$e = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{a}$; resolviendo para "a" nos queda

$$\boxed{a = 3}$$

Tenemos también que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9 - 4} = \pm\sqrt{5}$$

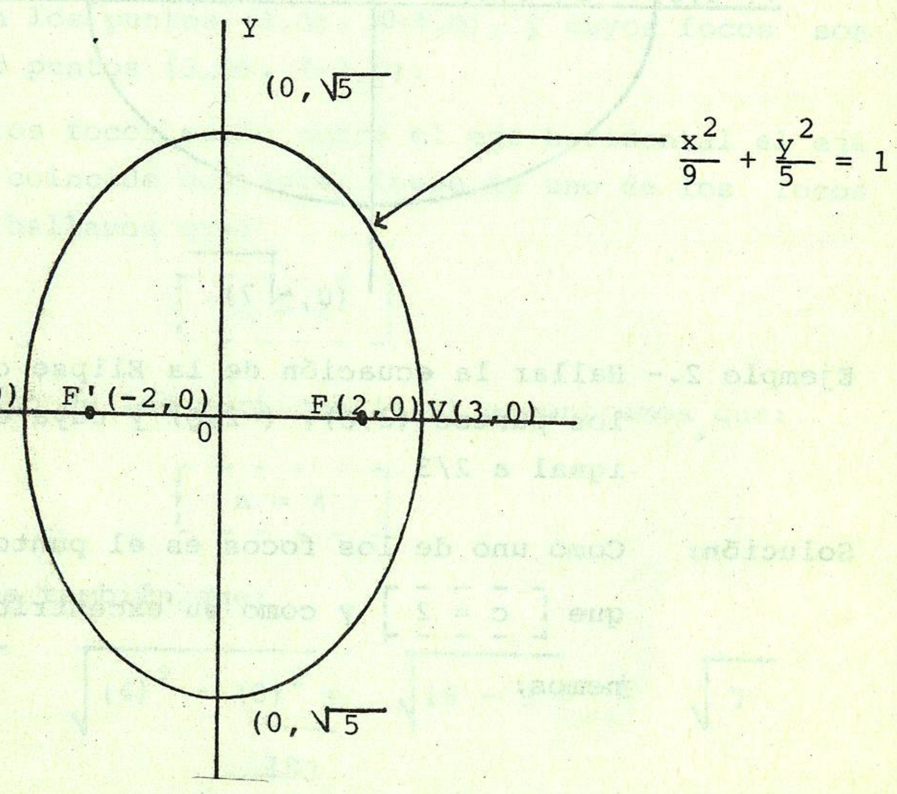
Por la posición de los focos, la ecuación de la Elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo que substituyendo los datos nos dá la ecuación buscada:

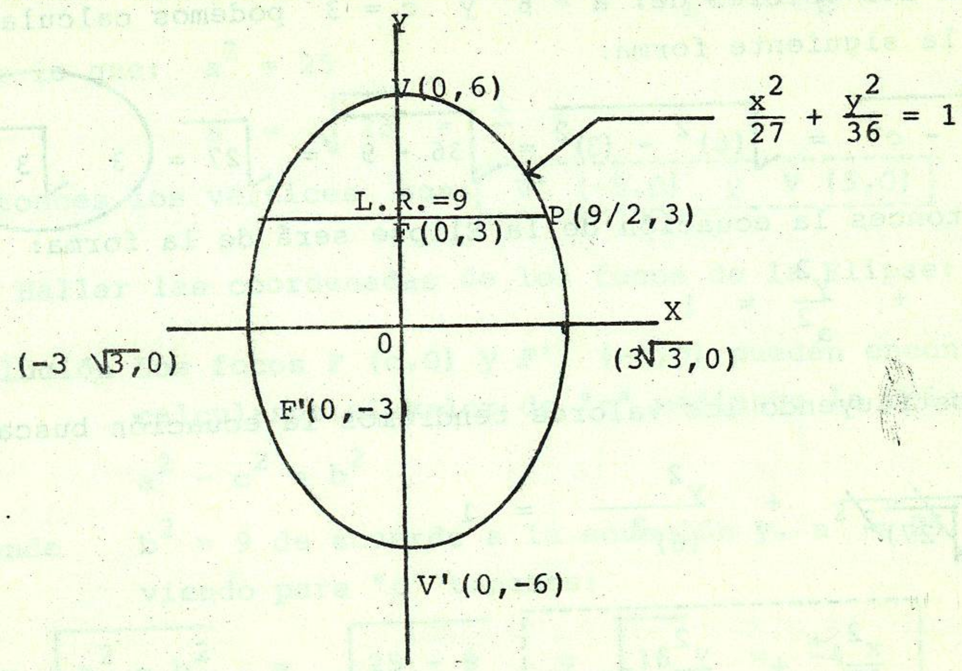
$$\frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 3.- Los focos de una Elipse son los puntos (0,3), (0,-3), y - la longitud de uno de los lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la Elipse.

Solución: Graficaremos una figura con los datos que tenemos:



Como el lado recto es 9 se puede determinar un punto de la Elipse con coordenadas P(9/2,3), luego, de acuerdo con la definición de Elipse debe cumplirse que:

$$PF' + PF = 2a$$

Entonces substituyendo los valores para calcular las - distancias respectivas tendremos:

$$\sqrt{(9/2)^2 + (3-3)^2} + \sqrt{(9/2 - 0)^2 + [3 - (-3)]^2} = 2a$$

$$\sqrt{(9/2)^2} + \sqrt{(9/2)^2 + (6)^2} = 2a$$

$$\sqrt{81/4} + \sqrt{81/4 + 36} = 2a$$

$$9/2 + \sqrt{225/4} = 2a$$

$$9/2 + 15/2 = 2a$$

$$24/2 = 2a$$

$$12 = 2a$$

$$\boxed{6 = a}$$

Como el valor determinado de "a" es 6, los vértices de la Elipse cuyo eje mayor está sobre el eje vertical serán los puntos: (0,6), (0,-6).

Con los valores de: a = 6 y c = 3 podemos calcular "b" de la siguiente forma:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(6)^2 - (3)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Entonces la ecuación de la Elipse será de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Substituyendo los valores tendremos la ecuación buscada.

$$\frac{x^2}{\cancel{(\sqrt{27})^2}} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1}$$

<u>Obtención de todos los elementos de una Elipse, dada su ecuación.</u>

Ejemplo 4.- Dada la ecuación de la Elipse:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

a) Expresarla en su forma "canónica".

Solución: El término independiente debe ser reducido a la unidad por lo que toda la ecuación debe ser dividida por el número 225. Y los coeficientes de las variables deben simplificarse.

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1} \qquad \text{Forma Canónica}$$

b) Hallar las coordenadas de los vértices de la Elipse:

V' (-a, 0) y V (a,0)

Solución: La ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por lo que: $a^2 = 25$

$$a = \sqrt{25} = \pm 5$$

Entonces los vértices son: $\boxed{V' (-5.0) \text{ y } V (5,0)}$

c) Hallar las coordenadas de los focos de la Elipse:

Solución Los focos F (c,0) y F' (-c,0) pueden encontrarse calculando el valor de "c" mediante la relación

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Donde $b^2 = 9$ de acuerdo a la ecuación y, $a^2 = 25$ y resolviendo para "c" tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \pm 4$$

Entonces los focos son: $\boxed{F' (-4,0) \text{ y } F (4,0)}$

d) Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución: Eje mayor = 2a = 2(5) = 10

$$\boxed{2a = 10}$$

eje menor = 2b = 2(3) = 6

$$\boxed{2b = 6}$$

e) Hallar la excentricidad de la Elipse:

Solución: La excentricidad está dada por: $e = c/a$

Entonces: $\boxed{e = \frac{4}{5}}$

f) Hallar la longitud del lado recto de la Elipse.

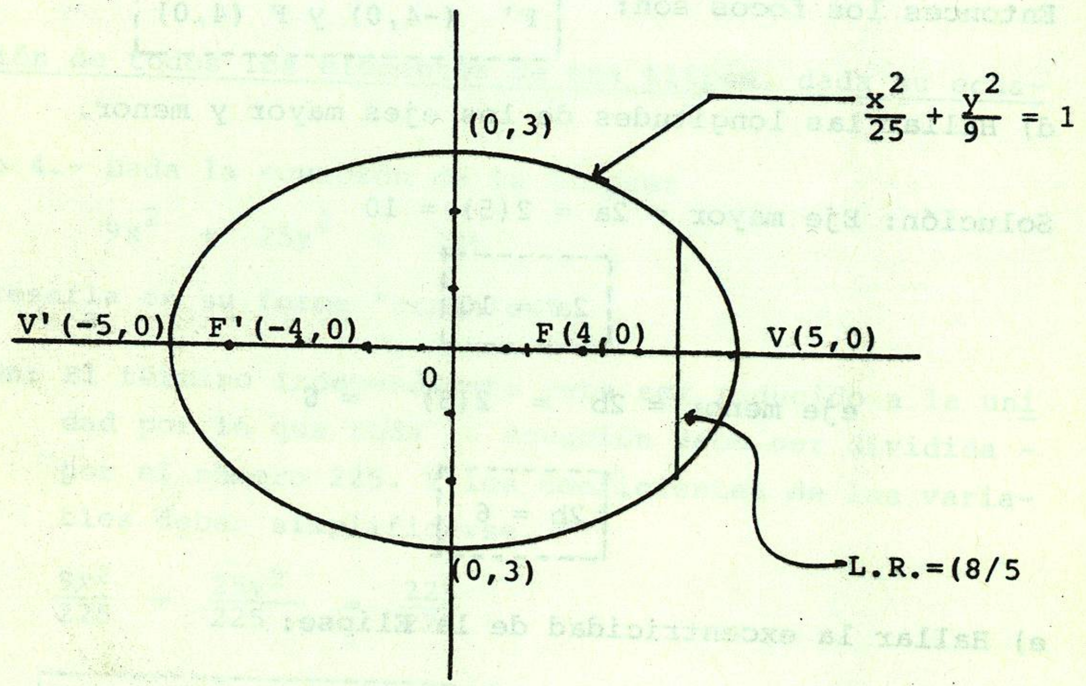
Solución: El lado recto (L-R) esta dado por:

$L.R. = \frac{2b^2}{a}$; luego substituyendo $b = 3$ y $a = 5$

$$L.R. = \frac{2(3)^2}{5} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\boxed{L.R. = \frac{18}{5}}$$

g) Construir la gráfica de la Elipse.



Ejemplo 5.- Dada la ecuación de la Elipse:

$$4x^2 + 9y^2 = 25$$

Hallar:

a) La forma canónica de la ecuación
b) Las coordenadas de los vértices
c) Las coordenadas de los focos
d) Las longitudes de los ejes mayor y menor
e) La excentricidad
f) Longitud del lado recto
g) Gráfica de la curva.

Solución:

a) La ecuación: $4x^2 + 9y^2 = 25$ se divide término a término por el independiente; y se obtiene la ecuación en su forma canónica.

$$\frac{4x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = \frac{25}{25}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{(25/4)} + \frac{y^2}{(25/9)} = 1}$$

b) La ecuación de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por lo que los vértices están sobre el eje de abcisas y son $V'(-a,0)$ y $V(a,0)$.

Por tanto: $a^2 = \frac{25}{4}$

$$a = \sqrt{25/4} = \pm 5/2$$

Entonces los vértices son: $\boxed{V' \ (-5/2,0) \text{ y } V\ (5/2,0)}$

c) Los focos F' (-c,0) y F(c,0) pueden encontrarse calculando el valor de "c". mediante la relación:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Donde $b^2 = \frac{25}{9}$ y $a^2 = \frac{25}{4}$, de acuerdo a la ecuación y resolviendo para "c" tenemos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{125}{36}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Entonces los focos son: $\boxed{F'\left(-\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right) \text{ y } F\left(\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0\right)}$

d) Las longitudes de los ejes son:

$$\text{eje mayor} = 2a \longrightarrow 2\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{2} = 5$$

$$\boxed{2a = 5}$$

Eje menor = 2b como $b^2 = \frac{25}{9}$, $b = \sqrt{25/9} = \pm\ 5/3$

$$2b = 2(5/3) = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{2b = \frac{10}{3}}$$

e) La excentricidad de la Elipse está dada por: $e = \frac{c}{a}$

$$\text{Entonces: } e = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{6}}{\frac{5}{2}} = \frac{\cancel{10}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{30}_{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{5}{3}}}$$

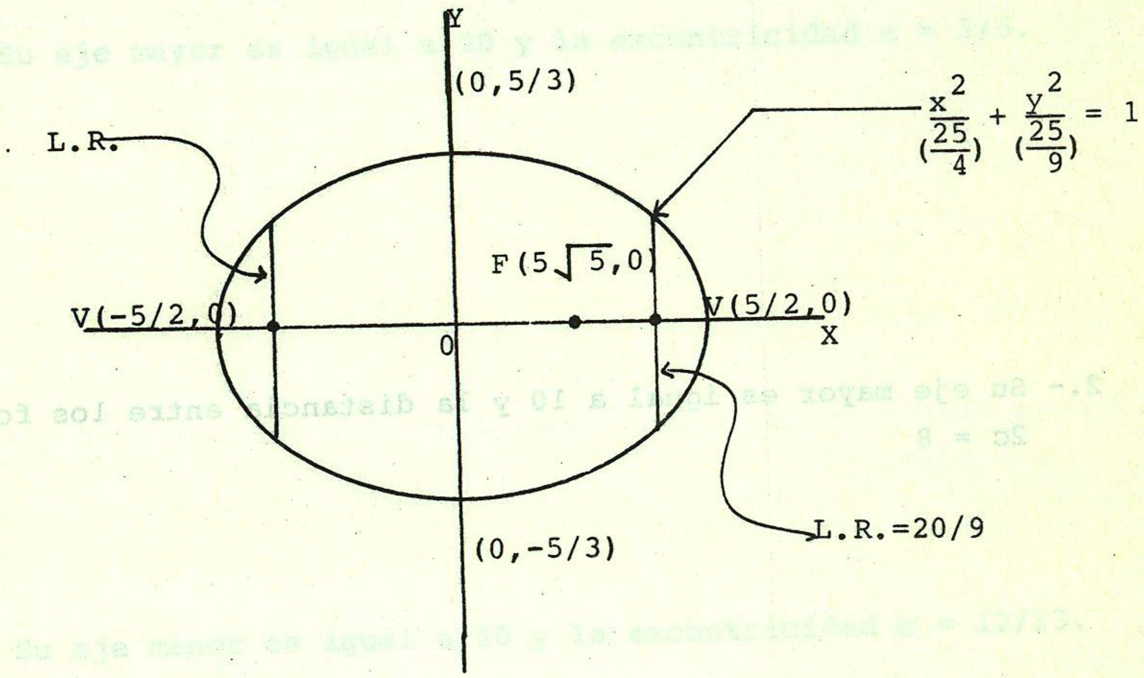
f) La longitud del lado recto esta dado por: $\frac{2b^2}{a}$, luego substituyendo;

$b = 5/3$ y $a = 5/2$

$$L.R. = \frac{2b^2}{\frac{5}{2}} = \frac{2\left(\frac{5}{3}\right)^2}{\frac{5}{2}} = \frac{2\left(\frac{25}{9}\right)}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{50}{9}}{\frac{5}{2}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}$$

$$\boxed{L.R. = \frac{20}{9}}$$

g) Construir la gráfica de la Elipse.



EJERCICIO

*Hallar la ecuación de la Elipse cuyos focos están en el eje de abcisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas de acuerdo a las condiciones dadas en cada uno de los siguientes ejercicios; Graficar una figura para cada problema.

1.- Sus semiejes son iguales a 5 y a 2.

2.- Su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre los focos: $2c = 8$

3.- Su eje menor es igual a 24 y la distancia entre los focos: $2c = 10$.

4.- Su eje mayor es igual a 20 y la excentricidad $e = 3/5$.

5.- Su eje menor es igual a 10 y la excentricidad $e = 12/13$.