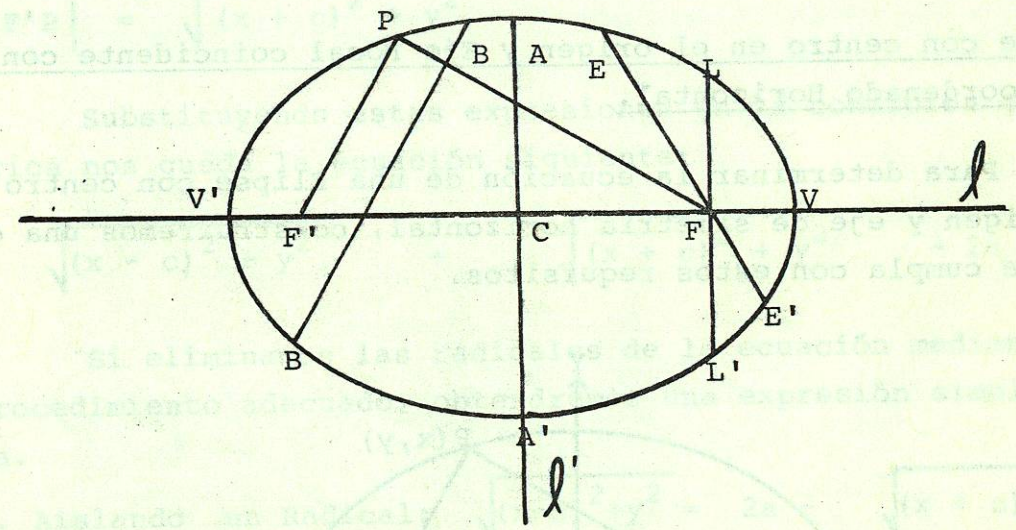
E L I P S E

E L I P S E

"Un Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal forma que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos".

Los dos puntos fijos se llaman focos de la Elipse, a continuación se muestra la figura que representa a este lugar geométrico.



Algunos de los elementos o partes más importantes de la Elipse son los siguientes:

F y F': Son los focos de la Elipse.

V y V': Son los Vértices de la Elipse.

ℓ : Es la recta que corta a la Elipse en dos puntos llamados vértices y pasa por los focos, se llama "Eje Focal".

V V' : Es llamado el Eje mayor de la Elipse y es la longitud del segmento de recta comprendido entre los dos vértices.

C : Es el centro de la Elipse y es el punto medio del seg mento de recta que une los focos.

ℓ' : Es el eje normal porque es perpendicular al eje focal y corta a la Elipse en dos puntos.

A A' : Es el eje menor de la Elipse.

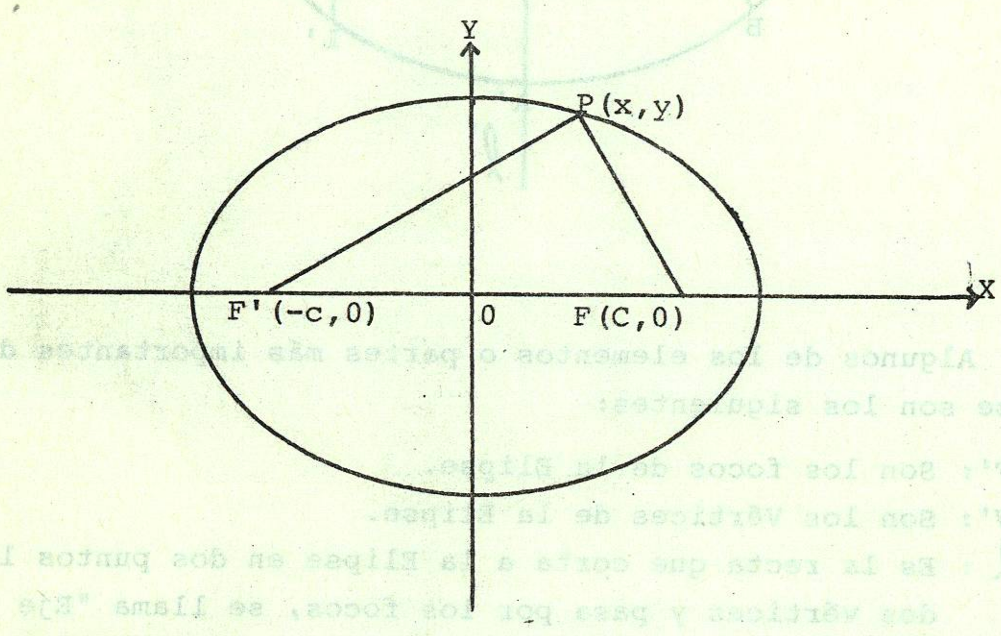
B B' : Es una cuerda de la Elipse; y puede ser cualquier segmento que, una dos puntos de una Elipse.

E E' : Es una cuerda que pasa por el foco, se llama "Cuerda Focal".

L L' : Es llamado el "Lado Recto" y es una cuerda focal que es perpendicular al eje focal.

Elipse con centro en el origen y Eje Focal coincidente con el Eje Coordenado Horizontal.

Para determinar la ecuación de una Elipse con centro en el origen y eje de simetría horizontal, construiremos una curva que cumpla con estos requisitos.



Los focos F y F' están sobre el Eje "x". Luego como el centro "O" es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, (C,O) y (-C,O), respectivamente, siendo "C" una constante positiva. Sea P (x,y) un pun

to cualquiera de la Elipse. Por la definición de la curva, el punto "P", debe satisfacer la condición geométrica siguiente:

$$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{FP}\right| = 2a. \text{ (constante)}$$

En donde "a" es una constante positiva mayor que "C", - luego si utilizamos la fórmula de la distancia para calcular $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ tendremos:

$$\left|FP\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left|F'P\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Substituyendo estas expresiones en la condición geomé-- trica nos queda la ecuación siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a$$

Si eliminamos las radicales de la ecuación mediante un procedimiento adecuado, obtendremos una expresión simplificada.

1. Aislando un Radical: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
2. Elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(- 4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})$$

Dividiendo la ecuación por (-4):

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado nuevamente:

$$(xc + a^2)^2 = a^2\ [(x + c)^2 + y^2]$$

Desarrollando los binomios:

$$x^2c^2 + \cancel{2a^2xc} + a^4 = a^2x^2 + \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$-x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = -a^2(a^2 - c^2)$$

Como 2a es mayor que 2c entonces a^2 es mayor que c^2. Luego el número $(a^2 - c^2)$ será un número positivo y si esta expresión la substituimos por el número positivo "b^2" tendremos que:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Donde la ecuación tendría la forma:

$$-x^2b^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$$

Dividiendo la ecuación por la expresión $(-a^2b^2)$

$$\frac{-x^2b^2}{-a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Se obtiene la primera ecuación ordinaria de la Elipse, a esta ecuación también se le conoce como forma canónica de la Elipse.

Si despejamos "y" de la forma canónica de la Elipse nos queda:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

De esto observamos que los valores permitidos para "x" están dentro del intérvalo:

$$-a \leq x \leq a$$

Si por otro lado la variable despejada es "x" nos queda:

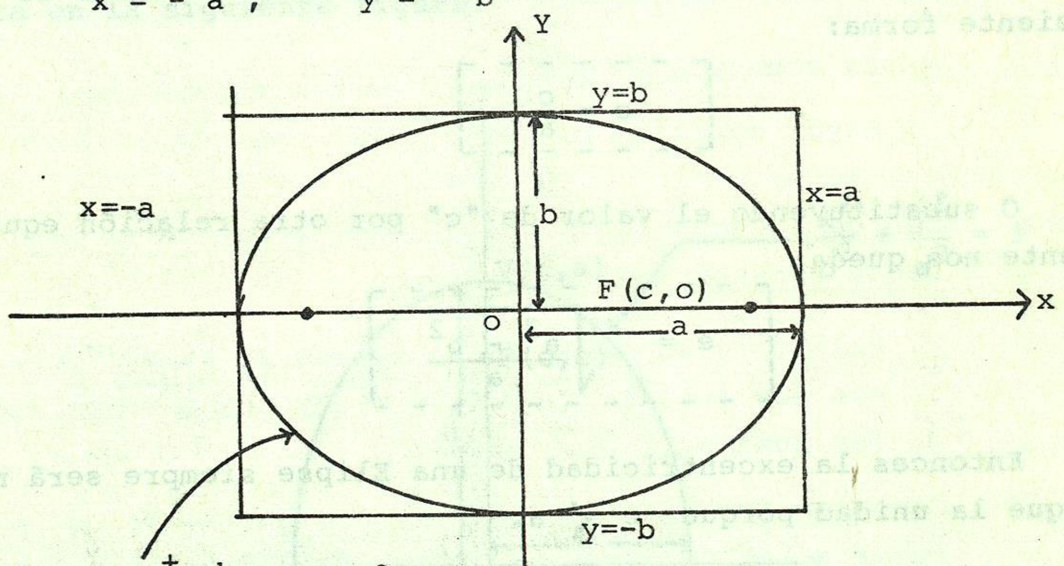
$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Donde los valores permitidos de la variable "y" están dentro del intérvalo:

$$-b \leq y \leq b$$

Para todo lo anterior se observa que la Elipse está limitada por un rectángulo cuyos lados son las rectas

$$x = \pm a\ , \qquad y = \pm b$$



$$y = \pm \frac{b}{a}\ a^2 - x^2$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\ a^2 - x^2$$

La abscisa del foco es "c" si en la ecuación $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sustituimos el valor de "x" por "c" tenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

Pero como $a^2 - c^2 = b^2$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{b^2}$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco "F" es: $\frac{2b^2}{a}$, y en forma análoga la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

$$\boxed{\text{Longitud del lado recto } = \frac{2b^2}{a}}$$

Otro elemento importante de una Elipse es su "excentricidad" (e) que se define como la razón que existe entre el valor de "c" y el de "a", luego si expresamos lo anterior de la siguiente forma:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

O substituyendo el valor de "c" por otra relación equivalente nos queda:

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}}}$$

Entonces la excentricidad de una Elipse siempre será menor que la unidad porque $c < a$.

<u>Elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado vertical.</u>

Si el eje focal de la Elipse coincide con eje vertical (y) de tal forma que las coordenadas de los focos sean los puntos F(O,C) y F' (O,-C) la ecuación de la elipse será:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

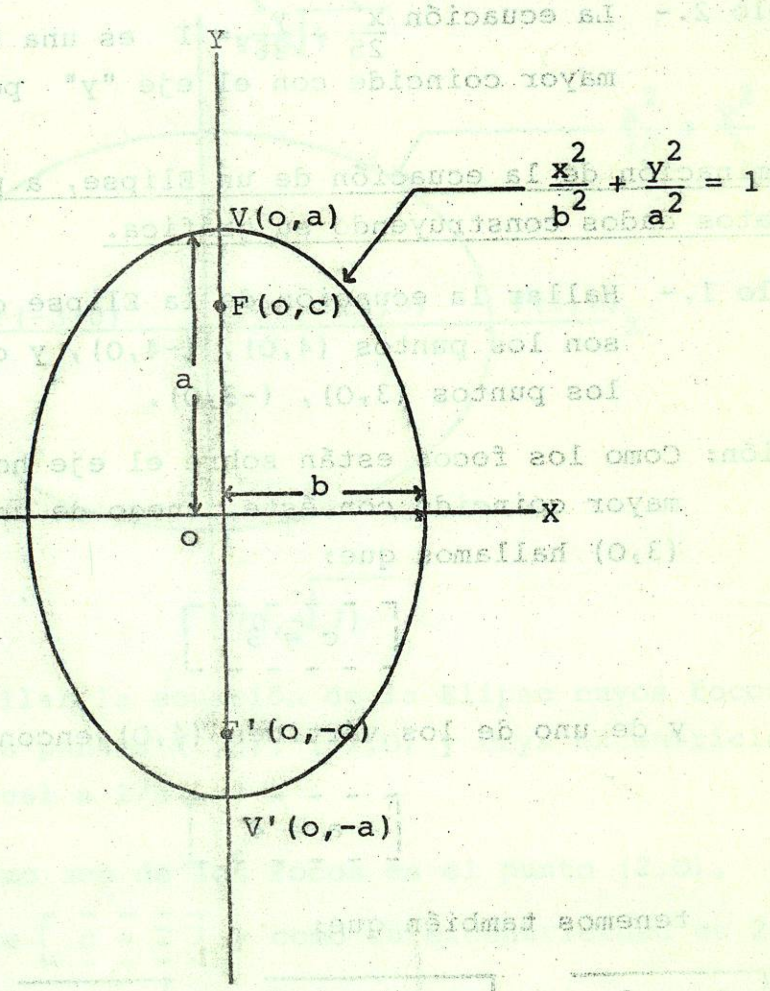
Donde para cada Elipse $\begin{cases} \text{:"a" representa la longitud del semi-eje mayor.} \\ \text{:"b" representa la longitud del semi-eje menor.} \end{cases}$

y "a", "b" y "c" están relacionados mediante la expresión

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Además para este caso de la Elipse la longitud de cada lado recto es: $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad de la elipse está dada por la misma relación ($e = c/a$).

La gráfica de una Elipse con eje focal vertical se muestra en la siguiente figura.



De acuerdo con lo visto de las dos formas canónicas de la Elipse, se puede determinar la posición del eje mayor de la Elipse, observando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la Elipse.

Si consideramos dos ejemplos de Elipses que se encuentren en forma canónica podemos ilustrar lo expuesto anteriormente.

Ejemplo 1.- La ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ es una Elipse cuyo eje mayor coincide con el eje "x" porque $16 > 9$.

Ejemplo 2.- La ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ es una Elipse cuyo eje mayor coincide con el eje "y" porque $36 > 25$.

<u>Determinación de la ecuación de un Elipse, a partir de ciertos datos dados construyendo su gráfica.</u>

Ejemplo 1.- Hallar la ecuación de la Elipse cuyas vértices son los puntos (4,0), (-4,0), y cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0).

Solución: Como los focos están sobre el eje horizontal el eje mayor coincide con éste, luego de uno de los focos (3,0) hallamos que:

$$\boxed{c = 3}$$

y de uno de los vértices (4,0) encontramos que:

$$\boxed{a = 4}$$

tenemos también que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(4)^2 - (3)^2} = \sqrt{16 - 9} = \pm \sqrt{7}$$

Por lo tanto la ecuación es de la forma:

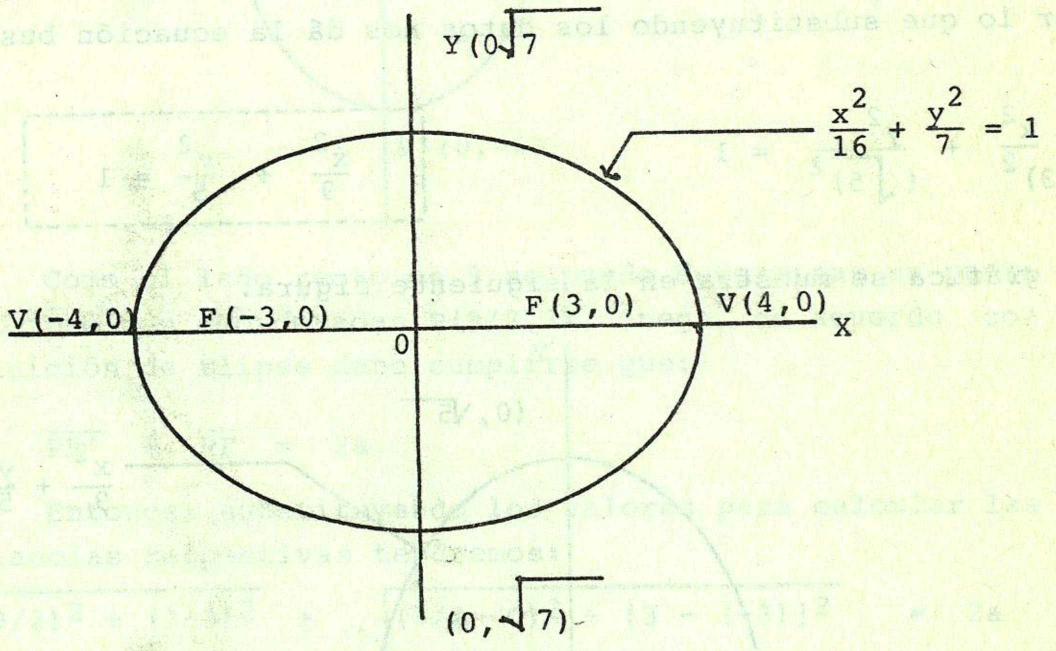
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de donde substituyendo los valores tenemos la ecuación buscada

$$\frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$$

La gráfica se muestra a continuación:



Ejemplo 2.- Hallar la ecuación de la Elipse cuyos focos son los puntos (2,0), (-2,0) y cuya excentricidad es igual a 2/3

Solución: Como uno de los focos es el punto (2,0), tenemos que $\boxed{c = 2}$ y como su excentricidad es 2/3 tenemos: