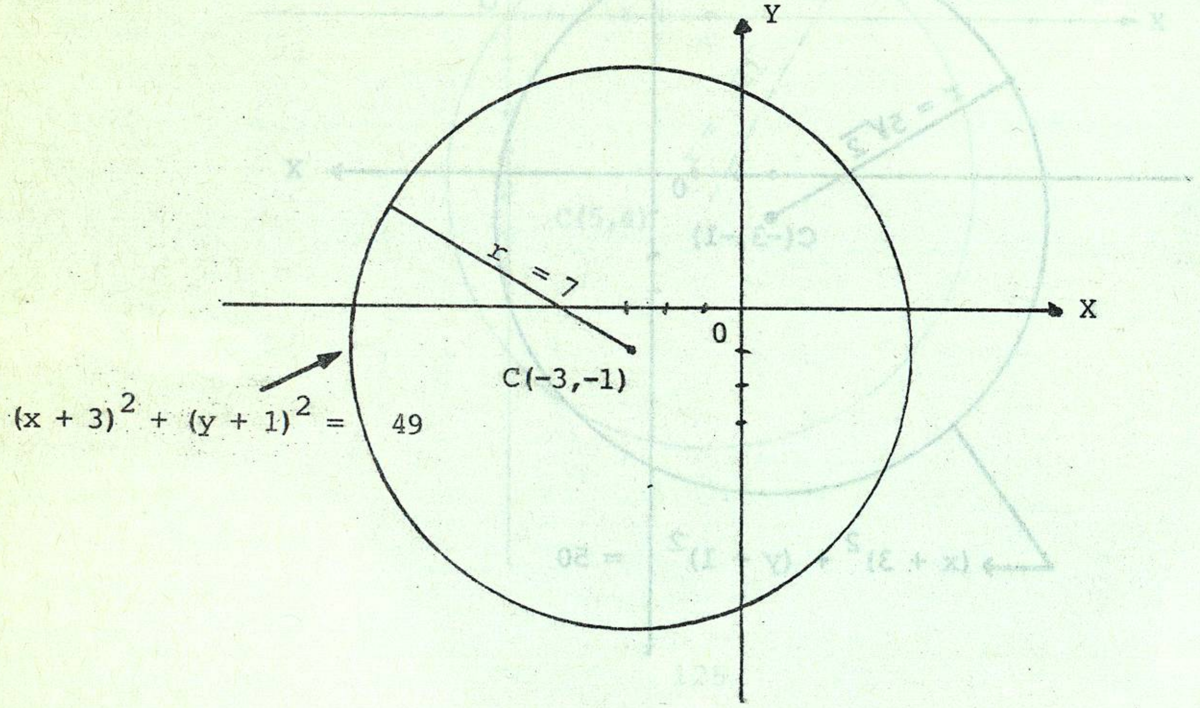
Substituyendo en la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Nos queda:

$$\boxed{(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 49}$$

La Gráfica se muestra a continuación.



Ejemplo 2. Los extremos de un diámetro de una Circunferencia son - los puntos A(2,3) y B(-4,5). Hallar la ecuación de la curva.

Solución: La distancia $\overline{AB}$ es la longitud del diámetro entonces:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Luego el radio $r = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$$\boxed{r = \sqrt{10}}$$

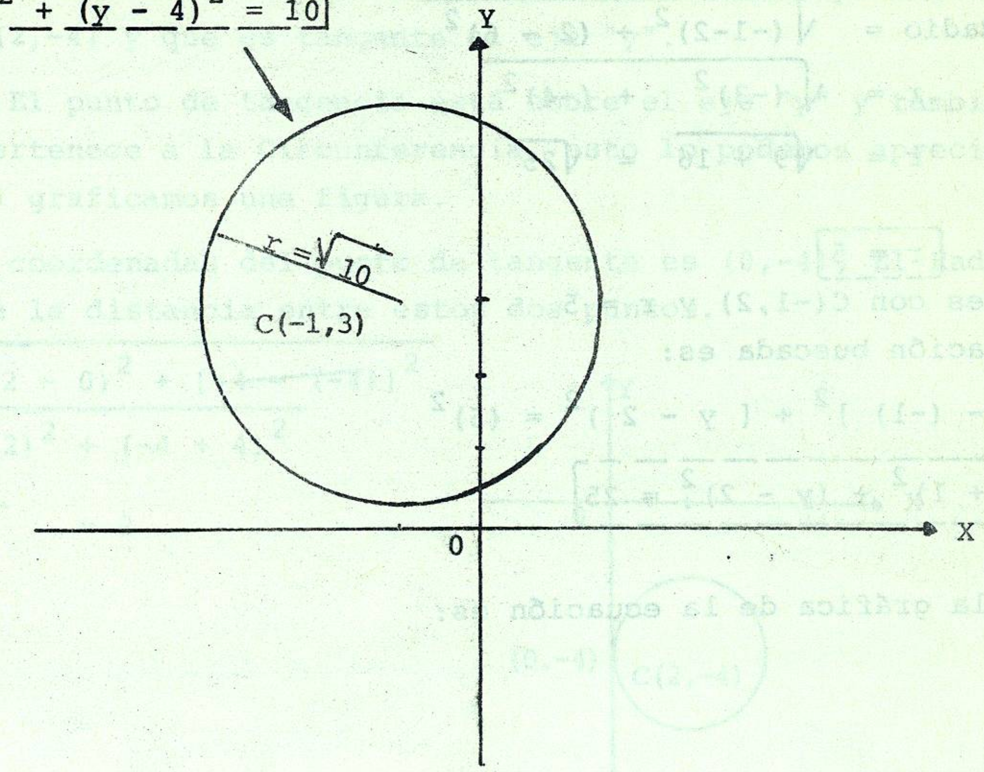
El centro es el punto medio de $\overline{AB}$ que es el diámetro.

$$Xm = \frac{x_1 + y_2}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ ; } Ym = \frac{Y^1 + Y^2}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Entonces: $C(-4,4)$ y $r = \sqrt{10}$ donde la ecuación buscada es:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (\cancel{\sqrt{10}})^{\cancel{2}} = 10$$

$$\boxed{(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10}$$



Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la Circunferencia con centro en el origen y su Radio igual a 3.

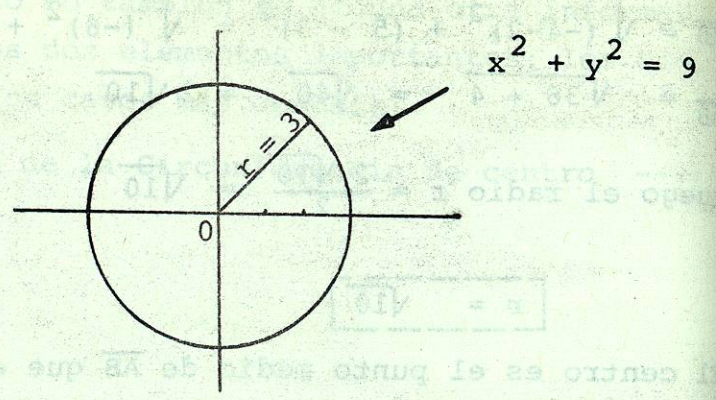
Solución: Como el centro es el punto (0,0) y r = 3 la ecuación -- tiene forma:

$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = (3)^2$

$\boxed{x^2 + y^2 = 9}$

Donde la gráfica es:



Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por el punto A(2,6) y su centro es el punto C(-1,2).

Solución: El Radio de la Circunferencia puede calcularse encontrando la distancia que hay entre los puntos "A" y "C".

$\overline{AC} = \text{Radio} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-6)^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$r = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$\boxed{r = 5}$

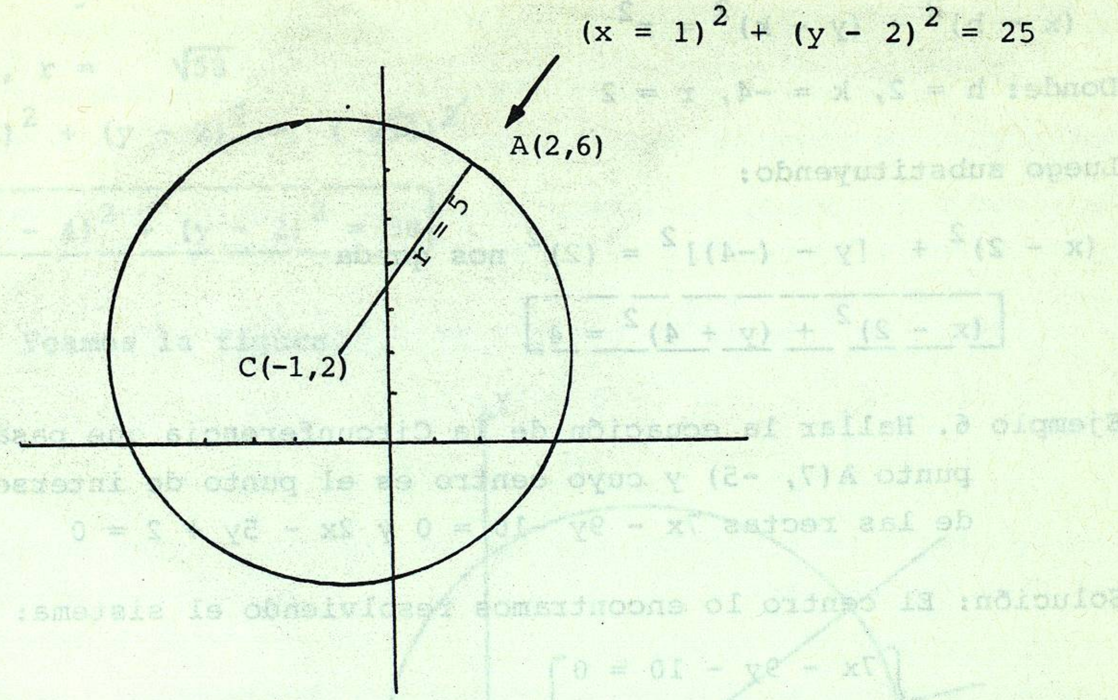
Entonces con C(-1,2) y r = 5

La ecuación buscada es:

$[\,x - (-1)\,]^2 + [\,y - 2\,)^2 = (5)^2$

$\boxed{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25}$

Luego la gráfica de la ecuación es:



Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la Circunferencia cuyo centro es C(2,-4) y que es tangente al eje "y".

Solución: El punto de tangencia está sobre el eje "y" y también - pertenece a la Circunferencia, esto lo podemos apreciar - si graficamos una figura.

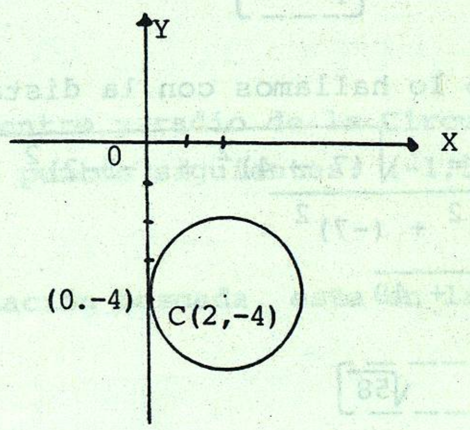
Donde las coordenadas del punto de tangente es (0,-4), El Radio - es igual a la distancia entre estos dos puntos.

$r = \sqrt{(2-0)^2 + [-4-(-4)]^2}$

$r = \sqrt{(2)^2 + (-4+4)^2}$

$r = \sqrt{4} = 2$

$\boxed{r = 2}$



La Ecuación de la Circunferencia es de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde: $h = 2$, $k = -4$, $r = 2$

Luego substituyendo:

$$(x - 2)^2 + [y - (-4)]^2 = (2)^2 \text{ nos queda}$$

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4}$$

Ejemplo 6. Hallar la ecuación de la Circunferencia que pasa por el punto A(7, -5) y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$

Solución: El centro lo encontramos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 7x - 9y - 10 = 0 \\ 2x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (-2)\ [7x - 9y - 10 = 0] & 7x - 9(2) - 10 = 0 \\ (\ 7)\ [2x - 5y + 2 = 0] & 7x - 18 - 10 = 0 \\ -14x + 18y + 20 = 0 & 7x = 28 \\ 14x - 35y + 14 = 0 & \boxed{x = 4} \\ \hline -17y + 34 = 0 & \end{array}$$

Entonces el centro es: C(4,2)

$$\boxed{y = 2}$$

El Radio lo hallamos con la distancia de los puntos $\overline{AC}$.

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-5-2)^2}$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-7)^2}$$

$$r = \sqrt{9 + 49}$$

$$\boxed{r = \sqrt{58}}$$

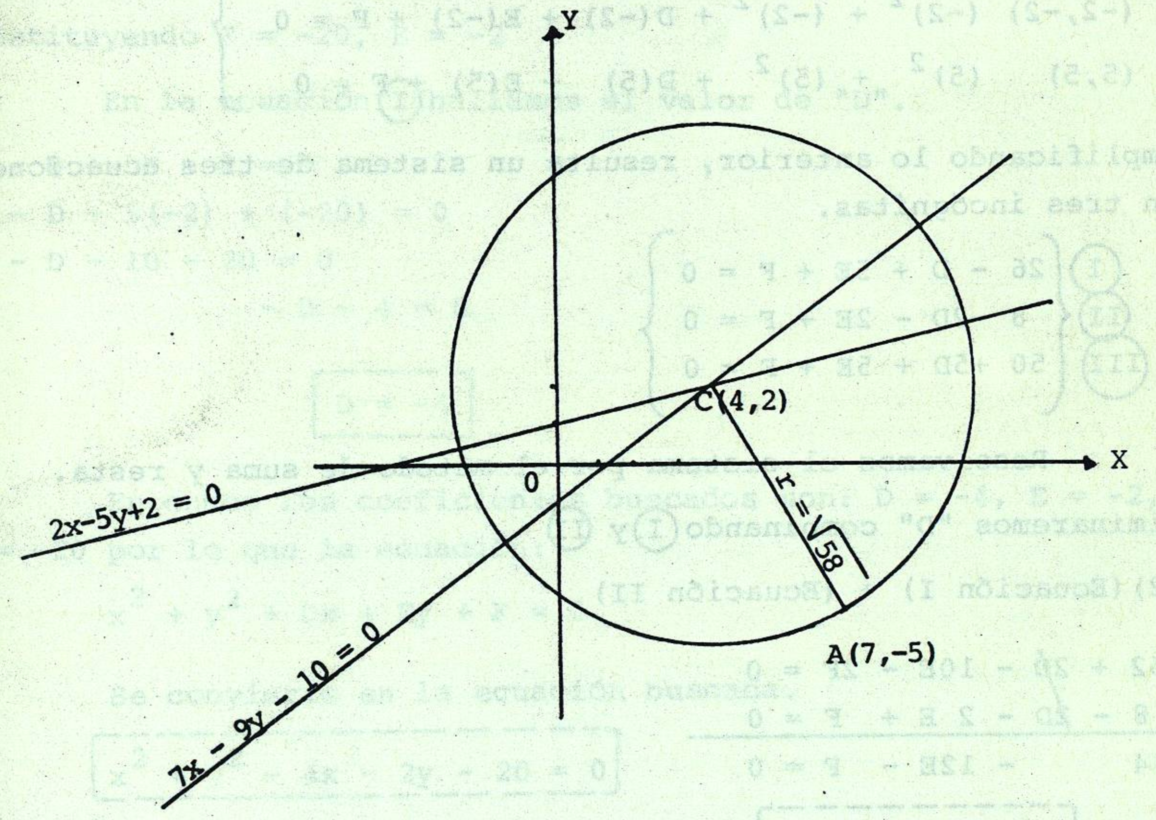
La Ecuación de la Circunferencia se encuentra con:

$C(4,2)$, $r = \sqrt{58}$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (\cancel{\sqrt{58}})^{\cancel{2}}$$

$$\boxed{(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 58}$$

Veamos la figura.



Ejemplo 7. **Hallar la ecuación, centro y radio de la Circunferencia que pasa por los tres puntos siguientes: (-1,5), (-2-2), (5,5).**

Solución: **Supondremos que la ecuación buscada, esta en la forma general:**

$$x^2 + y^2 + Dx + ey + F = 0$$

En donde los coeficientes D, E y F deben ser determinados.

Luego, como los tres puntos pertenecen a la Circunferencia deben- satisfacer la ecuación anterior.

De acuerdo con esto, tendremos tres ecuaciones al substituir los valores de las variables en la ecuación es decir:

$$\left\{\begin{array}{ll} (-1,5) & (-1)^2 + (5)^2 + D(-1) + E(5) + F = 0 \\ (-2,-2) & (-2)^2 + (-2)^2 + D(-2) + E(-2) + F = 0 \\ (5,5) & (5)^2 + (5)^2 + D(5) + E(5) + F = 0 \end{array}\right\}$$

Simplificando lo anterior, resulta un sistema de tres ecuaciones- con tres incógnitas.

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}\left\{\begin{array}{l} 26 - D + 5E + F = 0 \\ 8 - 2D - 2E + F = 0 \\ 50 + 5D + 5E + F = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema por el método de suma y resta.

Eliminaremos "D" combinando I y II

(-2)(Ecuación I) + (Ecuación II)

$$\begin{array}{l} -52 + \cancel{2D} - 10E - 2F = 0 \\ \underline{8 - \cancel{2D} - 2E + F = 0} \\ -44 \quad -12E - F = 0 \end{array}$$

$$\boxed{-12E - F = 44} \qquad \text{A}$$

Eliminaremos "D" combinando II y III

(Ecuación II)(5) + (Ecuación III)(2)

$$\begin{array}{l} 40 - \cancel{10D} - \cancel{10E} + 5F = 0 \\ \underline{100 + \cancel{10D} + \cancel{10E} + 2F = 0} \\ 140 \quad + 7F = 0 \\ \quad 7F = -140 \end{array}$$

$$\boxed{F = -20}$$

Substituyendo el valor.

F = -20 en la ecuación A

$$\begin{array}{l} -12E - F = 44 \\ -12E - (-20) = 44 \\ -12E + 20 = 44 \\ -12E = 24 \end{array}$$

$$\boxed{E = -2}$$

Substituyendo F = -20, E = -2

En la ecuación I hallamos el valor de "D".

$$\begin{array}{l} 26 - D + 5E + F = 0 \\ 26 - D + 5(-2) + (-20) = 0 \\ 26 - D - 10 - 20 = 0 \\ \qquad - D - 4 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{D = -4}$$

Entonces los coeficientes buscados son: D = -4, E = -2, - F = -20 por lo que la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se convierte en la ecuación buscada.

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0}$$

Finalmente como se piede el centro y el Radio, la ecuación se convierte a la forma ordinaria.

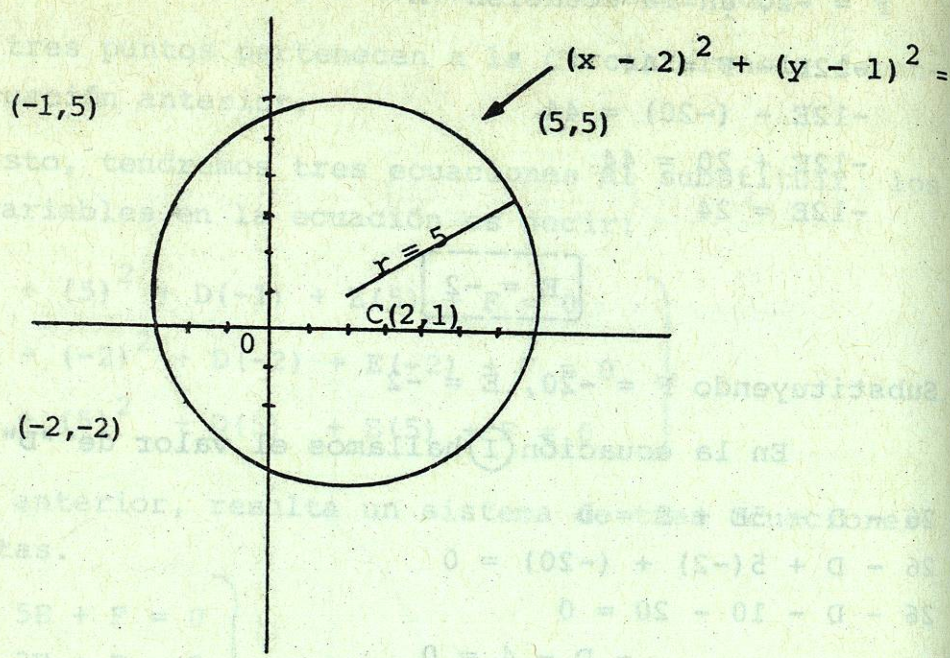
$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$

$$[x^2 - 4x + (-2)^2] + [y^2 - 2y + (-1)^2] = 20 + (-2)^2 + (-1)^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 + 4 + 1$$

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25} \quad \text{Donde } C(2,1) \text{ y } r = 5.$$

La figura de este problema se muestra a continuación.



E J E R C I C I O   I

Encuentre en cada uno de los ejercicios 1 al 8 la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas y trazar la figura correspondiente.

1) Centro (3,-2) y Radio 4