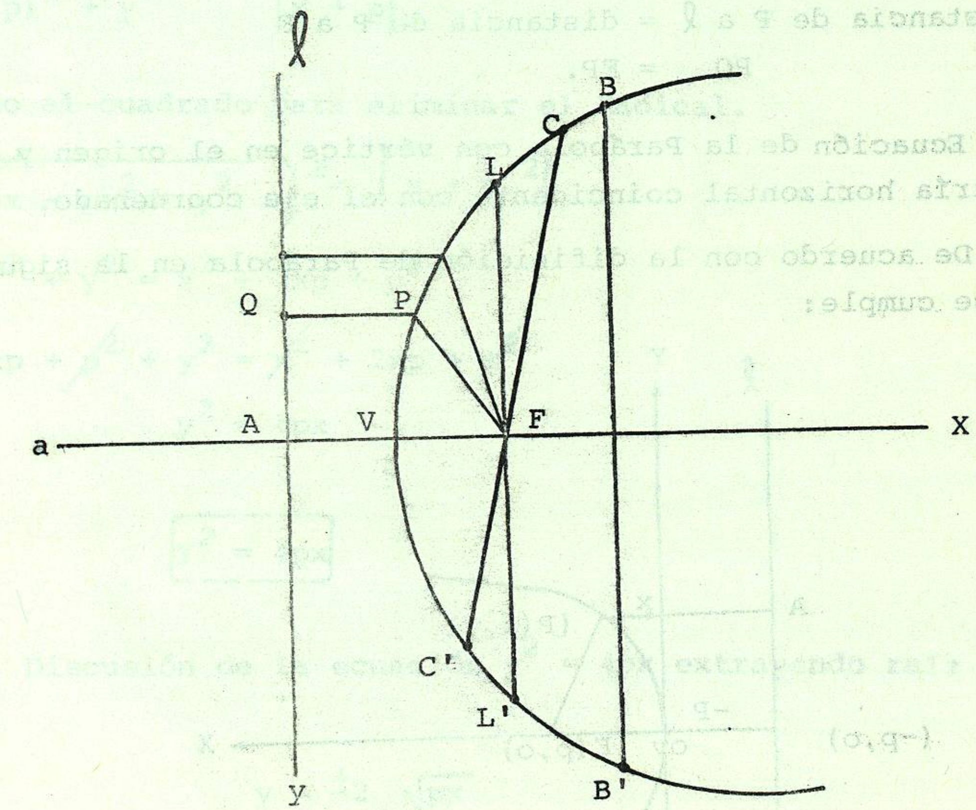
P A R A B O L A

"LA PARABOLA"

Definición: Una Parábola es el lugar geométrico de un punto que - mueve en un plano, de tal manera, que su distancia da una Recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su -- distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la Recta.

El punto fijo se llama "Foco" y la recta fija se llama -- Directriz" de la Parábola.



Elementos de la Parábola:

F = Foco

V = Vértice de la Parábola y punto medio del segmento $\overline{AF}$.

ℓ = Directriz de la Parábola.

a = Eje de la Parábola ó eje de Simetría.

perpendicular a "ℓ" y pasa por el Foco "F".

"A"= Punto de intersección de "a" y "ℓ"

$\overline{BB}$'= Cuerda de la Parábola.

$\overline{CC}$'= Cuerda focal pasa por el Foco.

LL'= Cuerda Focal perpendicular al eje se llama "Lado Recto".

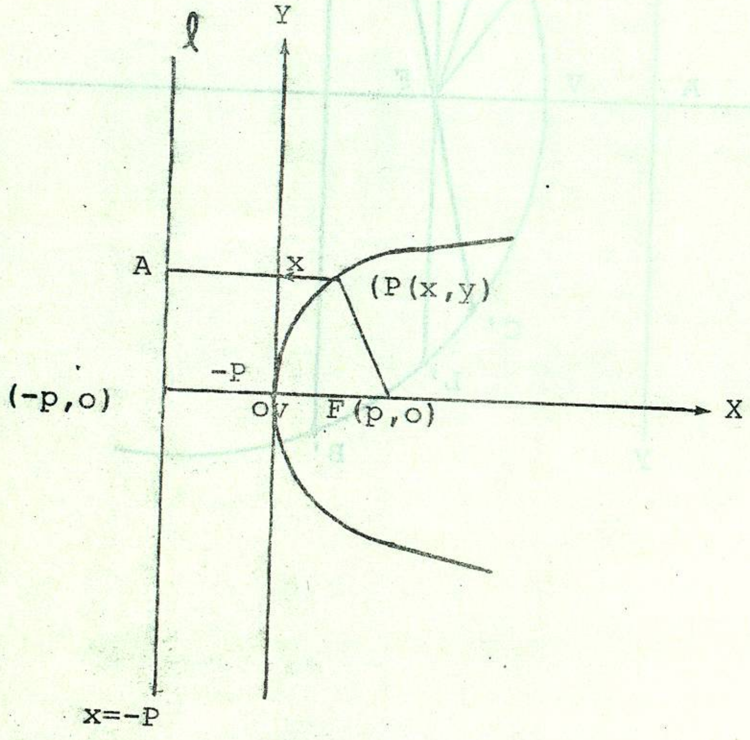
$\overline{FP}$ = Radio Focal o Radio Vector: une un punto cualesquiera de la Parábola con el Foco.

distancia de P a ℓ = distancia de P a F

PQ = FP.

Ecuación de la Parábola con vértice en el origen y eje de simetría horizontal coincidente con el eje coordenado.

De acuerdo con la difinición de Parábola en la siguiente figura se cumple:



$|\overline{FP}| = |\overline{AP}|$

Luego la distancia de "F" a "P" está dada por:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - P)^2 + (y - 0)^2}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - P)^2 + y^2}$$

Y la distancia de "P" al punto "A".

$$|\overline{AP}| = x + p$$

Entonces si se igualan las dos expresiones tendremos:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} \qquad |x + p|$$

Elevando al cuadrado para eliminar el Radical.

$$\left(\cancel{\sqrt{}}(x - p)^2 + y^2\right)^{\cancel{2}} = |x + p\,^2|$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$\cancel{x^2} - 2xp + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2}$$

$$y^2 = 4px$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Discusión de la ecuación $y^2 = 4px$ extrayendo raíz cuadrada:

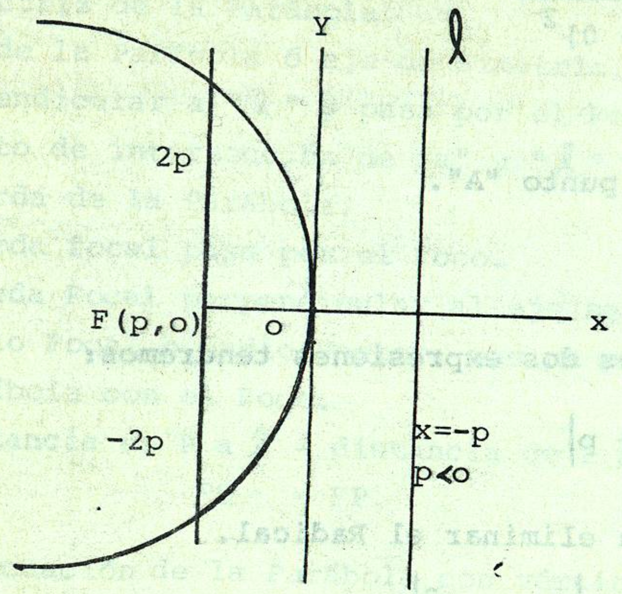
$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

Para los valores reales de "y" y diferentes de cero "p" y "x" deben tener el mismo signo, entonces:

Si $p > o$ "x" tomará solo valores positivos y los negativos quedarán excluídos y toda la curva estará a la derecha del eje "y", y hacia arriba y hacia abajo del eje "x" analogamente, si $p < o$, "x" deberá tomar puros valores negativos y los positivos excluirse. -

En este caso la Parábola aparece a la izquierda del eje "y".

De acuerdo con lo anterior la Figura sería la siguiente:



$$y^2 = 4px$$

$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

si $x = p$

$$y = \pm 2\sqrt{p2}$$

$$y = \pm 2p$$

Long. Lado Recto =

$$|2p| + |2p| = |4p|$$

Resumiendo lo anterior se concluye que:

La ecuación de una Parábola de vértice en el origen y eje "x", es:

$\boxed{y^2 = 4px}$ 1era. ecuación ordinaria de la Parábola

En donde el Foco es el punto (p,o) y la ecuación de la -- directriz es $x = -p$. si $p > o$ la Parábola se abre hacia la derecha; si $p < o$ la Parábola se abre hacia la izquierda.

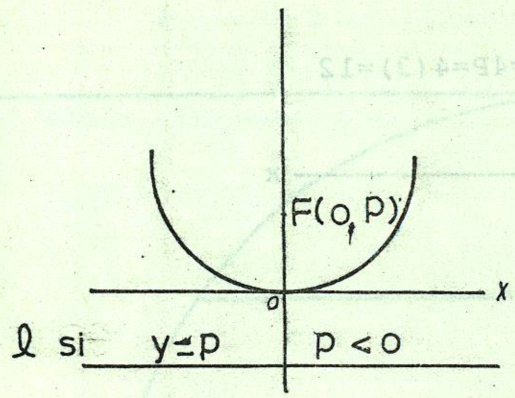
Si el eje de una Parábola coincide con el eje "y", y el - vértice está en el origen, su ecuación es:

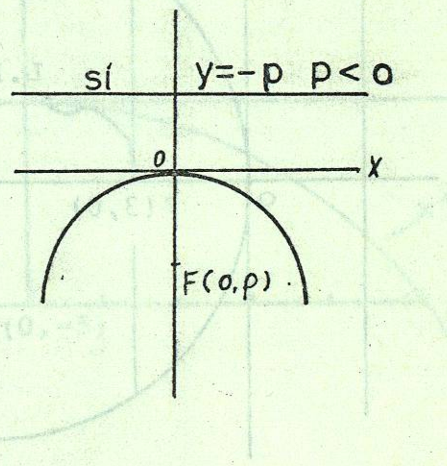
$\boxed{x^2 = 4py}$ 1era. ecuación ordinaria de la Parábola

En donde el Foco es el punto (o,p), y la ecuación de la - Directriz es $y = -p$. Si $p > o$ la Parábola se abre hacia arriba; - si $p < o$ la Parábola se abre hacia abajo.

En cada caso, la longitud del lado recto está dado por el valor absoluto de 4p; que es el coeficiente del término de 1° Grado.

$\boxed{x^2 = 4py}$ $\boxed{x^2 = 4py}$





<u>Determinación de la Ecuación de la Parábola y su Gráfica a partir de ciertos datos dados.</u>

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice es el - origen y Foco el punto (3,0).

Solución: Vértice: (0,0)

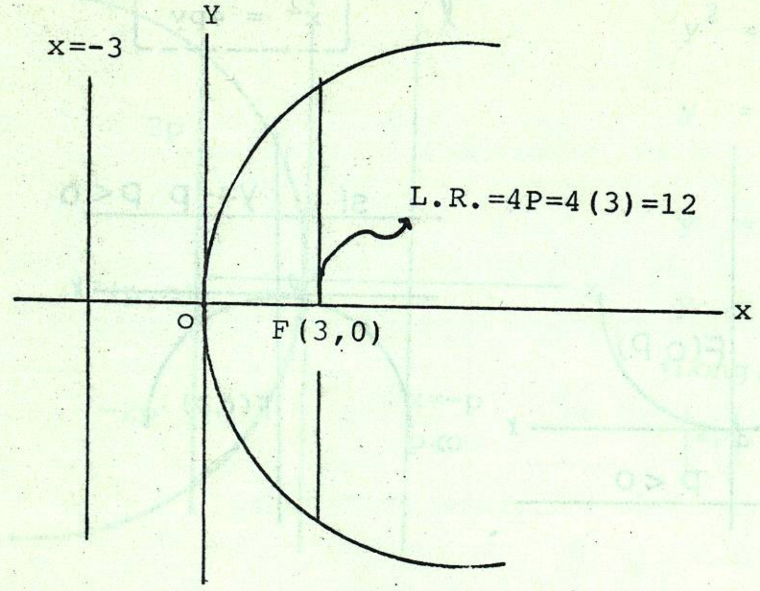
Foco ; (p,o) = (3,0)

Como el valor de $p = 3$, es mayor que cero. La curva se - abre hacia la derecha y es de la forma: $y^2 = 4px$

Luego la Directriz es: $x = -p \longrightarrow x = -3$

Entonces la ecuación será: $y^2 = 4(3)x$

$$\boxed{y^2 = 12x}$$



Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la Parábola cuyo vértice está en el origen y la Directriz es la recta $y - 5 = 0$

Solución: La Directriz $y = 5$ muestra que la curva se abre hacia - abajo y la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Entonces: Vértice (0,0)

$$\text{Directriz } y = -p$$
$$5 = -p$$
$$\boxed{p = -5}$$

Luego el Foco será: (0,-5)

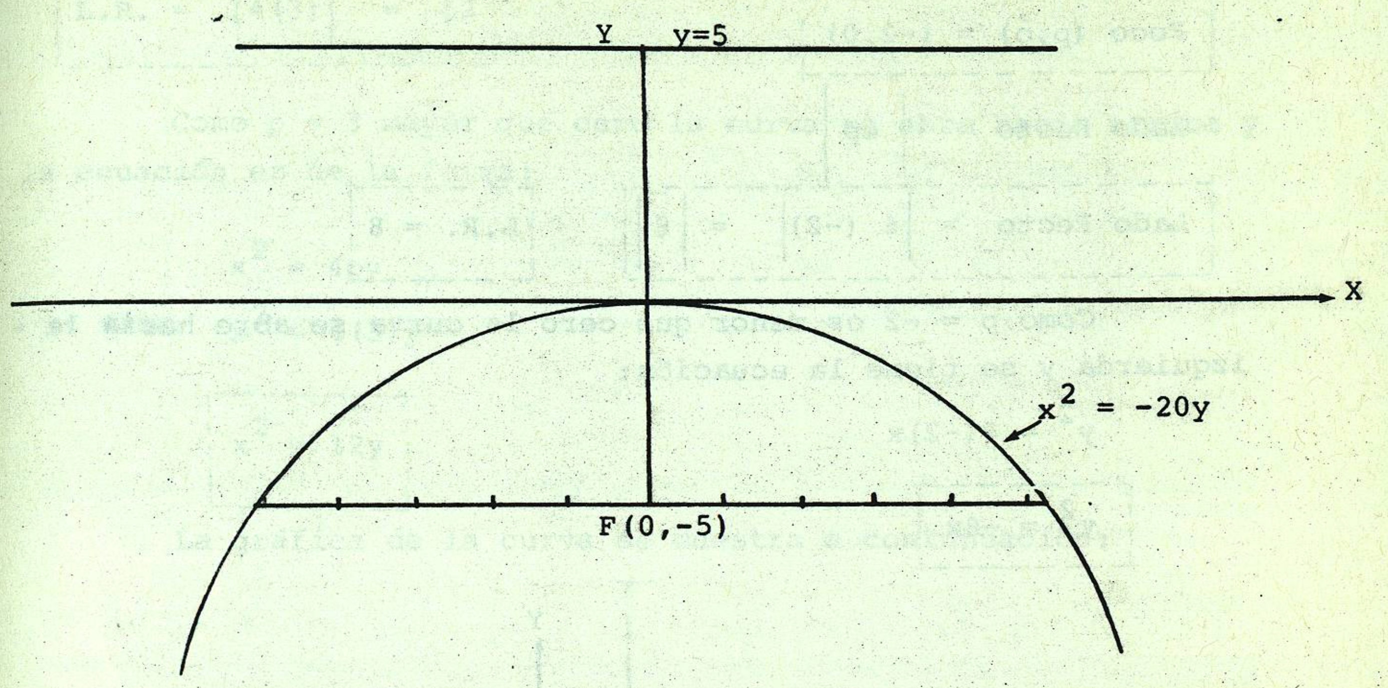
La longitud del lado recto = $4p$

$$L.R. = 4\ (-5) = 20$$

Ecuación de la Parábola:

$$x^2 = 4\ (-5)y$$
$$\boxed{x^2 = -20y}$$

Donde la gráfica de la curva se muestra a continuación:



Ejemplo 3. Una Parábola cuyo vértice esta en el origen y cuyo eje coincide con el eje "x" para por el punto (-2,4). Hallar- la ecuación de la Parábola, las coordenadas del Foco, la ecuación de la Directriz, y la longitud de su lado recto.

Solución: Como el eje de la Elipse es horizontal la ecuación es - la forma: $y^2 = 4px$

El punto (-2,4) pertenece a la curva, entonces:

$$(4)^2 = 4p(-2)$$
$$16 = -8p$$
$$\boxed{p = -2}$$

La Directriz es: $x = -p$

$$x = -(-2)$$
$$x = 2$$

$\boxed{\text{Ecuación de la Directriz: } x - 2 = 0}$

$\boxed{\text{Foco } (p,\acute{o}) = (-2,0)}$

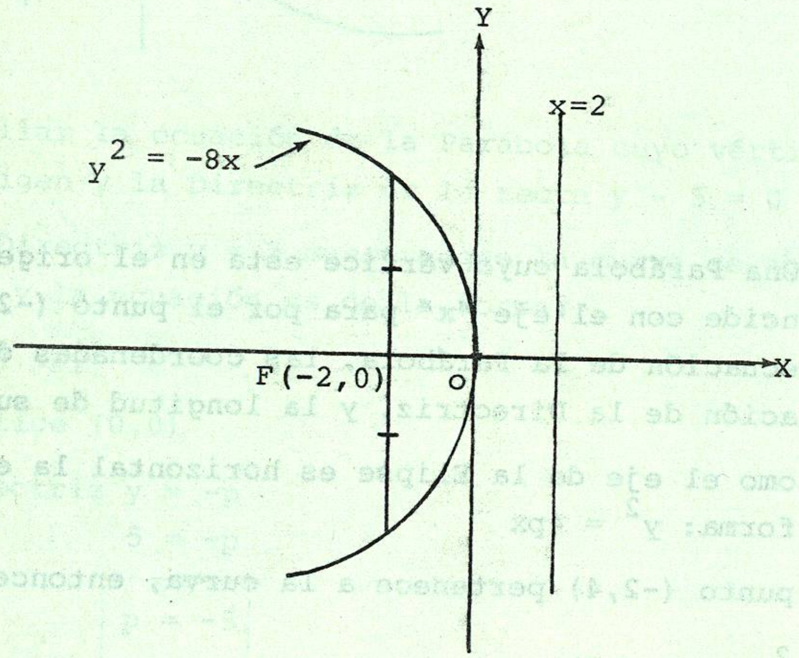
Lado Recto = $|4p|$

$\boxed{\text{Lado Recto} = |4\ (-2)| = |8|}$ $\boxed{L.R. = 8}$

Como p = -2 es menor que cero la curva se abre hacia la izquierda y se tiene la ecuación:

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$\boxed{y^2 = -8x}$$



Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la Parábola que tiene el Foco - F(0,3) y cuyo vértice esta en el origen y sabiendo que - su eje coincide con el eje de las ordenadas.

Solución; El Foco F(o,p) = F(0,3) por lo que $\boxed{p = 3}$

La Directriz: y = - p

$$\boxed{y = -3}$$

El lado recto = $|4p|$

$\boxed{L.R. = |4(3)| = 12}$

Como p = 3 mayor que cero la curva se abre hacia arriba y la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4(3)y$$

$$\boxed{x^2 = 12y}$$

La gráfica de la curva se muestra a contunuación: