

**Geometría Analítica**

**y**

**CALCULO**

**2**

**\***

**Universidad de Nuevo León**

Q. 1. The following are the names of the states of India. Write them in the order of their area. (10)

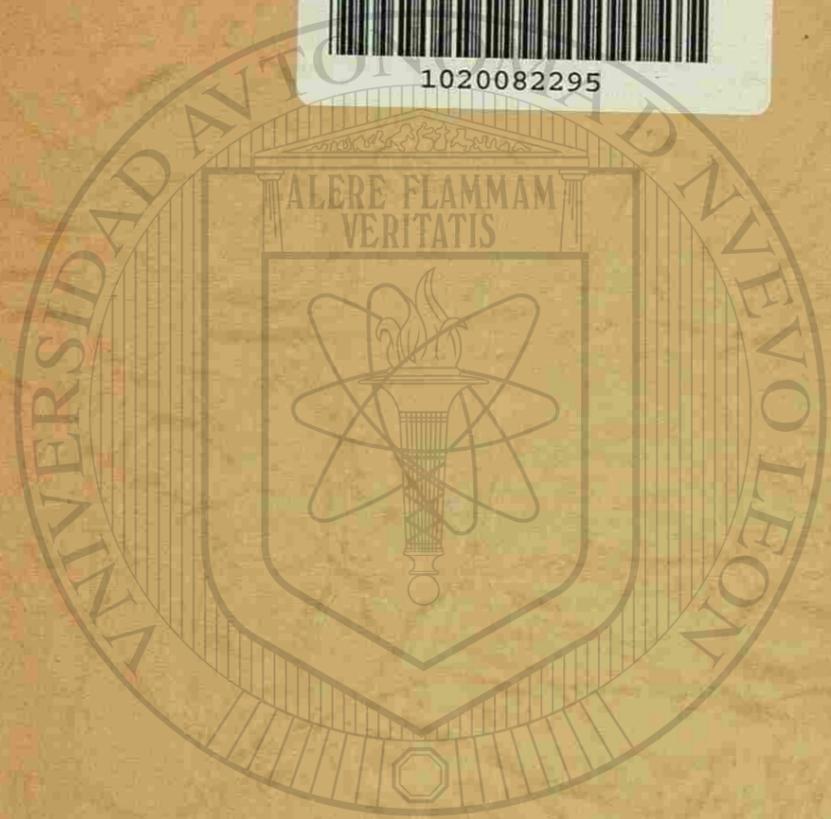
QA 555

U5

555



1020082295



# JUANIL

Núm. Clas.	NL
Núm. Autor	516
Núm. Adg.	G 343
Procedencia	50268
Precio	
Fecha	
Clasificó	
Catalogó	024

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 "ALFONSO REYES"  
 Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



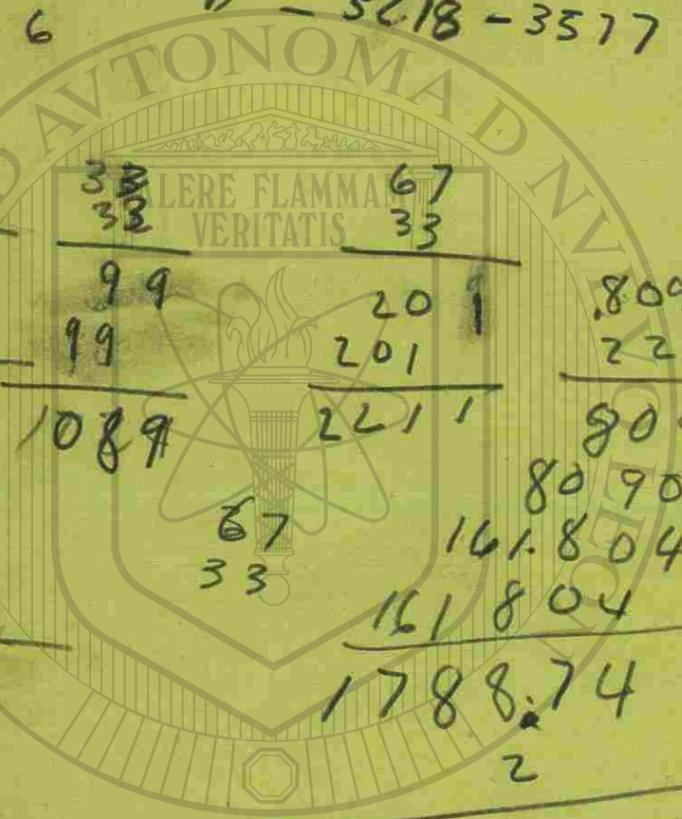
1

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = (67)^2 + (33)^2 - 2(33 \times 67) \cdot \cos 36$$

$$b^2 = 5278 - 3577$$

$a = 67$   
 $c = 33$   
 $B = 36$



$$\begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ \hline 461 \\ 402 \\ \hline 4189 \\ 4189 \\ 1089 \\ \hline 5278 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ \hline 201 \\ 201 \\ \hline 2211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80902 \\ 2211 \\ \hline 80902 \\ 80902 \\ \hline 161804 \\ 161804 \\ \hline 178874 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3577 \\ 3577 \\ \hline 1701 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3577.48644 \end{array}$$

b

$$\begin{array}{r} 1701 \\ 101 \\ \hline 41 \\ 81 \end{array}$$

# Geometría Analítica

y

# CALCULO

# U A N L

Universidad de Nuevo León

DEPTO. DE CIENCIAS FISICO - MATEMATICAS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALONSO REYES"  
Apdo. 1625 - MONTERREY, N. L.



Capitán Alfonso  
Biblioteca Universitaria



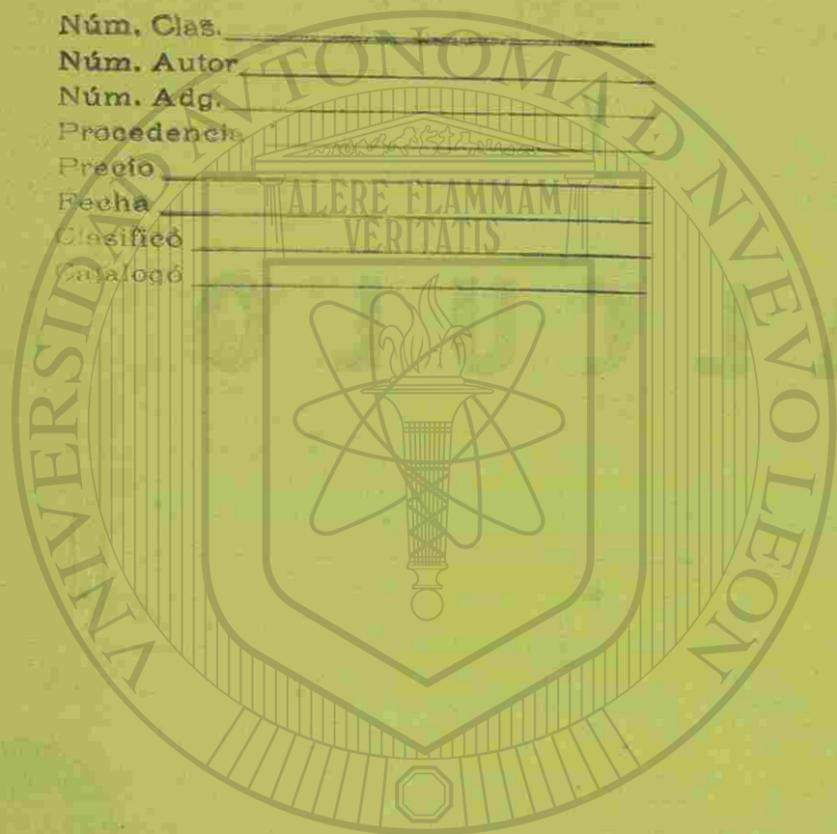
Septiembre de 1954

Monterrey, N. L.

NL  
516  
U

QASSS  
US

Núm. Clas.  
Núm. Autor  
Núm. Adg.  
Procedencia  
Precio  
Fecha  
Clasificación  
Catálogo



FONDO UNIVERSITARIO

INDICE

Pag.

I.- Plano Geométrico.

1.1	Números reales .....	1
1.2	Coordenadas cartesianas .....	2
1.3	Distancias y ángulos .....	3
1.4	Ecuaciones .....	7
1.5	Gráfica de ecuaciones .....	9
1.6	Familia de curvas .....	11

II.- Geometría Analítica.

2.1	Introducción .....	19
2.2	Ecuaciones lineales y rectas .....	19
2.3	Familia de rectas .....	22
2.4	Ecuaciones de rectas .....	24
2.5	Ecuaciones y curvas .....	26
2.6	Círculo .....	31
2.7	Parábola .....	34
2.8	Elipse .....	36
2.9	Hipérbola .....	38
2.10	Coordenadas polares .....	39
2.11	Gráficas en coordenadas polares .....	42
2.12	Ecuaciones paramétricas .....	44

III.- Funciones y Derivadas.

3.1	Funciones .....	67
3.2	Gráfica de Funciones .....	71
3.3	Incrementos .....	74
3.4	Sucesiones infinitas .....	76
3.5	Derivada de una función .....	80
3.6	Identidades para derivar funciones .....	83
3.7	Operaciones con funciones .....	86
3.8	Funciones implícitas .....	90
3.9	Derivada de funciones trigonométricas .....	91
3.10	Diferenciales .....	96
3.11	Derivadas de orden superior.....	98

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

	pag.
IV.- <u>Aplicaciones de la Derivada.</u>	
4.1 Pendiente de una curva .....	121
4.2 Convexidad .....	123
4.3 Máximos y mínimos .....	124
4.4 Rapidez de cambio .....	127
4.5 Relaciones entre rapidezces de cambio .....	130
V.- <u>Integral y Area.</u>	
5.1 Area .....	143
5.2 Integral indefinida .....	145
5.3 Fórmulas de integración .....	147
5.4 Integral definida .....	149
5.5 Cálculo de áreas .....	151

## Capítulo I

### PLANO GEOMETRICO

#### 1.1 Números reales.

A cualquier número real lo podemos denotar con muchos símbolos diferentes. Por ejemplo, el número seis lo podemos denotar con seis palitos  $\text{|||||}$ , o siguiendo el sistema romano con VI, o en el sistema decimal con 6, o en el lenguaje con la palabra "seis". Desde luego estas no son la únicas maneras, pues si usamos las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, podemos denotar al seis con muchísimos otros símbolos, como:  $5+1$ ,  $10-4$ ,  $6-0$ ,  $2 \times 3$ ,  $\frac{12}{2}$ , etc. Todos estos símbolos tienen diferente forma, pero denotan el mismo número, por lo que decimos que son iguales y escribimos  $6=5+1$ ,  $10-4=6-0$ ,  $2 \times 3 = \frac{12}{2}$ , etc. De hecho, una de las finalidades de las matemáticas escolares es enseñar como transformar un número de una forma a otra, de modo que sean iguales.

En general, decimos que dos símbolos son iguales, cuando denotan la misma cosa.

Ejerc. 1.- Denoté el número diez con veinte símbolos de diferente forma.

Las dos maneras mas usuales de denotar a los números son: la forma de quebrado y la forma decimal. No todos los números reales se pueden escribir en la forma de quebrado, y de hecho, clasificamos a los reales en racionales e irracionales, según se puedan escribir o nó en la forma de quebrado. En cambio, todos los números reales se pueden escribir en la forma decimal, con un número finito o infinito de cifras según el caso. Por ejemplo,  $\frac{5}{4} = 1.25$  tiene tres cifras, mientras que  $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$  tiene un número infinito de cifras. Desde luego, como no podemos escribir todas las cifras, para indicar las que faltan ponemos puntos suspensivos. En este caso las cifras que faltan son todas 3. Pero no siempre las cifras se repiten, como en  $\sqrt{5} = 2.235\dots$ . Nótese que  $\sqrt{5}$  no es igual a 2.235, pues  $\sqrt{5}$  tiene mas de cuatro cifras. Lo mas que podemos decir es que 2.235 es una aproximación de  $\sqrt{5}$  hasta la cuarta cifra.

Ejerc. 2.- Poner en la forma decimal con cinco cifras, los números:  $\frac{3}{16}$ ,  $8^3$ ,  $-\log 2.3$ ,  $\text{sen } 31^\circ$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ .

	pag.
IV.- <u>Aplicaciones de la Derivada.</u>	
4.1 Pendiente de una curva .....	121
4.2 Convexidad .....	123
4.3 Máximos y mínimos .....	124
4.4 Rapidez de cambio .....	127
4.5 Relaciones entre rapidez de cambio .....	130
V.- <u>Integral y Area.</u>	
5.1 Area .....	143
5.2 Integral indefinida .....	145
5.3 Fórmulas de integración .....	147
5.4 Integral definida .....	149
5.5 Cálculo de áreas .....	151

## Capítulo I

### PLANO GEOMETRICO

#### 1.1 Números reales.

A cualquier número real lo podemos denotar con muchos símbolos diferentes. Por ejemplo, el número seis lo podemos denotar con seis palitos  $\text{|||||}$ , o siguiendo el sistema romano con VI, o en el sistema decimal con 6, o en el lenguaje con la palabra "seis". Desde luego estas no son la únicas maneras, pues si usamos las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, podemos denotar al seis con muchísimos otros símbolos, como:  $5+1$ ,  $10-4$ ,  $6-0$ ,  $2 \times 3$ ,  $\frac{12}{2}$ , etc. Todos estos símbolos tienen diferente forma, pero denotan el mismo número, por lo que decimos que son iguales y escribimos  $6=5+1$ ,  $10-4=6-0$ ,  $2 \times 3 = \frac{12}{2}$ , etc. De hecho, una de las finalidades de las matemáticas escolares es enseñar como transformar un número de una forma a otra, de modo que sean iguales.

En general, decimos que dos símbolos son iguales, cuando denotan la misma cosa.

Ejerc. 1.- Denote el número diez con veinte símbolos de diferente forma.

Las dos maneras mas usuales de denotar a los números son: la forma de quebrado y la forma decimal. No todos los números reales se pueden escribir en la forma de quebrado, y de hecho, clasificamos a los reales en racionales e irracionales, según se puedan escribir o no en la forma de quebrado. En cambio, todos los números reales se pueden escribir en la forma decimal, con un número finito o infinito de cifras según el caso. Por ejemplo,  $\frac{5}{4} = 1.25$  tiene tres cifras, mientras que  $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$  tiene un número infinito de cifras. Desde luego, como no podemos escribir todas las cifras, para indicar las que faltan ponemos puntos suspensivos. En este caso las cifras que faltan son todas 3. Pero no siempre las cifras se repiten, como en  $\sqrt{5} = 2.235\dots$ . Nótese que  $\sqrt{5}$  no es igual a 2.235, pues  $\sqrt{5}$  tiene mas de cuatro cifras. Lo mas que podemos decir es que 2.235 es una aproximación de  $\sqrt{5}$  hasta la cuarta cifra.

Ejerc. 2.- Poner en la forma decimal con cinco cifras, los números:  $\frac{3}{16}$ ,  $8^3$ ,  $-\log 2.3$ ,  $\text{sen } 31^\circ$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ .

Otra manera de denotar a los números reales es a través de la escala real. En una línea recta (vea fig. 1.1) escogemos arbitrariamente dos puntos distintos. Al punto de la izquierda lo asociamos con el número real cero y lo llamamos punto cero; al punto de la derecha lo asociamos con el número real uno y lo llamamos punto uno. Para obtener los enteros positivos movemos el segmento  $\overline{0,1}$  a la derecha y para obtener los enteros negativos lo movemos a la izquierda. Los números racionales se obtienen cortando el segmento  $\overline{0,1}$  en un número de partes iguales; moviendo una de estas partes a la izquierda y a la derecha, obtenemos los racionales negativos y positivos respectivamente. Los puntos de la escala real que no son racionales, como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $\log 5$ , etc., representan a los números irracionales.

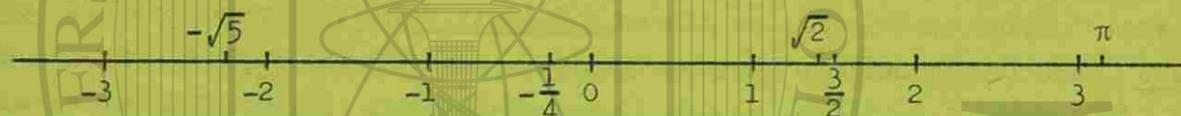


Fig. 1.1.- Escala Real.

Sobre la escala real, el orden de los números reales es evidente. Cuando el número  $a$  queda a la izquierda de  $b$ , decimos que  $a$  es menor que  $b$  escribiendo  $a < b$ , ó que  $b$  es mayor que  $a$  escribiendo  $b > a$ .

Ejerc. 3.- a) Graficar sobre la escala real los números:  $-0$ ,  $-3.5$ ,  $1 + \frac{1}{4}$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $2^3$ ,  $4.001$ ,  $\log 10$ ,  $\sqrt{-2}$ ,  $2 + 3i$ .

b) Decir cual es el menor en cada una de las siguientes parejas:  
 $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ;  $4.56$ ,  $4.06$ ;  $\sqrt{2}$ ,  $1.414$ ;  $\pi$ ,  $3.1416$ ;  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ .

### 1.2 Coordenadas Cartesianas.

En la sección anterior establecimos la asociación entre puntos de una recta y números reales, por medio de la escala real. Esta asociación es ventajosa pues permite ver gráficamente ciertas propiedades de los números reales, como las propiedades de orden.

Ahora queremos asociar de alguna manera los puntos de un plano con números reales. Encontramos que la asociación mas útil en la práctica y en Matemáticas, es la asociación, nó con números reales, sino con parejas de números reales. (Por eso decimos en Matemáticas que el plano tiene dimensión dos, mientras que la recta tiene dimensión uno). Esta asociación se puede hacer de varias maneras, y de todas ellas, aquí consideramos la asociación deter-

minada por las coordenadas cartesianas (en la sección 2.8 veremos la asociación que se establece con las coordenadas polares).

Sobre el plano trazamos dos escalas reales  $X$  y  $Y$ , formando ángulo recto y cortándose en el punto cero. (Las escalas  $X$  y  $Y$ , usualmente se toman iguales, excepto en aplicaciones especiales).

Dado cualquier punto  $P$  sobre el plano (vea fig. 1.2), para encontrar con cual par de números vamos a asociarlo, proyectamos  $P$  sobre la recta  $X$  y sobre  $Y$ . Los pies de las dos proyecciones nos dan dos números, en este caso 2 y 3. Entonces asociamos  $P$  con el par  $(2,3)$ . Llamamos a  $(2,3)$  las coordenadas cartesianas (o coordenadas) de  $P$ ; llamamos al 2 abscisa y al 3 ordenada de  $P$ .

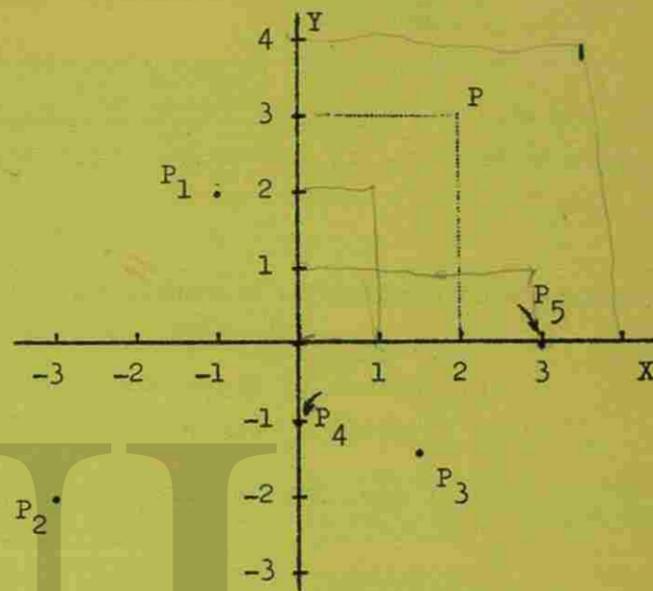


Fig. 1.2.- Coordenadas Cartesianas.

Ejerc. 1.- a) Dé las coordenadas de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  y  $P_5$  en la figura 1.2.  
 b) Grafique los pares  $(-1,0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ ,  $(\pi, \pi)$ ,  $(5-2, \frac{4}{2})$ .

A la recta  $X$  la llamamos eje  $X$ , o eje horizontal, o eje de abscisas (pues los números sobre  $X$  los llamamos abscisas), mientras que a  $Y$  la llamamos eje  $Y$ , o eje vertical, o eje de ordenadas. Denotando con  $x$  cualquier número sobre el eje  $X$ , y con  $y$  cualquier número sobre  $Y$ , entonces las coordenadas de cualquier punto del plano son  $(x,y)$ . Por convención, el primer número del par  $(x,y)$  se refiere a la proyección sobre el eje horizontal, y el segundo número se refiere a la proyección sobre el eje vertical.

### 1.3 Distancias y Angulos.

Dados dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  sobre la escala real, nos podemos mover de  $x_1$  a  $x_2$  ó de  $x_2$  a  $x_1$  cierta distancia. Para distinguir entre uno y otro caso introducimos el concepto de distancia dirigida. Definimos la distancia de  $x_1$  a  $x_2$ , como  $x_2 - x_1$ , es decir, abscisa final menos abscisa inicial.

- Ejemplos: a) La distancia de -3 a 5 es  $5 - (-3) = 8$ .  
 b) La distancia de 5 a -3 es  $-3 - 5 = -8$ .

Notamos inmediatamente que el signo de la distancia dirigida cambia, según nos movemos, siendo positiva si vamos hacia la derecha, y negativa si vamos hacia la izquierda.

En el caso que no nos interese distinguir la dirección del movimiento, hablamos de distancia entre  $x_1$  y  $x_2$ , donde sencillamente tomamos el resultado de  $x_1 - x_2$  con signo positivo, es decir, tomamos el valor absoluto  $|x_1 - x_2|$ .

- Ejerc. 1.- a) Obtener la distancia de -1 a 20, de -19 a 40, de 4 a -4, de 6.5 a  $\frac{1}{4}$ , de -1 a -7.1, de -2 a  $\pi$ , de  $-\pi$  a  $\sqrt{3}$ .  
 b) Obtener la distancia entre 4 y 5, entre -3 y 6, entre -8 y -13.3, entre  $\pi$  y -1, entre -1 y  $\pi$ , entre 1 y  $-\pi$ .

En el caso que tengamos dos puntos en el plano ( $P_1$  y  $P_2$  en la fig. 1.3), el concepto de distancia dirigida de  $P_1$  a  $P_2$  requiere el uso de vectores, por lo cual no lo consideramos. Sólo consideramos la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  que definimos como la longitud del segmento de recta que los une. Si nos dan las coordenadas de  $P_1$  como  $(x_1, y_1)$  y las de  $P_2$  como  $(x_2, y_2)$ , para obtener la distancia  $D$  entre  $P_1$  y  $P_2$  en términos de las coordenadas, consideramos el triángulo de la fig. 1.3.

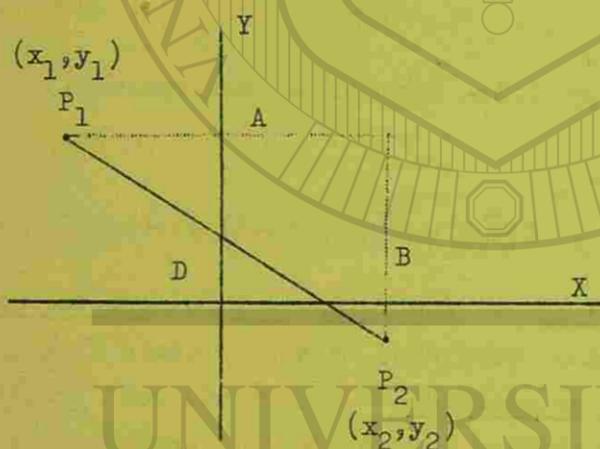


Fig. 1.3.- Distancia entre dos puntos.

$D$  es la longitud de la hipotenusa,  $A$  y  $B$  las longitudes de sus catetos. Luego por el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = A^2 + B^2, \text{ pero } A = |x_2 - x_1|, B = |y_2 - y_1|, \text{ de donde}$$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(¿Cuál es la distancia entre  $(3,4)$  y  $(-1,2)$ ; entre  $(-1,2)$  y  $(3,4)$ ?). ¿Es la distancia entre  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  igual a la distancia entre  $(a_2, b_2)$  y  $(a_1, b_1)$  ?).

En trigonometría vieron como medir el ángulo dirigido del segmento  $A$  al segmento  $B$  (vea figura 1.4), ya sea en grados o en radianes, trazando un círculo con centro en el vértice común.

a) En el caso de medir en grados, dividimos la circunferencia en 360 partes iguales, representando cada parte, un grado.



Figura 1.4.- Grados.

Al rotar el segmento  $A$  hasta coincidir con el segmento  $B$ , barre cierto número  $p$  de grados ( $p \geq 0$ ). Si la rotación fué en el sentido la medida del ángulo es  $p^\circ$ , y si fué en el sentido la medida es  $-p^\circ$ .

Si después rotamos una o mas vueltas completas, el segmento  $A$  vuelve a coincidir con el segmento  $B$ , por lo que a dicho ángulo le asignamos también las medidas  $(p+n360)^\circ$  ó  $(-p-n360)^\circ$  respectivamente.

Por ejemplo, en la figura 1.5 la medida del ángulo dirigido de  $A$  a  $B$  es  $-40^\circ$  ó  $(-40-360)^\circ = -400^\circ$  y en general  $(-40-n360)^\circ$ . Otras medidas del mismo ángulo son  $320^\circ$  ó  $320^\circ + n360^\circ$ .

(Dé cuatro medidas del ángulo dirigido de  $B$  a  $A$  en la misma figura.

¿Es igual el ángulo dirigido de  $A$  a  $B$  al ángulo dirigido de  $B$  a  $A$  ?).

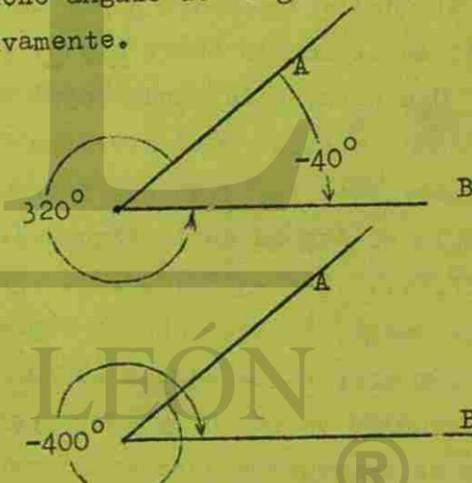


Figura 1.5.- Medida de un ángulo dirigido en grados.

b) En el caso de medir en radianes, la medida del ángulo dirigido de  $A$  a  $B$  es  $\theta = \frac{s}{r}$  (ver figura 1.6), donde  $r$  es el radio del círculo, y  $s$  es la longitud del arco que barre  $A$  al rotarse hasta coincidir con  $B$ . El arco  $s$  se toma positivo si la rotación fué en el sentido

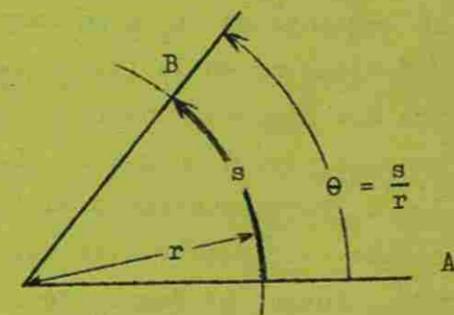
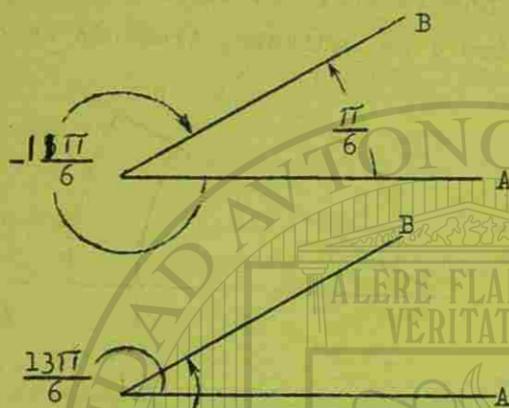


Figura 1.6.- Radianes.

y se toma negativo si la rotación fué en el sentido . Como la circunferencia de un círculo de radio  $1$  es  $2\pi$ , una rotación de una vuelta dá un ángulo de  $2\pi$  radianes (¿porqué?), y entonces, al rotar varias veces el segmento  $A$ , se obtienen otras medidas del mismo ángulo, como  $\theta + n2\pi$ .



Por ejemplo en la figura 1.7 la medida del ángulo dirigido de  $A$  a  $B$  es  $\frac{\pi}{6}$ , ó  $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ , ó  $\frac{\pi}{6} + n2\pi$ .

Otras medidas del mismo ángulo son  $-\frac{5\pi}{6}$ , ó  $-\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6}$  etc. (Dé cuatro medidas del ángulo dirigido de  $B$  a  $A$  en radianes. ¿A qué equivale un radián en grados?)

Figura 1.7.-Medida en radianes de un ángulo dirigido.

Definimos el ángulo  $\alpha$  entre dos segmentos  $A$  y  $B$  como el valor absoluto del ángulo  $\theta$  de  $A$  a  $B$ , es decir  $\alpha = |\theta|$ . Por ejemplo en la figura 1.5 el ángulo  $\alpha$  entre  $A$  y  $B$  es  $\alpha = 40^\circ$ . (Si el ángulo de  $A$  a  $B$  es  $-30^\circ$ , ¿cuál es el ángulo entre  $A$  y  $B$ ?).

Una diferencia fundamental entre distancia y ángulo, es que una distancia dada, siempre está representada por un sólo número, mientras que un ángulo dado, está representado por cualquiera de muchos números diferentes. Por ejemplo el ángulo de la figura 1.5 tiene como representativos a  $-40^\circ$ ,  $-400^\circ$ ,  $-760^\circ$ , ...,  $(-40-n360)^\circ$ , ..., también a  $320^\circ$ ,  $680^\circ$ , ...,  $(320+n360)^\circ$ , ... Desde luego, de todos estos representativos se acostumbra, para manipular, escoger uno; si es ángulo entre dos segmentos, se escoge el representativo comprendido entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  (entre  $0$  y  $\pi$  radianes), y si es ángulo dirigido se acostumbra escoger el representativo comprendido entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$  ( $-\pi$  y  $\pi$  radianes).

El ángulo de una línea recta  $L_1$  a otra  $L_2$  se define como el ángulo de un segmento de  $L_1$  a un segmento de  $L_2$ .

Por ejemplo, en la figura 1.8 escogimos los dos segmentos marcados con líneas gruesas y el ángulo  $\theta$  de  $L_1$  a  $L_2$  es de  $120^\circ$ . Pero igualmente pudimos haber escogido otro representativo, como el de  $-30^\circ$ . Luego, el ángulo de una recta a

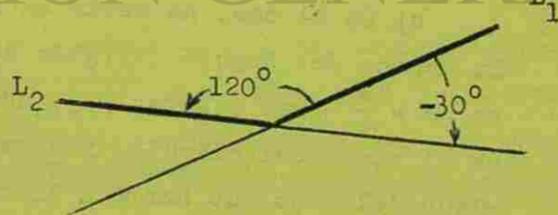


Figura 1.8.-Ángulo entre dos rectas.

otra está dado también por muchos representativos.

El ángulo entre dos rectas se define como el valor absoluto del ángulo de una recta a otra. Por ejemplo, el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$  en la fig. 1.8 sería  $|-30^\circ| = 30^\circ$ .

Ejerc. 4.- Dé cinco representativos para el ángulo de una recta a otra, si uno de ellos es  $-\frac{\pi}{4}$ .

#### 1.4 Ecuaciones.

Podemos definir ecuación de una manera directa, como dos expresiones algebraicas ligadas por el signo " $=$ ". Con esta definición,  $4x^2 + bc = \frac{3a+1}{2b}$  es una ecuación. La ecuación afirma que la expresión de la izquierda es numéricamente igual a la expresión de la derecha. Luego es una proposición acerca de las dos expresiones, y podemos indagar acerca de cuándo la proposición es verdadera o nó es verdadera. Pero antes nos tenemos que poner de acuerdo sobre qué entendemos por "ecuación verdadera".

En el caso de la ecuación en que ocurren sólo números particulares, o letras que denotan números particulares, como  $16 = 2\pi - \sqrt{25}$ , no hay problema. La ecuación es verdadera cuando ambos lados denotan el mismo número, y no lo es cuando denotan números diferentes. Para determinar ésto, basta con transformar ambos lados a expresiones que se reconozcan como iguales o nó.

En la ecuación dada podemos escribir  $2\pi - \sqrt{25}$  en la forma decimal, obteniendo  $2 \times 3.14... - 5 = 1.28...$  que evidentemente es distinto a  $16$ . Luego  $16 = 2\pi - \sqrt{25}$  no es verdadera.

En cambio  $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$  es verdadera, o como decimos, es una igualdad pues  $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ .

Ejerc. 1.-Determine cuales de las siguientes ecuaciones son igualdades y cuáles nó:  $2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}$ ,  $1 + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$ ,  $2\sqrt{5} = \sqrt{10}$ ,  $3^2 \times 3^3 = 3^5$ ,  $\sqrt{5} \sqrt{6} = \sqrt{30}$ ,  $2 - \log 100 = 0.000$ .

En el caso que ocurran una o mas letras que denoten un número cualquiera, como en  $3a = 2b - 5$ , donde  $a$  y  $b$  denotan cualquier número real, aún podemos reducirlo al caso anterior sustituyendo las letras por algunos de sus valores. Por ejemplo, si sustituimos  $a$  por  $3$  y  $b$  por  $6$ , es decir,  $(a,b)$  por  $(3,6)$ , obtenemos la ecuación  $3 \times 3 = 2 \times 6 - 5$  en la que ocurren sólo números particulares y claramente no es verdadera. Pero no hay nada que nos diga que debemos darle ese par de valores. Sustituyendo otro par  $(-1,1)$

obtenemos  $3(-1) = 2 - 5$ , que sí es verdadera.

Luego, sustituyendo algunos pares de valores en la ecuación, se obtiene una igualdad, y esto queremos expresar al decir que el par satisface la ecuación, ó que el par es una solución de la ecuación. En cambio otros pares no dan una igualdad y entonces decimos que no satisfacen la ecuación, o que no son soluciones de ella.

- Ejerc. 2.- a) ¿Cuáles de los siguientes pares son soluciones de la ecuación  $3a = 2b - 5$ ?  $(a,b) = (0,0)$ ;  $(0, \frac{5}{2})$ ;  $(\frac{5}{3}, 0)$ ;  $(1,2)$ ;  $(3,7)$
- b) Dada la ecuación  $w^2 = h - 1$ , obtener tres pares que sean soluciones y tres pares que no sean soluciones.

No sería justo decir que la ecuación  $3a = 2b - 5$  es verdadera, pues como vimos, al sustituir sus letras por números particulares a veces resultan ecuaciones verdaderas y a veces no. En lugar, nos conformamos con llamarla ecuación condicional o simplemente ecuación.

Cuando se dá el caso de una ecuación como  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , en que al sustituir sus letras por números siempre se obtienen ecuaciones verdaderas, entonces sí la llamamos ecuación verdadera o identidad. En Física e Ingeniería a veces se llama "ecuación verdadera" a una ecuación que según nuestra definición no lo es. Por ejemplo, se dice que  $D = VT$  donde D distancia, V velocidad y T tiempo, es "verdadera", aunque claramente  $(D,V,T) = (1,2,2)$  no la satisface. Nosotros preferimos llamarla ecuación concordante pues su "verdad" consiste en concordar con un aspecto del mundo físico.

Para demostrar que una ecuación es una identidad, no basta con sustituir varios números y comprobar que satisfacen la ecuación (aunque es una guía útil), pues habría que sustituir todos y cada uno de los números reales, lo cual no es posible. Hay que seguir un método que de un solo golpe dé la demostración para todos los números reales, por ejemplo, el método de transformar ambos lados hasta obtener expresiones que se reconozcan como iguales. Así  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  es una identidad, pues efectuando la multiplicación  $(a+b)(a+b)$  obtenemos  $a^2 + 2ab + b^2$ . En el caso de querer demostrar que una ecuación no es identidad, basta con encontrar valores que nó la satisfagan. Así, sabemos que  $3a = 2b - 5$  no es una identidad, puesto que  $(3,6)$  no la satisface.

### 1.5 Gráfica de Ecuaciones.

Si consideramos los pares de números que satisfacen una ecuación con dos letras, como  $t = s^2$ , obtenemos un conjunto de valores de  $(s,t)$ . Estos pares  $(s,t)$  los podemos graficar sobre el plano cartesiano, tomando s como abscisa y t como ordenada, y obtenemos así la gráfica de la ecuación.

En la práctica, para graficar una ecuación no podemos trazar todos los puntos que son soluciones, pues son una infinidad. Entonces seguimos el método de tabulación, que consiste en:

- a) Obtener un número conveniente de soluciones y graficarlas.
- b) Unir a mano limpia los puntos graficados.

Por ejemplo, para graficar la ecuación  $t = s^2$ , primero formamos una tabla donde obtenemos los pares de soluciones, como se vé en la fig. 1.9. Luego graficamos estos puntos y finalmente los unimos a mano limpia:

s	s <sup>2</sup>	Soluciones de $t = s^2$ (s,t)
-2	4	(-2,4)
-1.5	2.25	(-1.5,2.25)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
1.5	2.25	(1.5,2.25)
2	4	(2,4)

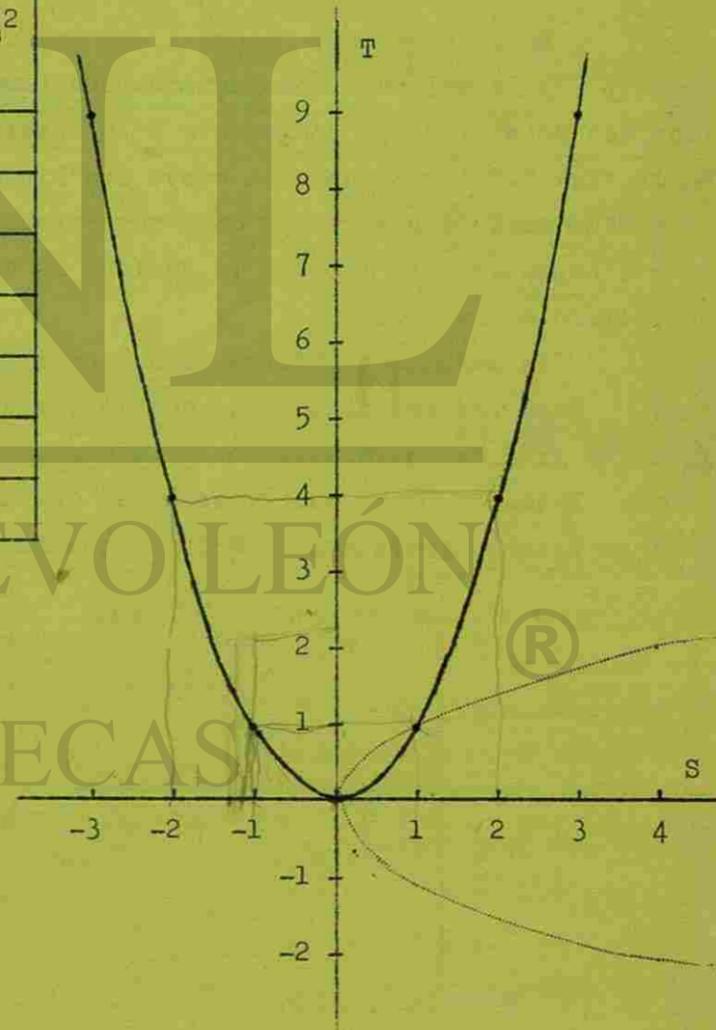


Fig. 1.9.- Tabulación y Gráfica de la ecuación  $t = s^2$ .

Naturalmente nos preguntamos que razones tenemos para pensar que la curva así trazada es la gráfica de  $t = s^2$ , es decir, cómo sabemos que los puntos intermedios trazados a mano limpia son también soluciones. Para asegurarnos podemos:

- Tabular puntos intermedios para advertir ondulaciones o pliegues en la curva. Esto se hace sobre todo, si los puntos tabulados están muy separados.
- Conocer la forma general de la curva según sea su ecuación. En el siguiente capítulo estudiamos varias formas generales de curvas.
- Analizar la ecuación con respecto a monotonidad y presencia de máximos y mínimos. Este análisis se estudia en el tercer capítulo y usualmente es el más adecuado.

Ejerc. 1.- Graficar las ecuaciones:  $3a - 2b = 1$ ,  $z = \frac{1}{x}$ ,  $t = \frac{s}{s+1}$ .

En la ecuación  $t = s^2$ , en lugar de usar  $s$  como abscisa, podemos usar  $t$ , y en tal caso consideramos los pares de soluciones  $(t, s)$ . La gráfica que se obtiene es congruente a la anterior pero en una posición diferente. En la fig. 1.9 trazamos esta curva con líneas punteadas. La ecuación en sí no indica cual de sus letras usar como abscisa y cual como ordenada. Pero es la costumbre usar la letra a la cual se le dan valores como abscisa, pues queda primero en la tabla.

Ya definimos gráfica de una ecuación cuando la ecuación tiene dos letras. Para las ecuaciones con una letra, como  $x - 1 = 1$ , también podemos definir su gráfica introduciendo trivialmente otra letra como  $y$  en la ecuación. Entonces obtenemos la ecuación con dos letras  $0 \cdot y + x - 1 = 1$ , la cual ya sabemos graficar. Notamos que sus soluciones son del tipo  $(2, y)$ , donde  $y$  es cualquier número real.

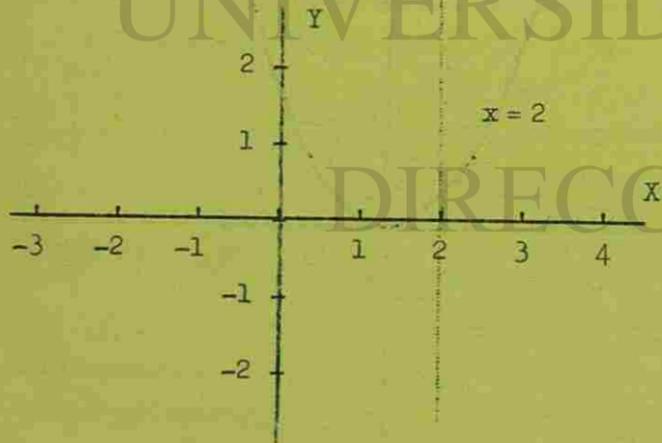


Fig. 1.10.- Gráfica de Ecuaciones con una letra.

Luego al graficar, estos puntos tienen todos la misma abscisa, y nos dan una recta perpendicular al eje X, como lo muestra la fig. 1.10.

Ejerc. 2.- Grafique las ecuaciones:

$$a^2 - 3 + 0 = 0$$

$$\frac{b}{b+1} = 2 \quad ; \quad a = -3$$

### 1.6 Familia de Curvas.

En la sección anterior graficamos ecuaciones con una o dos letras. Ahora falta ver como podemos graficar en el plano cartesiano ecuaciones con más de dos letras, como  $y = kx^2$ .

Para las coordenadas solo necesitamos un par de letras, por ejemplo  $(x, y)$ , por lo que nos queda sobrando la  $k$  en la ecuación y no nos permite obtener los pares de números que necesitamos. Para quitarnos esta dificultad sencillamente sustituimos la  $k$  por un valor como  $2$  y obtenemos la ecuación  $y = 2x^2$ , que muy bien sabemos graficar (vea fig. 1.11). Igualmente podemos sustituir  $k$  por otro valor como  $-1$ , obteniendo otra ecuación ( $y = -x^2$ ) y otra curva (vea fig. 1.11).

Entonces para no mostrar favoritismo a algún valor de  $k$ , consideramos la familia de ecuaciones que se obtienen sustituyendo  $k$  por sus valores. Cada ecuación nos da una curva, por lo que obtenemos una familia de curvas que llamamos gráfica de la ecuación  $y = kx^2$ .

Para indicar que la  $k$  se sustituye para obtener ecuaciones, decimos que  $k$  es parámetro. En este caso  $x$  y  $y$  son las variables, pues son las que se cambian para obtener los diversos puntos de cada curva.

En la ecuación  $y = kx^2$  podemos escoger otra letra para sustituir es decir, escoger otra letra como parámetro, por ejemplo la  $y$  ó la  $x$ , y en cada caso obtenemos otras familias.

- Ejerc. 1.-
- Grafique cuatro curvas de la ecuación  $y = kx^2$ , usando  $x$  como parámetro. Idem., usando  $y$  como parámetro.
  - Grafique cuatro curvas de la ecuación  $az + w = b$ , donde  $a$  y  $b$  son parámetros.
  - Igual que b) pero tomando  $a$  y  $z$  como parámetros.

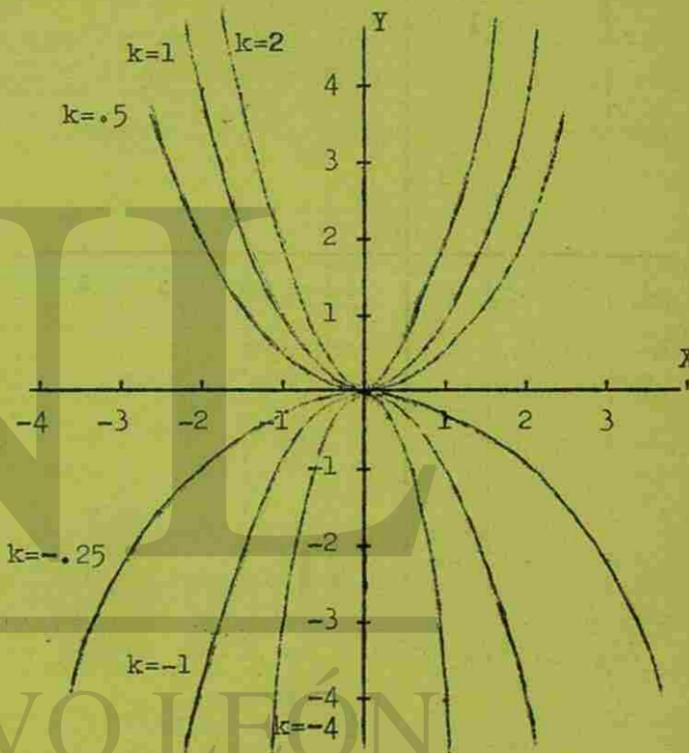
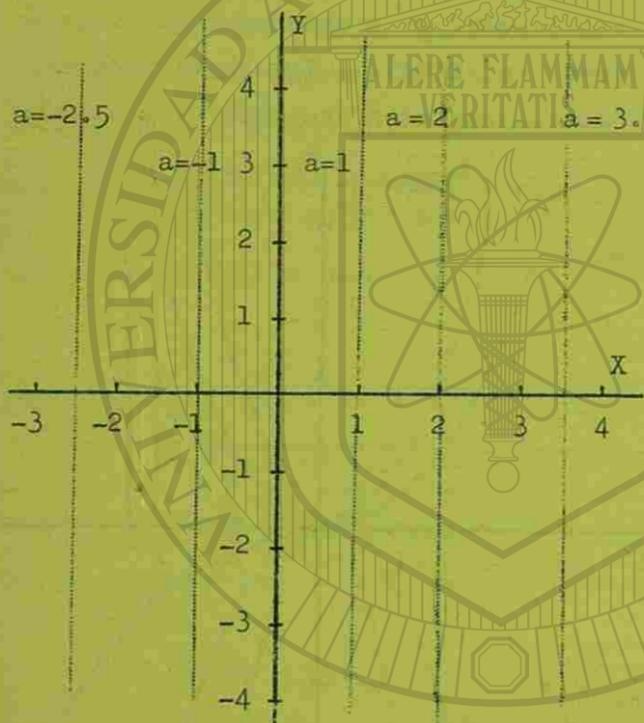


Fig. 1.11.- Gráfica de  $y = kx^2$ .

Como se ha visto hasta aquí, cualquiera de las letras de una ecuación puede ser considerada como parámetro. En el caso que tratemos con una ecuación de dos letras como  $x = a$ , aún podemos considerar a una de ellas como parámetro, por ejemplo la  $a$ ; si sustituimos la  $a$  por un valor como  $2$  obtenemos la ecuación  $x = 2$  (ó  $0 \cdot y + x = 2$ ) cuya gráfica ya sabemos trazar (vea fig. 1.12), igualmente si sustituimos la  $a$  por otro valor como  $-1$  obtenemos la ecuación  $x = -1$



(ó  $0 \cdot y + x = -1$ ) que también sabemos graficar. Y en general, si sustituimos la  $a$  por sus valores, obtenemos una familia de ecuaciones y una correspondiente familia de rectas verticales, las cuales constituyen la gráfica de la ecuación  $x = a$  en que  $a$  es parámetro. (Vea Fig. 1.12).

Ejerc. 2.- Trace la gráfica de la ecuación  $x = a$  en que  $x$  es parámetro.

Fig. 1.12.- Gráfica de  $x = a$  en que  $a$  es parámetro.

PROBLEMAS  
SECCION 1.1

A.- Denote con seis diferentes símbolos cada uno de los siguientes números, y diga cuales de esos símbolos denotan números enteros, cuales denotan números racionales, y cuales irracionales:

- |                                  |                      |                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------|
| 1) $-2$                          | 2) $\pi$             | 3) $\frac{3}{12}$                | 4) $.0001$                 |
| 5) $\frac{6}{3}$                 | 6) $2\frac{2}{3}$    | 7) $1 + \sqrt{3}$                | 8) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$   |
| 9) $a - 2$                       | 10) $n$              | 11) $0$                          | 12) $\pi + 0$              |
| 13) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ | 14) $.24 - \log 100$ | 15) $\text{Sen } 30^\circ - \pi$ | 16) $4 \times 3.51 - 3\pi$ |

B.- En los siguientes problemas transformar a la forma decimal o a la de quebrado según el caso, señalando cuales números son racionales y cuales irracionales, y aclarar cuando se hagan aproximaciones:

- |                    |                     |                      |                      |
|--------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $-\frac{31}{5}$ | 2) $.0005$          | 3) $\frac{-7}{8000}$ | 4) $0.000$           |
| 5) $2\frac{2}{7}$  | 6) $-\sqrt{18}$     | 7) $\sqrt[3]{3}$     | 8) $\frac{\pi}{2}$   |
| 9) $12.012$        | 10) $n$             | 11) $\frac{m}{n}$    | 12) $\frac{236}{41}$ |
| 13) $0.333\dots$   | 14) $1.454545\dots$ | 15) $.010101\dots$   | 16) $.9999\dots$     |

C.- De las siguientes parejas de símbolos, decir cuales denotan el mismo número real. Si no denotan el mismo, ordénalas en la forma  $a < b$ :

- |                                  |                         |                           |                              |
|----------------------------------|-------------------------|---------------------------|------------------------------|
| 1) $\frac{1}{2}, \frac{-8}{-16}$ | 2) $\pi, 3.14159$       | 3) $-\frac{1}{3}, -.333$  | 4) $\frac{1}{9}, 0.111\dots$ |
| 5) $-\pi, -\frac{22}{7}$         | 6) $-1000, \frac{1}{2}$ | 7) $\frac{1000}{1001}, 1$ | 8) $-\frac{1001}{1000}, -1$  |
| 9) $-.0001, 0$                   | 10) $\frac{15}{16}, 1$  | 11) $-34, .002$           | 12) $.01, .0001$             |
| 13) $a, 0$                       | 14) $-a, 0$             | 15) $-b, k$               | 16) $m, 2m$                  |

D.- Conteste las siguientes preguntas:

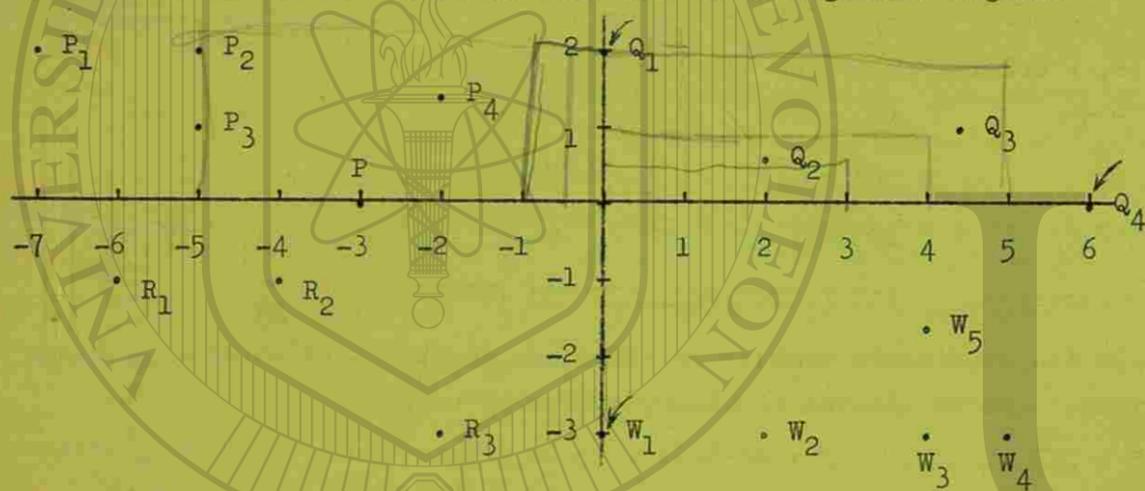
- 1) Al construir una escala real, ¿cuánto ha de medir el segmento  $\overline{0,1}$ ?
- 2) ¿Qué diferencia hay entre el proceso de construcción de los enteros positivos, y el de los negativos en la escala real?
- 3) ¿Porqué no se construyen los positivos hacia la izquierda?
- 4) ¿Es el cero un entero positivo? ¿es entero negativo?, ¿es racional?
- 5) ¿Hay racionales que sean enteros negativos? ¿enteros positivos?
- 6) ¿Hay enteros que son racionales?, ¿los hay que no son racionales?
- 7) ¿Hay números enteros que no son números reales?
- 8) Si  $a$  denota un número positivo, ¿qué denota  $-a$ ? ¿y  $-(-a)$ ?
- 9) Si  $b$  denota cualquier número real ¿qué denota  $-b$ ? ¿y  $-(-b)$ ?
- 10) Si  $c$  denota al cero, ¿qué denota  $-c$ ? ¿y  $-(-c)$ ?

PROBLEMAS  
SECCION 1.2

A.- Sin trazar, decir en que cuadrante está cada punto. Después trazar:

- |                         |                             |                                    |                                   |            |
|-------------------------|-----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|------------|
| 1) (4,1)                | 2) (1,4)                    | 3) $(-\frac{1}{2}, 3)$             | 4) $(3, -\frac{1}{2})$            | 5) (-1,2)  |
| 6) (5,3)                | 7) (-5,-3)                  | 8) (5,-3)                          | 9) (-5,3)                         | 10) (3,-5) |
| 11) (1.4,2)             | 12) (.6,-3)                 | 13) (0,-1)                         | 14) (6,0)                         | 15) (0,0)  |
| 16) $(\frac{2}{3}, -4)$ | 17) $(-3.7, -\frac{5}{2})$  | 18) (-3,-2.001)                    | 19) $(\frac{12}{5}, \frac{3}{5})$ |            |
| 20) $(\sqrt{3}, \pi)$   | 21) $(\frac{1}{4}, \log 2)$ | 22) $(\sqrt[3]{4}, -\frac{5}{16})$ | 23) $(2^{-1/2}, 3^{-1/2})$        |            |
| 24) (a,0)               | 25) (0,m)                   | 26) (-k,2)                         | 27) (-x,-y)                       |            |

B.- Dar las coordenadas de los puntos marcados en la siguiente figura:



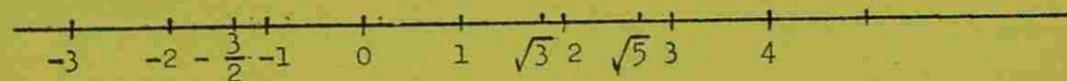
C.- Conteste las siguientes preguntas:

- 1) ¿Como se llama la pareja de números reales asociados con un punto?
- 2) ¿Podríamos llamar eje de las abscisas al eje vertical?
- 3) ¿Podríamos denotar al eje X con otra letra, por ejemplo W?
- 4) ¿Podríamos denotar al eje Y con otra letra, por ejemplo V?
- 5) ¿Podríamos poner al eje de ordenadas con los números positivos abajo?
- 6) ¿Podríamos poner al eje X con los negativos a la izquierda?
- 7) ¿Tiene que ser horizontal el eje de abscisas?
- 8) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre el eje X?
- 9) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre el eje Y?
- 10) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre una recta vertical en el plano cartesiano?
- 11) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre una recta horizontal en el plano cartesiano?
- 12) ¿Qué figura determina el conjunto de puntos cuya abscisa es igual a su ordenada?

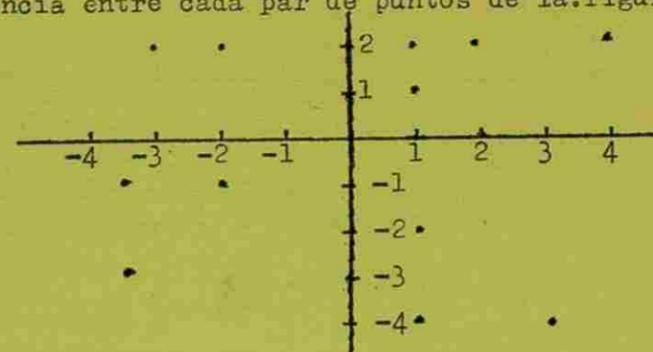
PROBLEMAS  
SECCION 1.3

I.-

- 1) Defina distancia dirigida de a a b y distancia entre a y b.
- 2) Dé la distancia dirigida y la distancia entre cada par de puntos de la figura:



- 3) Dé la distancia entre cada par de puntos de la figura:

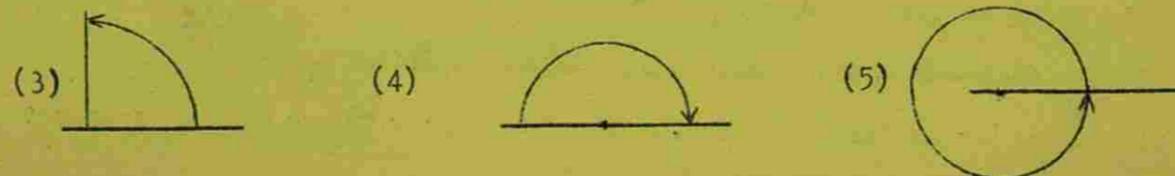


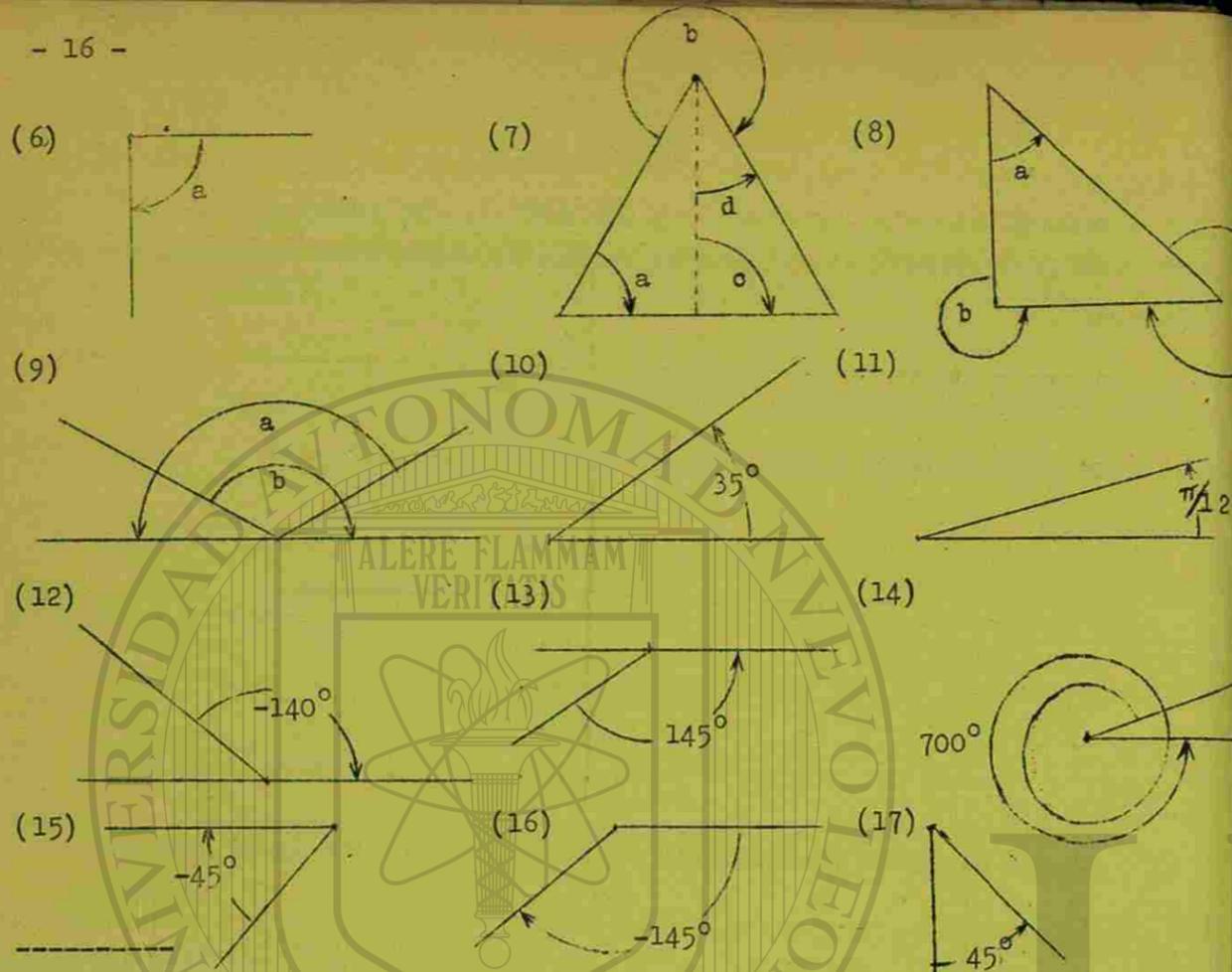
- 4) ¿A qué es igual la distancia entre dos puntos con igual abscisa?
- 5) ¿" " " " " " " " " " " ordenada?
- 6) ¿" " " " " " " " el origen y (a,b)?
- 7) ¿" " " " " " " " dos puntos sobre el eje X?
- 8) ¿" " " " " " " " " " " eje Y?
- 9) Dé la distancia entre cada uno de los pares de puntos dados a continuación:

- $(3,-1)$  y  $(-5,6)$  ;  $(2, \sqrt{2})$  y  $(-1, \sqrt{3})$  ;  $(5,-6)$  y  $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{7})$  ;  
 $(-\sqrt{5}, -\frac{1}{3})$  y  $(5, -\pi)$  ;  $(3, -\log 2)$  y  $(\pi, -\log 2)$  ;  $(2, -\sqrt{75})$  y  
 $(-1, -\sqrt{75})$  ;  $(5r, -1)$  y  $(5r, -\frac{3}{2})$  ;  $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\pi}{6})$  y  $(1,0)$  ;  
 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi})$  ;  $(1000, -500)$  y  $(999, 500)$  ;  $(1,-2)$  y  $(-1,2)$   
 $(0,-3)$  y  $(-\frac{1}{2}, 0)$  ;  $(\frac{2}{7}, -\frac{\pi}{7})$  y  $(0,0)$  ;  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$  y  $(0,0)$ .

II.-

- 1) ¿Cuál es el sentido positivo al medir un ángulo dirigido de un segmento a otro?
- 2) ¿Qué sentido debe seguirse al medir un ángulo entre dos segmentos?  
Dar tres medidas positivas en grados, 3 negativas en grados, 3 positivas en radianes y 3 negativas en radianes de cada ángulo a continuación:





Cada ángulo a continuación es el ángulo dirigido del eje X a otra recta.

Trace esta última en un plano cartesiano:

- 18)  $\pi$  radianes.      (19)  $-45^\circ$       (20)  $-\frac{\pi}{3}$  rad.  
 21)  $3715^\circ$       (22)  $-1500^\circ$       (23)  $\frac{7}{2}\pi$  rad.  
 24)  $-\frac{16}{3}\pi$  rad.      (25)  $5000\pi$  rad.      (26)  $90^\circ$   
 27)  $\frac{\pi}{2}$  rad.      (28)  $-135^\circ$       (29)  $-\frac{7}{2}\pi$  radianes.  
 30)  $120^\circ$       (31)  $-120^\circ$       (32)  $-1300^\circ$   
 33)  $-.0001\pi$  rad.      (34)  $\sqrt{2}$  rad.      (35)  $\frac{60}{\sqrt{3}}$  rad.  
 36)  $\frac{400^\circ}{\sqrt{2}}$       (37)  $(4 \cdot 10^4)^\circ$

- 38) ¿Cómo se mide un ángulo en grados?  
 39) ¿Cómo se mide un ángulo en radianes?  
 40) ¿Cuál es la equivalencia entre tales unidades?  
 41) Al medir un ángulo en rad., ¿importa la longitud del radio trazado?

PROBLEMAS  
 SECCION 1.4

A.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son igualdades:

- 1)  $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{5+2}$       2)  $5 + \frac{9}{3} = \frac{5+9}{3}$   
 3)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3}$       4)  $-3\frac{1}{2} = -3 + \frac{1}{2}$   
 5)  $-(-5-7) = 5-7$       6)  $\sqrt{8} - \sqrt{5} = \sqrt{8-5}$   
 7)  $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{5-2}{7-3}$       8)  $\frac{8}{3} - 3 = \frac{8-3}{3}$   
 9)  $-4 - \frac{1}{2} = \frac{-4-1}{2}$       10)  $\frac{6}{7} - (-\frac{3}{4}) = \frac{6+3}{7+4}$   
 11)  $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5}$       12)  $2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$   
 13)  $6 \times 5 - 2 = 6 \times 3$       14)  $7(3+2) = 21+2$   
 15)  $\frac{5+3}{7+3} = \frac{5}{7}$       16)  $\frac{7-5}{3-5} = \frac{7}{3}$   
 17)  $\frac{3 \times 4 + 7}{3 \times 4} = \frac{4+7}{4}$       18)  $\frac{4 \times 6}{4 \times 6 - 5} = \frac{6}{6-5} = \frac{0}{-5}$

B.- De los pares de valores de la izquierda, decir cuales son soluciones de las ecuaciones de la derecha:

- |                        |                                  |                           |
|------------------------|----------------------------------|---------------------------|
| (p,k)                  | a) $pk = 2 - k$                  | b) $5p - 2 = \frac{3}{k}$ |
| 1) (1,1)               | c) $p - k = 3p + 6$              | d) $(p+1)^2 = k - 1$      |
| 2) (0,-6)              | e) $\frac{3-p}{k} = \frac{2}{5}$ |                           |
| 3) (1,5)               |                                  |                           |
| 4) $(-\frac{1}{3}, 3)$ |                                  |                           |
| 5) (-1,1)              |                                  |                           |
| 6) $(\pi, .45)$        |                                  |                           |

C.- De las "triadas" de valores de la izquierda, decir cuáles satisfacen a las ecuaciones de la derecha:

- |             |                          |
|-------------|--------------------------|
| (w,b,g)     | a) $w - b = g + 1$       |
| 1) (4,8,4)  | b) $wb = g$              |
| 2) (4,2,1)  | c) $w - 2 = \frac{b}{g}$ |
| 3) (2,3,6)  |                          |
| 4) (3,-1,5) |                          |

D.- De las "n-adas" de valores de la izquierda decir cuáles son soluciones de la ecuación de la derecha:

- |   |                        |
|---|------------------------|
| (f,g,h,x)   | $-g + 2h = 2x - 1 - f$ |
| 1) (0,-3,4,1)   |                        |
| 2) (3,4,5,-2)   |                        |
| 3) (2,1,-1,0)   |                        |
| 4) $(\sqrt{2}, 1, \text{sen } 45^\circ, \frac{1}{2})$ |                        |

E.- Para cada una de las siguientes ecuaciones, dar tres pares de valores que sean soluciones y tres pares que no las satisfagan:

- 1)  $d - 3j = 4$       2)  $2m - 4n = 1$       3)  $a = 2b - 3$       4)  $y - 1 = -2(x + 6)$

- 5)  $\frac{p}{2} - \frac{a}{4} = 1$     6)  $y^2 = 4x$     7)  $a^2 + b^2 = 25$     8)  $w^2 - r^2 = 1$   
 9)  $2p^2 - s^2 = 2$     10)  $(y-1)^2 = 4(x+2)$     11)  $mn - 1 = m^2$     12)  $bk^2 - 3 = 2b$

F.- Para cada una de las siguientes ecuaciones dar 3 n-adas de valores que sean soluciones y 3 n-adas que no las satisfagan:

- 1)  $a+2b-1=k$     2)  $rk-3mn=2x$     3)  $\frac{a-x}{2y} = \frac{b}{c-1}$     4)  $2mn^2 - pq = \frac{r-m}{n-p} + f$

G.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son identidades:

- 1)  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$     2)  $a - \frac{k}{m} = \frac{a-k}{m}$     3)  $\frac{x}{y} - 2 = \frac{x}{y-2}$   
 4)  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$     5)  $a(b+c) = ab+ac$     6)  $mb - mh = m(b-h)$   
 7)  $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$     8)  $m^2 + n^2 = (m+n)(m+n)$     9)  $(h+a)^3 = h^3 + a^3$

H.- Dé la definición de cada uno de los siguientes términos:

- 1) Ecuación.    2) Igualdad.  
 3) Solución de una ecuación en la que ocurren dos letras (x,y).  
 4) Solución de una ecuación en la que ocurren tres letras (a,b,c).  
 5) Solución de una ecuación en la que ocurren n letras (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, ..., a<sub>n</sub>).  
 6) Solución de una ecuación en la que ocurre una letra x.  
 7) Ecuación condicional.    8) Identidad.  
 9) Ecuación concordante.

PROBLEMAS

SECCION 1.5

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

- 1)  $a-1 = x+3$   
 2)  $3b+m = -m+4$     3)  $-2(g-3)=5h$     4)  $p(q-1)=2$     5)  $m(n+2) = -n$   
 6)  $w-x = x^2+3$     7)  $d - c^3 + 1 = 0$     8)  $x-y^2+2y=0$     9)  $2b^2 - n^2 = 1$   
 10)  $k^2 + 3s^2 - 1 = 0$     11)  $a-3 = 0$     12)  $g^2+g-6=0$     13)  $2(x+4) - 1 = 2$   
 14)  $(b-1)(b+2)=b^2$     15)  $(f-1)(f+2)=0$     16)  $f^2+j^2=4$     17)  $a^2 - b^3 = 1$

PROBLEMAS

SECCION 1.6

Para cada una de las siguientes ecuaciones, trazar todas las posibles gráficas que se obtienen de considerar una u otras letras como parámetros:

- 1)  $y = mx$     2)  $t-2 = j(h+1)$     3)  $f = p(q+1)$     4)  $g-1 = p^2h$   
 5)  $a^2 + b^2 = k$     6)  $j(b-1) = 1$     7)  $ab - xy = m$     8)  $zg = 3$   
 9)  $y - y(r+1) = 0$     10)  $dk^3 - w = 0$     11)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$     12)  $y-h = m(x-k)$   
 13)  $g^2h^2 = p$     14)  $k-f = y-m$     15)  $\frac{r}{j} = 1$     16)  $h^2 - 2t^2 = s$

Capítulo II  
GEOMETRIA ANALITICA

54/13.8  
 14/20

2.1 Introducción.

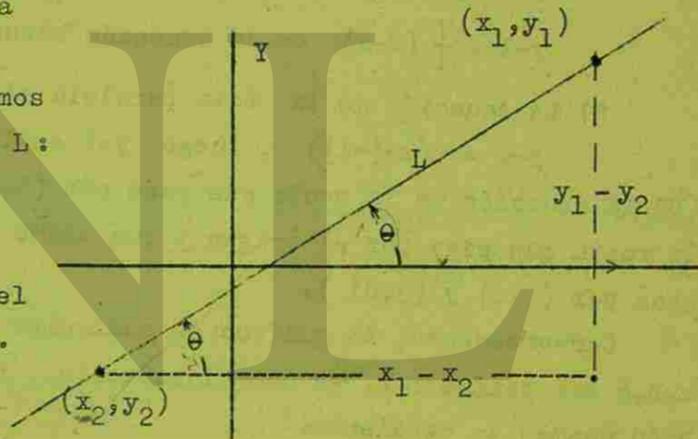
En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que da lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una línea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela hasta ser perpendicular al eje X. Para medir la inclinación, definimos la pendiente m de cualquier recta L:

$$m = \tan \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).



Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo

Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

del eje X a ella es  $30^\circ$ ;  $-45^\circ$ .

- b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?  
 c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?  
 d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?

Dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente m en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por  $(-3, 4)$  y  $(1, 2)$ . Su pendiente es  $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$ .

- 5)  $\frac{p}{2} - \frac{q}{4} = 1$
- 6)  $y^2 = 4x$
- 7)  $a^2 + b^2 = 25$
- 8)  $w^2 - r^2 = 1$
- 9)  $2p^2 - s^2 = 2$
- 10)  $(y-1)^2 = 4(x+2)$
- 11)  $mn - 1 = m^2$
- 12)  $bk^2 - 3 = 2b$

F.- Para cada una de las siguientes ecuaciones dar 3 n-adas de valores que sean soluciones y 3 n-adas que no las satisfagan:

- 1)  $a+2b-1=k$
- 2)  $rk-3mn=2x$
- 3)  $\frac{a-x}{2y} = \frac{b}{c-1}$
- 4)  $2mn^2 - pq = \frac{r-m}{n-p} + f$

G.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son identidades:

- 1)  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$
- 2)  $a - \frac{k}{m} = \frac{a-k}{m}$
- 3)  $\frac{x}{y} - 2 = \frac{x}{y-2}$
- 4)  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$
- 5)  $a(b+c) = ab+ac$
- 6)  $mb-mh = m(b-h)$
- 7)  $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$
- 8)  $m^2+n^2 = (m+n)(m+n)$
- 9)  $(h+a)^3 = h^3 + a^3$

H.- Dé la definición de cada uno de los siguientes términos:

- 1) Ecuación.
- 2) Igualdad.
- 3) Solución de una ecuación en la que ocurren dos letras (x,y).
- 4) Solución de una ecuación en la que ocurren tres letras (a,b,c).
- 5) Solución de una ecuación en la que ocurren n letras (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, ..., a<sub>n</sub>).
- 6) Solución de una ecuación en la que ocurre una letra x.
- 7) Ecuación condicional.
- 8) Identidad.
- 9) Ecuación concordante.

PROBLEMAS  
SECCION 1.5

- Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones:
- 1)  $a-1 = x+3$
  - 2)  $3b+m = -m+4$
  - 3)  $-2(g-3)=5h$
  - 4)  $p(q-1)=2$
  - 5)  $m(n+2) = -n$
  - 6)  $w-x = x^2+3$
  - 7)  $d-c^3+1=0$
  - 8)  $x-y^2+2y=0$
  - 9)  $2b^2-n^2=1$
  - 10)  $k^2+3s^2-1=0$
  - 11)  $a-3=0$
  - 12)  $g^2+g-6=0$
  - 13)  $2(x+4)-1=2$
  - 14)  $(b-1)(b+2)=b^2$
  - 15)  $(f-1)(f+2)=0$
  - 16)  $f^2+j^2=4$
  - 17)  $a^2-b^3=1$

PROBLEMAS  
SECCION 1.6

Para cada una de las siguientes ecuaciones, trazar todas las posibles gráficas que se obtienen de considerar una u otras letras como parámetros:

- 1)  $y = mx$
- 2)  $t-2 = j(h+1)$
- 3)  $f = p(q+1)$
- 4)  $g-1 = p^2h$
- 5)  $a^2 + b^2 = k$
- 6)  $j(b-1) = 1$
- 7)  $ab - xy = m$
- 8)  $zg = 3$
- 9)  $y - y(r+1) = 0$
- 10)  $dk^3 - w = 0$
- 11)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- 12)  $y-h = m(x-k)$
- 13)  $g^2h^2 = p$
- 14)  $k-f = y-m$
- 15)  $\frac{r}{j} = 1$
- 16)  $h^2 - 2t^2 = s$

Capítulo II  
GEOMETRIA ANALITICA

54/13.8  
1/20

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que da lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una línea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela hasta ser perpendicular al eje X. Para medir la inclinación, definimos la pendiente m de cualquier recta L:

$$m = \tan \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).

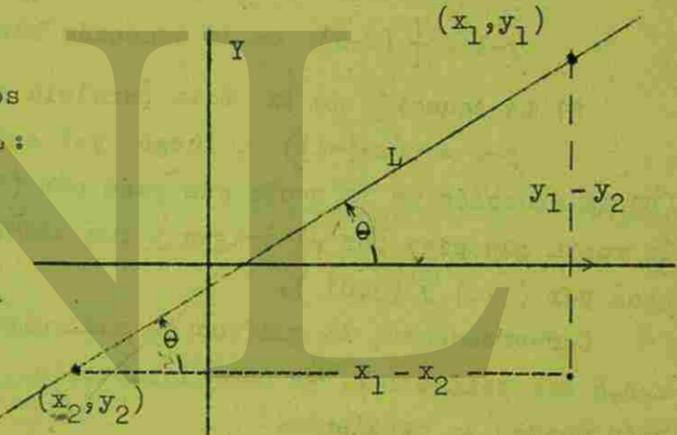


Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

- Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella es  $30^\circ$ ;  $-45^\circ$ .
- b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?
  - c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?
  - d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?

Dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente m en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por  $(-3, 4)$  y  $(1, 2)$ . Su pendiente es  $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$ .

En Algebra aprendieron que la ecuación de cualquier recta es una ecuación lineal en dos variables. (Vea I.A. sección 5.8). Ahora demostramos que en efecto es así, usando el concepto de pendiente:

Sea  $(x,y)$  cualquier punto de la recta L,

$(x_0, y_0)$  un punto dado de L, y

$m$  la pendiente de L,

queremos demostrar que la ecuación de la recta L es una ecuación lineal.

Por la fórmula (1.2) se tiene que  $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$  de donde se concluye que  $y-y_0 = m(x-x_0)$  es la ecuación de la recta, es lineal en  $(x,y)$ .

En el caso que la recta sea perpendicular al eje X, esta ecuación no tiene sentido, pues  $m = \infty$ , y en su lugar tenemos la ecuación  $x = x_0$  para la recta (¿porqué?). En este caso también se obtuvo una ecuación lineal en  $(x,y)$ .

Ejemplos:

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(4,3)$  y  $(8,10)$  es:

$$y-3 = m(x-4), \text{ pero } m = \frac{10-3}{8-4} = \frac{7}{4} \text{ (¿porqué?). Luego}$$

$$y-3 = \frac{7}{4}(x-4) \text{ es la ecuación buscada.}$$

2) La ecuación de la recta paralela al eje X y que pasa por  $(-1,1)$  es:

$$y-1 = 0(x-(-1)), \text{ luego } y=1 \text{ es la ecuación buscada.}$$

(Dé la ecuación de la recta que pasa por  $(1,2)$  y tiene pendiente 2; la de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente  $\frac{1}{2}$ ; la de la recta que pasa por  $(3,4)$  y  $(3,0)$ ).

Conversamente, la gráfica de cualquier ecuación lineal  $ax+by+c=0$  donde  $a,b,c$  son parámetros, es una línea recta. Para demostrar este resultado también usamos la pendiente:

La curva L., gráfica de la ecuación  $ax+by+c=0$  pasa por los puntos

$$\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \text{ y } \left(0, -\frac{c}{b}\right) \text{ (¿porqué?).}$$

La recta L' que pasa por esos dos puntos tiene pendiente  $m = -\frac{a}{b}$

(¿porqué?).

La ecuación de L' por lo tanto, es  $y-(-\frac{c}{b}) = -\frac{a}{b}(x-0)$  (¿porqué?).

Ecuación que transformada da:  $ax+by+c=0$  (transformela). Por lo tanto la curva L y la recta L' tienen la misma ecuación, luego deben coincidir y L tiene que ser una recta.

Entonces para graficar una ecuación lineal, basta con trazar dos puntos soluciones de la ecuación y pasar una recta por ellos. Generalmente los puntos que se escogen son las intersecciones con los ejes.

Por ejemplo, para graficar la ecuación  $2x+y=3$ , tenemos para  $x=0$ ,  $y=3$ ; y para  $y=0$ ,  $x=\frac{3}{2}$ ; luego  $(0,3)$  y  $(\frac{3}{2},0)$  son las

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que da lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una línea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela

hasta ser perpendicular al eje X.

Para medir la inclinación, definimos la pendiente  $m$  de cualquier recta L:

$$m = \tan \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).

Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo

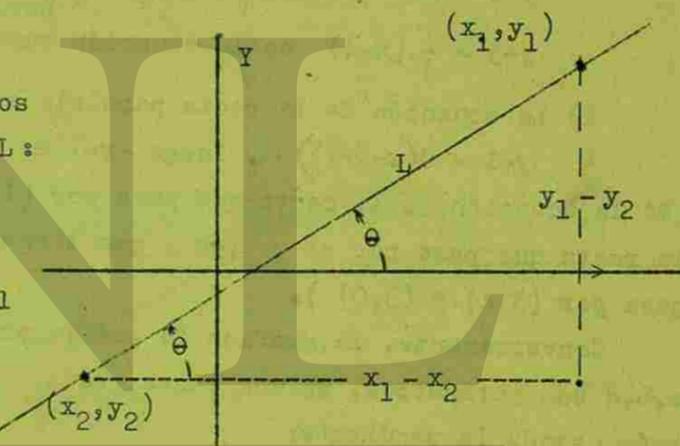


Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

$30^\circ$ ;  $-45^\circ$ .

- b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?
- c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?
- d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?

Dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente  $m$  en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por  $(-3,4)$  y  $(1,2)$ . Su pendiente es  $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$ .

En Algebra aprendieron que la ecuación de cualquier recta es una ecuación lineal en dos variables. (Vea I.A. sección 5.8). Ahora demostramos que en efecto es así, usando el concepto de pendiente:

Sea  $(x,y)$  cualquier punto de la recta L,

$(x_0,y_0)$  un punto dado de L, y

$m$  la pendiente de L,

queremos demostrar que la ecuación de la recta L es una ecuación lineal.

Por la fórmula (1.2) se tiene que  $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$  de donde se concluye que  $y-y_0 = m(x-x_0)$  es la ecuación de la recta, es lineal en  $(x,y)$ .

En el caso que la recta sea perpendicular al eje X, esta ecuación no tiene sentido, pues  $m = \infty$ , y en su lugar tenemos la ecuación  $x = x_0$  para la recta (¿porqué?). En este caso también se obtuvo una ecuación lineal en  $(x,y)$ .

Ejemplos:

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(4,3)$  y  $(8,10)$  es:

$y-3 = m(x-4)$ , pero  $m = \frac{10-3}{8-4} = \frac{7}{4}$  (¿porqué?). Luego

$y-3 = \frac{7}{4}(x-4)$  es la ecuación buscada.

2) La ecuación de la recta paralela al eje X y que pasa por  $(-1,1)$  es:

$y-1 = 0(x-(-1))$ , luego  $y=1$  es la ecuación buscada.

(Dé la ecuación de la recta que pasa por  $(1,2)$  y tiene pendiente 2; la de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente  $\frac{1}{2}$ ; la de la recta que pasa por  $(3,4)$  y  $(3,0)$ ).

Conversamente, la gráfica de cualquier ecuación lineal  $ax+by+c=0$  donde  $a,b,c$  son parámetros, es una línea recta. Para demostrar esta resultado también usamos la pendiente:

La curva L, gráfica de la ecuación  $ax+by+c = 0$  pasa por los puntos

$(-\frac{c}{a}, 0)$  y  $(0, -\frac{c}{b})$  (¿porqué?).

La recta L' que pasa por esos dos puntos tiene pendiente  $m = -\frac{a}{b}$  (¿porqué?).

La ecuación de L' por lo tanto, es  $y-(-\frac{c}{b}) = -\frac{a}{b}(x-0)$  (¿porqué?).

Ecuación que transformada da:  $ax+by+c = 0$  (transformela). Por lo tanto la curva L y la recta L' tienen la misma ecuación, luego deben coincidir y L tiene que ser una recta.

Entonces para graficar una ecuación lineal, basta con trazar dos puntos soluciones de la ecuación y pasar una recta por ellos. Generalmente los puntos que se escogen son las intersecciones con los ejes.

Por ejemplo, para graficar la ecuación  $2x+y = 3$ , tenemos para  $x=0$ ,  $y=3$ ; y para  $y=0$ ,  $x=\frac{3}{2}$ ; luego  $(0,3)$  y  $(\frac{3}{2},0)$  son las

intersecciones con los ejes.

(Vea figura 2.2)

(¿Cuál es la pendiente de la recta?)

Grafique las rectas  $3y = x$ ;

$x = y+1$ ;  $x = -5$ ;  $y = 2$ , y

dé sus pendientes respectivas).

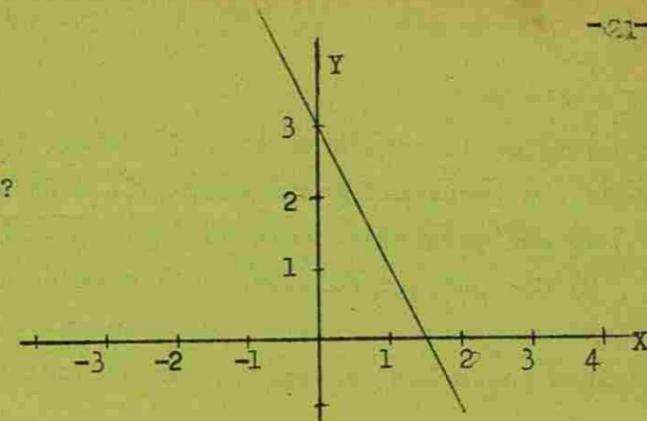


Figura 2.2.-Gráfica de  $2x+y = 3$ .

Dadas dos rectas  $L_1$  y  $L_2$ , para encontrar su punto de intersección, es decir, el punto común a las dos, hacemos simultáneas sus dos ecuaciones y resolvemos el sistema. (Vea I.A. sección 6.2).

El ángulo de intersección lo definimos como el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$ .

Para encontrar el ángulo  $\alpha$  entre  $L_1$  y  $L_2$  usamos sus pendientes como sigue (vea figura 2.3):

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$\tan \alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$$= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + (\tan \theta_1)(\tan \theta_2)}$$

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

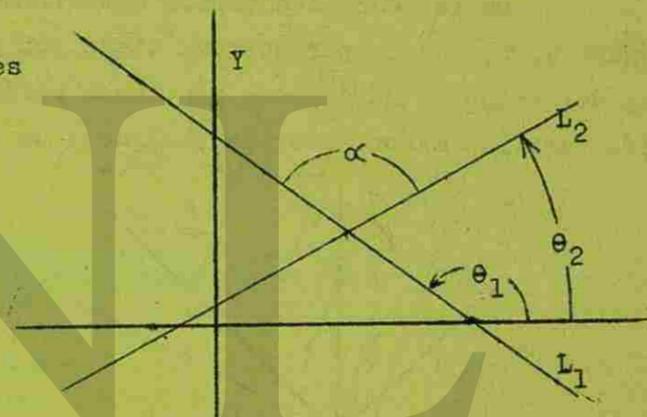


Figura 2.3.-Ángulo de intersección.

donde  $m_1$  es la pendiente de  $L_1$ , y  $m_2$  es la pendiente de  $L_2$ .

Por ejemplo, dadas las rectas  $3x+y = 1$  y  $2x-y = 4$ , su intersección es la solución del sistema:

$3x+y = 1$

$2x-y = 4$

$5x = 5$

$x = 1$

de donde  $3(1)+y = 1$  luego  $y = -2$

por lo cual, el punto de intersección de las rectas es  $(1,-2)$ .

La pendiente de  $3x+y = 1$  es  $m_1 = -3$  (¿porqué?)

La pendiente de  $2x-y = 4$  es  $m_2 = 2$  (¿porqué?)

luego,  $\tan \alpha = \frac{-3 - 2}{1 + (-3)(2)} = 1$

luego, el ángulo de intersección es  $\alpha = 45^\circ$ .

Por medio de la pendiente es fácil decir cuándo dos rectas son paralelas y cuándo son perpendiculares entre sí. Sean  $m_1$  y  $m_2$  las pendientes de ellas:

- a) Son paralelas, solo cuando  $m_1 = m_2$  (¿porqué?).
- b) Son perpendiculares, solo cuando  $m_1 m_2 = -1$ , pues en este caso se tiene que  $m_1 m_2 + 1 = 0$ , por lo que  $\tan \alpha = \alpha$ , es decir,  $\alpha = 90^\circ$  ó  $\alpha = 270^\circ$ , y en ambos casos las rectas son perpendiculares.

Ejerc. 2.- Diga cuales de los siguientes pares de rectas son paralelas, cuales perpendiculares, y cuáles forman otros ángulos:

- a)  $3x+y=1$ ,  $-3x=y-3$
- b)  $x+2y=1$ ,  $2x=y+1$
- c)  $2y+4x-1=0$ ,  $y=-2x$
- d)  $2x-7y=4$ ,  $x+14y=0$ .

2.3 Familia de Rectas.

En la sección anterior demostramos que la ecuación  $ax+by+c=0$ , donde  $a, b, c$  son parámetros, tiene por gráfica la familia de todas las rectas del plano. Ecuaciones con menos parámetros naturalmente tienen por gráfica familias menos numerosas, algunas de las cuales vemos a continuación:

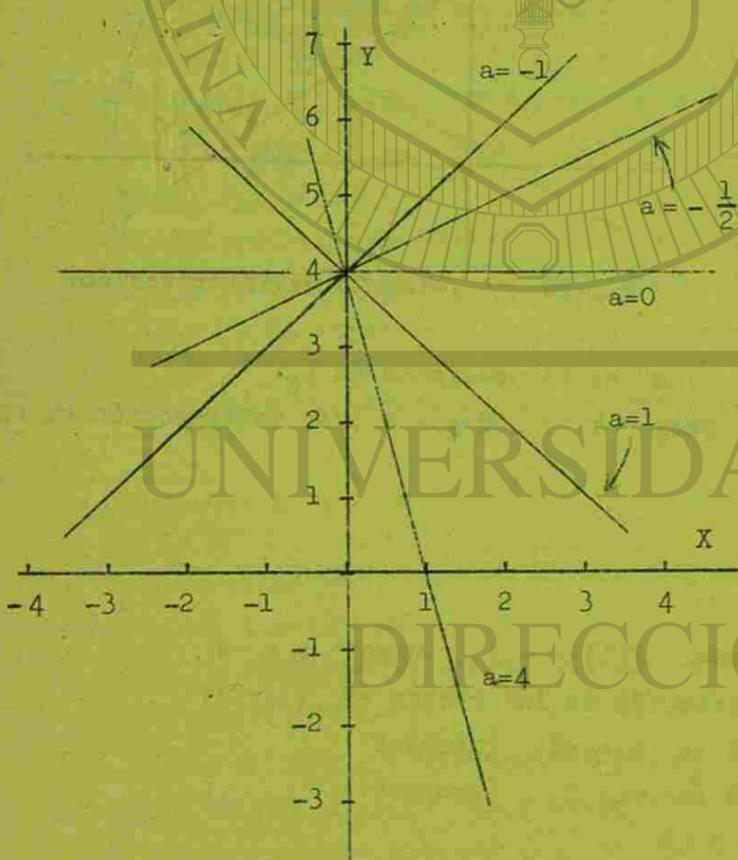


Fig. 2.2.- Gráfica de  $ax+y=4$   $a$  parámetro.

1.- La ecuación  $ax+y=4$  (en que  $a$  es parámetro), tiene por gráfica la familia de rectas que mostramos en la fig. 2.2, para los valores de  $a$  indicados. Notamos que las rectas se intersectan en el punto  $(0,4)$ , y de hecho todas las rectas de la familia pasan por este punto, pues  $(0,4)$  es una solución de  $ax+y=4$  para cualquier valor de  $a$ , como se vé sustituyendo  $(0,4)$  en la ecuación.

Aún mas, la familia está formada por todas las rectas que pasan por  $(0,4)$ , excepto la perpendicular al eje X. Para demostrar ésto, notamos que la pendiente de cualquier recta de la familia está dada por  $m = -a$ , pues la pendiente

de  $ax+by+c=0$  es  $m = -\frac{a}{b}$  y en nuestro caso  $b=1$  y  $c=-4$ . Como  $a$  puede tener cualquier valor numérico excepto infinito, puede ajustarse a la pendiente de cualquier recta. Por ejemplo, para una recta con pendiente 3 y que pase por el punto  $(0,4)$ , ponemos  $a=-3$ , dándonos la ecuación deseada  $-3x+y=4$ .

- Ejerc. 1.-
- a) Obtener la ecuación de la recta que pase por  $(0,4)$ , y que tenga pendiente  $\frac{3}{4}$ .
  - b) Obtener la ecuación de la recta que pase por los puntos  $(0,4)$  y  $(-1,2)$ .
  - c) Graficar cinco miembros de la familia  $x-k^2y=-2$  en que  $k$  es parámetro, y demostrar que se intersectan en un solo punto.

2.- La ecuación  $3x-y=c$  en que  $c$  es parámetro, tiene por gráfica la familia de rectas que mostramos en la fig. 2.3.

Notamos que las rectas son todas paralelas, pues tienen la misma pendiente, a decir:  $m=3$ .

- Ejerc. 2.- Graficar cinco rectas de la familia:
- $3x-y=k^2$  en que  $k$  es parámetro.
- ¿Es la familia igual a la anterior?

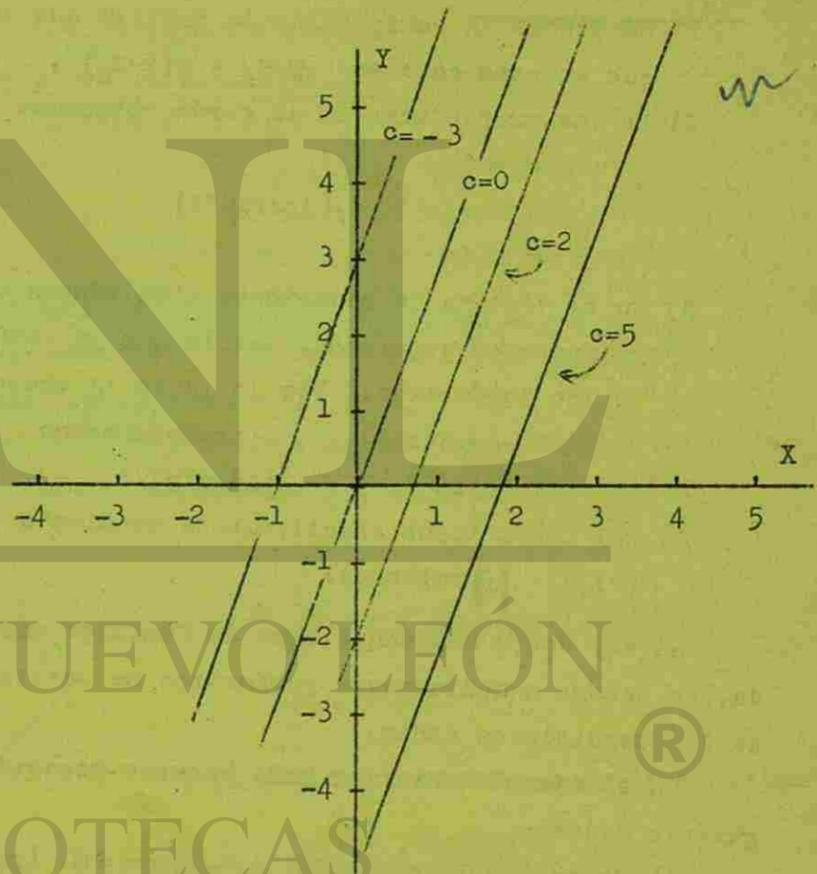


Figura 2.3.- Gráfica de  $3x-y=c$   $c$  parámetro.

2.4.- Ecuaciones de rectas.

El problema de encontrar la ecuación de una curva que tiene ciertas propiedades, se puede atacar como sigue:

- 1) Encontrar la ecuación de una familia que contenga a la curva deseada.
- 2) Con las propiedades que se dan para la curva, obtener ecuaciones en los parámetros.
- 3) Determinar los valores de los parámetros dados por el sistema de ecuaciones simultáneas que se obtienen en 2), y sustituir esos valores en la ecuación escogida en 1), obteniendo la ecuación buscada.
- 4) Comprobar si en efecto se obtuvo la ecuación requerida.

Por ejemplo: obtener la ecuación de una recta que tenga pendiente 3 y pase por (-1,4).

- 1) Se escoge la ecuación de la familia que contenga a la recta deseada, que en este caso es  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

- 2) De las propiedades de la curva obtenemos que

$$\begin{aligned} m &= 3 \\ x_0 &= -1 \quad (\text{¿porqué?}) \\ y_0 &= 4 \end{aligned}$$

- 3) En el sistema de ecuaciones simultáneas obtenido en 2), las letras ya aparecen separadas, por lo que ya están determinados los valores de los parámetros. Por lo tanto la ecuación buscada es

$$\begin{aligned} y - 4 &= 3(x + 1) && \text{o transformando} \\ y &= 3x + 7 && (\text{hágalo}). \end{aligned}$$

- 4) Tal recta tiene efectivamente pendiente 3 (¿porqué?), y pasa por (-1,4) (pruébelo).

Si hay dos o mas ecuaciones de familias que contienen a la recta deseada, se escoge aquella cuyos parámetros se obtienen mas fácilmente partiendo de las condiciones dadas.

En el ejemplo anterior pudo haberse escogido otra familia, de la siguiente manera;

- 1) Se escoge la ecuación  $ax + by + c = 0$  (¿qué familia denota?).
- 2) De las propiedades de la curva obtenemos

$$-\frac{a}{b} = 3 \quad (\text{¿porqué?})$$

$$a(-1) + b(4) + c = 0$$

- 3) El sistema de ecuaciones simultáneas anterior, tiene 2 ecuaciones y 3 variables, por lo que determina dependencias de dos de las letras en términos de las otras (ver I.A. sección 6.1), digamos a y b en

términos de c :

$$a + 3b = 0$$

$$-a + 4b + c = 0$$

$$\frac{7b + c = 0}{7b + c = 0} \quad \text{de donde} \quad b = -\frac{c}{7} \quad y \quad a = \frac{3c}{7}$$

y sustituyendo en la ecuación de 1),

$$\left(\frac{3c}{7}\right)x + \left(-\frac{c}{7}\right)y + c = 0$$

que transformando dá

$$3x - y + 7 = 0$$

(hágalo).

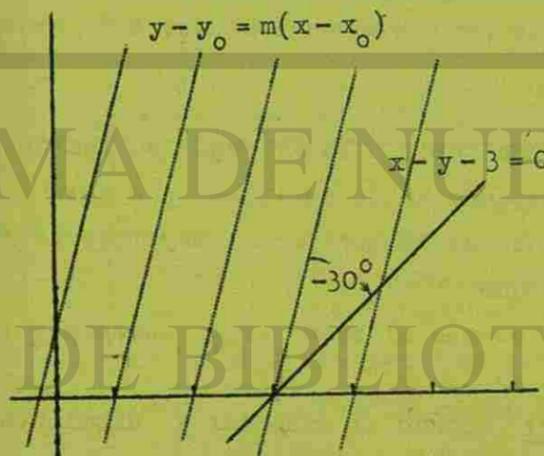
Quando se desea la ecuación de una familia de curvas con ciertas propiedades, el proceso es similar:

- 1) Encontrar la ecuación de una familia que contenga a la familia deseada.
- 2) De las condiciones dadas, obtener ecuaciones en los parámetros.
- 3) Despejar tantos parámetros dependientes como sea posible en el sistema de ecuaciones simultáneas obtenido en 2), y sustituirlos en la ecuación escogida en 1), es decir, eliminar tales parámetros.
- 4) Comprobar si en efecto se obtuvo la ecuación requerida.

Por ejemplo: obtener la ecuación de la familia de rectas tales que hay un ángulo de  $-30^\circ$  de ellas a la recta  $x - y - 3 = 0$ .

- 1) El problema lo resolveremos a través de la pendiente (¿porqué?) y escogemos la ecuación  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

- 2) Podemos obtener una ecuación en el parámetro m, de la siguiente manera (vea figura 1.12'):



$$\tan 30^\circ = \frac{m - m_2}{1 + mm_2} \quad (\text{¿porqué?})$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m - 1}{1 + m}$$

- 3) Despejando m de la ecuación anterior

$$m = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 3.735$$

y sustituyendo se obtiene

$$y - y_0 = 3.735(x - x_0)$$

que es la ecuación buscada.

- 4) Compruebe que hay un ángulo de  $-30^\circ$  de estas rectas a  $x - y = 3$ .

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2.5 Ecuaciones y Curvas.

Para visualizar mejor las propiedades de las ecuaciones, estudiamos las propiedades de sus gráficas.

Dada una curva como en la fig. 2.5, por cualquiera de sus puntos  $(x,y)$  podemos trazar una recta tangente a la curva en ese punto, que llamamos tangente a la curva en el punto  $(x,y)$ .

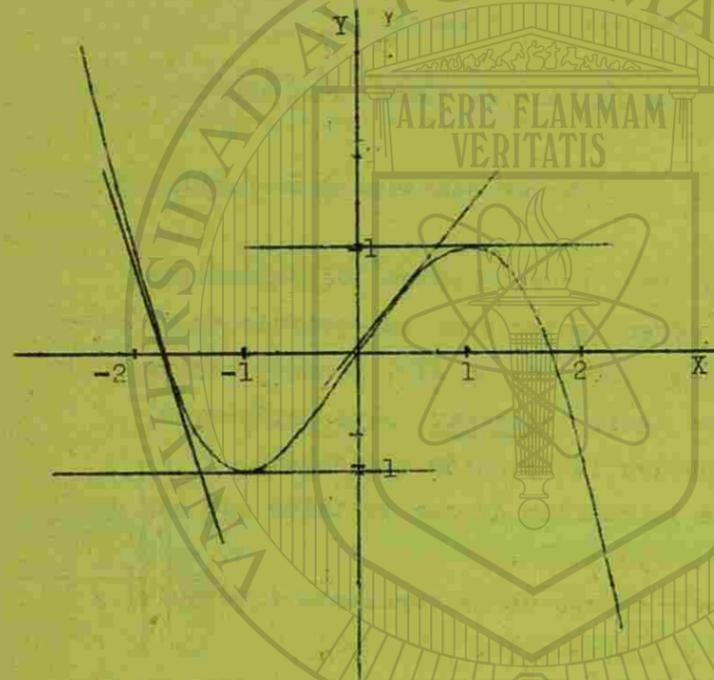


Fig. 2.5.- Tangentes de una curva.

Ejerc. 1.-En la curva de la fig. 2.5, dar la pendiente en los puntos de abscisa  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = -1$ ,  $x = -1.75$ .

Al movernos sobre una curva podemos subir o bajar según su inclinación, la rapidez con que se sube o baja, depende de lo inclinada que esté la curva: mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, mayor es la rapidez de cambio de la curva, y así decimos que

- a) La curva crece en el punto  $(x,y)$  cuando al aumentar  $x$  aumenta  $y$ , y al disminuir  $x$  disminuye  $y$ .
- b) La curva decrece en el punto  $(x,y)$  cuando al aumentar  $x$  disminuye  $y$  y al disminuir  $x$  aumenta  $y$ .

Por ejemplo, la curva de la figura 2.5 es creciente en el punto  $(0,0)$  y en cambio es decreciente para el punto de abscisa  $x=2$ ; también es creciente para los puntos del intervalo  $-1 < x < 1$ .

Cada punto de la curva tiene su tangente, por lo que estas rectas forman una familia: la familia de tangentes a la curva.

Cada tramo de la curva está más o menos inclinado con respecto al eje X, y de hecho la inclinación varía de punto a punto de la curva. Para medir esta inclinación definimos la pendiente de la curva en el punto  $(x,y)$  como la pendiente de la recta tangente a la curva en  $(x,y)$ . Por ejemplo, en la fig. 2.5, la pendiente en  $(1,1)$  es cero, pues la recta tangente en ese punto es paralela al eje X.

Ejerc. 2.-a) Diga para cuáles intervalos la curva de la fig. 2.5 es creciente y para cuales es decreciente.

- b) ¿Crece la curva más rápido para  $x=0$  que para  $x=.75$ ?
- c) Si la pendiente es negativa, ¿la curva crece o decrece?

En ciertos puntos la curva ni crece ni decrece. Por ejemplo, en el punto  $(1,1)$ , de la fig. 2.5, la curva no es creciente (al aumentar  $x$  no aumenta  $y$ ) ni decreciente (al disminuir  $x$  no aumenta  $y$ ). En lugar, a ambos lados de  $(1,1)$  la curva baja, es decir, la  $y$  disminuye, por lo que decimos que el punto es un máximo relativo (ó simplemente máximo) de la curva. Igualmente la curva no crece ni decrece para  $x=-1$ , pues la  $y$  aumenta a ambos lados de  $x=-1$ , y decimos que el punto es un mínimo relativo (ó simplemente un mínimo) de la curva. Compendiando decimos que:

- a) El punto  $(x,y)$  es un máximo relativo de una curva, cuando al cambiar  $x$  (ya sea aumentando o disminuyendo), la  $y$  disminuye.
- b) El punto  $(x,y)$  es un mínimo relativo de una curva, cuando al cambiar  $x$  la  $y$  aumenta.

Así, al graficar una ecuación, como  $y = 2x - x^3$ , conviene fijarse si crece o decrece y unir los puntos tabulados de acuerdo a ello. Tabulando y graficando los puntos uno a la vez, tenemos (vea fig. 2.5):

x	y	
0	0	Desde este punto, la gráfica puede subir o bajar, lo cual averiguaremos trazando el siguiente punto.
1	1	La curva subió a uno; podemos esperar que siga subiendo, aunque aún puede doblarse y bajar.
2	-4	Bajó... y con ganas. ¿Seguirá bajando? Podemos tratar el siguiente punto para cerciorarnos.
3	-21	Sigue bajando rápidamente. Todo parece indicar que seguirá bajando, pero hay que evitar una sorpresa.

Para asegurarnos que seguirá bajando nos fijamos en la ecuación  $y = 2x - x^3$ . El término  $2x$  así como  $x^3$ , resulta positivo para  $x > 3$ , y como en esas condiciones  $2x$  es menor que  $x^3$ , al crecer  $x$  se hace más y más negativa la diferencia  $2x - x^3$ , decreciendo la curva.

Ejerc. 3.-Analice la ecuación  $m = p^4 - 2p + 4$ , siguiendo las sugerencias delineadas arriba. Diga donde crece y donde decrece, y donde están sus puntos máximos y mínimos.

Otra propiedad importante de las curvas es su convexidad. Decimos que la curva es convexa (o cóncava para abajo) si al ir de izquierda a derecha, su crecimiento de punto a punto se hace cada vez menor; o si está decreciendo, decrece cada vez mas. (Vea fig. 2.6).

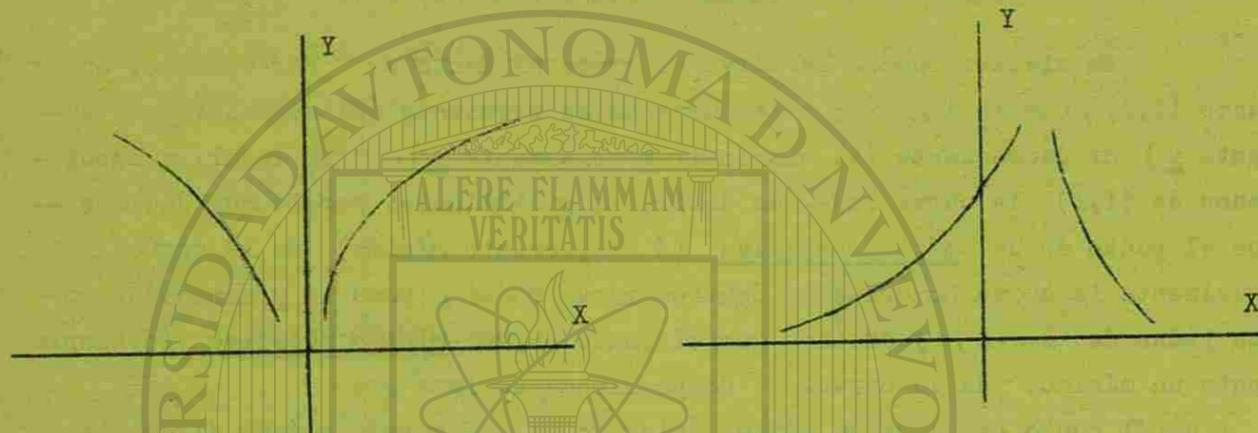


Fig. 2.6.- Curvas convexas (ó cóncavas para abajo)

Fig. 2.7.- Curvas cóncavas (ó cóncavas para arriba)

Decimos que la curva es cóncava (o cóncava para arriba), si al ir de izquierda a derecha su crecimiento se hace cada vez mayor; o si está decreciendo, decrece cada vez menos. (Vea fig. 2.7).

Por ejemplo, en la fig. 2.8 la curva es convexa en el intervalo

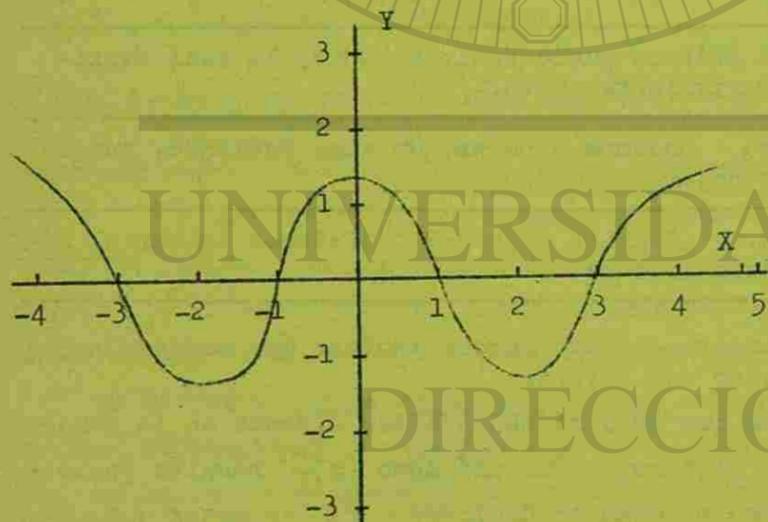


Fig. 2.8.- Convexidad de una curva.

$-1 < x < 1$ , luego decimos que la curva es convexa para cualquiera de los puntos de este intervalo. Para el intervalo  $1 < x < 2$ , la curva cambia a cóncava.

Los puntos donde la curva cambia de convexidad los llamamos puntos de inflexión. Por ejemplo, en esta figura (1,0) y (3,0) son puntos de inflexión.

Ejerc. 4.-Dar otros dos puntos de inflexión de la curva en la fig. 2.8.

Para la curva de la fig. 2.5, decir en cuales intervalos es convexa, en cuales es cóncava, y cuales son sus puntos de inflexión.

Decimos que una curva está definida para la abscisa  $x_0$ , cuando hay un punto de la curva con tal abscisa. En el caso que la curva esté definida para todos los puntos de un intervalo del eje X, decimos que la curva está definida en ese intervalo.

Por ejemplo, la curva de la fig. 2.9, no está definida en el intervalo  $-1 < x < 1$ , es decir, no hay curva en ese intervalo. En cambio, para  $x=1$  sí está definida, y para todo el intervalo  $1 < x$  también está definida.

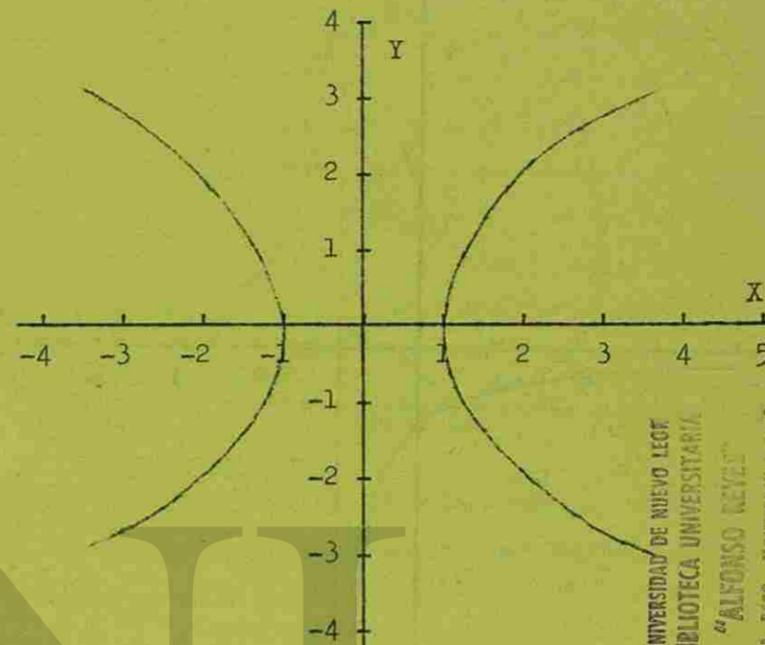


Fig. 2.9.- Intervalos para los cuales una curva está definida.

Así, para graficar  $x^2 - y^2 = 1$  (vea fig. 2.9), despejamos  $y$ , obteniendo

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

y además,

$$y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

Tabulando la rama positiva:

x	y	
0	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1}$ nó es un número real, luego el par $(0, \sqrt{-1})$ no se puede graficar: no hay punto de la curva para la abscisa $x=0$ .
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	La curva aún no está definida.
1	0	Obtenemos el primer punto.

Para saber si hay algún punto entre 0 y 1, basta con notar que para esos valores  $x^2$  es menor que 1, luego  $x^2 - 1$  es negativo. Mas allá del 1,  $x^2$  es mayor que 1, luego  $x^2 - 1$  es positivo y su raíz cuadrada es un número real.

Ejerc. 5.-Analice y grafique las curvas:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 1$ , diciendo para qué valores de  $x$  no está definida cada curva.

Otros puntos singulares de una curva son los puntos de discontinuidad. Decimos que una curva es discontinua en la abscisa  $x$ , cuando al trazar la tenemos que levantar el lápiz al pasar por  $x$ . En otras palabras, la curva está rota en esa abscisa y queda dividida en dos partes separadas. Por ejemplo, en la fig. 2.10 la curva es discontinua para  $x=1$ .

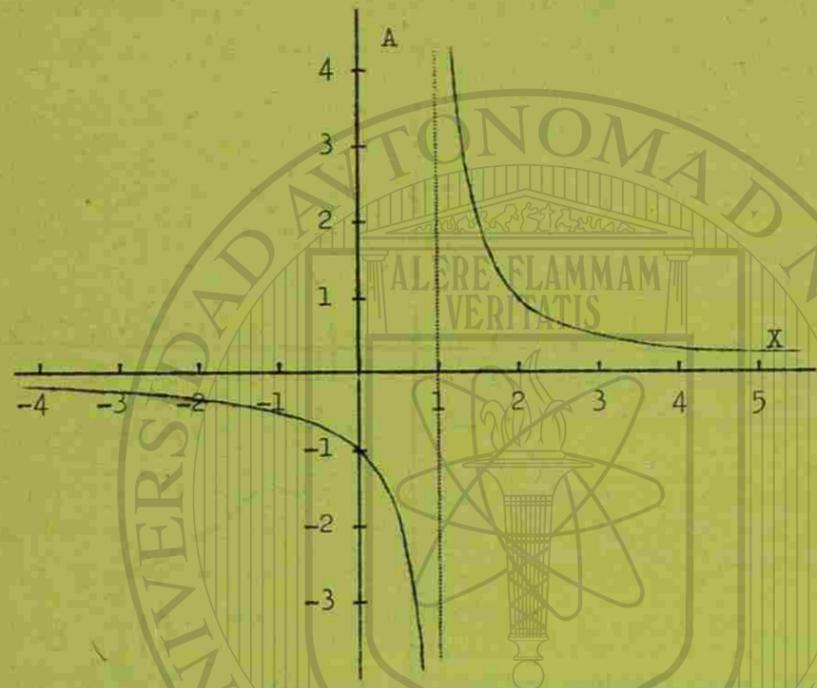


Fig. 2.10.- Discontinuidad de la ecuación

$$a = \frac{1}{x-1}$$

Así, al graficar  $a = \frac{1}{x-1}$ , notamos que para  $x=1$ ,  $a = \frac{1}{0}$ . El símbolo  $\frac{1}{0}$  no denota ningún número real, luego no hay curva para  $x=1$ . Aún más, dá lugar a una discontinuidad infinita, pues tabulando valores cerca de  $x=1$ :

x	a
1.5	2
1.1	10
1.01	$10^2$
1.0001	$10^4$
.5	-2
.9	-10
.99	$-10^2$
.99999	$-10^5$

A la derecha de  $x=1$ :  
La curva sube mientras mas se acerca a  $x=1$ .

A la izquierda de  $x=1$ :  
La curva baja mientras mas se acerca a  $x=1$ .

En este caso notamos que cerca de  $x=1$ , la curva, a la derecha se vá para arriba indefinidamente, y a la izquierda se vá para abajo indefinidamente. A este tipo de discontinuidad lo llamamos discontinuidad infinita y es el que ocurre más a menudo al graficar ecuaciones.

En este caso notamos que cerca de  $x=1$ , la curva, a la derecha se vá para arriba indefinidamente, y a la izquierda se vá para abajo indefinidamente. A este tipo de discontinuidad lo llamamos discontinuidad infinita y es el que ocurre más a menudo al graficar ecuaciones.

La curva no intersecta a la recta  $x=1$ , y sin embargo se acerca indefinidamente a ella. En tal caso decimos que la recta es una asíntota de la curva.

Este resultado dá lugar a la costumbre de poner  $\frac{1}{0} = \infty$ , tratando de indicar que al hacerse el denominador cero, la curva se vá hacia arriba. Pero a la izquierda de  $\frac{1}{0}$  la curva se vá para abajo, luego con igual razón podemos escribir  $\frac{1}{0} = -\infty$ . Como  $\infty$  y  $-\infty$  indican dos cosas muy distintas, no podemos poner las dos iguales a  $\frac{1}{0}$ , por lo que preferimos no definir  $\frac{1}{0}$ , y dejarlo sólo como una llamada de atención para investigar la curva cerca de la abscisa que hace cero al denominador.

Entonces en una ecuación, cada vez que el denominador sea cero, tenemos un punto de discontinuidad.

### 2.6 Círculo.

Definimos geoméricamente la curva llamada círculo como: el conjunto de puntos a una distancia  $r$  de un punto llamado centro del círculo.

Con un sistema de coordenadas cartesianas, la ecuación  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , donde  $(x,y)$  son las variables, representa cualquier círculo del plano, siendo  $(a,b)$  el centro, y  $r$  el radio.

Para demostrar este importante resultado, tenemos que comprobar que la distancia  $D$  entre los puntos  $(x,y)$  y  $(a,b)$ , es siempre igual a  $r$ . (Vea fig. 2.11).

Según la fórmula para la distancia entre dos puntos, la distancia  $D$  entre  $(x,y)$  y  $(a,b)$  está dada por:

$$D = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

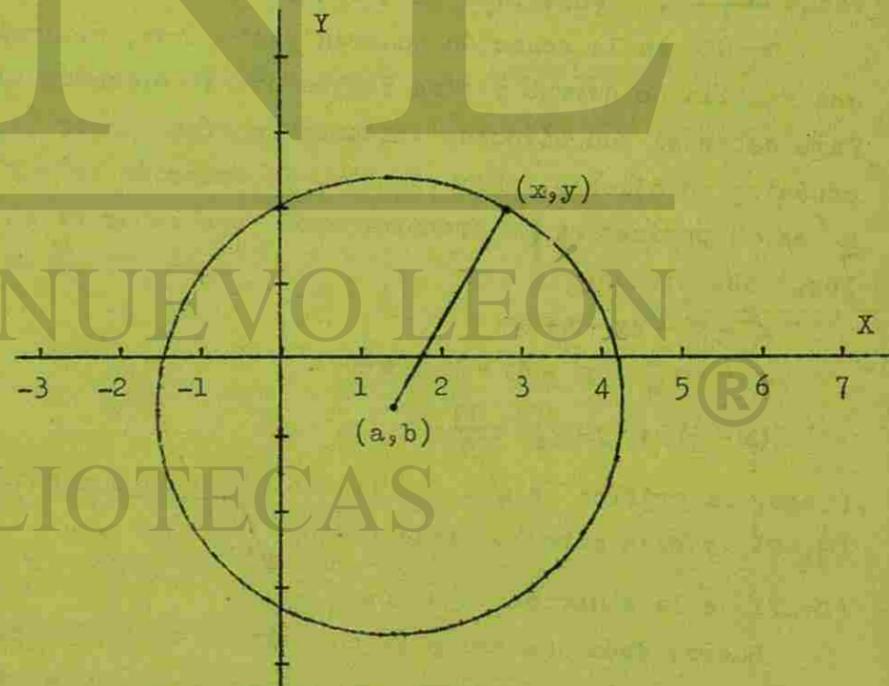


Fig. 2.11.- Círculo.

pero  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  (¿porqué?)

luego  $r = D$  como queríamos.

Luego, cualquier punto  $(x,y)$  que satisface la ecuación está a una distancia  $r$  de  $(a,b)$ .

Luego,  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  tiene por gráfica un círculo con centro en  $(a,b)$  y radio  $r$ .

Conversamente se demuestra que la ecuación de cualquier círculo con centro  $(a,b)$  y radio  $r$  es  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . (Hágalo).

Para saber si una ecuación cuadrática en dos letras representa un círculo, tratamos de transformarla a la forma canónica  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . Si se puede transformar a esta forma, sabemos que su gráfica es un círculo, obteniéndose su centro y su radio directamente de la ecuación. Por ejemplo la ecuación  $4x^2 - 2x + 4y^2 = 16$  la transformamos para saber si es un círculo, obteniendo:

$$4x^2 - 2x + 4y^2 = 16$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + y^2 = 4 + \frac{1}{16} \quad \text{dividiendo entre 4 y completando el cuadrado,}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{65}{16} \quad \text{forma canónica.}$$

Luego la ecuación tiene por gráfica un círculo con centro  $(\frac{1}{4}, 0)$  y con radio  $\frac{\sqrt{65}}{4}$ . (Grafique  $x^2 + 2y + 4 = -y^2 + y + 6$ ).

Cuando en la ecuación ocurren parámetros, naturalmente su gráfica es una familia de curvas y para representarla trazamos algunos de sus miembros. Para saber si son círculos tratamos de transformar la ecuación a la forma canónica de círculo. Por ejemplo, la ecuación  $x^2 + y^2 + 3y - x + a = 0$  donde  $a$  es un parámetro, la transformamos para saber si da una familia de círculos, obteniendo:

$$x^2 + y^2 + 4y - x + a = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = 4 + \frac{1}{4} - a$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{17}{4} - a$$

Luego, la gráfica es una familia de círculos concéntricos con centro en  $(\frac{1}{2}, -2)$  y cada círculo tiene radio  $\sqrt{\frac{17}{4} - a}$ . (Grafique la ecuación  $x^2 + ax + y^2 = 0$ ).

Luego, dada una ecuación cuadrática en dos letras, ya sabemos como probar si es un círculo, y como encontrar su centro y radio, para entonces graficarlo.

Conversamente, dado un círculo con ciertas propiedades, para obtener su ecuación, seguimos el método general ya conocido:

1) Encontrar la ecuación de una familia de círculos que incluya al círculo deseado. En este caso podemos usar la ecuación canónica  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  pues representa a todos los círculos del plano.

2) Determinar los valores de los parámetros con las condiciones dadas. Por ejemplo, para determinar la ecuación del círculo que tiene centro en  $(-3,4)$  y pasa por el punto  $(1,1)$  tenemos:

en la ecuación  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$   $a = -3$  y  $b = 4$ , puesto que  $(a,b)$  es el centro del círculo. Sustituyendo obtenemos  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ .

Para determinar  $r$ , recordando que  $(1,1)$  satisface la ecuación, tenemos  $(1+3)^2 + (1-4)^2 = r^2$  es decir,  $r^2 = 25$ .

Luego,  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$  es la ecuación deseada.

(Dé la ecuación del círculo con centro en  $(-1,-2)$  y radio 10).

Dada una familia de círculos con ciertas propiedades, para obtener su ecuación, se sigue el mismo método, pero entonces no se eliminan todos los parámetros.

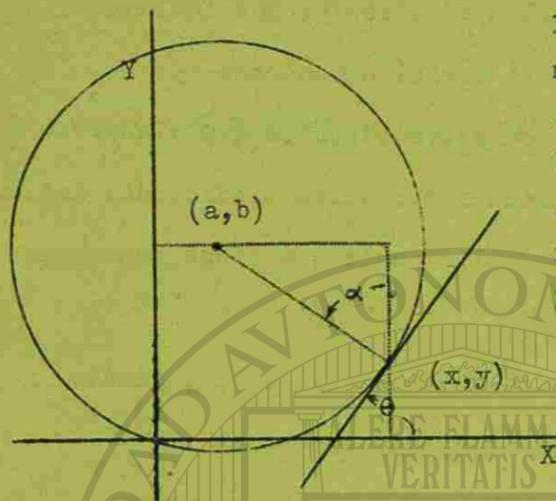
Por ejemplo, para encontrar la ecuación de los círculos que pasan por el punto  $(0,0)$  tenemos: la ecuación  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  representa a todos los círculos del plano. Para que el círculo pase por  $(0,0)$ , los pa-

rámetros  $a,b,r$  tienen que satisfacer la ecuación  $(0-a)^2 + (0-b)^2 = r^2$  de donde  $r^2 = a^2 + b^2$  que nos da  $r$  en términos de  $(a,b)$ . Luego, eliminando el parámetro dependiente  $r$  de la ecuación en  $(x,y)$  obtenemos la ecuación de la familia dada:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$  que transformando da  $x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$  (Hágalo. Dé la ecuación de la familia de círculos concéntricos con centro en el punto  $(-1,\sqrt{3})$ ).

La pendiente  $m$  del círculo  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  en un punto cualquiera  $(x,y)$ , cambia de punto a punto del círculo. Luego  $m$  depende de  $(x,y)$  y naturalmente nos gustaría tener una expresión para  $m$  en términos de  $(x,y)$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALFONSO REYES"  
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO



Para obtenerla (vea figura 2.12) , usamos la propiedad geométrica de una tangente a un círculo, de ser perpendicular al radio en el punto de tangencia. Luego  $\theta = \alpha$  por tener los lados respectivamente perpendiculares.

Entonces

$$m = \tan \theta = \tan \alpha = \frac{x-a}{b-y}$$

$$m = -\frac{x-a}{y-b}$$

Figura 2.12.-Pendiente del círculo.

Por ejemplo, encontrar la pendiente del círculo  $x^2 + 2x + y^2 = 3$  en los puntos con abscisa  $x = -2$ .

Transformando a la forma canónica:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

nos dá que  $(-1,0)$  es el centro del círculo. Despejando la  $y$  obtenemos las dos expresiones

$$y = \pm \sqrt{4 - (x+1)^2}$$

luego, para  $x = -2$  se tiene que  $y = \pm \sqrt{3}$ . Por lo que, para el punto la pendiente es

$$m = -\frac{-2 - (-1)}{\sqrt{3} - 0} = -\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(¿Qué pendiente tiene el punto  $(-2, \sqrt{3})$ ? Encuentre la pendiente del círculo  $x^2 + y^2 = 6$  para los puntos con abscisa  $x = 0$ ).

### 2.7 Parábola.

Al igual que el círculo, la parábola se puede definir geoméricamente.

Aquí la definimos solamente por medio de su ecuación. Cualquiera ecuación en  $(x,y)$  reducible a una de las dos formas canónicas:

$$x - x_0 = k(y - y_0)^2$$

ó

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2$$

es una parábola horizontal con vértice en el punto  $(x_0, y_0)$  y eje de simetría  $y = y_0$ . La parábola está abierta para la izquierda (o derecha) cuando  $k$  es negativa (o positiva).

es una parábola vertical con vértice en el punto  $(x_0, y_0)$  y eje de simetría  $x = x_0$ . La parábola está abierta para abajo (o arriba) cuando  $k$  es negativa (o positiva).

La magnitud de  $k$  determina la abertura de la parábola, pues mientras mas grande es  $|k|$ , mas cerrada es la parábola. Por ejemplo, las parábolas

Por ejemplo, las parábolas horizontales  $x + 2 = y^2$  y  $x + 2 = 4y^2$  tienen el punto  $(-2,0)$  por vértice, el eje X como eje de simetría y se abren a la derecha. Para graficar estas ecuaciones basta con trazar otro punto que nos indique qué de abiertas están las parábolas.

Por ejemplo, el punto  $(0, \sqrt{2})$  es una solución de la primera ecuación;  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  es una solución de la segunda, con lo cual trazamos las dos parábolas de la figura 2.13 (Grafique la ecuación  $x^2 + 2x - y = 0$ )

Para encontrar la ecuación de una parábola o familia de parábolas que satisfagan ciertas condiciones usamos una de las dos formas canónicas, según deban ser horizontales o verticales, y determinamos los parámetros.

Por ejemplo, para encontrar la ecuación de la familia de parábolas con eje de simetría  $x = -6$  y que pasen por  $(1,1)$ , usamos la ecuación  $y - y_0 = k(x - x_0)^2$  pues se trata de parábolas verticales (¿porqué?). Ya que el eje de simetría es  $x = -6$  se tiene que  $x_0 = -6$  (¿porqué?). Como pasan por el punto  $(1,1)$ , las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación y tenemos:

$$1 - y_0 = k(1 + 6)^2 \quad \text{de donde} \quad y_0 = 1 - 49k,$$

luego eliminando  $y_0$  obtenemos la ecuación con un parámetro  $k$

$$y - (1 - 49k) = k(x + 6)^2$$

que representa a la familia deseada.

Para el círculo encontramos una expresión de su pendiente  $m$  en el punto  $(x,y)$  en términos de  $x$  y  $y$ , usando ciertas propiedades geométricas.

También para la parábola nos gustaría tener una expresión de su pendiente en términos de  $(x,y)$ . Pero si tratamos de obtenerla geoméricamente nos encontraremos con un problema difícil de resolver, por lo que preferimos esperar hasta el próximo capítulo, donde desarrollamos entre otras cosas, un método para obtener la pendiente de una curva cualquiera partiendo de su ecuación.

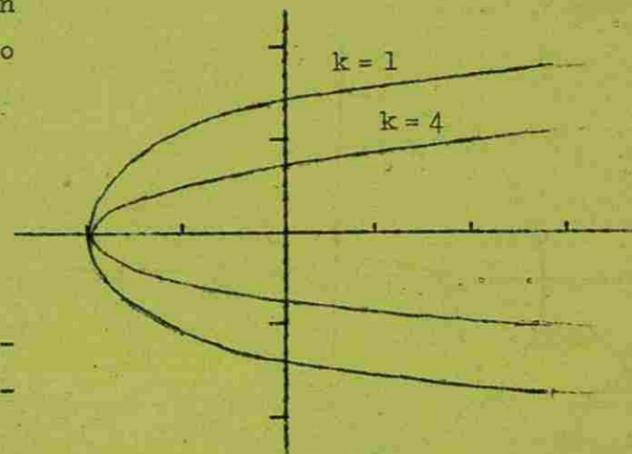
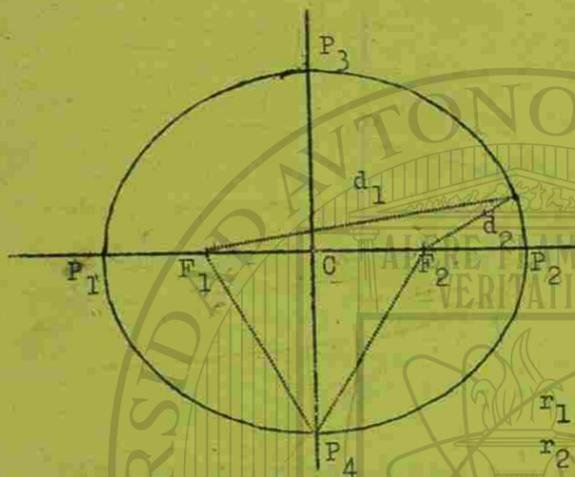


Figura 2.13.- Parábolas  $x + 2 = ky^2$

2.3 Elipse.

Definimos geoméricamente la elipse como el conjunto de puntos  $(x,y)$  tal que la suma de las distancias de  $(x,y)$  a dos puntos dados  $F_1$  y  $F_2$  no cambia.



A los puntos  $F_1$  y  $F_2$  (vea figura 2.14) los llamamos focos de la elipse. A la recta que pasa por los focos, eje mayor de la elipse ( $\overline{P_1P_2}$ ). A la recta perpendicular bisectriz del eje mayor, la llamamos eje menor ( $\overline{P_3P_4}$ ). Estas dos rectas, son los ejes de simetría y se bisectan mutuamente en el centro (C). A la distancia  $CP_1 = CP_2$  la llamamos  $r_1 = \text{radio mayor}$ , y a la distancia  $CP_3 = CP_4$   $r_2 = \text{radio menor}$  de la elipse.

Figura 2.14.- Elipse.

$P_1F_2 + P_1F_1$  es la suma de las distancias de  $P_1$  a los focos. Dada la simetría de la figura,  $P_1F_1 = F_2P_2$ , luego  $PP_1F_2 + P_1F_1 = P_1F_2 + F_2P_2 = P_1P_2 = 2r_1$

y como la suma  $L = d_1 + d_2$  de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos, no cambia, se sigue que para cualquier punto de la elipse  $L = 2r_1$ . (¿qué relación hay entre L y el eje mayor?).

Por la misma simetría,  $P_4F_1 = P_4F_2$ , luego para el punto  $P_4$   $L = d_1 + d_2 = 2P_4F_1$  de donde  $P_4F_1 = r_1$  (¿porqué?). Entonces en el triángulo  $CP_4F_1$ , la hipotenusa es  $r_1$ , el cateto vertical es  $r_2$  y  $c$  la distancia del centro a un foco está dada por la expresión

$$c = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} \quad (\text{distancia del centro a un foco, en términos de los radios}).$$

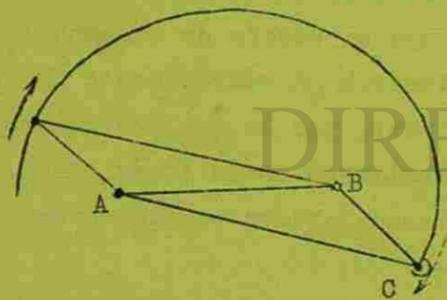


Figura 2.15.- Trazado de una elipse.

(Con un hilo anudado en los extremos, y deslizándose por dos puntos fijos separados 5 cms., trazar una elipse con radio mayor 4. Vea la figura 2.15 en la que A y B son dos alfileres fijos (los focos); ABCA es el hilo que se desliza por A y B cuando C, la punta de un lápiz, se mueve manteniendo tenso el hilo, diga porqué la figura trazada es una elipse).

Cualquier ecuación en  $(x,y)$  reducible a la forma canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

representa una elipse con centro en  $(h,k)$ , radio horizontal  $a$  y radio vertical  $b$

Si  $a > b$ , el radio horizontal  $a$  es el radio mayor, por lo que la elipse está horizontal y los focos quedan sobre la recta  $y=k$  (¿porqué?).

Si  $a < b$ , el radio vertical  $b$  es el radio mayor, por lo que la elipse está vertical y los focos quedan sobre la recta  $x=h$  (¿porqué?).

Si  $a = b$ , la elipse se convierte en un círculo de radio  $a$  (¿porqué?).

(Dé el centro, radios mayor y menor de la elipse  $(y+1)^2 + \frac{x^2}{4} = 1$ ).

Para graficar la ecuación de una elipse la reducimos a la forma canónica de la elipse, la cual, como en el caso del círculo, nos da toda la información necesaria para graficarla; por ejemplo, para graficar la ecuación  $2x^2 + 4x + y^2 + 1 = 5$  (¿puede ser ésta, la ecuación de un círculo?): Transformándola a la forma canónica de la elipse tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + y^2 &= 4 \\ 2(x^2 + 2x + 1) + y^2 &= 4 + 2 \quad (\text{completando cuadrados en forma apropiada}). \\ 2(x+1)^2 + y^2 &= 6 \\ \frac{(x+1)^2}{6/2} + \frac{y^2}{6} &= 1 \quad (\text{dividiendo entre 6 para arreglar en la forma canónica}). \\ \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{6} &= 1 \end{aligned}$$

Luego, su centro está en  $(-1,0)$ , su radio horizontal es igual a  $\sqrt{3}$ , su radio vertical es igual a  $\sqrt{6}$ . Como el radio vertical es mayor, la elipse está vertical, como vemos en la figura 2.16.

(Grafique  $y^2 - 2y + 2x^2 = 1$ )

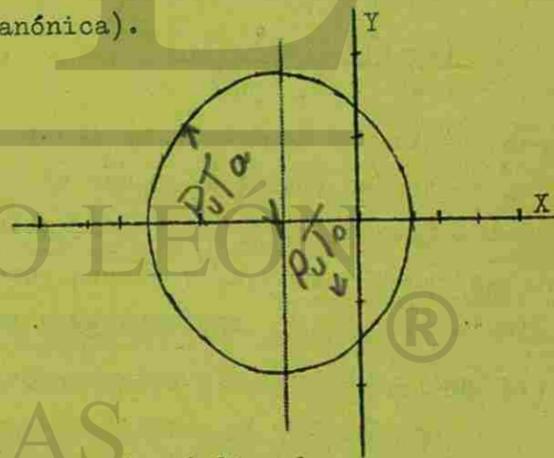


Figura 2.16.-Gráfica de  $2x^2 + 4x + y^2 + 1 = 5$ .

2.9 Hipérbola.

Dada cualquier ecuación cuadrática en dos letras, su gráfica puede ser: un círculo, una parábola, una elipse, o una hipérbola, y sólo una de esas cuatro. Luego conociéndolas y sabiendo como transformar sus ecuaciones a la forma canónica, podemos trazarrápidamente la gráfica de cualquier ecuación cuadrática.

Definimos geométricamente la hipérbola como el conjunto de puntos  $(x,y)$  tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias de  $(x,y)$  a dos puntos dados  $F_1$  y  $F_2$ , no cambia.

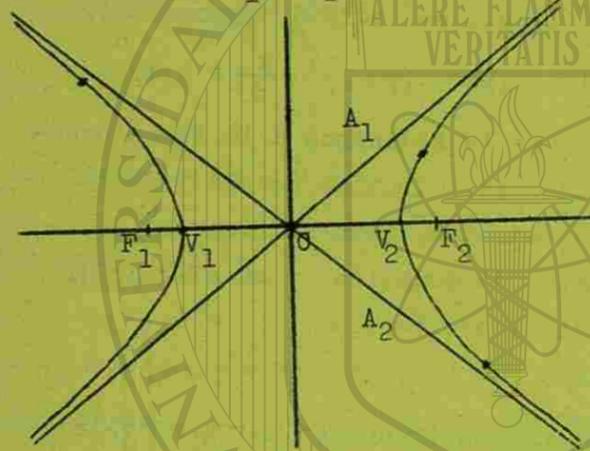


Figura 2.17.-Hipérbola.

Vea la figura 2.17 y compare la diferencia de distancias de los puntos marcados a los focos  $F_1$  y  $F_2$ .

Llamamos a los puntos  $F_1$  y  $F_2$ , los focos de la hipérbola. A los puntos  $V_1$  y  $V_2$ , vértices. Al punto  $C$ , centro. La recta que pasa por los focos, y la perpendicular que pasa por  $C$  son los ejes de simetría. Las rectas  $A_1$  y  $A_2$  son las asíntotas de la hipérbola.

Cualquier ecuación en  $(x,y)$  reducible a la forma canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

representa una hipérbola horizontal con centro en $(h,k)$ , vértices en los puntos $(h+a,k)$ y $(h-a,k)$ . Sus asíntotas pasan por $(h,k)$ y tienen pendiente $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ respectivamente.	representa una hipérbola vertical con centro en $(h,k)$ , vértices en los puntos $(h,k+b)$ y $(h,k-b)$ . Sus asíntotas pasan por $(h,k)$ y tienen pendiente $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ respectivamente.
---	---

(Dé centro, vértices y orientación de  $x^2 - y^2 = 2$ ;  $-x^2 + (y-1)^2 = 4$ ).

Por ejemplo, la gráfica de la ecuación  $-x^2 + y^2 + 2x = 5$  se obtiene así:

$$y^2 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - 1 \quad \text{(completando el cuadrado)}$$

$$y^2 - (x-1)^2 = 4$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad \text{(arreglando en la forma canónica)}$$

Luego, es una hipérbola vertical con centro en  $(1,0)$ , vértices en  $(2,1)$  y  $(-2,1)$ , y asíntotas que pasan por  $(1,0)$  y con pendientes 1 y -1 respectivamente. (Dé la ecuación de las asíntotas. Grafique  $x^2 + 2 = y^2 + 2y$ ).

2.10 Coordenadas polares.

En la sección 1.2 vimos como asociar puntos del plano con pares de números reales usando las coordenadas cartesianas. Ahora estudiamos una asociación diferente introduciendo las coordenadas polares.

Sobre el plano trazamos horizontalmente el segmento positivo de una escala real, como en la fig. 2.18. Al punto  $O$  lo llamamos origen o polo y al segmento  $OX$  eje polar.

Dado cualquier punto del plano como  $P$ , unimos  $O$  con  $P$  y consideramos la longitud de  $OP$  y el ángulo de  $OX$  a  $OP$ , que en este caso son 3 y  $45^\circ$  respectivamente.

Entonces asociamos  $P$  con el par  $(3, 45^\circ)$  ó con  $(3, \frac{\pi}{4})$  según se mida el ángulo en grados o radianes.

Llamamos al par  $(3, 45^\circ)$  coordenadas polares de  $P$ , al 3 radio, y al  $45^\circ$  ángulo polar ó ángulo.

Por convención, el primer número del par se refiere siempre al radio y se denota genéricamente con la letra  $\rho$ , mientras el segundo se refiere al ángulo y se denota genéricamente con la letra  $\theta$ . Luego  $(\rho, \theta)$  denota cualquier punto del plano en coordenadas polares.

Ejerc. 1.-Dar las coordenadas polares de los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  en la fig. 2.18.

Como el ángulo de  $OX$  a  $OP$  se puede medir de varias maneras, según rotemos  $OP$  varias veces, con o en contra de las manecillas del reloj,  $P$  queda asociado, nó con un solo par de números (como en el caso de las carte-

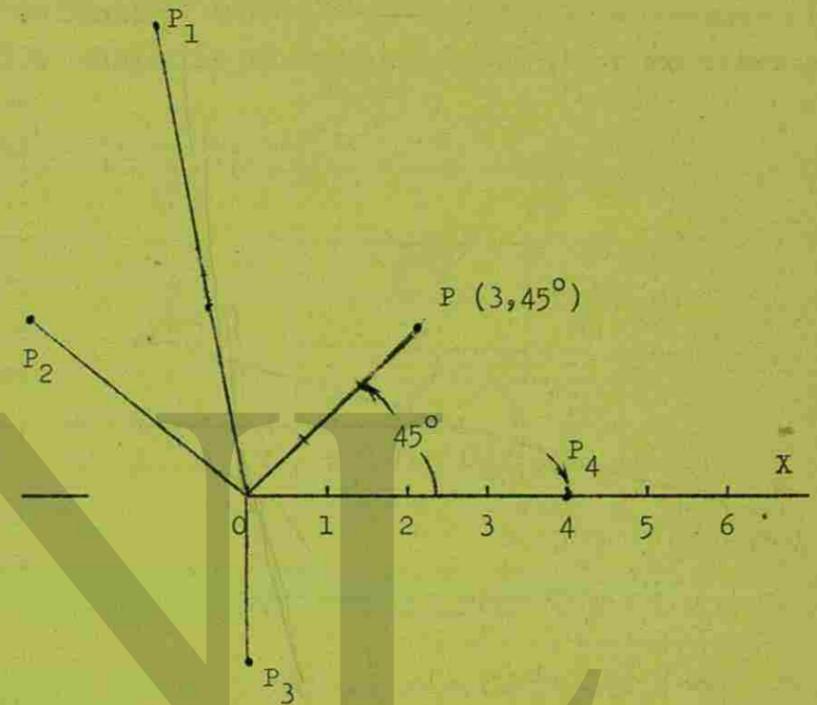


Fig. 2.18.- Coordenadas Polares.

sianas) sino con una multitud de pares. Por ejemplo, el punto P de la fig. 2.18 queda asociado con  $(3, 45^\circ)$ ,  $(3, 405^\circ)$ ,  $(3, -315^\circ)$ ;  $(3, \frac{\pi}{4})$ ,  $(3, \frac{9\pi}{4})$  etc.

Ejerc. 2.- Dé otros cinco pares asociados con P, y con P<sub>1</sub>.

Dado un par de números, como  $(5, -6)$  (si no se indican grados, se sobreentiende que el -6 está en radianes), para graficar en coordenadas polares trazamos el ángulo  $\frac{-6 \times 180}{\pi} = -344^\circ$  y luego medimos la distancia 5 sobre el radio que rotó, como se muestra en la figura 2.19.

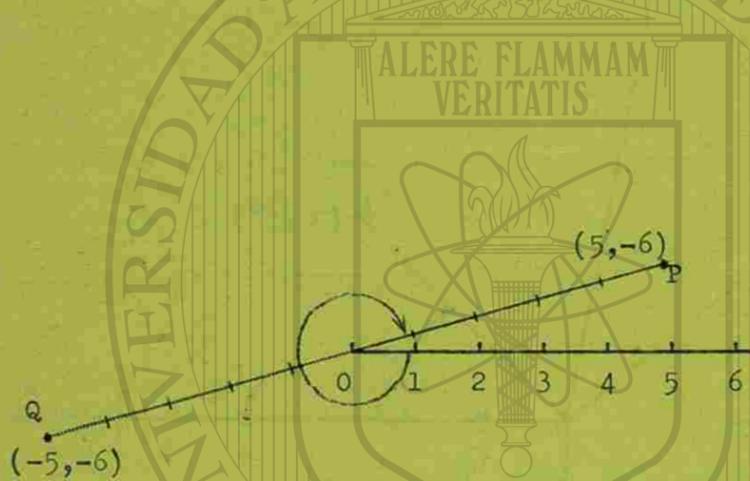


Fig. 2.19.- Gráfica de Puntos.

En el caso que la medida del ángulo se pase de  $360^\circ$  ó  $-360^\circ$ , como en  $(5, -1424^\circ)$ , la reducimos dividiendo entre  $360^\circ$ , y el residuo  $-344^\circ$  nos dá una medida que sabemos como trazar. Pero si nos dán el par  $(-5, -6)$ , no sabemos como trazarlo, pues el radio lo tomábamos solo como un número positivo.

Entonces, para generalizar la asociación para que incluya radios negativos hacemos lo siguiente:

Dado un ángulo como el de la fig. 2.19, al segmento OP lo podemos extender mas allá de O. Los puntos que caen sobre esta extensión, como Q, los tomamos con radio negativo. Luego Q queda asociado con  $(-5, -6)$ .

Esta generalización tiene una desventaja, pues ahora con cada punto quedan asociados mas pares, según se tome el radio positivo o negativo. Por ejemplo, el punto representado por  $(3, 45^\circ)$ , puede también representarse por  $(-3, 45^\circ + 180^\circ)$ ,  $(-3, 45^\circ - 180^\circ)$ , etc.

Haciendo un resumen: cualquier punto del plano está asociado a una infinidad de coordenadas polares, y en cambio, cualquier par de números reales está asociado con un solo punto en el plano.

Ejerc. 3.- a) Grafique los pares  $(-3, 180^\circ)$ ,  $(2.5, 10)$ ,  $(-4, -30^\circ)$ ,  $(-4, 30^\circ)$ ,  $(0, 20^\circ)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-1, 3\pi)$ ,  $(4, \pi)$ .

b) Para cada punto dado arriba dé otras tres coordenadas.

En el plano, podemos introducir las coordenadas cartesianas y las polares simultáneamente. Entonces cada punto P queda asociado con dos pares: sus coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y sus coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ . (Vea fig. 2.20).

Naturalmente nos interesa poder pasar de un par al otro. Por ejemplo, si nos dán las coordenadas cartesianas  $(-2, -4)$ , obtener las polares correspondientes y viceversa, dadas las polares obtener las cartesianas.

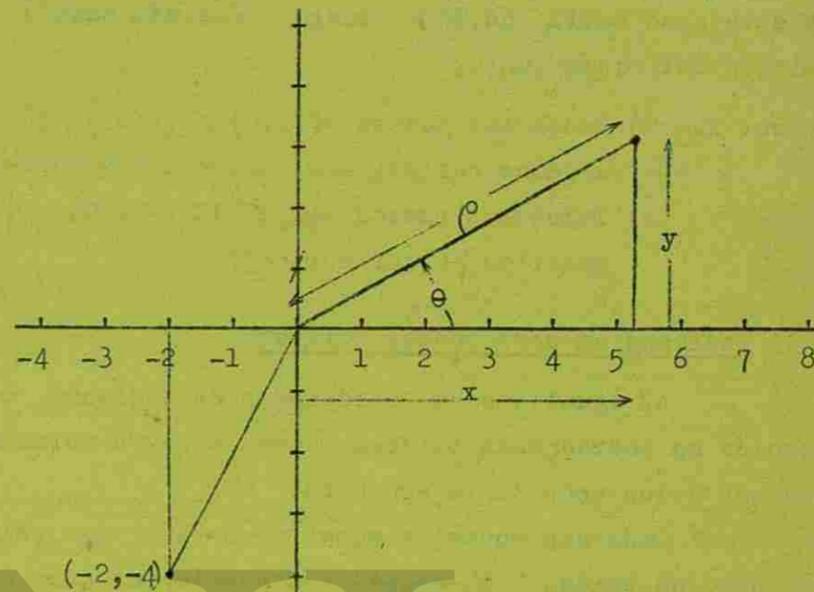


Fig. 2.20.- Transformación de coordenadas.

Para hacer ésto, notamos la relación que existe entre  $x, y, \rho, \theta$  dada por el triángulo de la fig. 2.20:

$x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sen \theta$	y	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$
---	---	---

Así, si nos dán las coordenadas polares  $(-3, 30^\circ)$ , las cartesianas correspondientes son  $(-2.6, -1.5)$  pues:

$$x = -3 \cos 30^\circ = -2.6$$

$$y = -3 \sen 30^\circ = -1.5$$

Conversamente, si nos dán las coordenadas cartesianas  $(-2, -4)$ , vamos a tener muchas coordenadas polares, como es de esperarse.

Usando las ecuaciones de arriba tenemos:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 4.44\dots$$

$$\tan \theta = \frac{-4}{-2} = 2$$

Hay muchos ángulos  $\theta$  cuya tangente dá 2, como  $64.4^\circ$ ,  $64.4^\circ + 180^\circ$ , etc. y de todos éstos hay que saber cual escoger. De la fig. 2.20 vemos que  $64.4^\circ$  no puede ser, pero que  $64.4^\circ + 180^\circ$  ó  $64.4^\circ - 180^\circ$  sí pueden. Luego,  $(4.44, 244.4^\circ)$  ó  $(4.44, -115.6^\circ)$  son las coordenadas polares del punto.

50268

La ecuación  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  siempre nos dá radios positivos. Si tomamos  $\rho = -\sqrt{x^2 + y^2}$  entonces el ángulo que se escoge arriba es diferente. En este caso sería  $64.4^\circ$ ; luego  $(-4.44, 64.4^\circ)$  son también coordenadas polares del mismo punto.

Ejerc. 4.- a) Dados los puntos  $(-1,0)$ ,  $(1,-1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(3,-2)$ ,  $(0,4)$  en coordenadas cartesianas, obtenga las correspondientes polares.

b) Dados los puntos  $(0,40^\circ)$ ,  $(-1,30^\circ)$ ,  $(2,\pi)$ ,  $(-5,-\pi)$  en polares, ponerlos en cartesianas.

### 2.11 Gráficas en coordenadas polares.

Al igual que en coordenadas cartesianas, definimos gráfica de una ecuación en coordenadas polares, como la curva formada por el conjunto de pares que son soluciones de la ecuación.

Dada una ecuación como  $a = b - 1$ , sus soluciones  $(a,b)$  forman un conjunto de pares. Si consideramos este par como coordenadas polares, de modo que  $a$  sea radio y  $b$  ángulo, la gráfica de estos pares nos dá la gráfica de la ecuación en coordenadas polares. Para obtener su gráfica:

- 1) Tabulamos dándole valores a  $b$ , primero positivos y luego negativos. Naturalmente escogemos valores fáciles de graficar. Si no se especifica lo contrario, la medida del ángulo se toma en radianes.
- 2) Graficamos los pares así obtenidos, empezando con cero y notando cómo vá la curva a medida que  $b$  aumenta y luego cuando  $b$  disminuye.
- 3) Unimos los puntos así obtenidos a mano limpia.

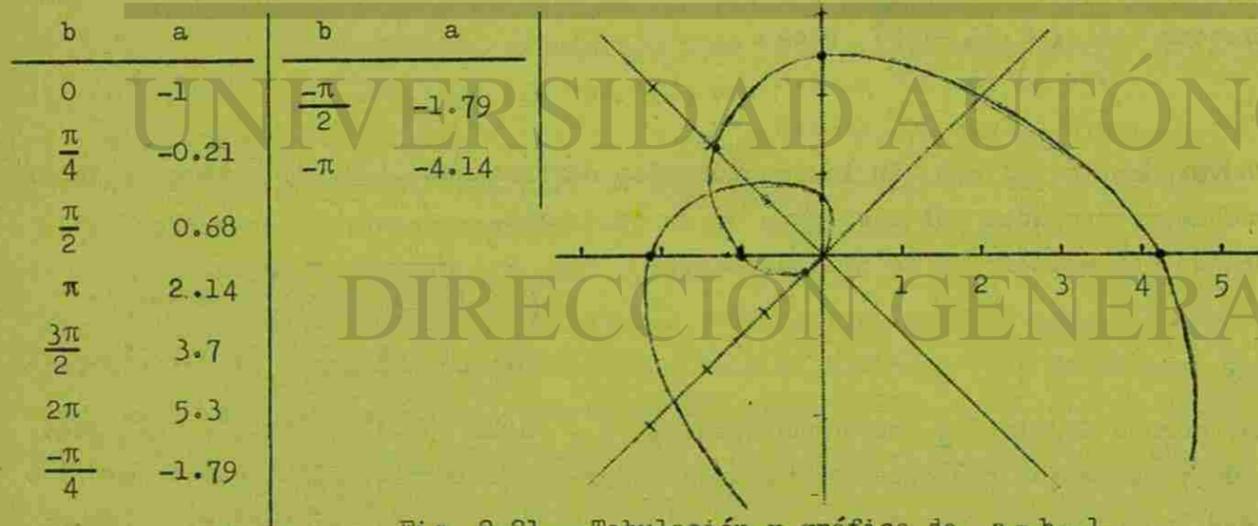


Fig. 2.21.- Tabulación y gráfica de  $a = b - 1$  donde  $a$  radio, y  $b$  ángulo.

En la fig. 2.21 hacemos ésto, obteniendo una espiral con dos brazos, obteniéndose un brazo al girar el ángulo contra las manecillas del reloj, y el otro al girar con las manecillas.

Ahora obtenemos ecuaciones en coordenadas polares de curvas que ya conocemos, como la recta y el círculo.

1) Dada una recta que pasa por el polo formando un ángulo de  $\frac{3\pi}{4}$  del eje polar a la recta, su ecuación polar es:

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

El radio  $\rho$  ocurre trivialmente, pues la curva consta de los pares  $(\rho, \frac{3\pi}{4})$ , donde  $\rho$  es cualquier número real.

2) La ecuación de un círculo con centro en  $(p, \alpha)$  y radio  $a$ , la obtenemos usando el triángulo que mostramos en la fig. 2.23:

$$a^2 = \rho^2 + p^2 - 2\rho p \cos(\theta - \alpha)$$

que despejando  $\rho$  nos dá:

$$\rho = p \cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{a^2 \cos^2(\theta - \alpha) + a^2 - p^2}$$

Cuando el centro está en el origen, la ecuación se reduce a:

$$\rho = a, \text{ pues } (p, \alpha) = (0, 0).$$

Ejerc. 1.- Grafique las ecuaciones:  $\rho = 3, \theta = 60^\circ$

$$\rho = 4 \cos \theta, \text{ y } y = x^2 \text{ (x es ángulo).}$$

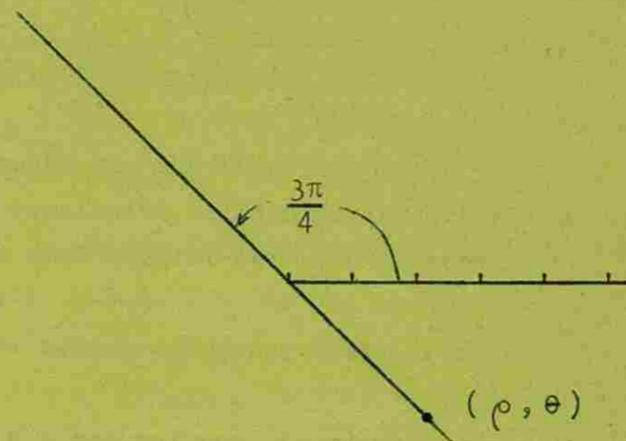


Fig. 2.22.- Ecuación polar de recta por el polo.

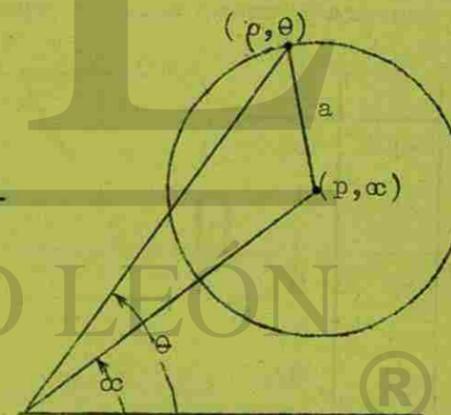


Fig. 2.23.- Ecuación polar del círculo.

2.12 Ecuaciones Paramétricas.

Ya estudiamos como graficar una ecuación con una o más letras. Ahora consideramos el caso de cómo graficar dos ecuaciones. El caso cuando las dos ecuaciones tienen a lo más dos letras, como:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x &= y^2 + 6 \end{aligned}$$

problema que ya se nos presentó al resolver ecuaciones simultáneas.

En ese caso graficamos cada una por separado, y si recuerdan, las intersecciones de las dos curvas dan las soluciones del sistema.

Pero si hay tres letras, como en:

$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= t^2 \end{aligned}$$

Ya no se puede seguir la misma idea.

Porque asociando  $(x,y)$  con los dos ejes, ya no nos queda otro eje para asociar con  $t$  (aunque si tuviésemos tres ejes de coordenadas como en la geometría del espacio, no habría dificultad).

Entonces lo que hacemos es considerar  $t$  como parámetro y llamamos al sistema ecuaciones paramétricas con parámetro  $t$ . Para cada valor de  $t$  obtenemos un valor de  $x$  y otro de  $y$ , y estos dos valores  $(x,y)$  forman la pareja que graficamos, como se muestra en la fig. 2.24:

t	x	y
0	-1	0
1	1	1
2	3	4
3	5	9
-1	-3	1
-2	-5	4

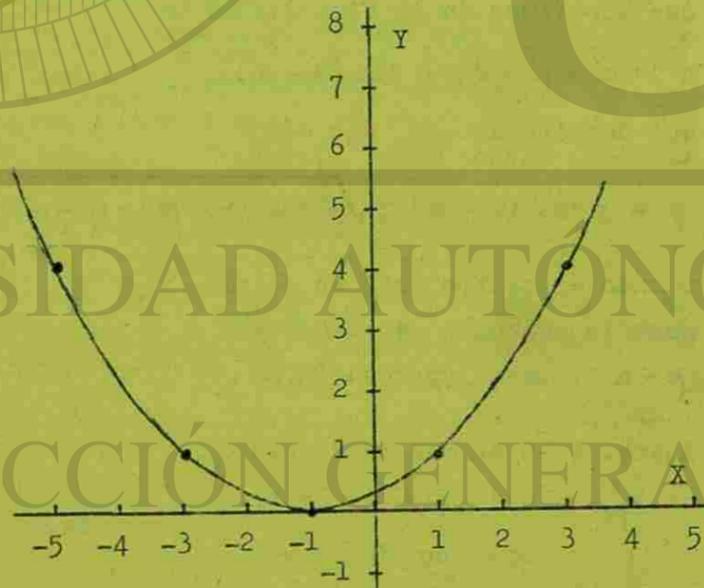


Fig. 2.24.- Tabulación y gráfica de las ecuaciones paramétricas:  
 $x = 2t - 1, y = t^2$

Cuando se puede eliminar  $t$  de las dos ecuaciones, conviene hacerlo y encontrar directamente la ecuación en  $(x,y)$ . Así, para las ecuaciones anteriores,  $x = 2t - 1$  y  $y = t^2$  tenemos:

$$x + 1 = 2t \quad (\text{despejando la } t)$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = t^2$$

$$y = \frac{(x+1)^2}{4} \quad (\text{sustituyendo } t \text{ en } y = t^2).$$

Luego  $4y = (x+1)^2$  que reconocemos como la ecuación de una parábola vertical con vértice en  $(-1,0)$  y que se abre hacia arriba.

Ejerc.1.- Graficar  $x = 3 \text{ sen } t$  ;  $x = \text{sen } t$   
 $y = 3 \text{ cos } t$  ;  $y = 3 \text{ cos } t$ .

Las ecuaciones paramétricas ocurren a veces al tratar de encontrar la ecuación de una curva con propiedades geométricas dadas. Por ejemplo, si rodamos un círculo sobre una recta, con una puntilla en la circunferencia, la puntilla dibujará la curva que se llama cicloide que graficamos en la fig. 2.25:

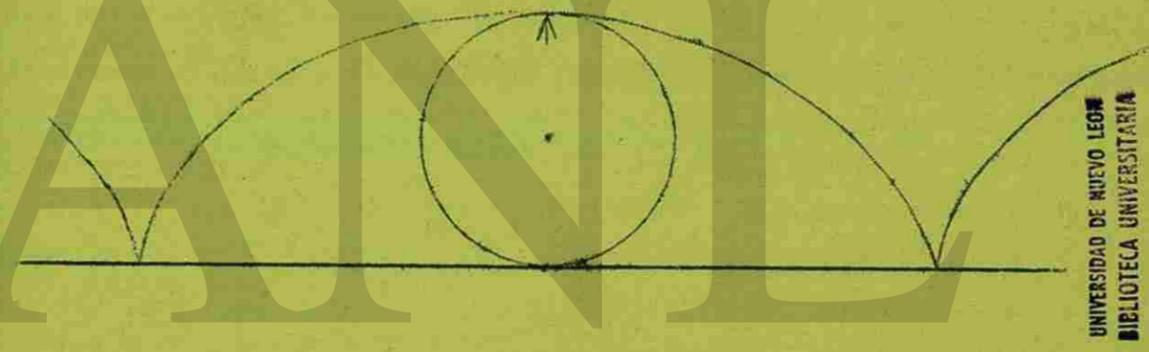


Fig. 2.25.- Cicloide.

Para obtener la ecuación de una curva de este tipo, ponemos el origen de las coordenadas cartesianas al principio de la curva y rodamos el círculo de radio  $a$  sobre el eje X.

Formando el triángulo como en la fig. 2.26, notamos que para cual-

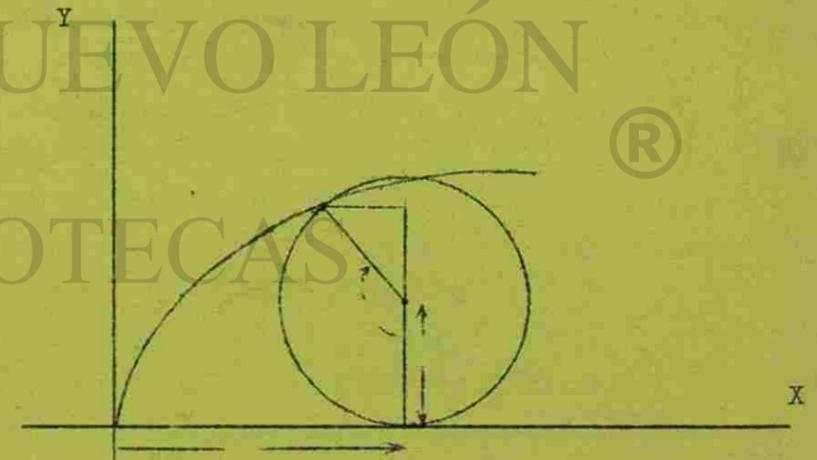


Fig. 2.26.- Ecuación de la cicloide.

quier  $(x,y)$  sobre la curva :

$$y = a - a \cos \phi$$

$$x = d - a \sin \phi$$

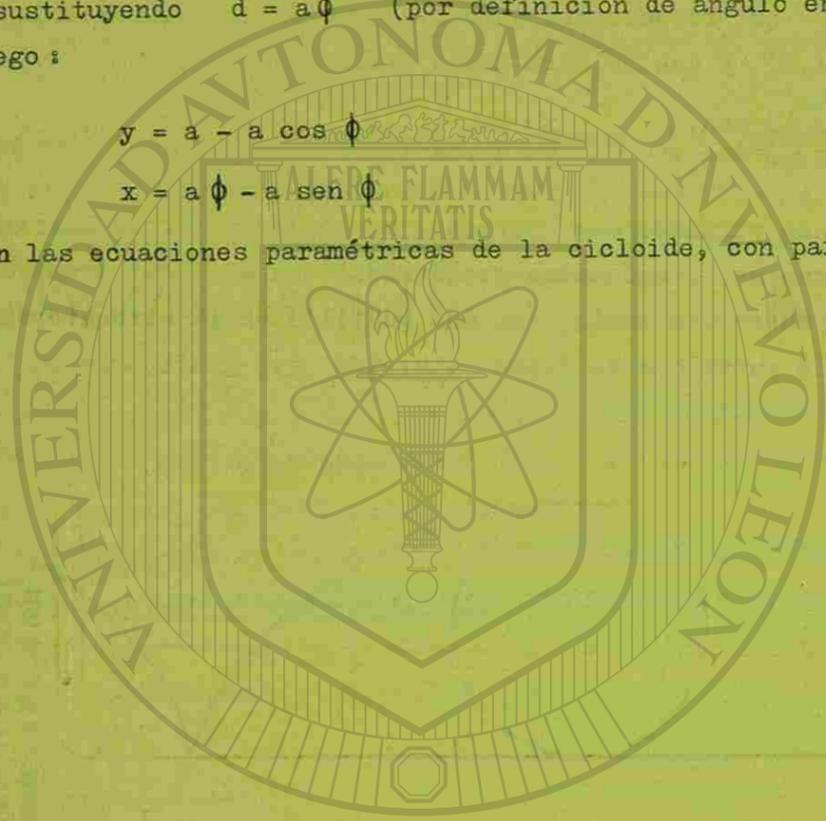
y sustituyendo  $d = a\phi$  (por definición de ángulo en radianes  $\phi = \frac{d}{a}$ )

Luego :

$$y = a - a \cos \phi$$

$$x = a\phi - a \sin \phi$$

son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, con parámetro  $\phi$ .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS

SECCION 2.2

A.- Cuánto vale la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella vale :

- |                  |                  |                   |                   |                    |                   |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1) $15^\circ$    | 2) $40^\circ$    | 3) $60^\circ$     | 4) $80^\circ$     | 5) $90^\circ$      | 6) $105^\circ$    |
| 7) $135^\circ$   | 8) $160^\circ$   | 9) $180^\circ$    | 10) $190^\circ$   | 11) $220^\circ$    | 12) $252^\circ$   |
| 13) $270^\circ$  | 14) $284^\circ$  | 15) $300^\circ$   | 16) $335^\circ$   | 17) $360^\circ$    | 18) $-5865^\circ$ |
| 19) $-888^\circ$ | 20) $-964^\circ$ | 21) $-1000^\circ$ | 22) $-5430^\circ$ | 23) $-4495^\circ$  | 24) $8975^\circ$  |
| 25) 4 rad        | 26) -5 radianes. | 27) $3\pi$ rad    | 28) $.7\pi$ rad   | 29) $-.06\pi$ rad. |                   |

B.-Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos :

- |  |                               |  |
|--|-------------------------------|--|
| 1) $(3,4), (-1,6)$                       | 2) $(5,-6), (3,-1)$           | 3) $(0,0), (1,-7)$                     |
| 4) $(-\pi, \sqrt{2}), (1,-1)$            | 5) $(2,-3), (-\sqrt{3}, \pi)$ | 6) $(\frac{1}{2}, 2), (-.5, \sqrt{5})$ |
| 7) $(2.3, 3\frac{1}{2}), (-\sqrt{6}, 0)$ | 8) $(3.1, \pi), (-2.1, .3)$   | 9) $(5,-1), (-\sqrt[3]{4}, 2)$         |
| 10) $(3,9), (3,2\pi)$                    | 11) $(5,-6), (-3,-6)$         | 12) $(4,4), (7,7)$ .                   |

C.- Dar la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos en los problemas del ejercicio B, inmediato anterior.

D.- Encontrar el punto y el ángulo de intersección para los siguientes pares de rectas :

- |                                     |                                |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $3x+y+4=0, 2x-5y+4=0$            | 2) $3x+y+2=0, 3x+6=3y$         |
| 3) $a+4b-5=0, a+b=0$                | 4) $m-n=1, m+3.5n=0$           |
| 5) $\pi k+f = \pi, -\pi k+f = 3\pi$ | 6) $h-\sqrt{3}t = 1, h=0$      |
| 7) $y+6x-7=0, 2y-x=2$               | 8) $y=3, y-2x=4$               |
| 9) $3w-2k = 4, 6w-4k = 5$           | 10) $0.1b-2t = 1, b+0.04t = 2$ |
| 11) $2h-j = 2, h+2j = 4$            | 12) $0.1b-2t = 1, b+0.05t = 1$ |

E.- Conteste las siguientes preguntas:

- 1.- ¿Cómo se define la pendiente de una recta?.
- 2.- ¿Qué relación hay entre la inclinación de una recta y su pendiente?
- 3.- ¿Cómo varía la inclinación con la pendiente?.
- 4.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente cero? ¿Cómo es su ecuación?.
- 5.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente infinita? ¿Cómo es su ecuación?
- 6.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente positiva?.
- 7.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente negativa?.
- 8.- ¿Qué valores puede tomar la pendiente de una recta cualquiera?.
- 9.- ¿Cómo se puede saber si dos rectas son paralelas o perpendiculares?.
- 10.- ¿Cuántos puntos se necesita conocer para trazar la gráfica de una recta?.

PROBLEMAS  
SECCION 2.3

A.- En los siguientes problemas se dá la ecuación de una familia de rectas. Las letras subrayadas son los parámetros. Encontrar la recta de la familia que cumple la condición indicada a la derecha y dar su pendiente :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $ax - 3y = 1$ , <u>a</u> , que pase por $(-1, 3)$              | Además trazar la gráfica de la familia en forma aproximada, señalando la recta pedida. |
| 2) $2x - 3by + 6 = 0$ , <u>b</u> , que tenga pendiente 2.         |  |
| 3) $3a - xy + 3 = 0$ , <u>x</u> , que tenga pendiente 15.         |  |
| 4) $2wz - 3b = 0$ , <u>z</u> , que pase por $(3, 4)$ .            |  |
| 5) $5g - 3h + k - 1 = 0$ , <u>k</u> , que pase por el origen.     |  |
| 6) $7ab - 13x + 2 = 0$ , <u>a</u> , que tenga pendiente -2.       |  |
| 7) $30my + 2a - 3 = 0$ , <u>y</u> , que pase por $(3, -6)$ .      |  |
| 8) $5r - 3st + 1 = 0$ , <u>s</u> , que tenga pendiente $\infty$ . |  |
| 9) $3as - 5t = -3$ , <u>a</u> , que sea horizontal.               |  |

B.- Encontrar la ecuación de la familia de rectas que satisface la condición indicada, trazando la gráfica correspondiente en forma aproximada.

- |   |   |
|---|---|
| 1) Que pasen por $(-1, 2)$ .  | 2) que pasen por $(-3, 4)$ .                      |
| 3) Que pasen por $(\pi, -3)$ .  | 4) Que pasen por $(\sqrt{2}, -2)$ .               |
| 5) Que pasen por $(4.31, 2)$  | 6) que pasen por $(-\frac{2}{5}, \frac{13}{4})$ . |
| 7) Que pasen por el origen.   | 8) Que pasen por $(1, 0)$ .                       |
| 9) Que tengan pendiente 2.  | 10) Que tengan pendiente -4.                      |
| 11) Que tengan pendiente cero.  | 12) Que tengan pendiente $\infty$ .               |
| 13) Que sean verticales.  | 14) Que sean horizontales.                        |
| 15) Que sean paralelas a $3x + 8y - 1 = 0$ .                                      |   |
| 16) Que sean perpendiculares a $x - 2y = 5$ .                                     |   |
| 17) Que sean perpendiculares a $3y - 4x + 2 = 0$ .                                |   |
| 18) Que sean paralelas a $\pi x + 2y = 0$ .                                       |   |
| 19) Que de ellas a $x - 3y - 2 = 0$ haya un ángulo de $30^\circ$ .                |   |
| 20) Que de ellas a $6x - 1 = y$ haya un ángulo de $-80^\circ$ .                   |   |
| 21) Que de ellas a $x + y = 0$ haya un ángulo de $-100^\circ$ .                   |   |
| 22) Que de ellas a $x = 0$ haya un ángulo de $-1450^\circ$ .                      |   |
| 23) Que pasen por el punto de intersección de $x - y = 1$ y $2x - y = 2$ .        |   |
| 24) Que pasen por el punto de intersección de $3a + b = 2$ y $a - 5b = 0$ .       |   |
| 25) Que pasen por el punto de intersección de $m - \pi k = 0$ y $m + k - 1 = 0$ . |   |
| 26) Que pasen por el punto de intersección de $4g - 3\pi p = 1$ y $6g = 0$ .      |   |
| 27) Que pase por el punto de intersección de $x = 3$ y $y = -\pi$ .               |   |

PROBLEMAS  
SECCION 2.4

Dar la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones, y trazar la gráfica correspondiente :

- |   |   |
|---|---|
| 1) Pasa por $(3, 8)$ y $(\pi, 8)$ .   | 2) Pasa por $(-1, 3)$ y $(-1, 5)$ .         |
| 3) Pasa por $(3, -5)$ y $(5, -3)$ .   | 4) Pasa por $(0, -\pi)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ . |
| 5) Pasa por $(8, 2)$ y $m = 3$ .  | 6) Pasa por $(3, -1)$ y $m = -1$ .          |
| 7) Pasa por $(-3, \pi)$ y $m = 0.1$ .   | 8) Pasa por $(-3, \pi)$ y $m = 1000$ .      |
| 9) Pasa por $(4, -3)$ y $m = -9$ .  | 10) Pasa por $(0, 0)$ y $m = 1$ .           |
| 11) Pasa por $(-1, 0)$ y $m = \infty$ .   | 12) Pasa por $(-4, 0.3)$ y $m = 0$ .        |
| 13) Pasa por $(0, 2)$ y $m = \infty$ .  | 14) Pasa por $(0, 0)$ y $m = 0$ .           |
| 15) Pasa por $(-1, 5)$ y es paralela a $3x - 4y + 3 = 0$ .  |   |
| 16) Pasa por $(-1, 5)$ y es perpendicular a $3x - 4y + 3 = 0$ .   |   |
| 17) Pasa por $(0, 0)$ y es perpendicular a $2x - y = 0$ .   |   |
| 18) Pasa por $(-1, 1)$ y es paralela a $x = -5y + 2$ .  |   |
| 19) Pasa por $(3, 5)$ y es paralela al eje X.   |   |
| 20) Pasa por $(1, -4)$ es paralela al eje Y.  |   |
| 21) Pasa por $(5, -1)$ y es vertical.   |   |
| 22) Pasa por $(-7, -3)$ y es horizontal.  |   |
| 23) Pasa por $(-1, 2)$ y hay un ángulo $-30^\circ$ de ella a $x + y = 0$ .  |   |
| 24) Pasa por $(3, -5)$ y hay un ángulo $45^\circ$ de ella a $(x - 3y)(x - 4) = x^2 - 3xy + 5$ .   |   |
| 25) Pasa por $(-3, 4)$ y hay un ángulo de $-120^\circ$ de ella a $3s + k + 5 = 0$ .   |   |
| 26) Pasa por $(2, -1)$ y hay un ángulo de $2010^\circ$ de ella a $5r - 3t + 1 = 0$ .  |   |
| 27) Pasa por el punto de intersección de $2x + y - 1 = 0$ con $2x + 3y = 4$ , y además es paralela a $x = -5y + 1$ .                          |   |
| 28) Pasa por el punto de intersección de $3x - 5y + 2 = 0$ con $3x + y = 0$ , y además es perpendicular a $2x - 1 = y$ .                      |   |
| 29) Pasa por el punto de intersección de $2x - 1 = 3y$ con $5y - 2 = 3x$ , y además hay un ángulo de $100^\circ$ de ella a $x - 3y + 2 = 0$ . |   |
| 30) Pasa por el punto de intersección de $x + 4y + 3 = 0$ y $y - 2x + 1 = 0$ , y además hay un ángulo de $-40^\circ$ de ella a $2x + y = 1$ . |   |
| 31) Es vertical y es tangente a un círculo de radio 6 y centro en $(-\pi, \pi)$ .   |   |
| 32) Es horizontal y pasa por el punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos $(3, 1)$ y $(6, 3)$ .                                |   |
| 33) Su pendiente es $m = 1$ , y su distancia perpendicularmente al origen es 2.   |   |
| 34) Corta un triángulo isósceles en el primer cuadrante, y pasa por $(-4, -1)$ .  |   |
| 35) Es paralela a $x + y = 0$ y está separada de ella 8 unidades.   |   |

BIBLIOTECA DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
MEXICO

PROBLEMAS  
SECCION 2.5

A.- Grafique las siguientes ecuaciones, diciendo

- a) Cual es su pendiente en el punto de abscisa 1.
- b) Cual es su pendiente en el punto de abscisa -2.
- c) En qué intervalos la curva crece.
- d) En qué intervalos la curva decrece.
- e) Cuáles son sus puntos máximos.
- f) Cuáles son sus puntos mínimos.
- g) En qué intervalos la curva es cóncava.
- h) En qué intervalos la curva es convexa.
- i) Cuáles son sus puntos de inflexión.
- j) Para qué puntos la curva no está definida.
- k) Para qué abscisas hay discontinuidad:

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $y = x^2 - x - 6$            | 2) $y = x^3 - x$                 |
| 3) $a = p^4 - 1$                | 4) $b = g^3 - g^2 - 2g$          |
| 5) $y^2 = x^3 - 8$              | 6) $h = \frac{3}{5-k}$           |
| 7) $h - 5 = \frac{j}{j+2}$      | 8) $u(f+1) = 2f$                 |
| 9) $y = 2 \operatorname{sen} x$ | 10) $a = \tan x$                 |
| 11) $b = \cos 2y$               | 12) $f = \sec u$                 |
| 13) $k = \cot n$                | 14) $z = \operatorname{cosec} w$ |
| 15) $g = \log x$                | 16) $h = 2^p$                    |

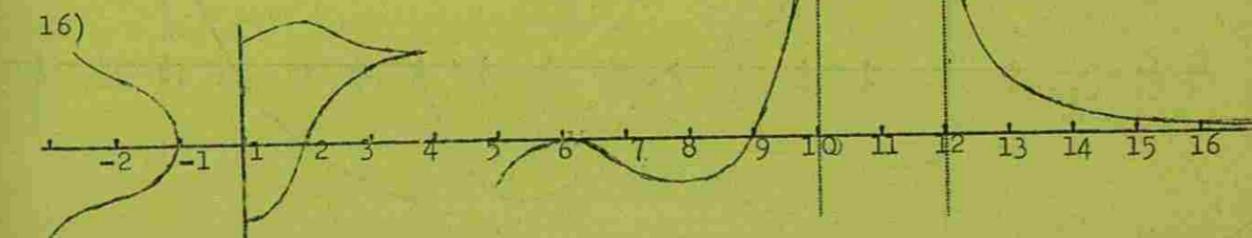
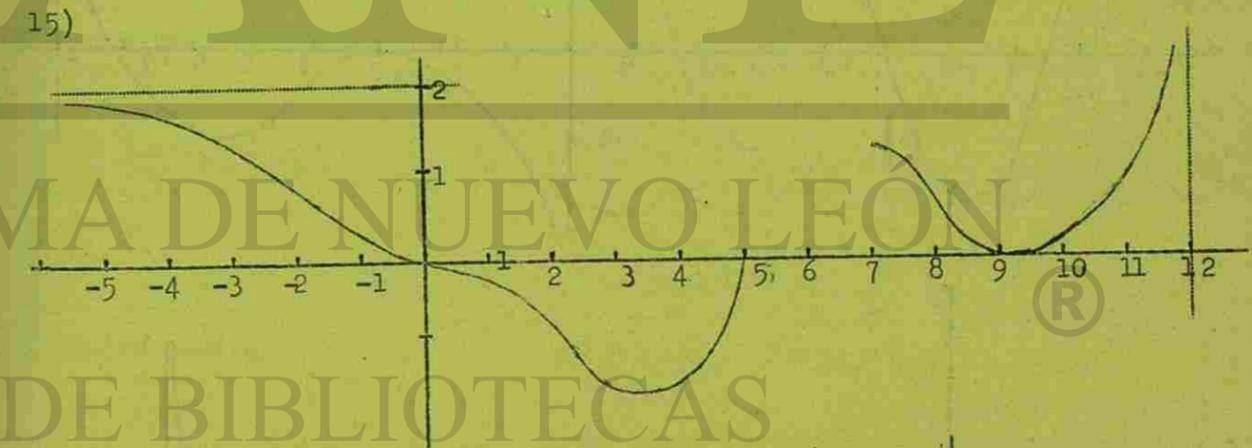
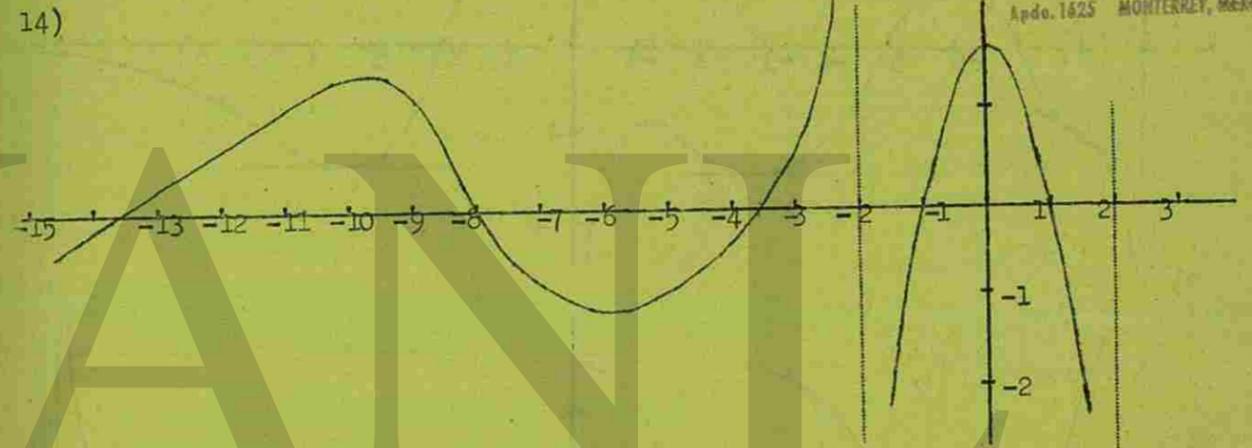
B.- Conteste las siguientes preguntas:

- 1) Defina tangente a una curva en el punto (x,y).
- 2) Defina pendiente de una curva en el punto (x,y).
- 3) ¿Qué diferencia hay entre la tangente y la pendiente?
- 4) ¿Qué relación hay entre la rapidez de cambio y la pendiente de una curva?
- 5) ¿Qué significa que una curva crece en el punto (x,y)? ¿y decrece?
- 6) ¿Qué significa que (x,y) es un punto máximo de una curva? ¿y mínimo?
- 7) ¿Qué significa que una curva es convexa en un punto? ¿y cóncava?
- 8) Defina punto de inflexión.
- 9) ¿Qué significa que una curva está definida en el intervalo  $a < x < b$ ?
- 10) ¿Qué es un punto de discontinuidad de una curva?

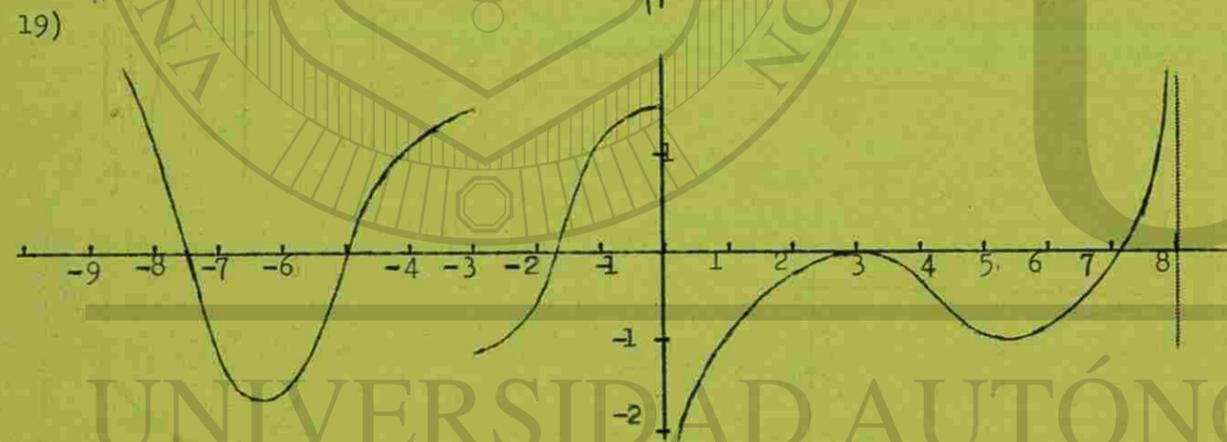
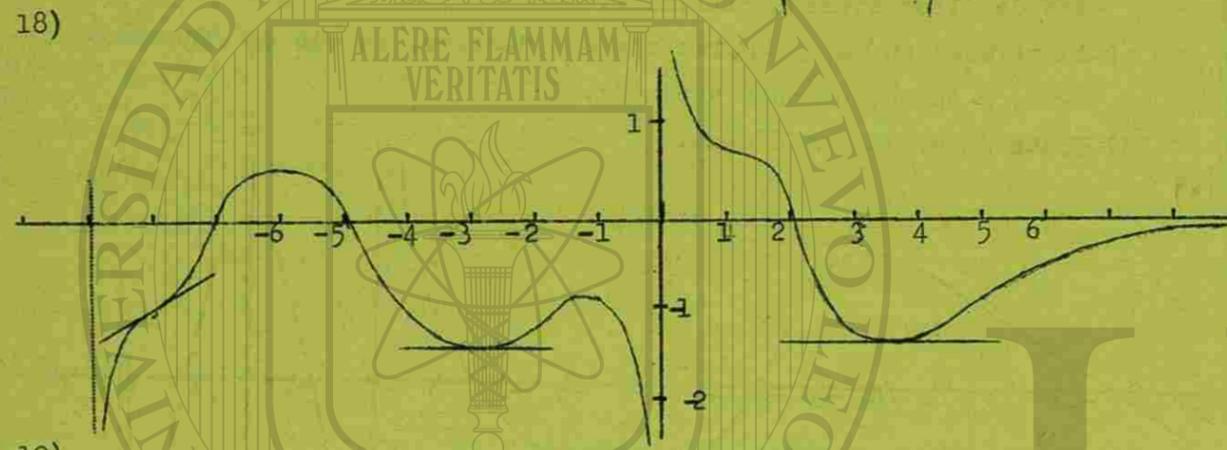
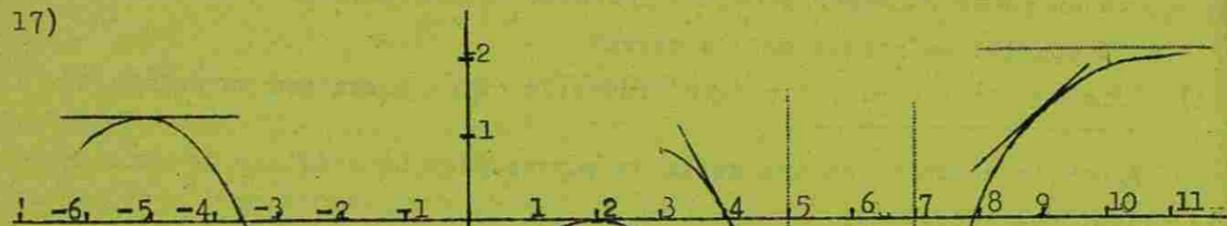
- 11) ¿Qué es punto de discontinuidad infinita de una curva?
- 12) ¿Qué son las asíntotas de una curva?
- 13) ¿Cómo se obtiene el punto de intersección de una curva con su asíntota?

A continuación se dá una serie de curvas. Haga un análisis de cada una de ellas, comprendiendo:

- a) Ecuación de las tangentes marcadas, y la pendiente en tales puntos.
- b) Coordenadas de los puntos de intersección con los ejes, puntos máximos o mínimos, puntos de inflexión, puntos de discontinuidad, y puntos de discontinuidad infinita.
- c) Intervalos en que la curva crece o decrece, en que es cóncava o convexa, y en que no está definida.
- d) Ecuación de las asíntotas.



UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALFONSO REYES"  
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO



Trazar gráfica aproximada de las curvas con las siguientes propiedades:

	21)	22)	23)
Int. con eje X	$(-4,0)(0,0)$ $(3,0)$	$(-6,0)(-4,0)$ $(-2,0)(3,0)$ $(6,0)$	$(-3.5,0)$
Máximos	$(1,2)$	$(-3,2)(0,1.5)$	$(2,-1)$
Mínimos	$(-2,-3)(3,0)$	$(-5,4)(-2,0)$	$(0,-5)(4,-3)$
Inflexión	$(2,1)(-4,0)$ $(-1,-1)$	$(-4,0)(-1,1)$ $(-2.5,1)$	$(-2,-1)(3,-2)$
Discontinuidad finita		$(1,1)(4,2)$ $(1,-1)$	$(-3,1)(-3,-1)$ $(1,1)(1,-2)$
Discontinuidad infinita	$(4, \infty)$	$(5, \infty)$	
Asíntotas	$y=3, x=4$	$x=5$	
Crecimiento	$-2 < x < 1$ $3 < x < 4$	$-5 < x < -3$ $-2 < x < 0$ $1 < x < 4$	$0 < x < 1$ $1 < x < 2$ $4 < x < 6$
Decrecimiento	$x < -2$ $1 < x < 3$	$-5 < x$ $-3 < x < -2$ $0 < x < 1$ $5 < x$	$-3 < x < 0$ $2 < x < 4$
Cóncava hacia arriba	$-4 < x < 0$ $2 < x < 4$	$-4 < x$ $-2.5 < x < -1$ $1 < x < 4$ $5 < x$	$-2 < x < 1$ $3 < x < 6$
Cóncava hacia abajo	$x < -4$ $0 < x < 2$	$-4 < x < -2.5$ $-1 < x < 1$	$-3 < x < -2$ $1 < x < 3$
Intervalos en que no está definida	$4 < x$	$4 < x < 5$	$x < -3$ $6 < x$



SECCION 2.6

PROBLEMAS

- 1) Dé la definición de un círculo.
- 2) Dé la forma canónica de la ecuación de un círculo, y explique el significado geométrico de los parámetros.

Trace la gráfica de los siguientes círculos, analizando primero cual es el centro, y cual es el radio. Dé los puntos de intersección con los ejes, los puntos máximos o mínimos, puntos de inflexión, puntos de discontinuidad finita o infinita. Dé los intervalos en que la curva crece o decrece, en que es cóncava o convexa, y en los que la curva no está definida. Dé la ecuación de las asíntotas.

- |   |   |
|---|---|
| 3) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$  | 4) $(y+2)^2 + (b+3)^2 = 5$  |
| 5) $(x+7)^2 + (a-1)^2 = -9$   | 6) $(y-\sqrt{2})^2 + (w-\pi)^2 = 16$                                    |
| 7) $(g+5)^2 + h^2 - 6h + 9 = 25$                                    | 8) $a^2 + 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 = 1$                                    |
| 9) $x^2 - 10x + 25 + v^2 + 8v + 16 = 4$                             | 10) $r^2 + 5r + \frac{25}{4} + s^2 - \frac{7}{3}s + \frac{49}{36} = 36$ |
| 11) $t^2 - \sqrt{2}t + \frac{1}{2} + m^2 + m + \frac{\pi^2}{4} = 2$ | 12) $w^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}w + \frac{75}{16} + y^2 = 3$              |
| 13) $m^2 + n^2 = -7$  | 14) $k^2 + h^2 - h + \frac{1}{2} = 30$                                  |
| 15) $x^2 + y^2 = 0$   | 16) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 0$   |
| 17) $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$                                   | 18) $q^2 + 7p - q + p^2 - 18 = 0$                                       |
| 19) $2a - 3b - a^2 - b^2 + 5 = 0$                                   | 20) $7h - 3 + 5p + h^2 + p^2 = 0$                                       |
| 21) $2c^2 - 6c + 2y^2 - 8y - 6 = 0$                                 | 22) $3k^2 - 2j + 3j^2 - 4k - 6 = 0$                                     |
| 23) $5d^2 - 13d + 5f^2 + f = 0$                                     | 24) $6ñ^2 - 3ñ + 2p + 6p^2 + 2 = 0$                                     |
| 25) $\frac{m^2}{2} - 5m + \frac{n^2}{2} + 3n + 1 = 0$               | 26) $\frac{3x^2}{5} - \frac{7x}{4} + \frac{3y^2}{5} + \frac{4y}{7} = 0$ |
| 27) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 7 = 0$                                   | 28) $a^2 + b^2 - 3b + 5a + 10 = 0$                                      |
| 29) $\sqrt{5}x^2 - 3w + \sqrt{2}x + \sqrt{5}w - \sqrt{7} = 0$       | 30) $-z^2 + 4 - 5a - a = 8$   |

Encontrar la ecuación de los círculos que satisfacen las siguientes condiciones:

- |                                      |                                 |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 31) Centro en (4,6) y radio 3.       | 32) Centro en (2,10) y radio 5. |
| 33) " (-3,2) " 2.                    | 34) " (-5,-1) " $\sqrt{5}$ .    |
| 35) " ( $\pi, 1$ ) " $\pi$ .         | 36) " ( $-\pi, -\pi$ ) " 1.     |
| 37) " ( $3/4, -7/3$ ) " $1/2$ .      | 38) " (0,0) " 1.                |
| 39) " (-4,0) " 3.                    | 40) " (0,3) " $\sqrt{2}$ .      |
| 41) " (2,1) y pasa por (3,-5).       |                                 |
| 42) " (-3,4) " (0,-1).               |                                 |
| 43) " (0,0) " (3,4).                 |                                 |
| 44) " ( $-\sqrt{2}, \pi$ ) " (-3,6). |                                 |
| 45) " (3,3) " (-1,-1).               |                                 |
| 46) " (2,-7) " (3,1).                |                                 |

- 47) Centro en (5,6) y pasa por (0,0).
- 48) " (3,5) " (0,5).
- 49) Pasa por (0,0), (4,0) y (0,-2).
- 50) " (-1,1), (2,0) y (0,-3).
- 51) " (1,1), (3,-2) y (-2,2).
- 52) " (2,2), (3,-2) y (-5,3).
- 53) " (-3,4), (-1,-2) y (2,0).
- 54) Centro en el eje Y, y pasa por (2,3) y (5,3).
- 55) Centro en el eje X, y pasa por (-5,4) y (-5,-1).
- 56) Centro en el eje X, y pasa por (-2,1) y (3,2).
- 57) Centro en el eje Y, y pasa por (3,4) y (-5,1).
- 58) Centro en la línea  $y=x$ , radio 2, y pasa por (3,1).
- 59) Centro en la línea  $y=2x$ , radio 8, y pasa por (-2,5).
- 60) Centro en la línea  $2y-x=0$ , radio 4, y pasa por (2,1).
- 61) Centro en la línea  $y-x+1=0$ , radio  $\sqrt{5}$ , y pasa por el origen.
- 62) Centro en la línea  $2y+3x-5=0$ , radio 10, y pasa por el origen.
- 63) Centro en la línea  $3y+4x+2=0$ , radio 11, y pasa por (-1,2).
- 64) Centro en (2,3) y tangente al eje X.
- 65) Centro en (-3,5) y tangente al eje Y.
- 66) Centro en (-1,6) y tangente a la línea  $y=1$ .
- 67) Centro en (3,-7) y tangente a la línea  $x=-2$ .
- 68) Centro en (5,-7) y tangente a la línea  $x=10$ .
- 69) Centro en (1,2) y área 25 unidades cuadradas.
- 70) Centro en (-3,4) y área 2 " "
- 71) Centro en ( $2, \sqrt{2}$ ) y circunferencia 8.
- 72) Centro en ( $2, \pi$ ) y circunferencia 14.

Encuentre la pendiente de cada círculo en los puntos con la abscisa marcada, y dé la ecuación de la recta tangente al círculo en esos puntos. También dé la ecuación de la recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia (esta recta se llama la normal a la curva en el punto dado):

- |  |  |
|--|--|
| 73) $x^2 + y^2 = 4$ ; $x=1$ .  | 74) $x^2 + y^2 = 1$ ; $y = \frac{1}{2}$                            |
| 75) $a^2 + b^2 = 8$ ; $a=-2$ .   | 76) $w^2 + z^2 = 25$ ; $z=-3$ .                                    |
| 77) $b^2 + x^2 = 5$ ; $b=-2$ .   | 78) $g^2 + p^2 = 12$ ; $g=1.5$                                     |
| 79) $y^2 + x^2 = 3$ ; $x=2$ .  | 80) $y^2 + x^2 = 1$ ; $x=-3$ .                                     |
| 81) $x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0$ ; $y=1$ .   | 82) $y^2 + x^2 + 5x - 3 = 0$ ; $x=-3$                              |
| 83) $a^2 - 2a + b^2 + 4b = 0$ ; $b=0$ .  | 84) $x^2 + a^2 + 6a - 6x = 7$ ; $a=-1$                             |
| 85) $\frac{w^2}{2} - 3w + \frac{z^2}{2} + 5z - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ; $z=-4$ . | 86) $\frac{3g^2}{4} + \frac{3h^2}{4} - 2g - 3h - 1 = 0$<br>$h=5$ . |

87) Dé la ecuación de las tangentes horizontales y de las verticales, a los círculos de los problemas del 73 al 86.

88) Desde el punto (6,0) trazamos una tangente al círculo  $x^2 + y^2 = 16$ . Dar las coordenadas del punto de tangencia. Dar la pendiente de la tangente y dar la ecuación de ella.

89) Desde el punto (1,3) trazamos una tangente al círculo  $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$ . Dar las coordenadas del punto de tangencia. Dar la pendiente de la tangente y dar la ecuación de ella.

90) Para el círculo  $x^2 + y^2 = 25$ , dar la ecuación de las siguientes tangentes:

- a) La que tenga pendiente 1.
- b) La que tenga pendiente  $-3/4$ .
- c) La que sea paralela a  $2x - 3y + 1 = 0$ .
- d) La que sea perpendicular a  $-x - 2y + 3 = 0$ .
- e) La que forme un ángulo de  $15^\circ$  con  $x - y = 0$ .
- f) La que pase por (3,2).

91) Para el círculo  $x^2 + y^2 - 6y = 7$ , dar la ecuación de las siguientes tangentes:

- a) La que forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje X.
- b) La que forme un ángulo de  $45^\circ$  con  $x + y = 0$ .
- c) La que pase por el origen.
- d) La que pase por el punto de intersección de las rectas  
 $2x + y = 1$   
 $x - y = 2$ .

92) Dar la ecuación de la recta que pasa por el centro del círculo  
 $x^2 + 3y - 5x + y^2 = 0$

y que es tangente al círculo con centro en (-1,6) y radio 3.

93) Dé los puntos de intersección de la recta  $2x + 3y - 4 = 0$  con el círculo  
 $2x^2 - 7x + 2y^2 - 1 = 0$ .

94) Dé la longitud de la cuerda determinada por la recta  $x + y - 3 = 0$  en el círculo  $x^2 + y^2 = 25$ .

95) Dé la ecuación del círculo que tiene por extremos de un diámetro, las intersecciones con los ejes de la recta  $2x + 3y - 12 = 0$ .

96) Dé la ecuación del círculo inscrito en el triángulo cuyos vértices son (0,0), (5,0) y (0,5).

97) Dé la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de los círculos  $x^2 + y^2 = 16$  y  $x^2 + 8x + y^2 = 25$ .

98) Dé la ecuación de la recta que es tangente al círculo  $x^2 + y^2 = 36$  en el punto de abscisa 4.

Para cada problema, dé la familia de círculos que cumple la condición indicada: (Grafique algunos elementos de cada familia en forma aproximada).

99) Centro en el eje X, radio 3.

100) Centro en el eje Y, radio 2.

101) Centro en  $x = 3y$ , radio 4.

102) Centro en  $x + y - 3 = 0$ , radio 2.

103) Centro en  $x^2 + y^2 = 16$ , radio 1.

104) Centro en (2,3).

105) Centro en  $x^2 + y^2 = 25$ , radio 2.

106) Radio 6.

107) Pasan por (2,3) y (5,-3).

108) Pasan por (-6,-1) y por (-6,2).

109) Pasan por (1,1) y (-3,4).

110) Pasan por (3,2) y tangentes al eje X.

111) Pasan por (-1,4) y tangentes al eje Y.

112) Pasan por (3,-1) y tangentes a  $x = 3$ .

113) Pasan por (-2,5) y tangentes a  $y = -1$ .

114) Pasan por (4,3) y centro en  $y = -2x$ .

115) Pasan por (-1,5) y centro  $3y + y - x - 1 = 0$ .

116) La suma de las coordenadas del centro es igual al radio.

117) La suma de las coordenadas del centro es igual al radio, y radio 5.

118) Centro en (1,2) y radio menor de 4.

119) Centro en (3,-5) y radio mayor que 3, pero menor que 6.

120) Centro en (-5,2) y radio mayor que 12.

121) Centro en el primer cuadrante y pasa por el origen.

122) Centro en el eje X, y pasan por el origen.

123) Centro dentro del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  y radio menor que  $1/4$ .

124) Centro abajo de la línea  $y + 5 = 0$ , y radio 3.

125) Centro a la derecha de la línea  $x = 10$  y radio 3.

126) Centro comprendido entre las líneas  $x = -1$  y  $x = 4$  y radio menor que 1.

127) Centro a lo más distante dos unidades del eje X y radio menor que  $1/2$ .

128) Centro en la intersección de  $x^2 + y^2 = 36$  y  $y - x = 2$ .

129) La pendiente en el punto de abscisa -2 es  $1/2$  y el centro en  $y - 3x = 0$

130) La pendiente en el punto de abscisa 3, es -2 y el radio es 4.

131) La tangente en el punto de ordenada 3, es paralela a  $3x - 7y + 1 = 0$ ,  $r = 2$ .

132) La tangente en el punto de ordenada 3, es perpendicular a  $2x + y - 1 = 0$  y el centro en el eje Y.

Dé la ecuación de la familia de rectas que cumplen la condición

- 133) Pasan por el centro de  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 134) Pasan por el centro de  $x^2 + y^2 = 3x - y$ .
- 135) Pasa por el centro de  $2x^2 - x + 3y + 2y^2 - 1 = 0$ .
- 136) Son tangentes al círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
- 137) Son tangentes al círculo  $x^2 + y^2 = 16$ .
- 138) Son tangentes al círculo  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ .
- 139) Determinan cuerdas de longitud 2 en el círculo  $x^2 + y^2 = 2$ .
- 140) Pasan por la mas alta de las intersecciones de  $x^2 + y^2 = 4$  y el eje X.
- 141) Id., de  $x^2 + y^2 = 9$  y  $x + y = 0$ .
- 142) Id., de  $x^2 + y^2 = 16$  y  $3x - y = 0$
- 143) Id., de  $x^2 + 2x + y^2 = 3$  y  $x - y - 1 = 0$ .
- 144) Pasan por el punto máximo de  $3x^2 - x + 3y^2 + y - 2 = 0$ .
- 145) Pasan por el punto mínimo de  $5x^2 - 15x + 20y = -5y^2$ .

SECCION 2.7  
PROBLEMAS.

Analice cuales son las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría, hacia donde está abierta, y grafique cada una de las siguientes parábolas.

- |  |  |
|--|--|
| 1) $y + 3x^2 - 4x - 5 = 0$   | 2) $x - 3y + 5y^2 - 1 = 0$                       |
| 3) $(x+y)(x-y) = x^2 - 3y + x$                                       | 4) $y - x = x^2 - 3y + 7$                        |
| 5) $a - b^2 + b - 6 = 0$   | 6) $b - 2a^2 + 3a = 8$                           |
| 7) $5w - 3(w+h) - h^2 = 3$   | 8) $3z^2 - 5c - 3z + 1 = 0$                      |
| 9) $2p - 3q = p(3+p)$  | 10) $r(3r-s) + 3 = r(1-s)$                       |
| 11) $(d-1)(f-d) = fd - 3f + 4$                                       | 12) $(h-3k)(2h+k) = -3k^2 - 5hk + h$             |
| 13) $x - r = (r-x)(x-1) - rx$  | 14) $2y^2 - 3s + 4y - 7 = 0$                     |
| 15) $3a - 4z = (a-3)a$   | 16) $3m - 1 = 5n^2 - 3$                          |
| 17) $y - e = e - y + 4e^2 + 6$                                       | 18) $6f - q^2 + 3f + 2 - q = 0$                  |
| 19) $\frac{5}{3}y - \frac{4}{7}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0$ | 20) $\frac{3}{5}w + \frac{2}{3}d^2 + 5 = 0$      |
| 21) $3d - 2h^2 + h - 1 = 0$  | 22) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + y - \sqrt{5} = 0$ |
| 23) $5j^2 - \sqrt{2}n - 3j + 1 = 0$                                  | 24) $15t - 6t^2 + 9u - 12 = 0$                   |
| 25) $2v - 3b^2 - b + 6 = 0$  | 26) $3i - 2n + i^2 - 7 = 0$                      |
| 27) $3s^2 - 9m + 7 - s = 1$  | 28) $4d - 7d^2 - 4q - 6 = 0$                     |

Encontrar la ecuación de las parábolas que satisfacen las siguientes condiciones:

- 29) Vertical, vértice en (0,0), pasa por (3,1).
- 30) Horizontal, vértice en (1,-2), pasa por (2,4).
- 31) Horizontal, vértice en (3,-6), pasa por el origen.
- 32) Vertical, vértice en  $(-\sqrt{7}, \pi)$ , pasa por (3,1).
- 33) Vertical, vértice en (-3,-2), pasa por (2,4).
- 34) Horizontal, vértice en (8,1), pasa por (1,-1).
- 35) Vertical, vértice en (3,6), pasa por (-2,6).
- 36) Horizontal, vértice en  $(2/3, -1/4)$ , pasa por  $(-3/5, 1/7)$ .
- 37) horizontal, vértice en  $(-7/2, -1)$ , pasa por  $(7/4, -8/3)$ .
- 38) Vertical, vértice en  $(-5, a)$ , pasa por (3,4).
- 39) Eje en  $x = -3$ , pasa por el origen y (4,1).
- 40) Eje en  $y = 8$ , pasa por el origen y (2,3).
- 41) Eje en  $y = -7$ , pasa por (3,2) y (4,4).
- 42) Eje en  $x = 10$ , pasa por (-1,7) y (3,4).
- 43) Eje en  $x = -15/4$ , pasa por (0,1) y (3,2).
- 44) Eje en  $y = -1/3$ , pasa por (2,2) y (3,3).
- 45) Tangente en el vértice a la línea  $x = 4$ , pasa por (3,1) y (2,6).
- 46) Tangente en el vértice a  $y = -3$ , pasa por (2,4) y (8,6).
- 47) Vertical, vértice sobre  $y - x = 0$ , pasa por (1,0) y (5,0).
- 48) Horizontal, vértice sobre  $3x - y + 1 = 0$ , pasa por (0,0) y (6,0).
- 49) Vertical, vértice sobre  $x^2 + y^2 = 4$ , pasa por (3,0) y (-3,0).
- 50) Horizontal, vértice sobre  $x^2 + y^2 = 1$ , pasa por (0,1.5) y (0,-1).
- 51) Pasa por (-1,2), (1,-1), (2,1) y es vertical.
- 52) Pasa por (-1,2), (1,-1), (2,1) y es horizontal.

Encontrar la ecuación de las siguientes familias, y trazar la gráfica aproximada de varios de sus elementos:

- 53) Parábolas con vértice en (3,2).
- 54) Parábolas horizontales con vértice en (3,2).
- 55) Parábolas horizontales abiertas a la izquierda, con vértice en (3,2).
- 56) Parábolas verticales con punto máximo, y vértice en (3,2).
- 57) Parábolas verticales con vértice en  $y - 5x = 0$ .
- 58) Parábolas verticales con vértice en  $3y - x + 5 = 0$ .
- 59) Parábolas horizontales que pasan por (1,4) y (-3,2).
- 60) Parábolas horizontales que pasan por (-1,-3) y (2,3).
- 61) Parábolas verticales que pasan por (-3,0) y (2,0).

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALFONSO REYES"  
Aydo. Jesús MONTERREY, MEXICO

- 62) Parábolas verticales que pasan por (0,1) y (-3,0).
- 63) Parábolas verticales con punto mínimo, que pasan por (0,0) y (-5,0).
- 64) Parábolas verticales con punto máximo, que pasan por (3,2) y (5,2).
- 65) Parábolas verticales con punto mínimo, que pasan por (4,3) y (-1,3).
- 66) Parábolas verticales con vértice en  $3x - y = 0$ .
- 67) Parábolas verticales con punto mínimo y vértice en  $3x - y = 0$ .
- 68) Parábolas verticales con punto máximo y vértice en  $y - x^2 = 0$ .
- 69) Parábolas horizontales con vértice en  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 70) Parábolas horizontales abiertas a la izquierda y vértice en  $x^2 + y^2 = 9$ .
- 71) Parábolas horizontales, con vértice en  $x = y^2$ .
- 72) Parábolas verticales, con vértice en  $x = y^2 + 1$  y pasan por (-1,4).
- 73) Parábolas verticales.
- 74) Parábolas verticales con vértice en  $x^3 - y = 0$ .
- 75) Parábolas verticales con vértice en  $x^3 - y = 0$  y punto máximo.
- 76) Parábolas verticales con vértice en  $x^3 - y = 0$ , punto máximo y pasan por (-1,4).
- 77) Parábolas verticales con vértice en  $y - x^2 = 3$ , punto mínimo y pasan por (2,-5).
- 78) Círculos con centro en el vértice de  $y - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ .
- 79) Círculos con centro en las intersecciones de  $y - 2x^2 + 5x = 0$  con  $x - y = 0$ .
- 80) Rectas con pendiente igual a la de la recta que une el vértice de  $y = x^2 + 3x - 2$  con el centro de  $2x^2 - 4x + 2y^2 + 6y = 0$ .
- 81) Parábolas verticales con vértice en las intersecciones de  $x^2 + 5x + y^2 - 3y = 0$  con  $x - 2y + 1 = 0$ .
- 82) Parábolas que pasan por las intersecciones de  $x^2 + y^2 = 9$  con  $x - y^2 = 0$ .

En los siguientes problemas se dan ecuaciones de familias de curvas, indicando los parámetros. Decir que tipo de curvas denota la ecuación, y encontrar el elemento o elementos que cumplen la condición citada en cada caso:

- 83)  $y^2 - 4px = 0$ ;  $p$ ; pasa por (-2,4).
- 84)  $y - 4x^2 - 4ax + b = 0$ ;  $a, b$ ; vértice en  $x = 3y$ , pasa por (1,2).
- 85)  $y - 4x^2 - 4ax + b = 0$ ;  $a, b$ ; pasan por (3,4).
- 86)  $ax^2 + b^2y = 4$ ;  $a, b$ ; pasan por (2,5) y vértice en (2,3).
- 87)  $ax^2 + b^2y = 4$ ;  $x, y$ ; pasan por (2,5) y vértice en (2,3).
- 88)  $ax^2 + b^2y = 4$ ;  $x, b$ ; pasan por (3,-1).
- 89)  $ax^2 + b^2y = 4$ ;  $a, y$ ; pasan por (2,1) y (0,4).
- 90)  $ax^2 + b^2y = 4$ ;  $a, x, b$ ;

PROBLEMAS  
SECCION 2.8

Analice cuales son: a) coordenadas del centro, b) coordenadas de los focos, c) ecuaciones de los ejes, d) longitud de los radios mayor y menor, e) distancia del centro a un foco,

y grafique cada una de las siguientes elipses:

- 1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 2)  $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
- 3)  $\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{6} = 1$
- 4)  $\frac{(w+3)^2}{15} + \frac{(z-2)^2}{10} = 1$
- 5)  $\frac{2(x^2 - 6x + 9)}{8} + \frac{4(y^2 - 2y + 1)}{8} = \frac{8}{8}$
- 6)  $3(x^2 + 4x + 2) + 2(y^2 + 8y + 16) = 12$
- 7)  $2(x^2 - 6x) + 3(y^2 - 2y) = 2$
- 8)  $x^2 + 2y^2 - 8y + 1 = 0$
- 9)  $3p^2 - 6p + q^2 = 3$
- 10)  $a^2 - 4a + 3b^2 + 5b = 0$
- 11)  $2x^2 + 10x + 3y + y^2 - 5 = 0$
- 12)  $g^2 + 5h^2 - 2h + 3g - 5 = 0$
- 13)  $\frac{c^2}{2} + \frac{c}{3} + d^2 + 4 - 2d = 1$
- 14)  $\frac{3f^2}{5} + \frac{2f}{3} - \frac{4k}{3} + \frac{k^2}{15} - 3 = 0$
- 15)  $(3g + 2k)(g + k) = 5kg - 8y + 9k$
- 16)  $(r - 2s)(3r - s) + 7rs = 3$
- 17)  $\sqrt{7}t^2 - t + \sqrt{10}u^2 - 3u + 1 = 0$
- 18)  $y^2 - 3a = 5y - 2a^2 + 4$
- 19)  $\frac{w^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$
- 20)  $\frac{w^2}{-16} + \frac{x^2}{25} = 1$

Para cada uno de los siguientes problemas, trazar la gráfica aproximada y dar la ecuación de la elipse que cumple la condición indicada

( $r_v$  = radio vertical;  $r_h$  = radio horizontal;  $c$  = dist. centro a foco):

- 21) Centro en el origen,  $r_v = 4$ ,  $r_h = 3$ .
- 22) Centro en el origen,  $r_v = 1$ ,  $r_h = 3$ .
- 23) Centro en (-2,3),  $r_v = 4$ ,  $r_h = 10$ .
- 24) Centro en (-3,-1),  $r_v = 2$ ,  $r_h = 3$ .
- 25) Centro en (4,5),  $r_v = 4$ ,  $c = 3$ , y es vertical.
- 26) Centro en (-1,6),  $r_h = 8$ ,  $c = 2$ , y es horizontal.
- 27) Centro en (3,2),  $r_v = 3$ , pasa por (4,1).
- 28) Centro en (1/2, 4/3),  $r_h = 2$ , pasa por (2, 1/2).
- 29) Centro en (1,2),  $c = 3$ ,  $r_h = 1$ .
- 30) Centro en (-1,2),  $c = 4$ ,  $r_v = 2$ .
- 31) Centro en (3,3),  $c = 3$ ,  $r_h = 5$ , y es horizontal.
- 32) Centro en (-3,2),  $c = 5$ ,  $r_v = 6$ , y es horizontal.

- 33)  $r_h = 2$  ,  $r_v = 1$  , y pasa por (0,0) y (0,-2) .
- 34)  $r_h = 6$  ,  $r_v = 4$  , y pasa por (0,0) y (0,-2) .
- 35)  $r_h = 6$  ,  $r_v = 4$  , y pasa por (0,0) y (-2,0) .
- 36) Focos en (2,4) y (2,-2) ,  $r_h = 2$  .
- 37) Focos en (3,-6) y (5,-6) ,  $r_v = 1$  .
- 38) Focos en (3,-3) y (-1,-3) ,  $r_v = 3/2$  .
- 39) Focos en (6,-1) y (6,-9) ,  $r_h = 4$  .
- 40) Focos en (1,3) y (1,3) ,  $r_h = 3$  .
- 41) Centro en  $y=x$  ,  $c=2$  , y pasa por (0,3) y (0,1) .
- 42) Centro en  $y-x^2=0$  ,  $c=1$  , y pasa por (-1,0) y (3,0) .
- 43) Focos en la línea  $x=2$  separados 4 unidades ,  $r_h = 1$  .
- 44) Puntos máximo y mínimo en  $(0, \pm 6)$  , y focos en  $(0, \pm 4)$  .
- 45) Los puntos mas a la izquierda y a la derecha son  $(\pm 5, 0)$  , focos  $(\pm 1, 0)$  .
- 46) Centro en el origen, un foco en  $(-4, 0)$  ,  $r_v = 2$  .
- 47) Centro en (2,2), un foco en (7,2) ,  $r_v = 3$  .
- 48) Centro en (-1,3), un foco en (-1,-3) ,  $r_h = 4$  .
- 49) Los focos en  $(1, \pm 3)$  , el eje mayor mide 12.
- 50) Los focos en  $(\pm 4, 6)$  , el eje menor mide 5 .

Para cada problema, encontrar la ecuación de las familias de curvas que satisfacen la condición dada, y trazar la gráfica aproximada de algunos de sus elementos:

- 51) Elipses con centro en el origen.
- 52) Elipses verticales con centro en el origen.
- 53) Elipses con  $r_h = 3$  , y  $r_v = 2$  .
- 54) Elipses con centro en  $y-2x=0$  , tangentes a  $x=2$  y  $x=8$  .
- 55) Elipses con centro en  $y^2-x=0$  , tangentes a  $y=2$  y  $y=-2$  .
- 56) Elipses con focos en  $x=3$  y  $r_h = 2$  .
- 57) Elipses con focos en  $y=-1$  y  $r_v = 3$  .
- 58) Elipses con centro en  $x^2+y^2=1$  , y con el eje mayor doble del menor.
- 59) Elipses verticales con un foco en  $x-2y=0$  ,  $c=1$  ,  $r_h = 1$  .
- 60) Elipses horizontales con un foco en  $x^2-y=0$  ,  $c=2$  ,  $r_v = 2$  .
- 61) Elipses verticales con punto máximo en  $y=10$  , punto mínimo en  $y=3$  .
- 62) Elipses cuyos puntos máximo y mínimo, coinciden con los de  $x^2+y^2=25$  .
- 63) Elipses con  $r_h = 1$  ,  $r_v = 3$  y centro en  $2x-5y+1=0$  .
- 64) Elipses con centro en el origen, contenidas dentro de  $x^2+y^2=36$  .
- 65) Elipses con centro en el origen que contienen a  $x^2+y^2=1$  .
- 66) Elipses con foco en las intersecciones de  $x^2+y^2=4$  con  $y=1$  .

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de cada par de ecuaciones:

- |   |  |
|---|--|
| 67) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$<br>$x^2 + y^2 = 2.25$ | 68) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$<br>$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ |
| 69) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$<br>$y - x^2 = 0$      | 70) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$<br>$x - 2y^2 = 0$                  |

Encontrar los puntos de intersección de la elipse  $x^2 + 3y^2 - 6x = 0$  con cada una de las siguientes curvas:

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| 71) $x - 2y = 0$           | 72) $x - y + 20 = 0$      |
| 73) $x^2 + y^2 = 1$        | 74) $y - 3x^2 = 0$        |
| 75) $x^2 + y^2 = 100$      | 76) $y - 10 = x^2$        |
| 77) $3x^2 + y^2 - 18x = 0$ | 78) $x^2 + 2y^2 - 40 = 0$ |

Dada la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  y la familia de rectas  $ax - y + 3 = 0$  , encontrar

- 79) Los puntos de intersección.
- 80) El elemento de la familia que interseca a la elipse en el punto de abscisa 0.
- 81) El elemento de la familia que interseca a la elipse en el punto de ordenada 1/2.
- 82) El elemento de la familia que es tangente a la elipse.  
(Sugestión: para que sea tangente, las dos intersecciones de la recta y la elipse deben coincidir).
- 83) Encuentre las coordenadas de los focos de la elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  .  
Encuentre también un punto de la elipse con abscisa 2 , y otro punto con ordenada 1. Calcule las distancias de tales puntos a los focos, y compruebe que para ellos, la suma de sus distancias a los focos no cambia, y es igual al eje mayor.
- 84) De la familia de elipses  $x^2 + ax + 2y^2 - b = 0$  , determinar aquella que pasa por el origen y por (1,1).
- 85) De la familia de elipses  $x^2 - bx - dy + 3y^2 = 0$  , encontrar aquella que es tangente a la línea  $y = 2x$ .
- 86) De la familia del problema anterior, determinar aquella elipse que tiene su centro en  $y - 3x = 0$  y que pasa por el origen.
- 87) De la misma familia determinar aquella elipse que tiene su centro en el punto de intersección de  $y - x^3 - x = 0$  , con el eje X .

SECCION 2.9

PROBLEMAS.

- Analice cuales son:
- las coordenadas del centro,
  - las coordenadas de los focos,
  - las coordenadas de los vértices,
  - ecuaciones de los ejes de simetría
  - ecuaciones de las asíntotas,

y grafique cada una de las siguientes hipérbolas :

- $\frac{w^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$
- $\frac{(w-1)^2}{25} - \frac{(z+2)^2}{16} = 1$
- $\frac{w^2}{5} - \frac{a^2}{6} = 1$
- $\frac{(w+3)^2}{15} - \frac{(b-2)^2}{10} = 1$
- $\frac{2(x^2 - 6x + 9)}{8} - \frac{4(y^2 - 2y + 1)}{8} = \frac{8}{8}$
- $3(x^2 + 4x + 4) - 2(y^2 + 8y + 16) = 12$
- $2(p^2 - 6p) - 3(q^2 + 4q) = 2$
- $a^2 - 2b^2 + b - 1 = 0$
- $3g^2 - 6g - h^2 = 3$
- $k^2 - 4k - 3m^2 - 5m = 0$
- $2u^2 + 10u - 3v - v^2 + 5 = 0$
- $-s^2 + 5t^2 - 2t - 3s + 5 = 0$
- $-mn - 8m + 9n = (3m + 2n)(m - n)$
- $(g - 2s)(3g + s) + 5gs = 0$
- $\frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} - z^2 + 1 + 2z = 1$
- $\frac{5x^2}{3} + \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} - \frac{y^2}{15} + 1 = 0$
- $3w^2 - 6w + 2y - 5y^2 + 3 = 0$
- $2a - 6b + 3b^2 - 5a^2 - 3 = 0$
- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$
- $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = -1$

En cada uno de los siguientes problemas, trazar la gráfica aproximada, y dar la ecuación de la hipérbola que cumple la condición indicada ( m = pendiente de asíntota ) :

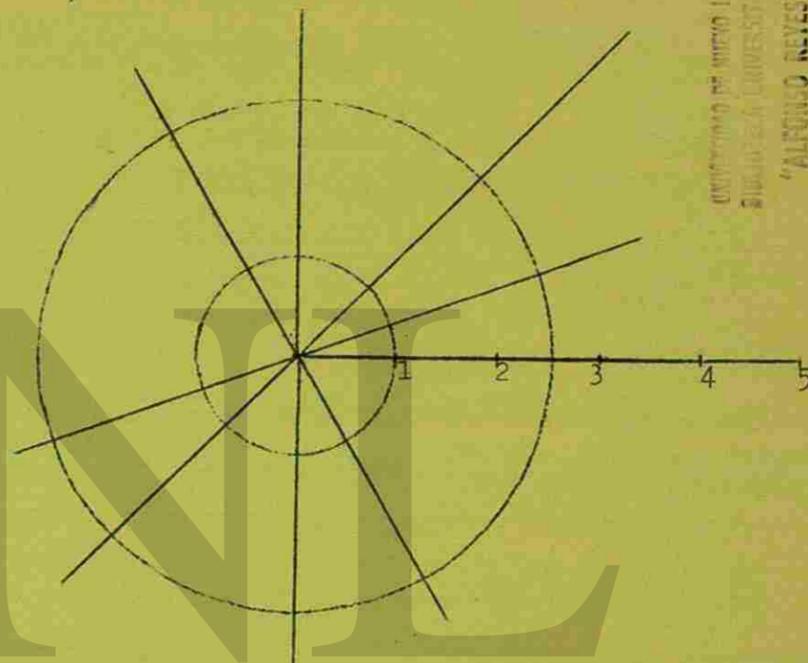
- Centro en el origen, vértices en  $(\pm 3, 0)$ ,  $m = \pm 1$ .
- Centro en el origen, vértices en  $(0, \pm 2)$ ,  $m = \pm 2$ .
- Centro en  $(-1, 4)$ , vértices en  $(-1, 6)$  y  $(-1, 2)$ ,  $m = \pm(1/3)$
- Centro en  $(2, -5)$ , vértices en  $(2 \pm \sqrt{3}, -5)$ ,  $m = \pm \sqrt{3}$ .
- Centro en  $(\pi, \sqrt{3})$ , vértices en  $(\pi, \sqrt{3} \pm \sqrt{5})$ ,  $m = \pm \sqrt{7}$ .
- Centro en  $(4, -\pi)$ , vértices a 3 unidades del centro, horizontalmente, la pendiente de las asíntotas es  $-2$  y  $2$ .
- Las asíntotas son  $y = \pm 3x + 6$ , la distancia entre los vértices es 4, y es vertical.
- Las asíntotas son  $2y \pm 4x - 5 = 0$ , la distancia entre los vértices es 6, y es horizontal.
- Centro en  $(2, 5)$ , pasa por  $(2, -1)$  y por  $(7, 5)$ .
- Centro en  $(-1, -6)$ , pasa por  $(2, -3)$  y por el origen.

PROBLEMAS

SECCION 2.10

- Si la carátula de un reloj de diámetro 6, se coloca con el centro en el polo de un plano, y con el número 3 del reloj sobre el eje polar, dar las coordenadas polares de los 12 números del reloj (grados y radianes).
- Una escala real se coloca con el cero sobre el polo, y a un ángulo de  $-30^\circ$  de ella al eje polar. Dar coordenadas polares de los puntos enteros de la escala real. (Grados y radianes).

3) Dar las coordenadas polares de los puntos de intersección de las rectas y círculos que aparecen en la gráfica de la derecha :



- Para cada uno de los siguientes puntos, dar cuatro coordenadas polares más con radio positivo, y cuatro con radio negativo, además de graficarlos :
 

a) $(2, -15^\circ)$	b) $(-3, 10^\circ)$	c) $(4, 30^\circ)$	d) $(-1, -80^\circ)$
e) $(3, 30^\circ)$	f) $(-3, 30^\circ)$	g) $(3, -30^\circ)$	h) $(-3, -30^\circ)$
i) $(6, \frac{\pi}{3})$	j) $(4, 1)$	k) $(\frac{8}{3}, \frac{1}{2})$	m) $(\pi, -\pi)$
n) $(2, 9569^\circ)$	ñ) $(4, \frac{89\pi}{3})$	p) $(-2, -\frac{576\pi}{5})$	q) $(-3, -1111^\circ)$
- Cambiar las siguientes coordenadas cartesianas a polares :
 

a) $(1, 0)$	b) $(0, 1)$	c) $(-1, 0)$	d) $(0, -1)$
e) $(1, \sqrt{3})$	f) $(1, -\sqrt{3})$	g) $(-1, \sqrt{3})$	h) $(-1, -\sqrt{3})$
i) $(0.866, -0.5)$	j) $(-0.866, 0.5)$	k) $(-0.866, -0.5)$	m) $(0.866, 0.5)$
n) $(1, 1)$	ñ) $(-1, 1)$	p) $(1, -1)$	q) $(-1, -1)$
r) $(1, 2)$	s) $(-0.6, \sqrt{2})$	t) $(\frac{1}{3}, -\pi)$	u) $(-\frac{4}{5}, -2\pi)$
v) $(-3, 4)$	w) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{7})$	x) $(2\sqrt{5}, -3)$	y) $(0, 0)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA GENERAL DE BIBLIOTECAS  
 "ALFONSO REYES"  
 Apdo. 1625 MONTERREY, NUEVO LEÓN

- 6) Cambiar las siguientes coordenadas polares a cartesianas:
- |                          |                                |                          |                            |
|--------------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $(3, \pi)$            | b) $(3, -\pi)$                 | c) $(-3, \pi)$           | d) $(-3, -\pi)$            |
| e) $(1, -\frac{\pi}{3})$ | f) $(1, \frac{\pi}{3})$        | g) $(-1, \frac{\pi}{3})$ | h) $(-1, -\frac{\pi}{3})$  |
| i) $(2, 2)$              | j) $(-3, 1)$                   | k) $(-1, 0.7)$           | m) $(-2, -0.5)$            |
| n) $(-2, \sqrt{2})$      | ñ) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ | p) $(\pi, \pi)$          | q) $(-\pi, \frac{\pi}{4})$ |
| r) $(1.66, 35^\circ)$    | s) $(-1.5, -185^\circ)$        | t) $(-10, 53)$           | u) $(2, 812)$              |

PROBLEMAS  
SECCION 2.11

A.- Grafique las siguientes ecuaciones en coordenadas polares:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1) $\rho = 2 \cos \theta$              | 2) $\rho = 0.5 \operatorname{sen} \theta$ | 3) $\rho = -\cos \theta$                |
| 4) $\rho = \frac{1}{1 - \cos \theta}$  | 5) $\rho = \frac{2}{2 - \cos \theta}$     | 6) $\rho = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$ |
| 7) $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$ | 8) $\rho = 2 \cos 3\theta$                | 9) $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$  |
| 10) $\rho = 3(1 - \cos \theta)$        | 11) $\rho \theta = 1$                     | 12) $\rho = \theta$                     |
| 13) $w = 2k - 1$ ; $k$ ángulo.         | 14) $h^2 = f + 2$ ; $f$ ángulo.           |   |

B.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas cartesianas. Transformar a coordenadas polares, y esbozar su gráfica:

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1) $(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ | 4) $a^2 = 4b + 4$       |
| 2) $(w^2 + h^2)^2 = w^2 + h^2$               | 5) $m^2 + k^2 - 2k = 0$ |
| 3) $\sqrt{3}x + y = 2$                       |                         |

C.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas polares, transformarlas a coordenadas cartesianas, y esbozar su gráfica:

- |   |   |  |                              |
|---|---|--|------------------------------|
| 1) $\rho = 6 \operatorname{sen} \theta$ | 2) $\rho = 2 \cos \theta$                 | 3) $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$ | 4) $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ |
| 5) $\rho = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$ | 6) $\rho = 1 + \operatorname{sen} \theta$ |  |                              |

PROBLEMAS  
SECCION 2.12

Graficar la siguientes ecuaciones paramétricas ( $\lambda$  es el parámetro):

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1) $x = 2 \cos \lambda$<br>$y = 2 \operatorname{sen} \lambda$  | 2) $m = 3 \cos \lambda$<br>$g = \operatorname{sen} \lambda$             | 3) $h = 2 \cos \lambda$<br>$u = 4 \operatorname{sen} \lambda$ |
| 4) $x = -6 \operatorname{sen} \lambda$<br>$r = 2 \cos \lambda$ | 5) $x = 4\lambda^{-2}$<br>$k = 4\lambda^{-1}$                           | 6) $a = \cos^3 \lambda$<br>$b = \operatorname{sen}^3 \lambda$ |
| 7) $w = \lambda$<br>$y = (1 + \lambda^2)^{-1}$                 | 8) $p = \lambda - \operatorname{sen} \lambda$<br>$r = 1 - \cos \lambda$ | 9) $s = \lambda - 1$<br>$t = \lambda^3$                       |

3.1 Funciones.

Ya sabemos como formar parejas de números a partir de una ecuación en dos letras. Ahora veremos a estas parejas desde un nuevo punto de vista, para formar el concepto de función.

Podemos considerar que una pareja como  $(3, -2)$ , al número 3 le asigna el número -2, y bajo esta consideración escribimos el par en la forma  $3 \rightarrow -2$  (léase: a 3 le asigna -2).

Si tenemos un conjunto de parejas, como el de las soluciones de  $a = b^2 - 1$ , el conjunto nos da una regla para que a cada número le asignemos otro número, pues usando los pares: a cada primer número del par, le asignamos el segundo. Por ejemplo:

- |                    |           |                   |
|--------------------|-----------|-------------------|
| $3 \rightarrow 8$  | $(3, 8)$  |                   |
| $-1 \rightarrow 0$ | $(-1, 0)$ | ya que            |
| $-2 \rightarrow 3$ | $(-2, 3)$ | son soluciones de |
| etc.               | etc.      | $a = b^2 - 1$ .   |

Entonces llamamos función a: la regla que a cada número le asigna otro número. La función queda constituida por el conjunto de pares que dicen la manera de asignar, y que escribimos en la forma  $b \rightarrow a$ .

Así, la regla que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, es una función. Esta función a cada número asigna otro, de la siguiente manera:

- |                              |
|------------------------------|
| $0 \rightarrow 0^2 - 1 = -1$ |
| $1 \rightarrow 1^2 - 1 = 0$  |
| $2 \rightarrow 2^2 - 1 = 3$  |
| $3 \rightarrow 3^2 - 1 = 8$  |
| etc.                         |

es decir, que la función está formada por los pares:

$0 \rightarrow -1$	
$1 \rightarrow 0$	
$2 \rightarrow 3$	
$3 \rightarrow 8$	etc.

6) Cambiar las siguientes coordenadas polares a cartesianas :

- a)  $(3, \pi)$
- b)  $(3, -\pi)$
- c)  $(-3, \pi)$
- d)  $(-3, -\pi)$
- e)  $(1, -\frac{\pi}{3})$
- f)  $(1, \frac{\pi}{3})$
- g)  $(-1, \frac{\pi}{3})$
- h)  $(-1, -\frac{\pi}{3})$
- i)  $(2, 2)$
- j)  $(-3, 1)$
- k)  $(-1, 0.7)$
- m)  $(-2, -0.5)$
- n)  $(-2, \sqrt{2})$
- ñ)  $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$
- p)  $(\pi, \pi)$
- q)  $(-\pi, \frac{\pi}{4})$
- r)  $(1.66, 35^\circ)$
- s)  $(-1.5, -185^\circ)$
- t)  $(-10, 53)$
- u)  $(2, 812)$

PROBLEMAS  
SECCION 2.11

A.- Grafique las siguientes ecuaciones en coordenadas polares :

- 1)  $\rho = 2 \cos \theta$
- 2)  $\rho = 0.5 \sin \theta$
- 3)  $\rho = -\cos \theta$
- 4)  $\rho = \frac{1}{1 - \cos \theta}$
- 5)  $\rho = \frac{2}{2 - \cos \theta}$
- 6)  $\rho = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$
- 7)  $\rho = \sin 2\theta$
- 8)  $\rho = 2 \cos 3\theta$
- 9)  $\rho = \sin 3\theta$
- 10)  $\rho = 3(1 - \cos \theta)$
- 11)  $\rho \theta = 1$
- 12)  $\rho = \theta$
- 13)  $w = 2k - 1$ ;  $k$  ángulo.
- 14)  $h^2 = f + 2$ ;  $f$  ángulo.

B.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas cartesianas. Transformar a coordenadas polares, y esbozar su gráfica :

- 1)  $(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$
- 2)  $(w^2 + h^2)^2 = w^2 + h^2$
- 3)  $\sqrt{3}x + y = 2$
- 4)  $a^2 = 4b + 4$
- 5)  $m^2 + k^2 - 2k = 0$ .

C.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas polares, transformarlas a coordenadas cartesianas, y esbozar su gráfica :

- 1)  $\rho = 6 \sin \theta$
- 2)  $\rho = 2 \cos \theta$
- 3)  $\rho = \sin 2\theta$
- 4)  $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$
- 5)  $\rho = \frac{1}{1 - 2 \cos \theta}$
- 6)  $\rho = 1 + \sin \theta$ .

PROBLEMAS  
SECCION 2.12

Graficar la siguientes ecuaciones paramétricas ( $\lambda$  es el parámetro) :

- 1)  $x = 2 \cos \lambda$   
 $y = 2 \sin \lambda$
- 2)  $m = 3 \cos \lambda$   
 $g = \sin \lambda$
- 3)  $h = 2 \cos \lambda$   
 $u = 4 \sin \lambda$
- 4)  $x = -6 \sin \lambda$   
 $r = 2 \cos \lambda$
- 5)  $x = 4\lambda^{-2}$   
 $k = 4\lambda^{-1}$
- 6)  $a = \cos^3 \lambda$   
 $b = \sin^3 \lambda$
- 7)  $w = \lambda$   
 $y = (1 + \lambda^2)^{-1}$
- 8)  $p = \lambda - \sin \lambda$   
 $r = 1 - \cos \lambda$
- 9)  $s = \lambda - 1$   
 $t = \lambda^3$

3.1 Funciones.

Ya sabemos como formar parejas de números a partir de una ecuación en dos letras. Ahora veremos a estas parejas desde un nuevo punto de vista, para formar el concepto de función.

Podemos considerar que una pareja como  $(3, -2)$ , al número 3 le asigna el número -2, y bajo esta consideración escribimos el par en la forma  $3 \rightarrow -2$  (léase: a 3 le asigna -2).

Si tenemos un conjunto de parejas, como el de las soluciones de  $a = b^2 - 1$ , el conjunto nos dá una regla para que a cada número le asignemos otro número, pues usando los pares: a cada primer número del par, le asignamos el segundo. Por ejemplo:

- |                    |           |  |
|--------------------|-----------|--|
| $3 \rightarrow 8$  | $(3, 8)$  |  |
| $-1 \rightarrow 0$ | $(-1, 0)$ | ya que $(-1, 0)$ son soluciones de $a = b^2 - 1$ . |
| $-2 \rightarrow 3$ | $(-2, 3)$ |  |
| etc.               | etc.      |  |

Entonces llamamos función a: la regla que a cada número le asigna otro número. La función queda constituida por el conjunto de pares que dicen la manera de asignar, y que escribimos en la forma  $b \rightarrow a$ .

Así, la regla que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, es una función. Esta función a cada número asigna otro, de la siguiente manera:

- $0 \rightarrow 0^2 - 1 = -1$
- $1 \rightarrow 1^2 - 1 = 0$
- $2 \rightarrow 2^2 - 1 = 3$
- $3 \rightarrow 3^2 - 1 = 8$
- etc.

es decir, que la función está formada por los pares:

- $0 \rightarrow -1$
- $1 \rightarrow 0$
- $2 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 8$  etc.

Las funciones no sólo pueden ser con números. Por ejemplo, la regla que a cada país le asigna su capital, es también una función. Algunos de sus pares son:

México → México  
 Francia → París  
 Cuba → La Habana  
 Uruguay → Montevideo  
 etc.

Ejerc. 1.- Dé otras cinco funciones, escribiendo para cada una, 6 de sus pares.

Las funciones nacen de una manera natural al considerar relaciones entre cantidades físicas. Es por esto que su estudio es básico para la Física y la Ingeniería. Todas las relaciones se expresan con el concepto de función, y a continuación damos dos ejemplos de ello:

1) Al considerar la relación entre la hora del día y la temperatura ambiente, tenemos que para cada hora, el termómetro marca cierta temperatura. Entonces podemos formar la función que a cada hora le asigna la temperatura ambiente de esa hora.

Ejerc. 2.- Dar tres parejas de la función anterior.

2) Al considerar la relación entre presión y volumen de un gas, a cada presión le corresponde cierto volumen. Entonces formamos la función que a cada presión le asigna el volumen correspondiente.

Ejerc. 3.- Dar tres parejas de la función anterior.

Hay que fijarse que en la relación descrita, no nos interesa solo una presión y su correspondiente volumen, sino todas las presiones con sus correspondientes volúmenes. Igualmente hay que fijarse que la función no consta de un solo par, sino de todo un conjunto de pares.

Ahora introducimos la necesaria notación y nomenclatura para poder referirnos a las funciones. Dada una función, como la que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, al primer número de un par lo llamamos valor y lo denotamos genéricamente con una letra, como z. Luego en este caso, z denota cualquier número real. Al segundo número de un par, lo llamamos contravalor. Para encontrar el contravalor correspondiente al valor z, notamos que hay que elevarlo al cuadrado y restarle uno. Luego el contravalor es  $z^2 - 1$  y tenemos que la función a:  $z \rightarrow z^2 - 1$ .

Llamamos a  $z^2 - 1$  variable dependiente. Variable porque su valor cambia, y dependiente porque su valor depende del valor que se le dé a z.

El par con flecha:  $z \rightarrow z^2 - 1$  determina la función, pues todos los pares de la función se pueden obtener por sustitución de z, como se muestra en la fig. 3.1:

	valores →	contravalores		
Función que a cada	$z \rightarrow z^2 - 1$			
número le asigna -	$0 \rightarrow -1$	variable	variable	
su cuadrado menos-	$1 \rightarrow 0$	independiente	dependiente	
uno. Denotada por:	$2 \rightarrow 3$	<u>z</u>	$z^2 - 1$	
$z \rightarrow z^2 - 1$	$3 \rightarrow 8$			
	etc.			

Fig. 3.1.- Nomenclatura de Funciones.

Para la función que a cada país le asigna su capital, sus valores son países, sus contravalores son capitales. Usando "país" como variable independiente, la función queda denotada por la pareja:

país → capital del país.

Ejerc. 4.- Denote a las siguientes funciones por pares con flecha, diciendo -- cual es la variable independiente y cual es la variable dependiente

- a) A cada número le asigna el doble de ese número.
- b) A cada número le asigna el cubo de ese número entre 3.
- c) A cada número le asigna el recíproco de ese número.
- d) A cada número le asigna el logaritmo de ese número.
- e) A cada número le asigna el número 2.
- f) A cada número le asigna el mismo número.

Ya denotamos las funciones por pares con flecha, ahora veremos otras dos notaciones mas cortas y manipulativas que son las que siempre se usan.

A) En el par  $x \rightarrow x^2 - 1$ , si suprimimos x y la flecha, nos queda  $x^2 - 1$ . Esta expresión algebraica basta para determinar la función de que se trata, pues para cada valor de x nos dá su contravalor  $x^2 - 1$ . Luego, usamos la expresión  $x^2 - 1$  para denotar la función  $x \rightarrow x^2 - 1$ . En general, cualquier expresión algebraica, como  $\frac{z+1}{z}$ , puede conside

rarse que denota una función: la que a  $z \rightarrow \frac{z+1}{z}$ . Para indicar nuestra intención de considerarla como función, decimos que  $z$  es la variable independiente. Naturalmente  $\frac{z+1}{z}$  queda como la variable dependiente.

B) Si denotamos el contravalor  $x^2-1$  con una sola letra como  $y$ , entonces escribimos la ecuación  $y = x^2-1$ . Con esta ecuación también podemos determinar la función  $x^2-1$ , pues los pares de soluciones  $(x,y)$  de la ecuación, son las parejas  $x \rightarrow y$  de la función. En general, cualquier ecuación, como  $w = \frac{z+1}{z}$ , determina una función: la que a  $z \rightarrow \frac{z+1}{z}$ . Para indicar nuestra intención, decimos que  $z$  es la variable independiente, y que  $w$  es la variable dependiente.

Ejerc. 5.- Dada una función en una forma, ponerla en las otras dos:

- |                  |                                      |
|------------------|--------------------------------------|
| a) $x^3 - 3$     | b) $z \rightarrow \frac{z^2 + 4}{2}$ |
| c) $y = m - 4$   | d) $a = \frac{1}{b-1}$               |
| e) $\frac{1}{x}$ | f) $\text{sen } k$                   |

Para referirnos a las funciones en general, usamos las siguientes notaciones. Usando la  $z$  como variable independiente y la  $w$  como dependiente, denotamos funciones genéricamente con:  $z \rightarrow w$ .

Naturalmente, si nos dan un valor de  $z$  como  $5$ , del símbolo  $z \rightarrow w$  no podemos obtener el contravalor correspondiente, ya que no dice nada específico acerca de la función, excepto que  $z$  es la variable independiente, y  $w$  es la variable dependiente.

Introducimos el símbolo  $w(z)$  para indicar que  $w$  depende de  $z$ , pues la letra  $w$  por sí sola no lo sugiere.

$w(z)$  no denota el producto de  $w$  por  $z$ . La idea de encerrar  $z$  en un paréntesis y ponerlo pegado a  $w$ , es sugerir que  $w$  representa una expresión en que ocurre  $z$ .  $w(z)$  denota esa expresión o contravalor en la que ocurre  $z$ , y como ya es costumbre, también denota a la función.

Entonces, las notaciones para la función genérica son:

- 1)  $z \rightarrow w$
  - 2)  $w(z)$
  - 3)  $w = w(z)$
  - 4)  $w$
- Las tres primeras notaciones indican que  $z$  es la variable independiente, y  $w$  la variable dependiente.
- La 4a. notación indica que  $w$  es variable dependiente.

Si sustituimos la  $z$  que ocurre en  $w(z)$  por valores como  $-1, 0, \pi, a+b$ , obtenemos  $w(-1), w(0), w(\pi), w(a+b)$ , que denotan respectivamente los contravalores correspondientes a  $-1, 0, \pi, a+b$ . La  $w$  que ocurre en  $w(z)$  no se puede sustituir por contravalores, sólo está para indicar cual es la variable dependiente. Pero si de antemano ya sabemos cual es la variable dependiente, hay la costumbre de usar otra letra como  $f, g, h$ , etc. Así, escribimos  $w = f(z)$  (léase:  $w$  igual a una función de  $z$ ), pues ya sabemos que  $w$  es la variable dependiente por su posición como letra a la izquierda del igual.

Ejerc. 6.- Si  $a(b) = b^3 - 4b + 1$ , entonces  $a(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 1$ .  
Obtener  $a(0), a(2.5), a(-3), a(\sqrt[3]{5}), a(b^2)$ .

### 3.2 Gráfica de Funciones.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, para graficar cualquier función, como  $s = s(t)$ , asociamos la variable independiente  $t$  con las abscisas y la dependiente  $s$  con las ordenadas (por costumbre, siempre se asocia la variable independiente con las abscisas). La gráfica de la función es la gráfica de la ecuación  $s = s(t)$ , es decir, es el conjunto de puntos  $(t,s)$  que son soluciones de la ecuación. Por ejemplo, la gráfica de la función  $s(t) = 2t + 6$ , es la gráfica de una ecuación lineal, donde  $t$  es la abscisa y  $s$  es la ordenada. Para graficarla, como ya sabemos, basta trazar dos puntos de la recta y unirlos.

Ejerc. 1.- Los puntos  $(3,4), (-1,0), (0,-6)$  ¿son puntos de  $s(t) = 2t + 6$ ?

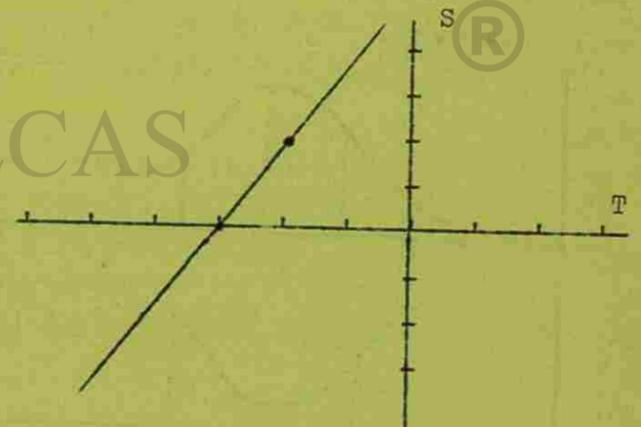


Fig. 3.1.- Gráfica de  $s(t) = 2t + 6$ .

En la sección 2.5 definimos varias propiedades de las curvas, por ejemplo, creciente, decreciente, máximos, asíntotas, etc.. Ahora definimos analíticamente estas propiedades para las funciones, correspondiendo en su gráfica a las definiciones ya dadas.

Dada una función cualquiera:

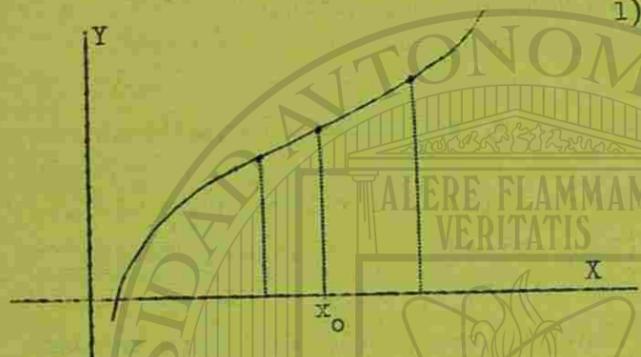


Fig. 3.2.-Curva creciente para  $x=x_0$ .



Fig. 3.3.-Curva decreciente para  $x=x_0$ .

Por ejemplo, la función  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  es creciente para  $x=3$  pues si disminuimos  $x$  a 2.9, tenemos  $y(2.9) < y(3)$ , y si aumentamos  $x$  a 3.1, tenemos que  $y(3.1) > y(3)$ . (Compruébelo; calcule  $y(2.8)$ ,  $y(0)$ ,  $y(4)$ , y compárelo con  $y(3)$ ).

En el caso de que la función sea creciente para todos los puntos del intervalo  $a < x < b$ , decimos que la función crece monótonamente en el intervalo  $a < x < b$ .

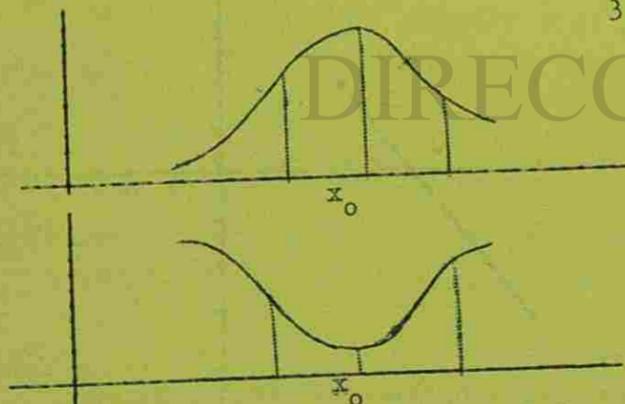


Fig. 3.4.-Máximo y mínimo en  $x=x_0$ .

1) Decimos que la función  $y(x)$  es creciente para  $x=x_0$  cuando para cualquier valor  $x$  suficientemente cerca de  $x_0$  tenemos  
 $y(x) < y(x_0)$  para  $x < x_0$   
 $y(x) > y(x_0)$  para  $x > x_0$   
 es decir, cuando aumentamos  $x_0$ , aumenta  $y(x)$ , y cuando disminuimos  $x_0$ , disminuye  $y(x)$ .

2) Decimos que la función  $y(x)$  es decreciente para  $x=x_0$  cuando para cualquier valor  $x$  suficientemente cerca de  $x_0$  tenemos  
 $y(x) > y(x_0)$  para  $x < x_0$   
 $y(x) < y(x_0)$  para  $x > x_0$

Por ejemplo, la función  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

es creciente para  $x=3$  pues si disminuimos  $x$  a 2.9, tenemos  $y(2.9) < y(3)$ , y si aumentamos  $x$  a 3.1, tenemos que  $y(3.1) > y(3)$ . (Compruébelo; calcule  $y(2.8)$ ,  $y(0)$ ,  $y(4)$ , y compárelo con  $y(3)$ ).

3) Decimos que la función  $y(x)$  tiene un máximo relativo en  $x=x_0$ , cuando para cualquier valor  $x$  suficientemente próximo a  $x_0$  tenemos  
 $y(x) < y(x_0)$   
 y tiene un mínimo relativo en  $x=x_0$  cuando  $y(x) > y(x_0)$ .

Por ejemplo, la función  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  tiene un mínimo relativo en  $x=2$ , pues si disminuimos  $x$  a 1.9 tenemos  $y(1.9) > y(2)$ , y si aumentamos  $x$  a 2.1, tenemos  $y(2.1) > y(2)$ . (Compruébelo).

4) Decimos que la función  $y(x)$  está definida para el intervalo  $a \leq x \leq b$ , cuando todos los números del intervalo son valores del dominio de  $y(x)$ .

Ejemplos:

a) La función  $u = 3v^4 + 1$  está definida para cualquier  $v$ , pues a cualquier valor de  $v$  le asigna cierto número.

b) La función  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  no está definida para el intervalo  $-1 < x < 1$ , pues en ese intervalo  $x^2 - 1 < 0$  y no se puede obtener la raíz cuadrada.

c) La función  $z = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$  está definida para cualquier valor de  $x$ , excepto para  $x=1$ . Entonces decimos que  $x=1$  es una abscisa singular de la función, y la recta  $x=1$  es una asíntota de su gráfica, como veremos.

Para encontrar las propiedades de una función, a menudo resulta útil graficarla. Si conocemos la forma general de la curva, trazarla es muy fácil como vimos en el capítulo anterior. Pero solo conocemos hasta ahora unas cuantas formas: rectas, círculos, parábolas, elipses, e hipérbolas, por lo que relativamente pocas funciones podemos graficar siguiendo tal método. Para la mayoría de los casos tenemos que recurrir al método fundamental: el de tabulación inteligente, que damos a continuación:

Método de tabulación para graficar cualquier función  $y = y(x)$ .

1) Estudiar el comportamiento de la función para abscisas muy a la derecha y muy a la izquierda, es decir, para valores grandes, positivos y negativos de  $x$ .

2) Si la función tiene un cociente, averiguar para qué valores es cero el denominador, pues nos da abscisa singulares de la curva. Para cada abscisa singular tenemos que estudiar el comportamiento de la curva a la derecha e izquierda de esas abscisas.

3) Averiguar donde corta la curva los ejes.

4) Averiguar para qué valores de  $x$  la curva no está definida. Esto usualmente sucede cuando ocurren raíces cuadradas en la función.

5) Tabular otros puntos además de los obtenidos, hasta darse cuenta clara de su forma.

6) Unir los puntos obtenidos a mano limpia.

Por ejemplo, para la gráfica de  $y = \frac{x^2+1}{x-1}$  tenemos:

- 1) Para  $x$  grande positivo, como  $x = 10^3$ ,  $y = \frac{10^6+1}{10^3} \approx \frac{10^6}{10^3} = 10^3$   
 Para  $x$  grande negativo, como  $x = -10^3$  se tiene que  $y = \frac{10^6+1}{-10^3}$   
 $y = -10^3$ .

2) La función tiene denominador, que es cero para  $x=1$  (¿porqué?), luego investigamos su comportamiento a la derecha e izquierda de  $x=1$ :

Para  $x=1.1$ ,  $y=20$  (Obtenga estos valores de  $y$ ).  
 Para  $x=0.9$ ,  $y=-18$

3) Para las intersecciones con el eje Y,  $x=0$ , luego  $y=-1$  (¿porqué?)  
 Para las intersecciones con el eje X,  $y=0$ , luego  $0=x^2+1$  (¿porqué?), esta ecuación no tiene solución (¿porqué?), por lo cual no interseca al eje X.

4) Con esto ya obtuvimos 5 puntos dados, por donde pasa la curva. Con los tres puntos del lado izquierdo se ve claramente la forma de la curva (vea figura 3.5). Del lado derecho no es tan obvio, por lo cual tabulamos para  $x=2$ , obteniendo  $y=5$  (obténgalo), lo cual basta para darnos una idea de la curva. Uniendo los puntos a mano limpia tenemos la figura 3.5

x	y
$10^3$	$10^3$
$-10^3$	$-10^3$
1.1	20
0.9	-18
0	-1
2	5

Asíntota:  $x=1$   
 No cruza el eje X

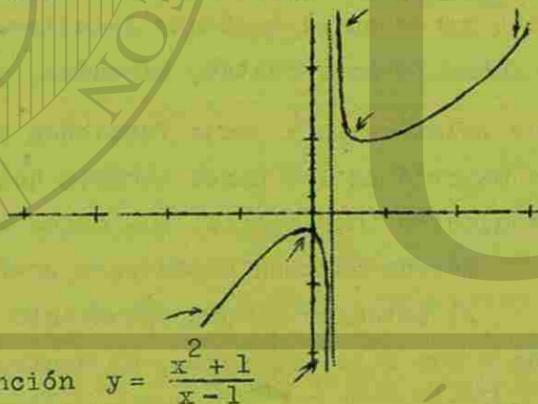


Figura 3.5.-Gráfica de la función  $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

Para comprobar si los puntos interpolados a mano limpia son puntos de la gráfica, podemos tabular mas puntos y compararlos con los interpolados. (Calcule ordenada para  $x=4$ ,  $x=-3$ ). Además en las siguientes secciones y capítulos iremos dando mas armas y refinamientos de este método, como eje de simetría cambio de coordenadas, derivadas de una función, etc. ( Grafique  $\frac{x}{x^2-1}$  ).

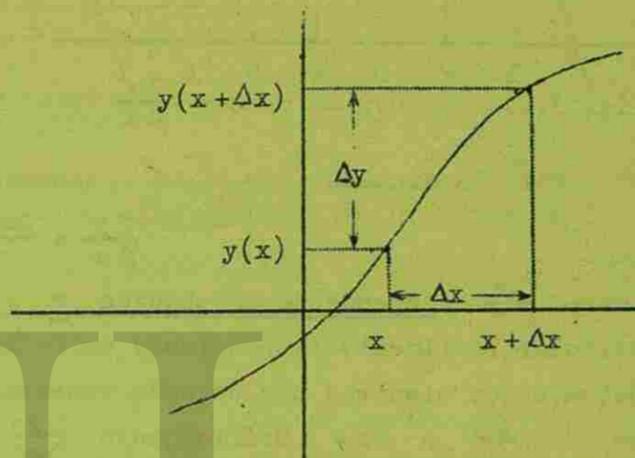
### 3.3 Incrementos.

Para saber cuando una función  $y(x)$  es creciente en un punto  $(x,y)$ , cambiamos el valor de  $x$  y observamos el cambio de  $y$  correspondiente. Denotamos el cambio de  $x$  con el símbolo  $\Delta x$  (léase, delta equis), que llamamos incremento de x.  $\Delta x$  no representa el producto de un número  $\Delta$  por  $x$ ,

sino la consideramos como un solo símbolo que denota cualquier número real. Luego en lugar de  $\Delta x$  podemos usar una letra como  $h$ , pero preferimos usar este símbolo, pues la  $x$  que ocurre en  $x$  nos sugiere que está asociada con un cambio de valor de la variable  $x$ . Entonces dada la abscisa inicial  $x$ , la abscisa final es  $x+\Delta x$  (vea figura 3.3). Por ejemplo, para una abscisa inicial  $x=2.5$  y un incremento  $\Delta x=0.5$ , tenemos para abscisa final  $x=3$  (para  $\Delta x=-0.5$ ,  $0.1$ ,  $-0.01$ , ¿cuál es la abscisa final?). En el caso que  $\Delta x > 0$ , se aumenta el valor de  $x$ , y en el caso que  $\Delta x < 0$ , se disminuye.

Denotamos el cambio de  $y$  con el símbolo  $\Delta y$  (léase, delta y), que llamamos incremento de y. y denota el cambio del contravalor  $y$  correspondiente al incremento  $\Delta x$  del valor, es decir

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$



Por ejemplo, para la función  $y = x^2 + 1$ , dada la abscisa inicial  $x=3$  y  $\Delta x=1$ , se tiene que  $\Delta y = y(3+1) - y(3) = 4^2 + 1 - (3^2 + 1) = 7$  (calcule  $\Delta y$  para  $x=4$ ,  $\Delta x=0.5$ ,  $-0.1$ ); en general dada la abscisa inicial  $x$ , e incremento  $\Delta x$  tenemos para esta función:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1 \\ \Delta y &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Luego  $\Delta y$  depende de  $x$  y  $\Delta x$ . Con esta expresión de  $\Delta y$  en términos de  $x$  y  $\Delta x$ , es fácil calcular el incremento de  $y$  para cualquier valor de  $x$  y  $\Delta x$ . Así, para  $x=4$  y  $\Delta x=-0.1$  tenemos

$$\Delta y = 2(4)(-0.1) + (-0.1)^2 = -0.8 + 0.01 = -0.79$$

(calcule  $\Delta y$  en términos de  $x$  y  $\Delta x$  para la función  $y = x^2 + x$  con esta expresión evalúe  $\Delta y$  para  $x=1$  y  $\Delta x=0.1$ ,  $-0.1$ ,  $0.001$ ).

Las abscisa  $x$  y  $x+\Delta x$  determinan dos puntos sobre la gráfica, que llamamos punto inicial y punto final. Sus coordenadas son  $y$  y  $y+\Delta y$  respectivamente. La pendiente de la cuerda que une estos dos puntos es igual a  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  según vemos en la figura 3.4, siendo la pendiente negativa si la curva decrece, y positiva si la curva crece en el intervalo. Llamamos a  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , rapidez de cambio de la función en el intervalo  $\Delta x$ , pues nos da una medida de lo rápido que cambia  $y$  en relación con un cambio de  $x$ .

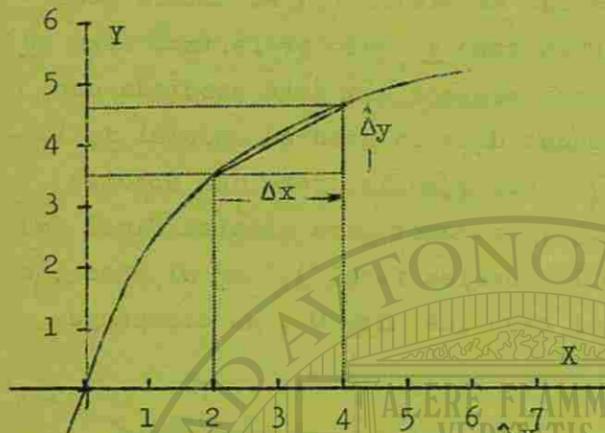


Fig. 3.4.- Rapidez de cambio  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Por ejemplo, en la fig. 3.4, para  $x=2$ , el cambio de  $y$  para  $\Delta x=2$  es 1, luego  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$  en el intervalo de 2 a 4. Mientras que para  $x=0$ , con el mismo cambio de  $x$ ,  $\Delta x=2$ , el cambio de  $y$  es mucho mayor:  $\Delta y=3.5$ ; luego  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.7$  en el intervalo de 0 a 2. (Calcule  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  para  $x=2$  y  $\Delta x=1$ , usando la gráfica).

Para la función  $y = x^2 + 1$  tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Luego  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  depende de la abscisa  $x$  y  $\Delta x$ . Esta expresión nos permite calcular fácilmente la pendiente de la cuerda para cualquier  $x$  y  $\Delta x$ .

Notamos que mientras más pequeño tomamos  $|\Delta x|$ , más se aproxima el valor de  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  a  $2x$ . Gráficamente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se aproxima a la pendiente de la curva en el punto  $(x,y)$ , por lo que la pendiente de la curva en el punto  $(x,y)$ , es  $2x$ . En la siguiente sección usamos este método para calcular la pendiente de cualquier función para cualquier abscisa.

Ejerc.- Encuentre  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  en términos de  $x$  y  $\Delta x$  para la función  $y = x^2 + x$ .

### 3.4 Sucesiones Infinitas.

Si tenemos un grupo de números reales marcados con subíndices, y estos subíndices son enteros positivos, podemos ordenar tales números en una hilera según sus subíndices, para formar lo que llamamos una sucesión. A los elementos así ordenados los llamamos términos de la sucesión. En el caso que usemos todos los enteros positivos para marcar el grupo de números, decimos -- que se trata de una sucesión infinita. Por ejemplo:

- a) La sucesión infinita  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  de números reales genéricos
- b) La sucesión infinita  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  dada por la expresión  $\frac{1}{n}$ , donde  $n$  es el índice.

Ejerc.- Escriba la sucesión infinita dada por  $\frac{1}{2}$ , por  $(-1)^n$ , por  $2n$ , por  $n^3$ .

Ahora vemos la propiedad más interesante de las sucesiones (de ahora en adelante entendemos por "sucesión", únicamente sucesión infinita).

Si graficamos sobre una escala real los puntos representados por los tér-

minos de una sucesión, pueden suceder dos cosas:

- a) Casi todos los puntos se acumulan sobre un solo punto.
- b) Los puntos no se acumulan sobre un solo punto.

Por ejemplo: los puntos de la sucesión  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  se acumulan sobre el punto cero (vea la Fig. 3.5 y en ella marque los términos  $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ ).

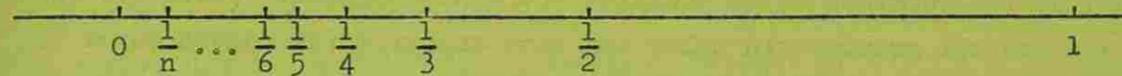


Fig. 3.5.- Sucesión Convergente.

En cambio los puntos de la sucesión  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  no se acumulan sobre ningún punto (ver Fig. 3.6 y marcar los términos 10, 100, 500, 10000).

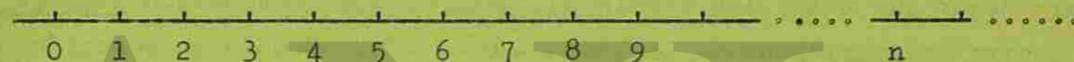


Fig. 3.6.- Sucesión no convergente.

Ejerc.- Grafique los puntos de las sucesiones  $\frac{1}{2^n}, (-1)^n, n^{-3}, (-1)^n, \frac{1}{n}$ , y diga si se acumulan sobre un punto o nó.

En el caso que los términos de la sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  se acumulen sobre el punto  $a$ , a este punto lo llamamos: límite de la sucesión, y lo denotamos por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{léase: límite de } a_n \text{ cuando } n \text{ tiende a infinito}).$$

En la expresión anterior:

- " $a_n$ " representa cualquier término de la sucesión.
- "lim" es una abreviación de límite, y
- " $n \rightarrow \infty$ " ( $n$  tiende a infinito) indica que la sucesión es infinita, y para obtener su límite observamos sus términos para  $n$  cada vez más grande. En este caso decimos que la sucesión es convergente ó que converge al límite "a". Por ejemplo:

a) La sucesión  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  converge a 0, pues sus puntos se acumulan sobre cer. Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

b) La sucesión  $1, 2, 3, 3, 3, \dots, 3, \dots$  converge a 3; luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$

De hecho, cualquier sucesión en que casi todos sus términos son iguales, converge.

Ejerc.- ¿A qué convergen las sucesiones  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ ;  $0, 3, 4, 4, 4, \dots$ ?

En el caso que los términos de la sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  no se acumulen sobre un solo punto, decimos que la sucesión no es convergente. En este caso puede suceder una de tres cosas:

1) que los términos se acumulen sobre dos o más puntos que llamamos puntos de acumulación de la sucesión. Por ejemplo, en la sucesión dada por:  $(-1)^n$ , los términos se acumulan sobre  $-1$  y sobre  $1$  (grafique esa sucesión y diga cuales son sus puntos de acumulación).

2) Si los términos no se acumulan sobre ningún punto, puede ser que se hagan cada vez más grandes sin haber una cota superior (un número mayor que todos los términos). Entonces decimos que la sucesión diverge a infinito y es escribimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Por ejemplo, la sucesión  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$  diverge a infinito (¿porqué?). Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ .

3) Si los términos se hacen cada vez menores sin haber una cota inferior (un número menor que todos los términos), decimos que la sucesión diverge a menos infinito y escribimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . Por ejemplo la sucesión  $-10, -20, -30, \dots, -10n, \dots$  diverge a  $-\infty$  (¿porqué?). Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-10n) = -\infty$ .

Dadas dos sucesiones cualesquiera podemos definir las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, efectuando la operación con cada uno de los dos términos correspondientes. Por ejemplo, con las sucesiones  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  y  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  obtenemos las sucesiones

- $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots, a_n+b_n, \dots$  Suma de las dos sucesiones.
- $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, \dots, a_n-b_n, \dots$  Resta de las dos sucesiones.
- $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n, \dots$  Producto de las dos sucesiones.
- $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$  Cociente de las dos sucesiones.

Ejerc.- Sume, reste, multiplique y divida las dos sucesiones:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  y  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Si las sucesiones  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  son convergentes, también son convergentes su suma, resta y producto, y tenemos las siguientes relaciones entre sus límites:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  es decir, el límite de la suma de dos sucesiones, es igual a la suma de los límites de las dos sucesiones.
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  (póngalo en palabras).
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$  (póngalo en palabras).
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$  (póngalo en palabras).

Ejerc.- Utilizando las relaciones anteriores, obtenga el límite de la suma, resta, producto y cociente de las sucesiones dadas por  $\frac{(-1)^n}{2}$  y  $\frac{1}{n}$ .

La convergencia de la sucesión cociente es mas complicada:  
a) Si el numerador converge y el denominador converge a un límite diferente de cero, entonces la sucesión cociente converge y es válida la relación 4) de arriba. Por ejemplo:

Ya que la sucesión  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$  converge a 1 (gráfiquelo para comprobar), y que la sucesión  $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$  converge a 2 (gráfiquelo para comprobar), se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{2n-1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n}} = \frac{1}{2}$$

b) Si el denominador converge a cero, la sucesión cociente puede o nó ser convergente. Por ejemplo:  $-\frac{1}{3}$   
En la sucesión dada por  $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$  la sucesión del denominador converge a cero y la sucesión cociente converge a cero también. (Pruébelo).

Por otra parte, si  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  es una sucesión de términos positivos que converge a cero, se tiene que la sucesión cociente dada por  $\frac{1}{a_n}$  diverge a  $-\infty$ . (De aquí obtenemos las convenciones  $\frac{1}{+\infty} = 0$ , y  $\frac{1}{-\infty} = -\infty$ ).

c) Si el denominador diverge, la sucesión cociente puede o nó ser convergente. Por ejemplo:  $\frac{3}{n}$   
En la sucesión dada por  $\frac{3}{n}$ , la sucesión del denominador diverge, y la sucesión cociente también (compruébelo gráficamente).  
En cambio, si  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  diverge a  $\pm\infty$ , se tiene que la sucesión cociente  $\frac{1}{a_n}$  converge a cero. (De aquí el acuerdo  $\frac{1}{\pm\infty} = 0$ ).

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALFONSO REYES"  
Avda. 1625 MONTERREY, MEXICO

Hasta ahora la única manera de saber si una sucesión es convergente o nó, y a qué límite converge, ha sido la de graficar sus términos y ver si se acumulan sobre un solo punto o nó. En el caso de sucesiones complicadas podemos aprovechar las relaciones entre límites arriba mencionadas, para descomponerlas en sucesiones mas simples. Ejemplos:

1) La sucesión dada por la expresión  $\frac{2n^2+1}{n^2}$  podemos expresarla por la suma  $\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ . La primera denota a la sucesión 2, 2, 2, ..., 2, ... y la segunda denota a la sucesión  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}$ . De donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2$$

2) La sucesión dada por la expresión  $\frac{n^2}{n^2+3}$ , si la consideramos como cociente de la sucesión  $n^2$  entre la sucesión  $n^2+3$ , no podemos concluir nada ya que ambas son divergentes. Pero si dividimos numerador y denominador entre  $n^2$  obtenemos una sucesión igual, dada por la expresión  $\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}$  que nos sugiere considerar las dos sucesiones:  $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$  y la sucesión dada por  $1+\frac{3}{n^2}$ . Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)} = 1$$

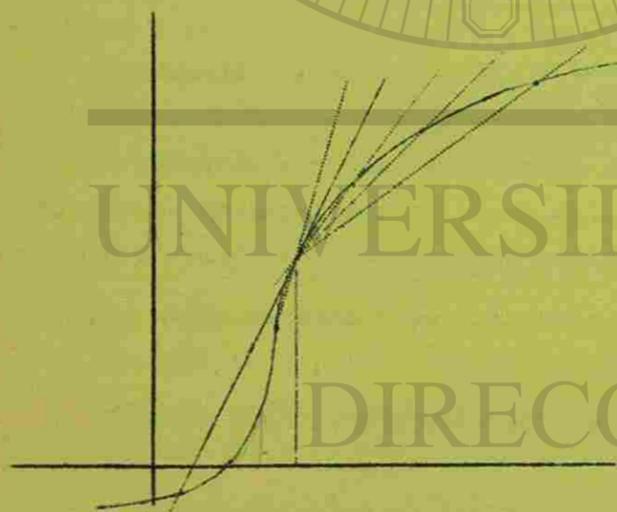


Fig. 3.5.- La tangente como límite.

tal que su límite sea cero, la sucesión de pendientes de las cuerdas co-

### 3.5 Derivada de una Función.

En la sección 3.3 vimos que la rapidez de cambio de la función  $y(x)$  en el intervalo  $\Delta x$  es decir  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , es igual a la pendiente de la cuerda que une en la gráfica los puntos con abscisa  $x$  y  $x+\Delta x$ . Mientras mas pequeño tomemos  $|\Delta x|$ , la pendiente de la cuerda se aproxima mas a la pendiente de la curva en  $(x,y)$ . Y si tomamos una sucesión de incrementos:  $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \dots, (\Delta x)_n, \dots$

correspondientes, es decir,  $\frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1}, \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}, \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3}, \dots, \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}, \dots$  tiene por límite la pendiente de la curva en ese punto, y escribimos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{pendiente de la curva.}$$

Por ejemplo, para la función  $y=x^2+1$ , ya sabemos que  $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ , luego  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ , y además

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad (\text{¿porqué?}).$$

Para cada abscisa  $x$  se obtiene el valor  $2x$  para la pendiente. Por ejemplo para  $x=-1$ , la pendiente de la función es  $-2$ . Luego partiendo de la función  $y(x)$  podemos definir una nueva función de la siguiente manera: la función

$$x \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Llamamos a esta nueva función la derivada de  $y$  con respecto a  $x$  y la denotamos con el símbolo  $\frac{dy}{dx}$  (léase, derivada de  $y$  con respecto a  $x$  o también,  $dy$  entre  $dx$ ); donde la  $y$  denota la función  $y(x)$  que se deriva la  $x$  indica la variable independiente, y todo el símbolo denota la nueva función: la derivada de  $y$  con respecto a  $x$ . El símbolo  $\frac{dy}{dx}$  sugiere la manera como se definió la nueva función, pues  $dy$  representa a  $\Delta y$ ,  $dx$  representa a  $\Delta x$ , y  $\frac{dy}{dx}$  representa el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  donde la  $\Delta$  se sustituye por  $d$  para indicar el límite que hay que tomar. Otras notaciones que se usan para la derivada de  $y$  son  $D_x(y)$  (léase, derivada de  $y$  con respecto a  $x$ ),  $y'$  (léase  $y$  prima),  $y'(x)$  (léase,  $y$  prima de  $x$ ).

Para la función  $y=x^2+1$ , la nueva función es  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , es decir, la función que a  $x \rightarrow 2x$ . (Obtenga  $\frac{dy}{dx}$  para  $y = x + x^2$ ).

Para denotar el contravalor de la derivada, correspondiente al valor de  $x$ , usamos el símbolo  $\frac{dy(x)}{dx}$  (que, como ya es costumbre, denota también a la función). Por ejemplo, para  $x=3$ , el contravalor es denotado por  $\frac{dy(3)}{dx}$ . Nótese que sólo la  $x$  del numerador se sustituye por 3, pues la  $x$  del denominador no denota valor, sino sólo indica cual letra se toma como variable independiente. A  $\frac{dy(x)}{dx}$  lo llamamos rapidez de cambio instantánea o rapidez de cambio de la función, y naturalmente es igual a la pendiente de la gráfica para la abscisa  $x$ . Por ejemplo, para la función  $y=x^2+1$   $\frac{dy(1)}{dx} = 2(1) = 2$ , luego su pendiente es 2 para  $x=1$ .

(Obtenga la pendiente de la función  $x^2+x$  para  $x=1, -1, 0$ ).

Ahora obtenemos la derivada de varias funciones comunes:

1).- La función  $x \rightarrow a$  donde  $a$  es un parámetro, es decir, la función que a cada valor de  $x$  le asigna el mismo contravalor  $a$ , la llamamos función constante, y la denotamos con  $a$ . Por eso decimos que  $a$  es una constante o que  $a$  es independiente de  $x$ . Por ejemplo, para  $a=3$ , tenemos la función  $x \rightarrow 3$ , es decir, la función que a cualquier valor de  $x$  le asigna 3. Luego la función  $a$  denota la familia de funciones constantes: para cada valor que le dé al parámetro  $a$ , se obtiene una función constante particular. (¿Qué contravalores asigna  $a$  a  $x=3, -1, \pi, x_0, x+\Delta x$ , la función constante  $b$ , la función 3, la función  $\sqrt{2}$ ?).

El incremento de la función constante es  $\Delta a = a - a = 0$ , luego para cualquier  $x$  y  $\Delta x$ ,  $\frac{\Delta a}{\Delta x} = 0$  y su derivada es:

$$\frac{da}{dx} = 0 \quad \text{es decir, la función } x \rightarrow 0.$$

Luego, la derivada de cualquier función constante con respecto a  $x$ , es igual a cero. (Cuál es la derivada  $\frac{d3}{dx}$ ,  $\frac{d\sqrt{2}}{dx}$ ,  $\frac{d\pi}{dx}$ ,  $\frac{db}{dx}$  donde  $b$  es constante? ¿Qué pendiente tiene la función  $y(x) = -6$  para  $x=0$ , 3 para  $x=\pi$ ).

2).- La función  $ax$  donde  $x$  variable independiente y  $a$  parámetro, tiene por incremento  $\Delta(ax) = a(x+\Delta x) - ax = a\Delta x$ , luego  $\frac{\Delta(ax)}{\Delta x} = a$ , y su derivada es:

$$\frac{d(ax)}{dx} = a \quad \text{es decir, la función constante } a.$$

En particular, para  $a=1$ , obtenemos la función  $x \rightarrow x$ ; a esta función la llamamos función identidad, pues a cada número  $x$  le asigna el mismo número  $x$ . Su derivada es  $\frac{dx}{dx} = 1$ . Nótese que si consideramos  $\frac{dx}{dx}$

como un cociente de dos números, obtenemos también al resultado 1, Si recordamos, la función  $y=ax$  tiene por gráfica una recta con pendiente  $a$ , y aquí obtenemos con su derivada que para cualquier abscisa  $x$  la gráfica tiene pendiente  $a$ , como era de esperarse. (Por ejemplo, para  $x=5$   $\Delta x=2$ , las funciones  $y, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{dy}{dx}$ , dadas las funciones  $y=3x, y=\frac{x}{3}, y=-12x$ ).

3).- La función  $y=\frac{1}{x}$ , tiene por derivada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x^2 - x\Delta x} = -\frac{1}{x^2 - x\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{por lo que} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

(Obtengan la pendiente de  $y=\frac{1}{x}$  para  $x=1, -1, 100, 0.01$  y grafique la función. Obtenga  $\frac{dy}{dx}$  para  $y=x^2$ ).

3.6 Identidades para derivar funciones.

Hasta ahora, para derivar una función hemos usado un camino bastante largo, siguiendo los pasos dados por su definición. Siendo la operación de derivar tan importante, naturalmente nos conviene desarrollar métodos para ejecutarla rápidamente, lo cual hacemos en esta sección. Una manera sería recordar la derivada de cada función; pero esto no es práctico pues hay infinidad de funciones. En su lugar, lo que recordaremos será la derivada de unas cuantas funciones y cómo obtener la derivada de varios tipos de funciones que se pueden formar a partir de funciones dadas. Tenemos los siguientes resultados, donde  $u$  y  $v$  son dos funciones de  $x$ ,

1) Derivada de una suma o resta.

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas.

Igualmente para la resta tenemos

$$\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \quad \text{(Dígalo en palabras).}$$

Por ejemplo, la derivada de la función  $y=x+3$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x+3)}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d3}{dx}; \quad \text{pero } \frac{dx}{dx} = 1, \frac{d3}{dx} = 0 \quad \text{luego, } \frac{dy}{dx} = 1$$

(Obtenga  $D_x(y)$  para  $y=3x+1, y=x-\pi, y=\lambda x + \frac{\pi}{x}$ ).

En el caso de tener la suma (o resta) de varios términos, la función se deriva análogamente: su derivada es igual a la suma (o resta) de las derivadas de sus términos. Por ejemplo, la derivada de  $3x - \frac{1}{x} + b$  donde  $b$  es función constante de  $x$ , es:

$$\frac{d}{dx} (3x - \frac{1}{x} + b) = \frac{d}{dx} (3x) - \frac{d}{dx} (\frac{1}{x}) + \frac{d}{dx} (b) = 3 + \frac{1}{x^2}$$

pues  $\frac{d3x}{dx} = 3, \frac{d}{dx} (\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}, y \frac{db}{dx} = 0$  (¿porqué?)

(Derive las funciones de  $x, 3x - \frac{1}{x} - \sqrt{2}, \frac{\sqrt{\pi x}}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{4}, (x+1)(\frac{1}{x} - 1)$ ).

2) Derivada de un producto.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera.

Por ejemplo, la derivada de  $y = (3x+1)(x-1)$  es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [(3x+1)(x-1)] = (3x+1) \frac{d(x-1)}{dx} + (x-1) \frac{d(3x+1)}{dx} =$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x+1) \cdot 1 + (x-1) \cdot 3 = 3x+1+3x-3 = 6x-2 .$$

(Obtenga la derivada de  $(3x+1)(x-1)$  efectuando primero la multiplicación y derivando la suma de términos).

En el caso de que una de las funciones  $u$  sea una función constante de  $x$  entonces:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = u \frac{dv}{dx} \quad (\text{¿porqué?}),$$

es decir, las constantes se pueden sacar de la derivada y derivar el resto.

Ejemplos:  $\frac{d(3x)}{dx} = 3 \frac{dx}{dx} = 3$  ;  $\frac{d(4 \text{ sen } x)}{dx} = 4 \frac{d(\text{sen } x)}{dx}$  .

(Obtenga  $D_x y$  para  $y = (x-3)(4x-5)$  ,  $y = ax(x-5)$  donde  $a$  constante).

Si tenemos un producto de varios factores, como  $(y+1)(\pi y-1)(3y-5)$  , para derivarlo podemos agrupar los factores en dos grupos tales como:

$[(y+1)(\pi y-1)]$  y  $(3y-5)$  , obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} [(y+1)(\pi y-1)] (3y-5) &= \\ &= (y+1)(\pi y-1) \frac{d}{dy} (3y-5) + (3y-5) \frac{d}{dy} (y+1)(\pi y-1) \\ &= (y+1)(\pi y-1) 3 + (3y-5) \left[ (y+1) \frac{d}{dy} (\pi y-1) + (\pi y-1) \frac{d}{dy} (y+1) \right] \\ &= 3(y+1)(\pi y-1) + (3y-5)(y+1)\pi + (3y-5)(\pi y-1) \end{aligned}$$

Luego, la derivada de tres factores  $u, v, w$  es :

$$\frac{d(uvw)}{dx} = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$$

(Derive:  $3x(x-1)(\pi x+2)$  ,  $4u^3$  ,  $\frac{3x+5}{a}$  donde  $a$  es constante.

Derive:  $(\frac{\pi}{z}+6)(\frac{z}{2}+1)$  ,  $a(3x+a)$  donde  $a$  función de  $x$ .

¿Cuál es la derivada de  $uvwz$  con respecto a  $x$ ?

3) Derivada de un cociente.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(Expréselo en palabras)

Por ejemplo, la derivada de  $t = \frac{4x+1}{3x}$  es:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3x \frac{d(4x+1)}{dx} - (4x+1) \frac{d(3x)}{dx}}{9x^2} = \frac{3x(4) - (4x+1)(3)}{9x^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{12x - 12x - 3}{9x^2} = -\frac{1}{3x^2}$$

(Obtenga  $\frac{dy}{dx}$  para  $y = \frac{3x}{x+1}$  ,  $y = \frac{x(x+1)}{x-1}$  ,  $y = \frac{1}{x(x-1)}$  ) .

4) Derivada de una potencia.

Siendo  $u$  una función de  $x$  , y  $n$  cualquier entero, la función  $u^n$  tiene  $n$  por parámetro, por lo que denota una familia de funciones, llamada funciones de potencia . Su derivada es :

$$\frac{d(u^n)}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

Es decir, la derivada de una función elevada a la  $n$  , es igual a: el producto de  $n$  por la función elevada a la  $n-1$  por la derivada de la función-

(Mas tarde veremos que esta ecuación es verdadera, aún cuando el exponente  $n$  sea cualquier número real).

Ejemplos:

a)  $y = (3x-1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3 (3x-1)^{3-1} \frac{d(3x-1)}{dx} = 9(3x-1)^2$$

b)  $z = \frac{1}{(2u+1)^5} = (2u+1)^{-5}$

$$\frac{dz}{du} = -5 (2u+1)^{-5-1} (2) = -10(2u+1)^{-6}$$

c)  $w = (\text{sen } v)^4$

$$\frac{dw}{dv} = 4 (\text{sen } v)^{4-1} D_v(\text{sen } v)$$

(Derivar las siguientes funciones en las que la letra que ocurre en la expresión es la variable:  $b^3$  ,  $(3s)^4$  ,  $(-y)^n$  ,  $\frac{1}{5}$  ,  $(\frac{v-1}{v+1})^3$  ) .

Aplicando estas cuatro identidades, podemos obtener la derivada de cualquier función polinomial o cualquier función racional (cociente de dos polinomios). Por ejemplo, para la función

$$s = \frac{2t^2 - 3}{t} - 3t(t+1)^3$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{t(4t) - (2t^2 - 3)}{t^2} - [(3t)3(t+1)^2 + (t+1)^3(3)]$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t^2 + 3}{t^2} - 9t(t+1)^2 - 3(t+1)^3$$

(Obtener la derivada de  $w(u) = 3u(u-1)^2 + u^2$ . Calcular  $w'(0)$ ,  $w'(1)$ .

Para  $z = \frac{3v^2}{a} + \frac{a}{v}(v-1)$  donde  $a$  es constante, obtener  $\frac{dz(1)}{dv}$ ).

En resumen tenemos las cuatro identidades:

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(u^n)}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

### 3.4 Operaciones con funciones.

Según la sección anterior, para derivar una función, la descomponemos en funciones más simples y derivamos estas funciones. Por ejemplo, para derivar  $(x+1)(x-1)$  con respecto a  $x$ , la descomponemos en las funciones  $(x+1)$  y  $(x-1)$ , y derivamos cada una separadamente. Ahora estudiamos las diferentes maneras de formar una función a partir de funciones dadas.

#### 1) Suma de dos funciones.

Definimos la suma de dos funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  como la función  $x \rightarrow u(x) + v(x)$ , es decir, la función que a  $x$  le asigna la suma del contravalor de  $u$  más el contravalor de  $v$  correspondientes a  $x$ . Esta función naturalmente la denotamos también con el contravalor  $u(x) + v(x)$  o más cortamente con  $u+v$ . Por ejemplo, si  $u = x^2$  y  $v = \frac{1}{x}$ , tenemos que  $u+v = x^2 + \frac{1}{x}$ . Conversamente, la función de  $x$ :  $x^2 + \frac{1}{x}$ , se puede descomponer en la suma de las dos funciones  $x^2$  y  $\frac{1}{x}$ .

(Descomponga las siguientes funciones en una suma de dos funciones:  $x^2 + 1$ ,  $u = w^3 + 3w$ ,  $3w + 5w^3$ . Defina la suma de tres funciones  $u, v, w$ .)

Análogamente definimos la resta de dos funciones  $u$  y  $v$  como la función  $x \rightarrow u(x) - v(x)$ .

#### 2) Producto de dos funciones.

Definimos el producto de dos funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  como la función  $x \rightarrow u(x) \cdot v(x)$ , es decir, le asigna el producto del contravalor de  $u$  por el contravalor de  $v$ . (Nótase que  $u(x)$  no denota  $u$  por  $x$ , sino que denota contravalor). Denotamos la función con  $u(x)v(x)$  o con  $uv$ . Ejemplo, la función  $3(x+1)$  la podemos descomponer en el producto de la función  $3$  por la función  $x+1$ .

Ejercicios.- Descomponga en el producto de dos funciones:  $3x, x^2, (x-3)(x+3), x^3, x(x-1), x(x+2)(x-5), x^2(x-\pi)(2x-\lambda)$ . Defina el producto de tres funciones de  $x$ :  $u, v, w$ .

#### 3) Cociente de dos funciones.

Definimos el cociente de dos funciones  $u(x)$  entre  $v(x)$  como la función  $x \rightarrow \frac{u(x)}{v(x)}$ , es decir, el contravalor de  $u$  entre el contravalor de  $v$ . Denotamos la función con  $\frac{u(x)}{v(x)}$  o con  $\frac{u}{v}$ .

Ejercicios.- Descomponga en dos, las funciones  $\frac{x}{3}, \frac{3}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{\sin x}{x}$ .

Ahora consideramos la más interesante manera de formar funciones a partir de funciones dadas:

#### 4) Cadena de dos funciones.

Dadas dos funciones, como  $z = t^2 + t$  y  $t = \frac{1}{x}$ , notamos que en la primera,  $t$  es la variable independiente, y que en la segunda es variable dependiente. Si encadenamos la  $t$  de ambas ecuaciones, entonces  $z$  va a depender de  $x$ . Al darle cualquier valor a  $x$ , obtenemos un contravalor para  $t$  que sustituido en la primera función nos da un contravalor de  $z$ . Gráficamente:  $x \rightarrow t \rightarrow z$  (diga, a  $x$  le asigna  $t$ , le asigna  $z$ ). Por ejemplo, para  $x = 0.5$ , obtenemos  $t = \frac{1}{0.5} = 2$ , luego  $z = 2^2 + 2 = 6$ ; y en general a  $x \rightarrow z\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ . Asignándole a  $x$  el valor de  $z$  así obtenido, obtenemos una nueva función, aquella que a  $x \rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  y que llamamos función cadena.

Ejercicio.- Calcule  $z$  para  $x = 1, -0.5, 2$ .

En estas circunstancias,  $z$  denota dos funciones:

- La función  $z = t^2 + t$  cuando se considera como función de  $t$ .
- La función  $z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  cuando se considera como función de  $x$ .

Para distinguir una función de otra, usualmente se escribe  $z(t)$  para la primera y  $z\left[\frac{1}{x}\right]$  ó  $z(x)$  para la segunda.

Ejemplos: 1.- Para  $w = \text{sen } v$  y  $v = 2y^2 + 1$ , la función cadena es  $w = \text{sen}(2y^2 + 1)$ .

2.- La función  $(x^2 + 1)^3$ , considerándola como función cadena, está formada por las funciones  $t^3$  y  $t = x^2 + 1$ .

Ejercicios: 1.- Forme la función cadena con  $u = z + \text{sen } z$ , y  $z = y^3$ .

2.- Descomponga las funciones  $\text{sen } x^2$ ,  $\text{sen}^2 2x$ ,  $(4x-1)^{-2}$ .

Análogamente definimos cadenas de funciones para tres o más funciones.

Por ejemplo, la función  $\log(\text{sen } x^2)$  está compuesta de las funciones  $\log z$ ,  $z = \text{sen } w$ ,  $w = x^2$ .

Ejercicios: Descomponga las funciones  $\log(\tan \frac{1}{x})$ ,  $(\tan x^2)^3$ .

Para derivar una función cadena tenemos la siguiente igualdad. Sean  $u = u(v)$  y  $v = v(x)$ , es decir,  $u$  función de  $v$  y  $v$  función de  $x$ . La función cadena  $u[v(x)]$  tiene por derivada:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

La derivada de  $u$  con respecto a  $v$ , es igual al producto de la derivada de  $u$  con respecto a  $v$  por la derivada de  $v$  con respecto a  $x$ .

Nótese que esta igualdad es muy sugestiva, pues si consideramos  $du$ ,  $dv$ ,  $dx$  como números, en el producto de la derecha, podemos cancelar  $dv$  y obtener  $\frac{du}{dx}$ .

Ejemplos: 1.- La derivada de  $y = (x^2 + 1)^3$  es  $y'(x) = \frac{d(x^2 + 1)^3}{d(x^2 + 1)} \times \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = 3(x^2 + 1)^2 \times 2x$

$$y'(x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

2.- La derivada de  $z = \text{sen } x^2$  es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(\text{sen } x^2)}{dx^2} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \frac{d(\text{sen } x^2)}{dx^2}$$

3.- La derivada de  $z = t^2 + t$ , y  $t = x^2 + 1$  es

$$D_x z = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = (2t + 1)(2x) \quad \text{y sustituyendo } t \text{ por } x^2 + 1:$$

$$D_x z = 2x(2(x^2 + 1) + 1) = 2x(2x^2 + 3)$$

Desde luego, en este caso resulta más conveniente obtener primero la expresión de  $z$  como función de  $x$ , derivando después:

$$z = (x^2 + 1)^2 + x^2 + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 2(x^2 + 1)2x + 2x = 2x(2x^2 + 3)$$

Ejercicios: Derivar  $(3x-1)^4$ ,  $(\text{sen } x)^2$ ,  $\log(x^2 + 1)$ .

Como punto final demostramos dos de las identidades que usamos constantemente para derivar funciones (las restantes igualdades pueden ser demostradas por un método semejante):

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Denotemos con  $z$  el producto  $uv$ . Calculando

$$\Delta z = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

Ahora, para obtener expresiones que den incrementos  $\Delta u$  y  $\Delta v$ , restamos y sumamos el mismo término  $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ :

$$\Delta z = [u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)] + [u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)]$$

$$\Delta z = v(x + \Delta x) \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)] + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]$$

$$\Delta z = v(x + \Delta x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = v(x + \Delta x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad \text{y finalmente, tomando límites cuando } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\text{luego } \frac{dz}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

De la misma manera, para probar que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Si le damos un incremento  $\Delta x$  a  $x$ , se obtiene para  $v$  un incremento  $\Delta v$ , y correspondientemente para  $u$  se obtiene un incremento  $\Delta u$ . Tenemos

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad \text{y tomando límites:}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si  $\Delta v \neq 0$  para  $\Delta x \neq 0$ , el cociente  $\frac{\Delta u}{\Delta v}$  está definido, y como  $\Delta v$  tiende a cero cuando  $\Delta x$  tiende a cero, se tiene que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{du}{dv} \quad \text{con lo cual obtenemos la igualdad deseada.}$$

3.8 Funciones Implícitas.

Dada una ecuación cualquiera, como  $x^3 - x + y^2 = y^3$ , define dos funciones  $x(y)$  y  $y(x)$ , según consideremos  $y$  ó  $x$  como variable independiente. Considerando  $y$  como función de  $x$  en la ecuación, como no está despejada  $y$ , decimos que la ecuación define la función implícitamente, o abusando del lenguaje, que la función es implícita. Para obtener su derivada por los métodos ya dados, tenemos que despejar la variable dependiente  $y$ , y entonces derivar. Pero usualmente no se puede despejar, como en la ecuación anterior, por lo que nos conviene tener métodos para derivar sin despejar. Veamos como se puede hacer. Si en la ecuación  $x^3 - x + y^2 = y^3$  consideramos ambos lados como funciones de  $x$ , tenemos dos funciones iguales. Luego, sus derivadas con respecto a  $x$  son iguales, es decir:

$$\frac{d(x^3 - x + y^2)}{dx} = \frac{d(y^3)}{dx} \quad \text{y efectuando operaciones.}$$

$$3x^2 - 1 + 2y \frac{dy}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

La  $y$  que ocurre en la ecuación se considera como cierta función de  $x$  y naturalmente su derivada se deja indicada. Maravillosamente al derivar,  $\frac{dy}{dx}$  siempre ocurre linealmente en la ecuación resultante, por lo que se puede despejar y obtener

$$2y \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2}{2y - 3y^2}$$

Ejercicios.- Obtener  $z'(y)$  para  $yz = yz^3 + 1$ ;  $(z+y)^2 = az^4$ .

Si queremos calcular un contravalor de esta derivada, por ejemplo  $\frac{dy}{dx}(1)$

además de sustituir  $x$  por  $1$  en la expresión anterior, hay que sustituir  $y$  por  $y(1)$ . Naturalmente, el contravalor  $y(1)$  se obtiene de la función inicial  $x^3 - x + y^2 = y^3$  sustituyendo  $x$  por  $1$  y encontrando las soluciones de la ecuación resultante:

$$1^3 - 1 + y^2 = y^3$$

$$y(y-1) = 0, \text{ de donde}$$

$$y = 1, y = 0 \text{ son las soluciones,}$$

entonces  $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{1-3}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2} = 2$  para el punto (1,1)

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{1-3}{2 \cdot 0 - 3 \cdot 0} = \frac{-2}{0} \text{ para el punto (1,0)}$$

el último resultado indica que la tangente en el punto (1,0) es perpendicular al eje X, por lo que decimos que su pendiente es  $\infty$ .

Ejerc. 2.- Obtener  $\frac{dz(0)}{dx}$ ,  $\frac{dz(-1)}{dx}$  para  $z^3 + z = x^2 - 1$ .

Si en la ecuación  $x^3 - x + y^2 = y^3$ , consideramos  $x$  como función de  $y$ , obtenemos su derivada de manera análoga:

$$3x^2 \frac{dx}{dy} - \frac{dx}{dy} + 2y = 3y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2 - 2y}{3x^2 - 1}$$

Notamos que para estas dos derivadas  $\frac{dx}{dy}$  y  $\frac{dy}{dx}$  tenemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

lo cual es cierto para cualquier par  $y(x)$  y  $x(y)$  de funciones inversas. Este resultado es muy sugestivo, pues si consideramos  $dy$  y  $dx$  como números,  $\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 1 \times \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}$ .

Ejerc. 3.- Obtenga  $\frac{da}{db}$  y  $\frac{db}{da}$  para  $ba^3 + (b+1)a + b^5 + b^3 + 6 = 0$

Dada una función cadena donde uno o mas eslabones son una función implícita, por ejemplo  $z = 2x+1$ ,  $x^3 + x = t$ , no podemos despejar  $x$  y obtener así una expresión de  $z$  en términos de  $t$ . Luego para derivar la función cadena  $z(t)$ , tenemos que hacer uso de la identidad  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dt}$  y derivar  $x^3 + x = t$  implícitamente. Para estas funciones tenemos:

$$z = 2x+1 \quad x^3 + x = t$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 \quad 3x^2 \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} = 1 \text{ de donde } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

luego  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3x^2 + 1}$

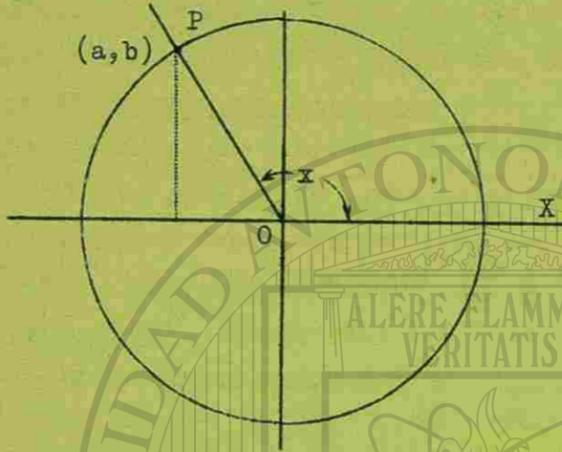
Ejerc. 4.- a) Obtener  $\frac{dy}{dx}$  para  $y = x^3 + 1$ ,  $(tx)^2 = (x+1)^3$

b) Obtener  $\frac{du}{dw}$  para  $(w+u)^3 = 6$ ;  $\frac{v}{w} = v^3 - w^3$

3.9 Derivada de funciones trigonométricas.

En Trigonometría se definen las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. Denotamos estas seis funciones con los símbolos  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ ,  $\text{tan } x$ ,  $\text{cot } x$ ,  $\text{sec } x$ , y  $\text{csc } x$ , que como ya es costumbre, denotan también los contravalores correspondientes a  $x$ . En estos símbolos por ejemplo en  $\text{sen } x$ , la  $x$  es la variable independiente, y "sen" (abrevia

ción de seno) denota la función, de igual manera que la  $y$  de  $y(x)$ , con la diferencia que  $y$  se usa además para denotar la variable independiente, mientras que "sen" nunca se usa así.



Para definir las funciones trigonométricas (o circulares), usamos un círculo de radio 1, con centro en el origen (vea Fig. 3.3), y asociamos la variable independiente  $x$  con el ángulo de  $X$  a  $P$ . Entonces la función  $\text{sen } x$  se define por la asignación:  $x \rightarrow b$ .

Ejerc. 1.-Con la figura 3.8, defina:  $\text{cos } x$ ,  $\text{tan } x$ ,  $\text{cot } x$ ,  $\text{sec } x$ ,  $\text{csc } x$ .

Fig. 3.8.-Funciones Trigonómicas.

Como el ángulo de  $X$  a  $P$  puede medirse en grados o en radianes, obtenemos dos funciones  $\text{sen } x$  distintas, según se asocie  $x$  con la medida del ángulo en grados o radianes. Para el  $\text{sen } x$  tenemos:

Midiendo $x$ en grados.	Midiendo $x$ en radianes.
$0 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow .01745\dots$	$1 \rightarrow .8415$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow .02739\dots$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 1$
$\pi \rightarrow .05481\dots$	$\pi \rightarrow 0$
$90 \rightarrow 1$	$90 \rightarrow .86603\dots$
$180 \rightarrow 0$	$180 \rightarrow -.86603\dots$

La mayoría de las tablas de funciones trigonométricas dan el ángulo en grados pero hay algunas que lo dan en radianes. En cualquier caso, podemos pasar de una función a otra, pues si asociamos  $x$  con la medida en radianes, y  $\alpha$  con la medida en grados, tenemos la ecuación  $x = \frac{\pi \alpha}{180}$ . Por ejemplo, para calcular con tablas en grados,  $\text{sen } 90$ , donde 90 está asociado con radianes, tenemos:

$$\alpha = \frac{180x}{\pi} = \frac{180 \times 90}{\pi} = 5160 = 14 \times 360 + 120$$

$$\text{sen } 90 = \text{sen } 5160^\circ = \text{sen } 120^\circ = .86603\dots$$

Ejerc. 2.-La función coseno, ¿qué contravalores asigna a:

$$\frac{\pi}{4}, 45, -\frac{\pi}{2}, -90, 10.5, 360, 2\pi,$$

considerándolos primero en grados y luego en radianes?.

En Topografía se usa exclusivamente la función  $\text{sen } x$ , donde  $x$  está asociada con grados, mientras que en Cálculo, Matemáticas avanzadas y todas sus aplicaciones a Ingeniería, se usa exclusivamente la función  $\text{sen } x$ , donde  $x$  asociado con radianes. Luego, de ahora en adelante siempre que -hablemos de las funciones trigonométricas nos referimos a las que se obtienen al asociar la variable independiente con radianes.

Ahora obtenemos las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$1) \quad \frac{d \text{sen } x}{dx} = \text{cos } x$$

Desde luego, para obtener este resultado tenemos que partir de la definición de derivada, lo cual hacemos a continuación. El incremento del contravalor  $\Delta(\text{sen } x)$  para un incremento  $\Delta x$  de la variable, es:

$$\Delta(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x$$

$$= \text{sen } x \text{cos } \Delta x + \text{sen } \Delta x \text{cos } x - \text{sen } x \quad (\text{Usando identidad trigonométrica}).$$

$$\Delta(\text{sen } x) = \text{sen } x (\text{cos } \Delta x - 1) + \text{sen } \Delta x \text{cos } x.$$

Luego

$$\frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \text{sen } x \frac{\text{cos } \Delta x - 1}{\Delta x} + \text{cos } x \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \text{sen } x \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } \Delta x - 1}{\Delta x} + \text{cos } x \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Los límites que aparecen en el lado derecho de la ecuación, no los podemos obtener tomando el cociente de los límites, pues nos dá  $\frac{0}{0}$ , lo cual no nos dice nada acerca del límite. Luego, tenemos que estudiar el comportamiento del cociente cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

En la Fig. 3.9 graficamos una parte de un círculo de radio 1, y  $\Delta x$  para tres valores distintos: .4, .2 y .1. El contravalor correspondiente  $\text{sen } \Delta x$  está dado por cada una de las alturas  $h$  de los triángulos que se forman. Como el ángulo  $\Delta x$  se mide en radianes, es igual a la longitud del arco de círculo.

Vemos que la altura  $h = \text{sen } \Delta x$  tiende a igualarse al arco  $\Delta x$  a medida que  $\Delta x$  se hace mas pequeño,

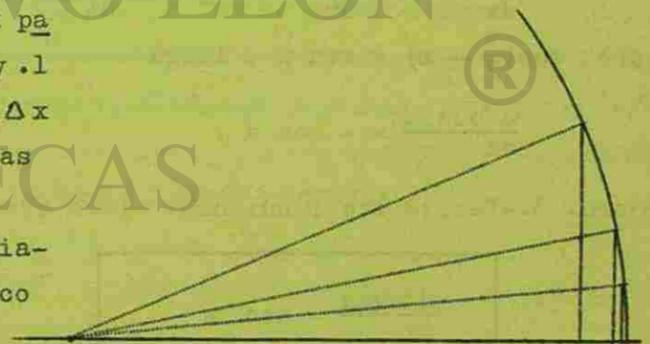


Fig. 3.9.-Límites de  $\frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$  y de  $\frac{\text{cos } \Delta x - 1}{\Delta x}$

luego el cociente  $\frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$  tiende a uno.  
 Por otra parte  $\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = \frac{1 - \left[1 - 2\left(\text{sen } \frac{\Delta x}{2}\right)^2\right]}{\Delta x}$   

$$= \frac{2\left(\text{sen } \frac{\Delta x}{2}\right)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = \text{sen } \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se tiene que  $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ ,  $\text{sen } \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ , y  $\frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$

De donde se concluye que también  $\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \rightarrow 0$

Luego,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} = 1$  y  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$ .

y de aquí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \frac{d \text{sen } x}{dx} = (\text{sen } x) \times 0 + (\cos x) \times 1$$

$$\frac{d \text{sen } x}{dx} = \cos x$$

Ejerc. 2.-Obtener la derivada de:  $x \text{sen } x$ ,  $4x^2 + 3 \text{sen } x$ ,  $\frac{x}{\text{sen } x}$ ,  $\text{sen}^2 x$

$$2) \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen } x$$

Par obtener este resultado podemos seguir un proceso análogo al anterior trabajando con incrementos. Pero preferimos expresar  $\cos x$  en términos del seno, con la identidad trigonométrica  $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . El  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  es una función cadena, con los eslabones  $\text{sen } t$ ,  $t = \frac{\pi}{2} - x$ , luego su derivada es:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = \frac{d \text{sen } t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = (\cos t)(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

pero  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$ , luego

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen } x.$$

Ejerc. 3.-Derive las funciones:  $(\cos x)\text{sen } x$ ,  $x^2 \cos x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\text{sen } x^2$ .

$$\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

3)

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\text{csc}^2 x$$

Para obtener la derivada de  $\tan x$  usamos la identidad  $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ :

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x (\cos x) - \text{sen } x (-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Análogamente obtenemos la derivada de  $\cot x$ .

Ejerc. 4.-Derivar las funciones:  $\cot x$ ,  $\text{sen } x + \tan x$ ,  $x \tan x^2$

$$4) \quad \frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d \csc x}{dx} = -\csc x \cot x$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 "ALFONSO REYES"  
 Ldo. 1425 MONTERREY, MEXICO

Usando la identidad  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  tenemos:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{(\cos x) \times 0 - 1 \times (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x.$$

Ejerc. 5.-Derivar las funciones:  $\csc x$ ,  $x^2 + 3 \sec x$ ,  $\frac{\sec x}{x}$ ,  $\sec(x+1)$ .

En resumen tenemos:

$$\frac{d \text{sen } x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen } x$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\text{csc}^2 x$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d \csc x}{dx} = -\csc x \cot x$$

Podemos combinar las funciones trigonométricas en sumas, productos, cocientes, cadenas, y así formar nuevas funciones. Para derivar estas combinaciones aplicamos las identidades ya dadas, según convenga.

Ejemplos:

1)  $p = 2 \text{sen } u + \frac{1}{3} \cot u + u^2$ , suma de funciones cuya derivada es

$$\frac{dp}{du} = 2 \cos u + \frac{1}{3} (-\text{csc}^2 u) + 2u.$$

2)  $f = \frac{v \tan v}{2v+1}$ , función cociente, cuya derivada es:

$$\frac{df}{dv} = \frac{(2v+1)(v \sec^2 v + \tan v) - (v \tan v) \times 2}{(2v+1)^2}$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 "ALFONSO REYES"  
 Ldo. 1425 MONTERREY, MEXICO

3)  $g = \sec 2x^2$ , función cadena con los eslabones  
 $g = \sec t$ ,  $t = 2x^2$ , y cuya derivada es:

$$\frac{dg}{dx} = \sec 2x^2 \tan 2x^2 \cdot 4x$$

4)  $h = \sin^4 2r$ , función cadena con los eslabones  
 $h = t^4$ ,  $t = \sin u$ ,  $u = 2r$ , y cuya derivada es:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh}{dt} \times \frac{dt}{du} \times \frac{du}{dr} = 4t^3 (\cos w)^2 = 8 \sin^3 2x \cos 2x$$

5)  $w = \sin(x \cos^2 x)$ , función cadena con los eslabones  
 $w = \sin y$ ,  $y = x \cos^2 x$ , donde el segundo eslabón es un producto. La derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \cos(x \cos^2 x) \times \frac{d(x \cos^2 x)}{dx} \\ &= \cos(x \cos^2 x) [x \times 2 \cos x (-\sin x) + \cos^2 x \times 1] \\ &= (\cos^2 x - 2 \cos x \sin x) \cos(x \cos^2 x) \end{aligned}$$

Ejerc. 6.-Derivar las funciones:  $w = \cos^2 m$ ,  $w = \csc^2 4x$ ,  $w = x \cos 2x - x \sec(x \sin x)$ ,  $\cot(x + \sin^2 x)$ ,  $\sec^2(\sin x)$ .

### 3.10 Diferenciales.

Al usar el símbolo  $\frac{dz}{dx}$  para denotar la derivada de una función, vimos que  $dz$  y  $dx$  se comportan como números. Por ejemplo  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ . Esto se debe a que  $\frac{dz}{dx}$  se define a través del cociente de dos números: los incrementos  $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ . Al símbolo  $dz$  (léase, de zeta) lo llamamos diferencial de z, y representa a  $\Delta z$  mas la idea de tomar el límite. Igualmente a  $dx$  lo llamamos diferencial de x, y representa a  $\Delta x$  mas la idea de tomar el límite. Y el cociente de dos diferenciales  $\frac{dz}{dx}$  denota la derivada de la función  $z(x)$ .

Aprovechando la propiedad de las diferenciales de comportarse como números, en la derivada  $\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2$  de la función  $z = x^3 + 2x$ , podemos multiplicar ambos lados por  $dx$  para obtener la ecuación  $dz = 3x^2 dx + 2 dx$ , llamada la forma diferencial (mas apropiado sería llamarle ecuación diferencial, pero ese nombre ya se usa para otra cosa). Para llegar a esta forma diferencial, no tenemos que obtener primero la derivada, para luego multiplicarla por  $dx$ . Podemos obtenerla directamente, aplicando las reglas para diferenciar que damos a continuación.

Sean  $u$  y  $v$  dos funciones cualesquiera, y sea  $b$  una función constante:

1)  $db = 0$

$$\frac{db}{dx} = 0$$

2)  $d(u+v) = du + dv$

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

3)  $d(uv) = u dv + v du$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

4)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

5)  $du^n = nu^{n-1} du$

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

6)  $d \sin u = \cos u du$

$$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

7)  $d \cos u = -\sin u du$

$$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

Notamos que las igualdades para diferenciar se obtienen de las correspondientes igualdades para derivar, simplemente multiplicando ambos lados de la ecuación por  $dx$ .

Para diferenciar una función como  $p = w^2 \sin 4w$  tenemos:

$$\begin{aligned} dp &= d(w^2 \sin 4w) = w^2 d(\sin 4w) + \sin 4w \times dw^2 \\ &= w^2 \cos 4w \times d(4w) + \sin 4w \times 2w \times dw \\ dp &= 4w^2 \cos 4w dw + 2w \sin 4w dw \end{aligned}$$

Ejerc. 1.-Diferenciar  $w = (4z+6)^2$ ,  $w = \tan z^2$ ,  $u = v^2 \cot^2 v$ .

La ventaja de diferenciar sobre derivar, es que el proceso de diferenciar no distingue entre la variable independiente y la dependiente. En la forma diferencial cualquier letra se puede considerar como variable independiente según lo requiera el problema.

Ejemplos:

1) Obtener la derivada de las funciones  $z(w)$  y  $w(z)$  dadas por la ecuación  $zw = z + w + 6$ .

Diferenciando tenemos:

$$\begin{aligned} d(zw) &= d(z + w + 6) = dz + dw + d6 \\ z dw + w dz &= dz + dw \end{aligned}$$

Despejando  $dw$  y dividiendo entre  $dz$ :

$$z dw - dw = dz - w dz$$

$$dw = \frac{(1-w) dz}{z-1}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1-w}{z-1}$$

Despejando  $dz$  y dividiendo entre  $dw$ :

$$dz - w dz = z dw - dw$$

$$dz = \frac{(z-1) dw}{1-w}$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{z-1}{1-w}$$

2) Obtener la derivada de la función cadena  $z(t)$  dada por  $z^2 w = \tan w$ ,  $y \quad \text{sen}(wt) = t^3 + 1$ .

Diferenciando las dos ecuaciones:

$$2z^2 dw + w 2z dz = \sec^2 w dw ; \quad (\cos wt)(w dt + t dw) = 3t^2 dt.$$

Ahora despejando  $dz$  y  $dw$  respectivamente:

$$2wz dz = \sec^2 w dw - z^2 dw \quad w dt + t dw = \frac{3t^2 dt}{\cos wt}$$
$$dz = \frac{(\sec^2 w - z^2) dw}{2wz} \quad dw = \frac{3t^2 dt - w \cos wt dt}{t \cos wt}$$

Luego

$$dz = \frac{(\sec^2 w - z^2)}{2wz} \times \frac{(3t^2 - w \cos wt) dt}{t \cos wt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{(\sec^2 w - z^2)(3t^2 - w \cos wt)}{2wzt \cos wt}$$

- Ejerc. 2.-a) Obtener  $\frac{du}{dv}$  y  $\frac{dv}{du}$  para  $u^3 + v^3 + uv = 0$   
b) Obtener  $\frac{du}{dv}$  para la función cadena  $u^2 = \tan ut$ ,  $t^5 = v^2 + 6$

3. II Derivadas de orden superior.

Dada la función  $y = x^4 + 3x^2 + 1$  al derivarla obtenemos otra función de  $x$ :  $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x$ . Si también derivamos esta función, obtenemos la función  $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = 12x^2 + 6$ , que llamamos segunda derivada de  $y$  con respecto a  $x$ . Denotamos la segunda derivada con:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ó} \quad D_x^2 y \quad \text{ó} \quad y''.$$

Igualmente podemos derivar la segunda derivada, para obtener la tercera derivada de  $y$ :  $\frac{d^3 y}{dx^3} = 24x$ . Y así, podemos seguir derivando las funciones resultantes, obteniendo:

- la derivada de primer orden  $\frac{dy}{dx}$  ó  $D_x y$  ó  $y'$   
la derivada de segundo orden  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  ó  $D_x^2 y$  ó  $y''$  ó  $y^{(2)}$   
.....  
.....  
la derivada de n-ésimo orden  $\frac{d^n y}{dx^n}$  ó  $D_x^n$  ó  $y^{(n)}$

Para denotar el contravalor correspondiente a  $5$  de la tercera derivada, usamos la notación  $\frac{d^3 y}{dx^3}(5)$  y análogamente para las otras derivadas.

Ejerc. 1.-a) Obtenga las 4 primeras derivadas de  $(2x+1)^2$ ,  $\frac{1}{u}$ ,  $\text{sen } 2v$ .

Luego, dada cualquier función  $z(x)$ , su primera derivada  $\frac{dz}{dx}$  es una función de  $x$ . Derivando esta función, obtenemos otra función  $\frac{d^2 z}{dx^2}$  llamada segunda derivada, y así sucesivamente podemos seguir derivando, para obtener la derivada de cualquier orden de la función  $z(x)$ . El símbolo  $\frac{d^2 z}{dx^2}$  ya no representa un cociente de  $d^2 z$  entre  $dx^2$ , como sucede en el caso de  $\frac{dy}{dx}$ , sino representa una abreviación de  $\frac{d}{dx}(\frac{dz}{dx})$  juntando las dos letras  $d$  y las dos  $dx$ . Análogamente para  $\frac{d^3 z}{dx^3}$ , es una abreviación de  $\frac{d}{dx}(\frac{d^2 z}{dx^2})$ .

Por esta razón no se consideran segundas (o terceras) diferenciales  $d^2 z$  como podríamos esperar por analogía con  $\frac{dz}{dx}$ .

Ya vimos que la relación que existe entre la primera derivada de una función y la pendiente de su curva; en el siguiente capítulo veremos la relación que existe entre la segunda derivada y la convexidad de la curva.

Ejerc. 2.-Obtenga  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  para  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  y grafique las dos curvas

Encuentre alguna relación entre la concavidad y los contravalores de  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Para obtener la segunda derivada de una función  $z(y)$  dada implícitamente, como  $z^3 + z = 2y$ , tenemos derivando:

$$3z^2 \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dy} = 2 \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{3z^2 + 1}$$
$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{0 - 2(6z z')}{(3z^2 + 1)^2} = \frac{-12z z'}{(3z^2 + 1)^2}$$

donde podemos sustituir  $z'$  por su expresión, obteniendo:  
$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{-12z}{(3z^2 + 1)^2} \times \frac{2}{3z^2 + 1} = \frac{-24z}{(3z^2 + 1)^3}$$

Ejerc. 3.-Obtener  $\frac{d^2 w}{dv^2}$  para  $w^3 y = w + y$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALEJANDRO H. Y. S."  
Apto. 1005, Montemorelos, N.L., México

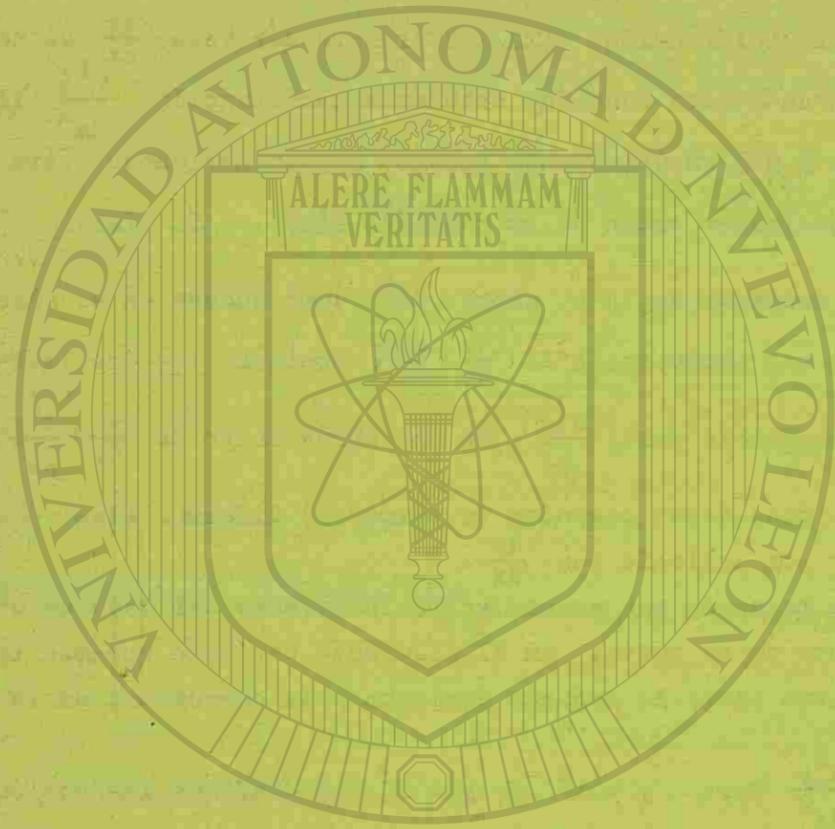
SECCION 3.1

PROBLEMAS

En las siguientes funciones

- a) Expresé la función, denotando la signación con una flecha.
- b) Dé el dominio.
- c) Dé el contradominio.
- d) Dé tres valores y sus correspondientes contravalores:

- 1) A cada futbolista le asigna el número de su camiseta.
- 2) A cada futbolista le asigna los colores de su equipo.
- 3) A cada futbolista le asigna la mascota de su equipo.
- 4) A cada futbolista le asigna su apodo.
- 5) A cada futbolista le asigna el número de huesos que le han roto.
- 6) A cada futbolista le asigna el número de pies que tiene.
- 7) A cada futbolista le asigna el peso en miligramos de su cerebro.
- 8) A cada futbolista le asigna el nombre de su "coach".
- 9) A cada alumno le asigna la carrera que estudia.
- 10) A cada alumno le asigna la compañera de clase mas próxima.
- 11) A cada ciudad le asigna el país a que pertenece.
- 12) A cada país le asigna el continente al que pertenece.
- 13) A cada continente le asigna el país de mayor superficie que contiene.
- 14) A cada alumno de la clase le asigna la artista que mas le complace.
- 15) A cada país le asigna su libertador.
- 16) A cada año le asigna el Presidente de la República de ese año.
- 17) A cada nación le asigna su dirigente actual.
- 18) A cada alumno le asigna su profesor de inglés o de francés.
- 19) A cada número le asigna el triple de ese número.
- 20) A cada número le asigna el triple de su recíproco.
- 21) A cada número le asigna su cuadrado menos dos.
- 22) A cada número le asigna su cuadrado mas siete, entre cinco.®
- 23) A cada número le asigna su cubo mas el cuadrado de su mitad.
- 24) A cada número le asigna  $\pi$  veces el número.
- 25) A cada número le asigna  $\sqrt{2}$  veces el número, menos cuatro.
- 26) A cada número le asigna  $\sqrt{5}-1$  veces la cuarta potencia del número.
- 27) A cada número le asigna el número a la potencia  $3+\sqrt{2}$ .
- 28) A cada número le asigna  $\sqrt{5}-\pi$  veces el número.
- 29) A cada número le asigna  $x$  veces el número.
- 30) A cada número le asigna el cubo del número, entre  $\underline{x}$ .
- 31) A cada número  $g$  le asigna  $\ln g$ .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

- 32) A cada número h le asigna  $2^h$ .  
 33) A cada número f le asigna  $2^{f\sqrt{f}}$ .  
 34) A cada número m le asigna 4.  
 35) A cada número n le asigna  $a^2$ .  
 36) A cada número a le asigna  $\text{sen } a$ .  
 37) A cada número p le asigna  $\frac{p^2 - 1}{p + 1}$ .  
 38) A cada número z le asigna  $\frac{3z^2 - 2z^3 + 3}{\sqrt{2} z^4 - 5}$ .  
 39) A cada número y le asigna  $(y - 2)(y + 1)$ .  
 40) A cada número w le asigna  $(w - 1)^2(w + 3)^3$ .  
 41) A cada número le asigna el producto del número por el logaritmo de él.  
 42) A cada número u le asigna  $\text{sen } u + \ln u$ .  
 43) A cada número s le asigna  $s$ .  
 44) A cada número t le asigna  $q$ .  
 45) A cada número k le asigna  $xk$ .  
 46) A cada número d le asigna  $d + y$ .  
 47) A cada número b le asigna  $b^a$ .  
 48) A cada número c le asigna  $4c - y + 3z$ .  
 49) A cada número e le asigna  $ae - k$ .  
 50) A cada número x le asigna  $yx - 3z - b(cx - dy)$ .

En los siguientes ejercicios se expresa una función de una de tres maneras: denotando la asignación con una flecha, denotando la función con el contravalor, y denotándola a través de una ecuación:

a) Denotarla de las dos maneras restantes.

b) Dar a la variable independiente los valores 0, -3, 4,  $\sqrt{3}$ , y encontrar los contravalores correspondientes.

c) Dar el valor de la variable independiente al cual se le asigna el contravalor 0; el contravalor 2;

- 51)  $a \longrightarrow a - 1$   
 52)  $b \longrightarrow \frac{3 - b}{2 + b}$   
 53)  $c \longrightarrow \log c^2$   
 54)  $d \longrightarrow d^3 \text{ sen } d$   
 55)  $e \longrightarrow \frac{1}{a} + 4d^2$   
 56)  $f \longrightarrow \sqrt{f - 1} + 4f$   
 57)  $g \longrightarrow \frac{g^3 + a}{g}$   
 58)  $\frac{h + 2}{3h}$   
 59)  $\frac{i^2 - i}{3i}$   
 60)  $\frac{3j + 7}{2j - 1}$   
 61)  $\sqrt{k(k - \ln k^3)}$   
 62)  $\sqrt{m^2 - 1} + \text{sen } m$ .

- 63)  $n = 4m$ ;  $n(m)$   
 64)  $p = 3q - 4$ ;  $p(q)$   
 65)  $q = r^2 - 1$ ;  $q(r)$ .  
 66)  $r = \sqrt{s - x}$ ;  $r(s)$ .  
 67)  $s = -t \log t$ ;  $s(t)$ .  
 68)  $t = u^2 \text{ sen } u^3$ ;  $t(u)$ .  
 69)  $u = 5bv$ ;  $v(u)$ .  
 70)  $v = 2w - 4a$ ;  $w(v)$ .  
 71)  $w = -x^3 + \sqrt{2}$ ;  $x(w)$ .  
 72)  $\frac{2x}{w} - 5y + 1 = 0$ ;  $x(y)$ .  
 73)  $-y + 4z + 2 = 0$ ;  $y(z)$ .  
 74)  $z^2 - a = 0$ ;  $z(a)$ .  
 75)  $3y - 4 = 0$ ;  $y(x)$ .  
 76)  $2a - b = 0$ ;  $a(z)$ .  
 77)  $3m - k = 0$ ;  $k(y)$ .  
 78)  $3m - k = 0$ ;  $k(y)$ .

A continuación se dan ecuaciones a través de las cuales denotamos las funciones indicadas:

a) Dar tres miembros de las familias que se señalan.

b) Para cada miembro así obtenido, dar tres valores a la variable independiente y encontrar los contravalores correspondientes.

c) A partir de los resultados anteriores obtener 3 soluciones de la ecuación que se emplea para denotar la función.

- 79)  $x^2 + ay - 1 = 0$ ;  $x(y)$ .  
 80)  $az - 4w + 3 = 0$ ;  $z(w)$ .  
 81)  $a + w - x = 0$ ;  $w(a)$ .  
 82)  $a + w - x = 0$ ;  $a(w)$ .  
 83)  $ax^2 - b = 2v$ ;  $a(v)$ .  
 84)  $ax^2 - b = 2v$ ;  $v(a)$ .  
 85)  $\frac{3}{k+a} - \frac{2}{h-b} = 1$ ;  $h(k)$ .  
 86)  $\frac{3}{k+a} - \frac{2}{h-b} = 1$ ;  $k(h)$ .  
 87)  $x^3 - \frac{2b}{g} = 3$ ;  $b(g)$ .  
 88)  $x^3 - \frac{2b}{g} = 3$ ;  $g(b)$ .  
 89)  $f^3 = mj$ ;  $f(j)$ .  
 90)  $f^3 = mj$ ;  $j(f)$ .  
 91)  $n^3 d^2 - z^4 r^2 = 0$ ;  $d(r)$ .  
 92)  $n^3 d^2 - z^4 r^2 = 0$ ;  $r(d)$ .  
 93)  $ay - 1 = c$ ;  $a(x)$ .  
 94)  $a^2 b - d = 0$ ;  $a(x)$ .  
 95)  $mn - k = f$ ;  $k(y)$ .  
 96)  $3k + 2a - b = 0$ ;  $k(y)$ .

97) En las siguientes parejas de números, la función  $x(a)$  al primer número de la pareja, le asigna el segundo:

- (2, 3); (-5, 1); (3, 2); ( $\sqrt{3}$ , 4);  $(-\pi, 5)$ ; ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ); (3, -6); (1, -3); (2, -8); (-8, 6); (1000, 1/2); (1/2, -12); (300, -400); (-1.01, 1.02).

Considerando la función  $a(x)$ , diga cuanto valen:

- $a(3)$ ;  $a(2)$ ;  $a(-8)$ ;  $a(-12)$ ;  $a(1/2)$ ;  $a(0)$ ;  $a(-6)$ ;  $a(\sqrt{3})$ ;  $a(-5)$ .

98) Como en el problema anterior, la función  $w(b)$  está dada por las siguientes parejas:

- (-3, 3); (-2, 5); (-1, 1/2); (0, -2); (1, -3); (2, -5); (3, -4); (4, 10);

Diga cuanto valen:  $w(4)$ ;  $w(2)$ ;  $w(-1)$ ;  $w(1/2)$ ;  $w(.05)$ ;

- $b(3)$ ;  $b(-4)$ ;  $b(10)$ ;  $b(1)$ ;  $b(-1)$ .

Grafique la función  $w(b)$ .

SECCION 3.2  
PROBLEMAS

Graficar las siguientes funciones (se indica la variable independiente).  
Localizar los puntos máximos o mínimos.  
Analizar el crecimiento de la función para tres valores de la variable ind.  
Dar intervalos en que la función crece monótonamente.

- 1)  $3a - 2$  ;  $a$
- 2)  $6w + 3$  ;  $w$
- 3)  $-z + 4$  ;  $z$
- 4)  $-\frac{2}{3}b - 1$  ;  $b$
- 5)  $-\frac{7}{5}f + 4$  ;  $f$
- 6)  $3(g - \frac{1}{2}) + 2g - \frac{4}{3}$  ;  $g$
- 7)  $3$  ;  $x$
- 8)  $a$  ;  $y$
- 9)  $\sqrt{3m - 1}$  ;  $m$
- 10)  $\sqrt{py + 3}$  ;  $y$
- 11)  $y - y_0$  ;  $y$
- 12)  $ax - b$  ;  $x$
- 13)  $x^2 - 5x$  ;  $x$
- 14)  $\sqrt{2x^2 + x - 1}$  ;  $x$
- 15)  $-ya^2 + 5a - 3$  ;  $a$
- 16)  $w^3 - 3w + 1$  ;  $w$
- 17)  $-2v^3 + v^2 - 3$  ;  $v$
- 18)  $m^4 + 3m^2 + 1$  ;  $m$
- 19)  $\frac{x+1}{x}$  ;  $x$
- 20)  $\frac{x^2}{x-1}$  ;  $x$
- 21)  $\sqrt{\frac{w}{w+3}}$  ;  $w$
- 22)  $\sqrt{\frac{z-3}{z+4}}$  ;  $z$
- 23)  $\frac{1}{b^2 - 3b - 4}$  ;  $b$
- 24)  $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + a - 1}$  ;  $a$
- 25)  $\frac{y^3 + 2}{y^2 - 4}$  ;  $y$
- 26)  $\frac{c}{3c - 2c^2}$  ;  $c$
- 27)  $\frac{k}{k+1} - \frac{1}{k}$  ;  $k$
- 28)  $a = \frac{5b+4}{b}$  ;  $a(b)$
- 29)  $a = \frac{5b+4}{b}$  ;  $b(a)$
- 30)  $f - g = \frac{2}{3f+4}$  ;  $g(f)$
- 31)  $f - g = \frac{2}{3f+4}$  ;  $f(g)$
- 32)  $y = \text{sen } x$  ;  $y(x)$
- 33)  $z = w \log w$  ;  $z(w)$
- 34)  $v = r^2 \text{sen } r$  ;  $v(r)$
- 35)  $u = \text{sen } b (\cos b^2)$  ;  $u(b)$
- 36)  $k = \frac{\tan x}{1 - \log x}$  ;  $k(x)$
- 37)  $t = \sqrt{\text{sen } r}$  ;  $t(r)$
- 38)  $s = k^2 \text{sen } k^2$  ;  $s(k)$
- 39)  $g = 1 + \tan^2 f$  ;  $g(f)$
- 40)  $d = \frac{x^3}{\cos x}$  ;  $d(x)$
- 41)  $b = \frac{2 + \text{sen } \tilde{n}}{\cos \tilde{n} - 1/2}$  ;  $b(\tilde{n})$
- 42)  $a = 2^x + \log x$  ;  $a(x)$

SECCION 3.3  
PROBLEMAS

En los siguientes problemas se da una función, una abscisa inicial, y un incremento de la variable independiente; encontrar:

- a.- Contravalores inicial y final.
- b.- Incremento de la variable dependiente.
- c.- ¿Crece o decrece la función, en el intervalo dado?.

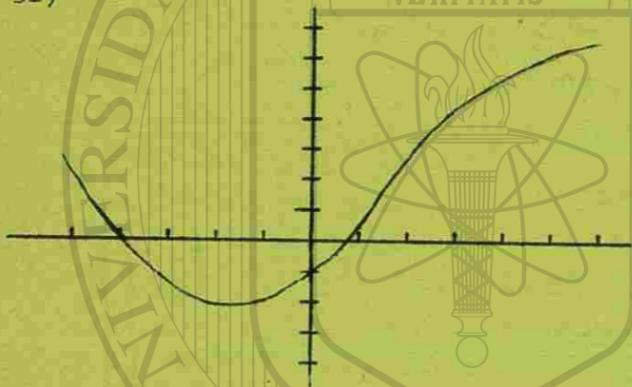
- 1)  $y(x) = 6$  ;  $x = 4$  ;  $\Delta x = 2$  .
- 2)  $w(y) = 4$  ;  $y = 3$  ;  $\Delta y = -5$  .
- 3)  $y(w) = 2w$  ;  $w = -1$  ;  $\Delta w = 0.9$  .
- 4)  $a(b) = 3b + 2$  ;  $b = -5$  ;  $\Delta b = -\frac{1}{2}$  .
- 5)  $b(a) = 2 - \frac{a}{3}$  ;  $a = 5/3$  ;  $\Delta a = -3/5$  .
- 6)  $a(r) = \frac{2r}{7} + \frac{7}{3}$  ;  $r = -\frac{7}{2}$  ;  $\Delta r = 2/9$  .
- 7)  $r(s) = s^2$  ;  $s = 2$  ;  $\Delta s = -1$  .
- 8)  $s(r) = 3r^2 + 1$  ;  $r = -6$  ;  $\Delta r = 2$  .
- 9)  $z(d) = d^2 + 3d - 1$  ;  $d = 2$  ;  $\Delta d = 1$  .
- 10)  $d(z) = 2z^2 - z + 2$  ;  $z = -3$  ;  $\Delta z = 2$  .
- 11)  $m(q) = \log q$  ;  $q = 100$  ;  $\Delta q = -90$  .
- 12)  $q(m) = 2^m$  ;  $m = 5$  ;  $\Delta m = -2$  .
- 13)  $g(h) = \text{sen } h$  ;  $h = \pi$  ;  $\Delta h = \frac{\pi}{3}$  .
- 14)  $h(g) = 3 \cos g^2$  ;  $g = \frac{3\pi}{4}$  ;  $\Delta g = -\frac{\pi}{6}$  .
- 15)  $k(f) = f \tan f$  ;  $f = \frac{\pi}{5}$  ;  $\Delta f = \frac{6\pi}{7}$  .
- 16)  $f(k) = \frac{5}{k} + 2$  ;  $k = -7$  ;  $\Delta k = -1$  .
- 17)  $p(t) = -\frac{2}{t^2} + 3$  ;  $t = 1/8$  ;  $\Delta t = 1/16$  .
- 18)  $t(p) = \frac{\text{sen } p}{p}$  ;  $p = 0.01$  ;  $\Delta p = -0.0099$  .
- 19)  $u(w) = -\frac{\cos w}{1+w}$  ;  $w = -10\pi$  ;  $\Delta w = 10\pi$  .
- 20)  $w(v) = \frac{3v - 2}{4v^2 + 1}$  ;  $v = 3$  ;  $\Delta v = 1$  .
- 21)  $v(z) = (1 - \cos z)(z^2 + 2)^{-1}$  ;  $z = 3\pi$  ;  $\Delta z = -\pi$  .
- 22)  $z(y) = \sqrt{y+3}$  ;  $y = 6$  ;  $\Delta y = -2$  .
- 23)  $y(z) = (z^2 + 2)^{1/2}$  ;  $z = 5$  ;  $\Delta z = 1$  .
- 24)  $w(a) = \sqrt{\frac{a}{a-2}}$  ;  $a = 5$  ;  $\Delta a = -3$  .
- 25)  $a(w) = \sqrt{\frac{w+3}{w-1}}$  ;  $w = 3$  ;  $\Delta w = -1$  .
- 26)  $x(y) = ay + 2$  ;  $y = 2a$  ;  $\Delta y = -a^2$  .

- 27)  $y(x) = 3b - x$  ,  $x = b - 2$  ,  $\Delta x = 1/b$
- 28)  $w(a) = \frac{x}{a} + 1$  ,  $a = 3x + 2$  ,  $\Delta a = -x + x^2$  .
- 29)  $a(w) = yw + b$  ,  $a = y - \frac{6}{y}$  ,  $\Delta a = \frac{b}{2}$
- 30)  $z(b) = pb^2 - a$  ,  $b = p^{-1}$  ,  $\Delta b = 1$  .

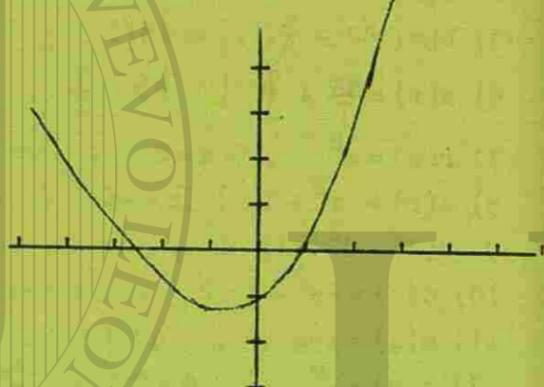
En las siguientes gráficas, para los siguientes valores:  $x = 2$  ,  $\Delta x = 1, -1, 1/2, -7/3$  ;  $x = -1$  ,  $\Delta x = 0.05, -3, 4, -1, -0.001$

- a) Dar los contravalores inicial y final.
- b) Dar el incremento de  $y$  .
- c) ¿Crece o decrece la función en el intervalo dado?

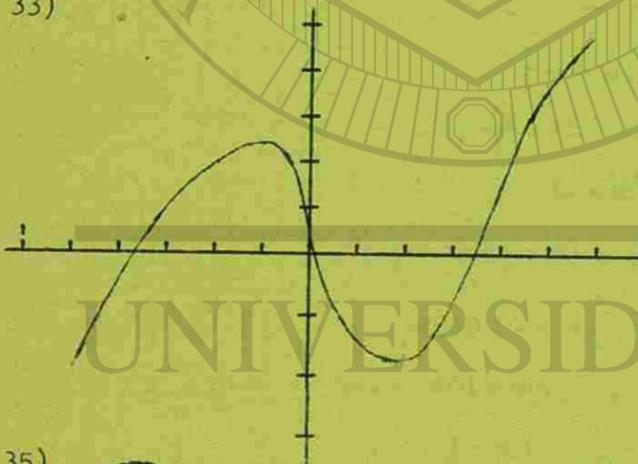
31)



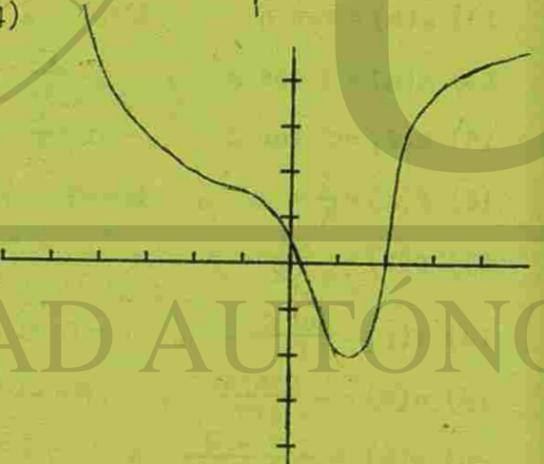
32)



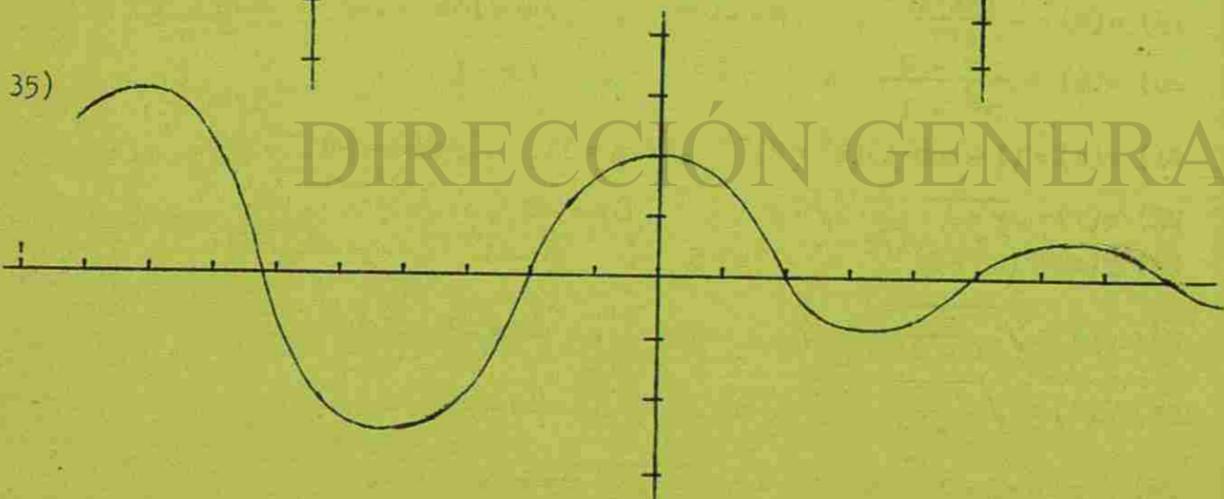
33)



34)



35)



En los siguientes problemas se dá una función. Calcular:

- a)  $\Delta y$  en términos de  $\underline{x}$  y  $\underline{\Delta x}$  .
- b)  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  en términos de  $\underline{x}$  y  $\underline{\Delta x}$  .
- c)  $\frac{\Delta y(x, \Delta x)}{\Delta x}$  para  $\Delta x = 1, 0.5, 0.1, 0.001, 10^{-6}$  .
- d) La pendiente de la curva en el punto  $(x,y)$  de la curva.
- e) La pendiente de la curva en los puntos de abscisa 2, -1,  $5/2$ .

36)  $y(x) = 2x + 3$

37)  $y(x) = 3x^{-1}$

38)  $y(x) = 2x^2 + 1$

39)  $y(x) = 5$

40)  $y(x) = b$

41)  $y(x) = x + \frac{1}{x}$

En los siguientes problemas, las mismas preguntas anteriores, con los cambios de letras apropiados:

42)  $w(h) = \frac{1}{h-3}$

43)  $h(w) = \frac{w}{w-2}$

44)  $g(f) = 2^f$

45)  $f(g) = 3^{g+1}$

46)  $k(z) = \frac{3}{z} + 22z$

47)  $z(k) = k$

48)  $u(v) = v^2$

49)  $v(u) = u^3$

50)  $d(x) = -x^4$

51)  $x(d) = d^5$

52)  $y(a) = a^{-1}$

53)  $a(y) = y^{-2}$

54)  $h(r) = r^{-3}$

55)  $r(h) = h^2 + h - 1$

56)  $z(q) = xq - a$

57)  $q(z) = 2z^{-1} + 3 - 2z$

58)  $t(p) = rp - a$

59)  $p(t) = ht^2 - t$

60)  $a(f) = yf + f^2$

61)  $f(a) = wa^{-1} + ba$

62)  $g(b) = \frac{3b}{k} - 6$

63)  $c(s) = vs - bs^2 - 3$

64)  $h(u) = u - 3u^2 + gu$

65)  $u(h) = 2y^{-1} + h^{-1}$

66)  $j(e) = e - e^{-1} + h$

67)  $e(j) = \tilde{n} - 41j$



UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 "ALFREDO VAYTES"  
 Apdo. 1523 Monterrey

PROBLEMAS  
SECCION 3.4

A.- En las siguientes sucesiones

- Grafique algunos puntos en una escala real.
- Diga si la sucesión converge a un límite o no. Dé ese límite.
- Diga si la sucesión es divergente, en cuyo caso señale si diverge a  $\infty$  ó a  $-\infty$ , o si hay puntos de acumulación:

- $3, 6, 9, \dots, 3n, \dots$
- $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3n}, \dots$
- $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{(-1)^n(n+1)}{n}, \dots$
- $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$
- $-1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots$
- $\pi, \sqrt{2}, -1, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$
- $-1, -\pi, 8, -6, -6, -6, \dots, -6, \dots$
- $74, -2, -51, 77, 1, 2, 3, 4, \dots, \dots$
- $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$
- $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{6}{5}, \dots, -1 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

B.- En los siguientes problemas aparecen parejas de expresiones que denotan cada una, una sucesión.

- Dar los 4 primeros términos de cada sucesión y el límite si lo hay.
- Dar la suma, resta, producto y cociente de cada par de sucesiones y el límite de cada resultado si lo hay:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1) $n; \frac{1}{n}$                                 | 2) $\frac{1}{n^2}; \frac{n+2}{n}$               | 3) $\frac{k-1}{k^2}; 3k+1$                    |
| 4) $p^3; \frac{(-1)^p}{p^2}$                        | 5) $(-p)^3; \frac{3p-4}{p}$                     | 6) $\frac{(-1)^m}{m}; \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}$ |
| 7) $\frac{(-1)^{n-1}}{(0.5)^n}; (1.5)^n$            | 8) $\frac{8n^2}{n-4}; n-4$                      | 9) $\frac{m^3-2m+1}{m^2+3}; m^2+3$            |
| 10) $\frac{3n^2-n+6}{2n^3-5n^2+3}; \frac{n-1}{n+2}$ | 11) $\frac{m-1}{m^2+3}; \frac{3m^2-4m+1}{5m+6}$ | 12) $\frac{2m^4-3m+1}{3n-1}; \frac{1}{n+2}$   |

C.- Conteste las siguientes preguntas:

- ¿Qué es una sucesión?
- ¿Qué es una sucesión infinita?
- ¿Cuáles son los términos de una sucesión?
- ¿Cómo define Ud. el límite de una sucesión?
- ¿Cómo define sucesión convergente?
- ¿Qué significa la frase: "la sucesión  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  converge al límite  $K$ ?"
- ¿Qué significa el símbolo  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ?
- Explique el significado de cada una de las partes de tal símbolo.
- ¿Cuándo una sucesión es divergente (no convergente)?
- ¿Qué es punto de acumulación de una sucesión?
- ¿Qué es cota superior de un conjunto de números?
- Dé una cota superior del conjunto de números:  $-5, 7, \pi, 3$ .
- Defina cota inferior de un conjunto de números.
- Dé una cota inferior del conjunto de números:  $-900, .01, .003, \pi, 2$ .
- ¿Qué significa la frase: "la sucesión  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  diverge a menos infinito?"
- ¿Qué significa el símbolo  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ ?

PROBLEMAS  
SECCION 3.5

En los siguientes problemas se dá una función. Calcular:

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  y evaluar ese límite para  $x=3, -2, \pi, 0.5$ .
- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 1) $y(x) = 3x+2$                              | 2) $y(x) = x^2-7$                 |
| 3) $y(x) = 5$                                 | 4) $y(x) = 1-x+x^2$               |
| 5) $y(x) = -2x^2+x-3$                         | 6) $y(x) = x$                     |
| 7) $y(x) = x^2$                               | 8) $y(x) = x^3$                   |
| 9) $y(x) = x^4$                               | 10) $y(x) = x^{-1}$               |
| 11) $y(x) = x^{-2}$                           | 12) $y(x) = x^{-3}$               |
| 13) $y(x) = x^{-4}$                           | 14) $y(x) = x+x^{-1}$             |
| 15) $y(x) = \frac{2x}{7} - \frac{3}{2x} + 6a$ | 16) $y(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x}$ |

17)  $y(x) = zx - b$

18)  $y(x) = \frac{1}{ax} - zx$

19)  $y(x) = cx - mx^2$

20)  $y(x) = 3vx^{-1} + bx$

Para las siguientes funciones, calcular la derivada, y evaluarla para los valores de la variable independiente  $-1, 4, 3/2, -\pi, \sqrt{3}, 1$ .

21)  $h(k) = k^{-2}$

22)  $g(f) = \frac{3}{2h} + 1$

23)  $f(g) = 3g^2 - 2$

24)  $g(f) = -2f^2 + 1$

25)  $a(x) = x^{-1}$

26)  $x(a) = a^{-2}$

27)  $z(w) = 3w - \pi$

28)  $w(z) = \pi z^2 - 2$

29)  $2a - 4$

30)  $a^{-1} - 3$

31)  $\pi x + 4x^{-1}$

32)  $y - 2(y^{-1} + 3)$

33)  $2a - ay + 4 = 0, y(a)$

34)  $a(3 - x) + 4 = a; a(x)$

35)  $2pz - 3p + 5 = 2z; z(p)$

36)  $2pz - 3p + 5 = 2z; p(z)$

37)  $w \rightarrow w + \frac{2}{w_1}$

38)  $y \rightarrow 2y^2 - y$

39)  $a \rightarrow \frac{3}{a} + \frac{1}{2}$

40)  $x \rightarrow 3a - b$

41)  $2x - y = 4; y(z)$

42)  $3a + b = 2; a(x)$

43)  $y \rightarrow a - 1;$

44)  $b \rightarrow z^2$

45)  $z \rightarrow az - b$

46)  $y \rightarrow zy + 4a$

47) Para las funciones del (1) al (46) calcular:

(a) La pendiente de la curva

(b) Evaluarla para los valores de la variable indep.  $4, 0.5, -\frac{2}{3}, \pi,$

Graficar cada pareja de funciones indicadas, analizando la relación entre una y otra curva.

48)  $y(x) = 3x; y'(x)$

49)  $y(x) = \frac{x}{2}; \frac{dy}{dx}$

50)  $y(x) = 3x + 2; \frac{dy}{dx}$

51)  $y(x) = \frac{5}{2}x - 3; \frac{d}{dx}(y)$

52)  $w(z) = xz; \frac{dw}{dz}$

53)  $z(w) = \frac{1}{w}; \frac{dz}{dw}$

54)  $a(b) = b^2 - 2; \frac{da}{db}$

55)  $b(a) = 3 - \frac{1}{a}; D_a(b)$

56)  $g(h) = \frac{1}{h-1}; g'(h)$

57)  $h(g) = \frac{2}{3g-1}; h'(g)$

58)  $k(z) = 3; \frac{dk}{dz}$

59)  $z(k) = a; \frac{dz}{dk}$

60)  $m(n) = \frac{a}{n}; m'(n)$

61)  $n(m) = \frac{x}{m} - 3y; n'(m)$

62)  $f(z) = \frac{a}{z} - yz; D_z(f)$

63)  $z(f) = \frac{y}{f} - af + x; \frac{dz}{df}$

64)  $a - b + 4 = 0; \frac{da}{db}$

65)  $3x^2 - 2w + 3 = 0; \frac{dw}{dx}$

66)  $wg - 4 = 0; D_g(w)$

67)  $\frac{3}{y} = 4x; \frac{d}{dx}(y)$

68)  $3(g - x^2) + x(g - 2) = xg; g'(x)$

69)  $\frac{2}{(1+x)y} = 1; y'(x)$

70)  $y - \frac{x+1}{x-1} = 0; \frac{dy}{dx}$

SECCION 3.6  
PROBLEMAS

- Obtenga la derivada de las siguientes funciones
- Calcule tal derivada para tres distintos valores de la variable independiente.
- Calcule la pendiente de la gráfica de la función, en el punto de abscisa  $3, 0, -\pi$
- Dar la ecuación de la tangente a la curva en los puntos anteriores.

1)  $y = 5x;$

2)  $y = 2 + 3;$

3)  $z = \frac{3v}{4} - 1$

4)  $k = 3h(h + 4)$

5)  $f = (4g - 2)(2g + 1)$

6)  $z = \frac{2}{u}$

7)  $v = \frac{5 - z}{z}$

8)  $v = \frac{w}{w+2}$

9)  $h = 3m^8$

10)  $m = 5q$

11)  $f = 2a^2 - 5a$

12)  $b = -5d^2 - 3d + 1$

13)  $v = 3s^3 + 5s^2 - 1$

14)  $h = 5c^3 - 3c + 6$

15)  $j = r^4 + 3r - 10$

16)  $z = 3w^5 - 15w^2 + 3w$

17)  $a = \pi z^3 - 3\sqrt{2}z^2 - \sqrt{5}$

18)  $q = -3p^6 + 4p^5 - 3\pi\sqrt{2}p + 1$

19)  $b = -3ya^2 - 4k; b(a)$

20)  $x = -\pi ay^3 - by^2 + c; x(y)$

21)  $h = (-3x + 2)(\pi x - 3)$

22)  $k = (3y - \lambda)(3y + 8); k(y)$

23)  $k = z^2(3z + 1)$

24)  $m = -5n^3(3n^2 + 2)$

25)  $q = -\pi r^6(2r^3 + 3)$

26)  $g = x(x + 3)(x + 2)$

27)  $y = \frac{3x}{2x-3}$

28)  $z = \frac{3w(w+1)}{w^2}$

29)  $w = \frac{5b+3}{b(b-3)}$

30)  $v = \frac{13}{(c-1)(c+2)}$

31)  $y = \frac{h-3}{h(2h+4)}$

32)  $t = \frac{(p-4)p}{2p+7}$

33)  $s = \frac{x(3x-4)(2k+5)}{x-3}$

34)  $w = (2h^2+3)^4$

35)  $k = \frac{3p}{p+2} - \frac{5p+3}{2p}$

36)  $y = (w+3)^2 + \frac{4w}{w+1}$

37)  $x = \frac{3z-4}{z} + \frac{z^3}{3z-4}$

38)  $v = -2z^3 + z^2 - \frac{1}{z} + 4$

39)  $v = 5x^{-5} - 3x^{-4} + x^3 - x$

40)  $3x^{-8} - x - 4^{-3} + x^{-2}$

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

41)  $q = (3x^2 - 2x + 1)^2, q(x)$

42)  $y = (ab^2 - \sqrt{3})^3, y(b)$

43)  $x = (zq^2)^3 - (aq - 3)^2, x(q)$

44)  $z = 3a - \lambda(2a - 1)^2, z(a)$

45)  $3y - a + xy - 4 = 0, y(x)$

46)  $-3c + 4a - \pi x - a^2 x = 0, x(a)$

47)  $b = -3(5x^2 + x - 1)^2 - (3x + 2)^{-3}$

48)  $y = (3p + \pi)^2 p^{-2}, y(p)$

49)  $x = \left(\frac{3\pi y - 1}{y + b}\right)^4$ ,  $x(y)$ .

51)  $\left(\frac{\pi v^3 + 1}{v}\right)^4$ ,  $v$  indep.

53)  $c - x^2 - 5x + y = 3xy$ ,  $y(x)$

55)  $w = \sqrt{x+a}$ ,  $w(x)$ .

57)  $y = (ax - b)^{1/2}$ ,  $y(x)$

59)  $u = \sqrt{(2x^2 - \pi)^3 + a^2}$ ,  $u(x)$

60)  $u - 3b + 4ab - ux + 1 = 0$ ,  $u(b)$

63)  $y = 3x^2 + 2 + f(x)$ ,  $y(x)$ .

65)  $a = xb^2 \cdot y(b)$ ,  $a(b)$ .

67)  $m = u^3 \cdot \text{sen } u$ ,  $m(u)$ .

69)  $k = f(\sec x)^8$ ,  $k(x)$ .

71)  $m = \frac{k}{n} - (\cos n)^2$ ,  $m(n)$ .

73)  $u = (x^2 - 3)b - 3^x$ ,  $u(x)$ .

75)  $a - bz + 4 - z + 5b = y - 3$ ,  $z(b)$ .

77)  $tbc + y + tdg = b^2$ ,  $c(b)$ .

79)  $\frac{4w}{w+a} - \frac{3}{w-a} = 4$ ,  $w(a)$ .

81)  $d = (z^2 - 3z)^2 (3z^3 + 2)^2$

83)  $v = \frac{(3a-4)^3 (a^2-6)^4}{(a-2)^2}$

85)  $q = \left(-\frac{2}{3}y^2 + \frac{5}{7}\right)^{-8} \left(\frac{3}{5}y^3 + 1\right)^3$

87)  $w = \frac{1}{(\lambda-2)(\lambda+3)}$

89)  $b = \frac{(g-3)^2 - g^7}{g - \frac{2}{g}}$

50)  $(ax^2 - 5x)^3 (bx + 7c)^{-1}$ ,  $x$  indep.

52)  $\frac{(z^2 - 3z + y)^{-4}}{wz + 6x}$ ,  $z$  indep.

54)  $au - 3u^2 + w = -3uw + 2b$ ,  $w(u)$ .

56)  $z = (3w^2 + w)^{1/3}$ ,  $z(w)$ .

58)  $a = 3\sqrt{bx - x^2}$ ,  $a(x)$

60)  $y = (-3d^2 - 4d)^{3/5}$ ,  $y(d)$ .

62)  $ay - gx^2 = h^3b + 4a - y$ ,  $a(y)$ .

64)  $z = 4w^3 - 3w - g(w)$ ,  $z(w)$ .

66)  $b = \sqrt{yx^2} \cdot z(x)$ ,  $b(x)$ .

68)  $z = (y^2 + 3) \cdot \tan y$ ,  $z(y)$ .

70)  $y = h \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - k$ ,  $y(x)$ .

72)  $a - 3 \text{sen } z + az - 2x = y$ ,  $a(z)$ .

74)  $b = \pi^y (y^2 + 3y)$ ,  $b(y)$ .

76)  $gk - 7 + 3ky = g + ak$ ,  $k(g)$ .

78)  $y - 4az - 3w - 5 = awz^3$ ,  $w(z)$ .

80)  $(x-y)(x+3ay) = x^2 - b^2$ ,  $x(y)$ .

82)  $\lambda = (a+2)(a-3)(a+4)(a-\pi)(a+\sqrt{2})$

84)  $f = \frac{3g-2}{4g+1} - \frac{3g}{g-3} + g^{-6}$

86)  $j = \left(\frac{13k}{7} - \frac{2k^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}k - 3\right)^{-3}$

88)  $c = \frac{x+5}{(x-2) - \frac{2}{x} + x^3}$

90)  $s = \frac{3r^2 - r + 5}{2r^2 + r + 1}$

Para las siguientes funciones encontrar: a) La derivada. b) Evaluar la derivada para  $x=2, -1, \sqrt{3}$ . c) Calcular la pendiente de la gráfica en el punto de abscisa 3. d) Dar la ecuación de la tangente en el punto de abscisa 3. e) ¿Para qué valores de  $x$  la pendiente vale 4? f) ¿Para qué valores de  $x$  la pendiente vale cero? g) Para qué valores de  $x$  la gráfica tiene puntos máximos o mínimos? h) ¿Para qué valores de  $x$ , la función es creciente? i) Para qué valores de  $x$  la pendiente es  $\infty$ ?

91)  $y = x^3 - x^2 + x + 1$

93)  $y = \frac{(x-5)^2}{x+4}$

92)  $y = \frac{x^2 - x + 3}{x-2}$

94)  $y = ax^2 - 3x + 1$

95) Para la función  $y = \frac{x+1}{x}$  encontrar:  $y'(3)$ ,  $\frac{dy(5)}{dx}$ ,  $D_x y(-2)$ ,  $\frac{d}{dx} y(0)$ ,  $y'(x_0)$ ,  $\frac{dy(a-1)}{dx}$ .

96) Para la función  $z = \frac{-4}{w}$  encontrar  $\frac{dz(-3/4)}{dw}$ ,  $D_w z(\pi)$ ,  $z'(-\sqrt{2})$ ,  $\frac{d}{dw} z(\frac{1}{3})$ ,  $z'(-w_1)$ ,  $\frac{dz(\pi y)}{dw}$ ,  $\frac{dz(1)}{dx}$ .

97) Para la función  $a = 3b^3 - 1$  encontrar  $\frac{da(-\pi)}{db}$ ,  $a'(100)$ ,  $D_b a(-1000)$ ,  $\frac{d}{db} a(-\sqrt{3})$ ,  $a'(m-4)$ ,  $\frac{da(\lambda^{-1})}{db}$ .

98) Para la función  $g = 16f$  encontrar  $\frac{dg(0.003)}{df}$ ,  $g'(-0.0001)$ ,  $D_f g(-0.01\pi)$ ,  $\frac{d}{df} g(0.07\sqrt{2})$ ,  $g'(x^2)$ ,  $\frac{dg(-x^n)}{df}$ .

99) Para la función  $m = 3a$  encontrar  $m'(911)$ ,  $\frac{d}{dr} m(-15)$ ,  $\frac{dm(4\pi^2)}{dr}$ ,  $D_r m(\frac{6}{5}\pi)$ ,  $m'(\epsilon)$ ,  $\frac{dm(\sqrt{\lambda})}{dr}$ .

100) Para la función  $q = \frac{1}{2}s^2$  encontrar  $\frac{dq(-0.1\sqrt{2}+\pi)}{ds}$ ,  $q'(-2+\sqrt{5})$ ,  $\frac{d}{ds} q(4)$ ,  $q'(s_2)$ ,  $\frac{dq(s_n)}{ds}$ .

SECCION 3.7

PROBLEMAS

A partir de las parejas de funciones a continuación, forme la función suma, la función resta, el producto y el cociente. Para cada nueva función formada, dar dos valores, y encontrar los correspondientes contravalores.

- 1)  $x^3$ ,  $x^2$  2)  $z^4 - 1$ ,  $z^2 + z$ 
3)  $y^3 + 3y^2$ ,  $2y^{-1} - 3$  4)  $(x-3)(x+1)^{-1}$ ,  $(x+1)x^{-1}$ 
5)  $\text{sen } h$ ,  $\frac{\cos h}{2}$  6)  $d^2 - 1$ ,  $\tan d$ 
7)  $3^k$ ,  $\log(k-1)$  8)  $\sqrt{x+4}$ ,  $\log \sqrt{x+4}$ 
9)  $y(x) = ax + 2$ ,  $g(x) = 3x - 1$  10)  $z(y) = \pi$ ,  $w(y) = 2a$ 
11)  $a(b) = xb^2 - k$ ,  $c(b) = b - m$  12)  $k \rightarrow \cos \frac{k}{2}$ ,  $k \rightarrow \frac{\text{sen } k}{2}$

- 13)  $y(z) = pz$ ,  $z \rightarrow \frac{k}{z}$  14)  $m \rightarrow j$ ,  $m \rightarrow n$ 
15) ¿Denotan la misma función las expresiones  $x^2 + 1$ ,  $y^2 + 1$ ,  $z^2 + 1$ ?

16) ¿Cómo podemos definir la suma de dos funciones con diferentes letras por variable independiente? Por ejemplo, la suma de las funciones dadas por las expresiones  $7x$  y  $2b-1$ .

- 17)  $3a$ ,  $2x$  18)  $\frac{2}{g}$ ,  $4h$ 
19)  $b \rightarrow 5b - 3$ ,  $c \rightarrow 3c - 4$  20)  $y(k) = 3k - \sqrt{k}$ ,  $k(y) = \sqrt{y}$ 
21)  $q(x) = 6^x$ ,  $z(y) = 6^y$  22)  $g(a) = 6a - m$ ,  $a(z) = z + k$ 
23)  $g \rightarrow 2^g$ ,  $h(p) = 2^g$  24)  $z \rightarrow a \text{ sen } z^2$ ,  $a \rightarrow a^2 \text{ sen } z$ . 11

En cada ejercicio a continuación, se dá una función, descompóngala en

la suma de dos funciones, en el producto de otras dos, en el cociente.

- 25)  $y^3 - 2y$
- 27)  $k(a) = ba^2 - 2$
- 29)  $z(a) = \frac{a}{3a-1}$
- 31)  $y(w) = aw^3 - zw^2 + \tan w$
- 26)  $x \log x$
- 28)  $x \rightarrow k \sin x^2 + \sin x$
- 30)  $y(h) = \pi(h-3)(h+4)$
- 32)  $h(y) = b^x b^y$

En los siguientes ejercicios se dá una sucesión de funciones; considéranlas como eslabones de una cadena, forme la función cadena correspondiente. En esta función, dé 3 valores, y encuentre los correspondientes contravalores.

- 33)  $a(b) = b - 2$  ,  $b(c) = c^2$
- 35)  $f(g) = \sin g$  ,  $g(h) = h^2$
- 37)  $z(m) = \cos m^2$  ,  $m(p) = p - 1$
- 39)  $p(b) = 3b - k$  ,  $b(c) = \sec(c-1)$
- 41)  $h(k) = k - 1$  ,  $k(g) = g^2 - 1$  ,  $g(m) = \frac{2}{m}$
- 42)  $a(b) = \sqrt{b-1}$  ,  $b(h) = 3h^{-1}$  ,  $h(z) = \sin z$  ,  $z(g) = g + 2$
- 43)  $p(q) = 3^{q-1}$  ,  $q(g) = \log(g+1)$  ,  $g(h) = h^2$  ,  $h(r) = \pi r^2 - 2\pi r$
- 44)  $g(h) = 2h - 1$  ,  $h(g) = 3g^0$  ,  $g(z) = \log \sqrt{z-4}$  ,  $z(n) = \log n$

45) ¿Cómo podemos denotar la función cadena si la variable independiente del primer eslabón no es igual a la variable dependiente del segundo eslabón?

Por ejemplo, formar la función cadena a partir de  $y(x) = x + 3$  ;  $z(w) = w^2$ .

- 46)  $h^2 - 1$  ,  $3g$
- 48)  $z \rightarrow 10g(z+1)$  ,  $y \rightarrow \sin y$
- 50)  $u \rightarrow \sin u$  ,  $u(x) = u - u^2$
- 47)  $g^3 + 2$  ,  $h - 3h^{-1}$
- 49)  $k \rightarrow \log k$  ,  $10^h$
- 51)  $h(x) = 3$  ,  $x(k) = k^2 - 1$

Para las siguientes funciones, considerándolas como funciones cadenas, de una sucesión de eslabones que la genere.

- 52)  $y(x) = \sin \sqrt{\log(x+1)}$
- 54)  $p(k) = 3 \sqrt{\operatorname{cosec}(k-3)}$
- 56)  $f(g) = [(g-3)^2 + 5]$
- 53)  $z(h) = \cot [\sin(\cos h^2)]$
- 55)  $a(b) = x - y^{2b-1}$
- 57)  $g(k) = \sqrt{\frac{1}{k-3}}$

58) al 82) En los ejercicios del 33) al 57) dar la derivada de la función cadena. Una vez obtenida esta derivada, dar dos valores, y encontrar los correspondientes contravalores.

En los siguientes ejercicios se dá una función. Considerándola como f función cadena, encuentre la derivada. Para la función derivada, encuentre los contravalores asignados a los valores  $\pi$ , 3,  $\sqrt{5}$ .

- 83)  $y(x) = (3x+2)^2$
- 85)  $a(b) = (5b^2 - 3)^{-1}$
- 87)  $w(h) = 2^h - h^2(\pi h^3 - h^n)^4$
- 89)  $y(w) = [(w^2 - 1)^3 - 5]^4$
- 91)  $w(f) = 5(f^2 - 3f)^4 - 3(f^2 - 3f)^2 + 6(f^2 - 3f)^{-1} + 7(f^2 - 3f) - a$
- 92)  $h(s) = \frac{7}{2}(\cos s^2)^3 - \frac{3}{5}(\cos s^2)^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}(\cos s^2)^{-3}$
- 93)  $g(k) = 7[f(k)]^8 - 5[f(k)]^3 + 6[f(k)]^{-4} - 4[f(k)]^{-5}$
- 94)  $s(r) = (ar^6 - br^2 + b)^4(3r^2 - mr)^3$
- 95)  $t(g) = [\pi n - \sin(g^3 - g^2)^3]$
- 84)  $z(a) = (2a^3 - 3a)^3$
- 86)  $b(c) = k(6c^{-2} + 3)^{-3}$
- 88)  $c(d) = (\cot d)^4$
- 90)  $\lambda(y) = [\pi - \sin(y^2 + 3)]^{-2}$

SECCION 3.8

PROBLEMAS

Para las siguientes funciones implícitas, obtener la derivada indicada:

- 1)  $3j + c = 4$  ,  $j'(c)$
- 3)  $5j - 3vg = m - 4$  ,  $j'(v)$
- 5)  $mn - 3m^2 = n + 8$  ,  $\frac{dm}{dn}$
- 7)  $3w^2 - a + aw = 3$  ,  $\frac{da}{dw}$
- 9)  $5h^6 - \pi ah - 3ha^2 = -\sqrt{2}$  ,  $D_a h$
- 11)  $\frac{x}{2y} - \frac{3y}{x} + 4 = y$  ,  $D_x y$
- 13)  $\sqrt{ax-b} + \sqrt{2x-ab^2} = xb$  ,  $\frac{dx}{db}$
- 15)  $(mp - wc)^8 = 3p^2(tp + 4)$  ,  $p'(w)$
- 17)  $b(b - \theta + bt)^3 = 3p(2 - b)^2 + 3$  ,  $b'(p)$
- 18)  $(mkt - tk)t = kgt^2 + 4$  ,  $g'(t)$
- 20)  $\operatorname{cosec} v - vr = rx$  ,  $v'(r)$
- 22)  $ab(1 + \cos w^3) = y$  ,  $a'(w)$
- 24)  $\frac{3m^2 - 3mn - 4a}{m - nb} = \frac{nx}{m}$  ,  $n'(m)$
- 26)  $\frac{3wp - gh + h^2}{p + g} - kh = \frac{g}{h}$  ,  $g'(h)$
- 2)  $2m - 3a^2 + 5v = 0$  ,  $m'(a)$
- 4)  $w^3 - 3x^2 - 5w = x$  ,  $w'(x)$
- 6)  $7gh^2 - 5g^2h = hg + g$  ,  $\frac{dg}{dh}$
- 8)  $\sqrt{x} - 3y + xy = 3y$  ,  $\frac{dx}{dy}$
- 10)  $(3p - 2b)^2 - (\pi p - \sqrt{2})^3 = b^2$  ,  $D_b p$
- 12)  $(\frac{d}{r} - \frac{3r}{d})^4 - r = 3$  ,  $D_d r$
- 14)  $(mx - \pi f)^3 - \sqrt{pfx} = 4$  ,  $f'(x)$
- 16)  $(tbc - y)^2 = tdg - 6$  ,  $t'(d)$
- 19)  $\sin xy - y = x + 3$  ,  $y'(x)$
- 21)  $x^{3y} - 2y^2 = 5x$  ,  $y'(x)$
- 23)  $x \tan b - 3w^6 = \cos b - g$  ,  $b'(g)$
- 25)  $\frac{(pz - 3y)^2 - 6}{(z + y)^3} = z$  ,  $z'(y)$
- 27)  $[g - (h - k^2)]^3 - 3hk = g$  ,  $g'(k)$

- 28)  $3a^2 - a + aw = 3$ ,  $a'(w)$ . Además evaluar  $a'(2)$ ,  $a'(-\pi)$ ,  $a'(\sqrt{3})$ ,  $a'(p-3)$   
 29)  $2b^3 - p^2 = 5p$ ,  $p'(b)$ . Evaluar  $p'(3)$ ,  $p'(-2)$ ,  $p'(\sqrt{\pi})$ ,  $p'(\frac{1}{a})$ ,  $p'(x-y)$   
 30)  $5gf - 3af - f^2 = gf^2$ ,  $f'(g)$ . Evaluar  $f'(\frac{1}{2})$ ,  $f'(\pi)$ ,  $f'(h+2)$ ,  $f'(b^2)$ .  
 31)  $y - 2x^2 + x^4 = 0$ ,  $x'(y)$ . Evaluar  $x'(1)$ ,  $x'(-3)$ ,  $x'(0)$ ,  $x'(a-1)$ ,  $x'(y^5)$

En cada uno de los siguientes problemas, se dan varias funciones. Considerándolas como eslabones de una función cadena, obtenga la derivada indicada:

- 32)  $x = 3xy - 2$ ,  $y - 2w + wy = 3$ ;  $x'(w)$ .  
 33)  $-2a^2b - 3ab + a = 5b - ab^2$ ,  $bc - 3b = c$ ,  $2cg^2 - 3g + 1 = 0$ ;  $a'(g)$   
 34)  $xp^{-1} - px + 1 = 0$ ,  $ax - 5ya + x = 0$ ,  $ba - \pi = a - 2w$ ;  $p'(b)$   
 35)  $(m - 2n)^2 + (3m + n)^2 = (m + n)^2$ ,  $(a - m)^3 = 2a - m^3 + 3am^2$ ;  $n'(a)$   
 36)  $\frac{a}{g} - \frac{g}{a} = ag$ ,  $gf - \frac{1}{fg} + 3 = 0$ ,  $f + 2 = w$ ;  $a'(w)$   
 37)  $2wp - w^3 + p^2 = 2$ ,  $wg - g^2 + w = 1$ ,  $gh + h = 3$ ;  $p'(h)$   
 38)  $(a - 2b)^3 = \frac{1}{3a - b}$ ,  $b = 2yb + 3$ ;  $a'(y)$   
 39)  $fg - (3f - g)^3 = 2g + f$ ,  $g^2 - 3h = 5$ ;  $f'(h)$   
 40)  $mn - 3 = m$ ,  $(np - 2)^3 - n = 0$ ;  $m'(p)$   
 41)  $(w + 4xy)^3 - x = w$ ,  $y - 4 = pby$ ,  $b - a = ab$ ;  $w'(a)$   
 42)  $\sqrt{r - 2as} + a^2r = 2s$ ,  $a(xb - 5) = 3$ ,  $6 - by = 3r$ ;  $a'(y)$   
 43)  $h - \sqrt[3]{hp - \pi k} = 3k$ ,  $(k - 5p)^3 - (3b + 6)^2 = 0$ ,  $a - g = \sqrt{a - w}$ ;  $h'(a)$

SECCION 3.9

PROBLEMAS

Para las siguientes funciones, obtener la función derivada.

Evaluar la función y la función derivada para los siguientes valores de la variable independiente:  $\frac{\pi}{2}$ , 2, 1.

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1) $\sin 3w$                     | 2) $a \cos x$                              |
| 3) $3 \sin a - 5 \cos a$         | 4) $7 \cos y - m \sin y + y$               |
| 5) $2 \cos r^2$                  | 6) $a \sin 3x - b \cos px$                 |
| 7) $b \sin (a^2 - a)$            | 8) $m - x \cos (b^3 + b^2)$                |
| 9) $(\sin y)^2 - (\cos y)^4$     | 10) $(\sin y + \cos y)^2$                  |
| 11) $\sqrt{\sin w} + (\cos w)^3$ | 12) $\sqrt{3} \sin p - 4 \cos p$           |
| 13) $(\sin 5x^2 - \cos 3x^2)^2$  | 14) $[\cos (f - 3f^2) + \sin (af - bf^3)]$ |
| 15) $\cos (\sin y)$              | 16) $\sin (\cos w)$                        |
| 17) $[\cos (\cos x^2)]$          | 18) $[x \sin (\sin ab^3)]^4$               |

- |   |   |
|---|---|
| 19) $\tan 4y$   | 20) $8 \cot \pi n$                              |
| 21) $3 \tan f^2 - \cot 2f$  | 22) $\pi \sin a \tan 3a$                        |
| 23) $n \cos(x-3) \tan(x+2)$   | 24) $a \sin 3u^2 \cot u$                        |
| 25) $-3y \tan 2y$   | 26) $-(y^2 - 1) \cot \pi y$                     |
| 27) $\frac{\cot(-\pi y)}{7 \sin y^2}$                               | 28) $\frac{2 \tan 3k}{3 \cos 2k}$               |
| 29) $\frac{p - \cot 2p}{\tan 2p + p}$                               | 30) $\frac{-\pi \sin g - \tan 3g}{\cot g - 6g}$ |
| 31) $\tan(\sin \pi b)$  | 32) $6 \cot(\cos f)$                            |
| 33) $\tan(\tan \mu)$  | 34) $\cot(\tan v)$                              |
| 35) $b - \sin(\cot x)$  | 36) $c + \cos(\tan 2n)$                         |
| 37) $\sin^2(\tan^2 ax - \cos^2 bx)$                                 | 38) $(\tan^2 r - \cot r^2)^2$                   |
| 39) $\sin^8 a \cos^9 a$   | 40) $\tan^4 v + \cot^6 v$                       |
| 41) $m \sqrt{\tan w} - \sqrt{\cot 3w}$                              | 42) $\pi \sqrt{\tan^3(\cot \frac{3w}{2})}$      |
| 43) $-\sec \pi n$   | 44) $2 \csc 6x$                                 |
| 45) $-3 \csc(2y + \sqrt{2})$  | 46) $2 \sin 2y - 3 \csc y^3$                    |
| 47) $8 \csc a - 2\pi \cot 3a^2$                                     | 48) $2 \sin 2y - 3 \csc y^3$                    |
| 49) $\sin ab \sec 3b$   | 50) $3 \csc(y - \pi) \tan 2y$                   |
| 51) $n \csc(\pi - \pi) \cot pu$                                     | 52) $\tan x + 3 \sec 2x$                        |
| 53) $\frac{x^3 \sec x}{1 + \csc x}$                                 | 54) $\frac{\csc y^3 - 3 \sin y}{a - y \sec y}$  |
| 55) $-5 \sec(\cos a)$   | 56) $-\pi \csc(\sin 2b)$                        |
| 57) $-a \sin(2b \csc 4a^2)$   | 58) $-x^3 \sec(\sec x^3)$                       |
| 59) $n \csc(\sec y^2)$  | 60) $-f^4 \cot(\csc f^2)$                       |
| 61) $\cos^2 b + \sin^2 b$   | 62) $\sqrt{1 - \sin^2 f}$                       |
| 63) $5 \sin^4 x - 6 \sin^3 x + 2 \sin^2 x - \sin x + \frac{x}{\pi}$ |   |
| 64) $\cos 3a - 6 + 5(\cos 3a)^{-1} - 3(\cos 3a)^{-2}$               |   |
| 65) $\frac{3 \sin x^2 - 2 \tan 2x}{\pi x^3}$                        | 66) $\frac{2y - y^3}{3 \sec y - 2}$             |

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 ALFONSO REYES  
 MONTERREY, NUEVO LEÓN

PROBLEMAS  
SECCION 3.10

A.-Obtener la forma diferencial de cada ecuación, y a partir de ella obtener la derivada de las dos funciones que denota la ecuación. Se señalan los parámetros:

- 1)  $x + 3y = 2$
- 2)  $-3a + 4b = 5k, k$
- 3)  $fg - g = 3fh, h$
- 4)  $2mn - np = 4mp, m$
- 5)  $r^2 - rs = 3s^2 + 1$
- 6)  $2jk^2 - 3jn = n^2k, n$
- 7)  $\frac{t^2 - uv}{u} = 2, v$
- 8)  $\frac{w^2x - 3yw}{xy} = 7x, y$
- 9)  $(r-p)(r+1)r^{-2} = \frac{1}{p}, a, h, k$
- 10)  $(ag + 2h)(-bg - k)^{-1} = 3k, a, h, k$
- 11)  $2x - \operatorname{sen} y = 3$
- 12)  $-\pi f^{-2} \cot f^2 = \cos f + 3s$
- 13)  $(\tan k - \cos 2k)(3k - \pi) = 1$
- 14)  $-11m^3 \tan h^2 = f + \operatorname{csc} m, f$
- 15)  $\frac{\operatorname{sen} a - n \operatorname{csc} b}{\tan m} = k, a, n, k$
- 16)  $\frac{x^2 - 3x \cos(y+2) + \pi y}{\sec(x+\pi)} = 1 - x$

B.-En cada problema se dan los eslabones de la función cadena que se indica a la derecha. Obtener la diferencial de tal función:

- 1)  $y = 3w^2 - 4, w = \operatorname{sen} k; y(k)$
- 2)  $a = \frac{2}{g} - 4, g = \cos h, h = b^2 - 1; a(b)$
- 3)  $p = \operatorname{csc} x, x = 1 - \tan^2 q; p(q)$
- 4)  $\cos f = y - y^2, f + 2 - \frac{1}{x} = 0; y(x)$
- 5)  $3 \operatorname{sen} w = k, k^2 - 1 = g; w(g)$
- 6)  $\frac{a-r}{r-3} = \frac{1}{a}, \frac{a}{b} = 1 - b; r(b)$
- 7)  $y = \cos f, f = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 k}; y(k)$
- 8)  $\cos m (\tan g)^{-1} = 1, g^2 - h = 3; m(h)$
- 9)  $h = 3b^2 - 1, b = \operatorname{sen} a, a = j^3 - 2; h(j)$
- 10)  $n - 2 \cot f = 0, f = \operatorname{sen} k, k = \frac{1}{y} - 3; n(y)$

PROBLEMAS  
SECCION 3.11

A.-En cada problema se da una función, un valor de  $n$ , y un valor de la variable independiente.

- a) Obtenga la derivada de orden  $n$  de esa función.
- b) Indique y efectúe el contravalor que dicha derivada asigna al valor dado de la variable independiente:

- 1)  $5x^4 - 3x^2, n = 2, x = 3$
- 2)  $7x^{-3} + 4x^3, n = 3, x = \frac{1}{2}$
- 3)  $\operatorname{sen} y^2 + 2y^4, n = 5, x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- 4)  $2 \cos 3w - w^3, n = 4, w = 3\pi$
- 5)  $\frac{a}{a-1}, n = 2, a = 1$
- 6)  $(b-4)b^{-1}, n = 3, b = -2, b = \pi - 3$
- 7)  $2m^3 - m, n = 4, m = -3.1876$
- 8)  $4p^4 - p^3 + \pi, n = 4, p = -\sqrt{5197}$
- 9)  $(\sec q)^2, n = 3, q = 3$
- 10)  $\operatorname{sen} k, n = 45, k = -2.15$
- 11)  $\cos h, n = 152, h = 3.6$
- 12)  $(\cot v)^{-1}, n = 3, v = \frac{\pi}{4}$
- 13)  $x^m, n = m, x = 1000; n = m+1, x = .001$
- 14)  $x^{-1}, n = 15, x = -1; n = m+1, x = 0$

B.-En los siguientes problemas, dada una función, calcular los contravalores indicados a la derecha:

- 1)  $3a - b^2 = 5; \frac{d^2b(2)}{da^2}, D_a^2b(1), b^{(2)}(0)$
- 2)  $w - 5k - \frac{7}{k} = 0; D_w^3k(0), K^{(3)}(2), \frac{d^3k(-1)}{dw^3}$
- 3)  $3m^2 - 2m = f; m^{(3)}(\frac{1}{2}), \frac{d^3m(0)}{df^3}, D_f^3m(2)$
- 4)  $\frac{r}{t} - 1 = t; \frac{d^3t(1)}{dr^3}, D_r^3t(-1), t^{(3)}(-2)$
- 5)  $x^8 - y = 0; D_y^4x(0), \frac{d^4x(2^8)}{dy^4}, x^{(4)}(1)$
- 6)  $\operatorname{sen} y - z + 1 = 0; \frac{d^2y(1)}{dz^2}, D_z^2y(\frac{\pi}{2} + 1), y^{(2)}(0)$

Aplicaciones de la derivada.

4.1 Pendiente de una curva.

En las secciones 3.3 y 3.5 vimos la relación que existe entre la derivada de una función  $y(x)$  y la pendiente de su curva: la pendiente para la abscisa  $x$  es igual al contravalor de la derivada correspondiente a  $x$ .

Luego, dada la función  $y = \text{sen } x$ , como es sencillo obtener su derivada  $y'(x) = \text{cos } x$ , fácilmente podemos obtener la pendiente de su curva para cualquier abscisa (vea Fig. 4.1). Su

pendiente para  $x=0$ , es

$y'(0) = \text{cos } 0 = 1$ ; luego, forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje horizontal.

También podemos determinar dónde la curva crece y dónde decrece, según el signo que tengan los contravalores de la derivada. Para positivo la curva crece, y para negativo decrece.

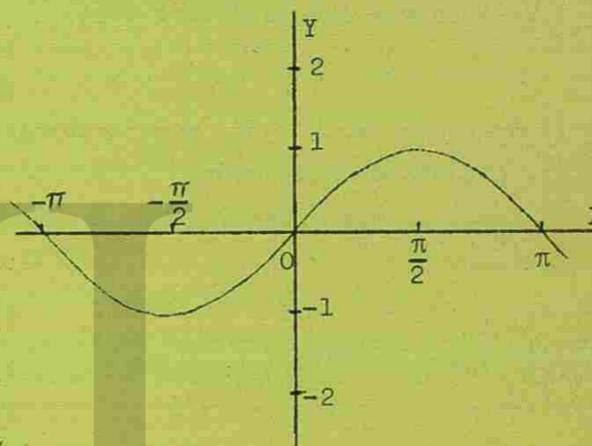


Fig. 4.1.-Gráfica de  $y = \text{sen } x$ .

Así,  $\text{sen } x$  crece de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , pues

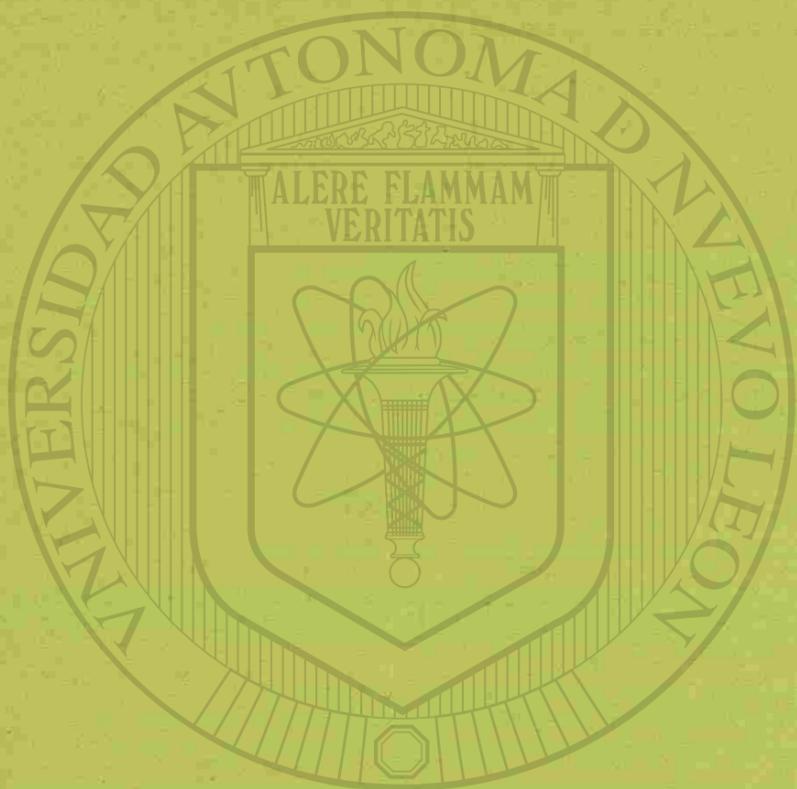
$\text{cos } x$  es positivo en el primer cuadrante.

Ejerc. 1.- a) Para la función  $w = x \text{ cos } x$ , obtener su pendiente para  $x=0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ . ¿Crece o decrece la función en esos puntos?.

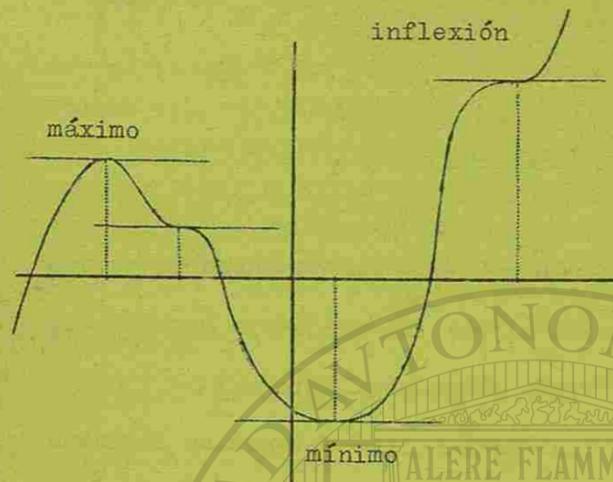
b) Dada la función  $y = x^3 - 3x$ , ¿para qué abscisa la pendiente es igual a 0, 1, -3? Grafique la curva. ¿Para cuales intervalos crece, y para cuales decrece?.

Para que la derivada sea cero en un punto, la tangente a la curva en ese punto debe ser paralela al eje horizontal. Esto sucede cuando el punto es: un máximo, ó un mínimo, ó un punto de inflexión, como mostramos en la Fig.

4.2.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Entonces, dada la función  $z = x^3 - 3x$ , para encontrar las abscisa de sus máximos y mínimos, igualamos su derivada a cero, obteniendo:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1, -1.$$

Luego, para las abscisa 1 y -1, la pendiente es cero.

Fig. 4.2.-Abscisas con pendiente cero.

Para averiguar que clase de punto es, entre las tres posibilidades, podemos:

1) Graficar  $z = x^3 - 3x$  para determinar visualmente si es máximo, mínimo, o punto de inflexión.

2) Comparar los contravalores a ambos lados de 1 (y de -1), con el contravalor correspondiente a 1 (y a -1):

$$y(1) = 1^3 - 3 \times 1 = -2$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

$$y(1.1) = 1.1^3 - 3 \times 1.1 = -1.969$$

$$y(-1.1) = (-1.1)^3 - 3(-1.1) = 1.969$$

$$y(.9) = .9^3 - 3 \times .9 = -1.971$$

$$y(-.9) = (-.9)^3 - 3(-.9) = 1.971$$

Luego la función crece de ambos lados de 1, y tenemos un mínimo.

Luego la función decrece de ambos lados de -1, y tenemos un máximo.

En el caso de un punto de inflexión, la función crece de un lado, y decrece del otro lado de la abscisa (vea Fig. 3.2).

3) Calcular la derivada para abscisas a ambos lados de 1 (y de -1):

$$y'(.9) = 3 \times .9^2 - 3 = -.57$$

$$y'(-1.1) = 3(-1.1)^2 - 3 = .64$$

$$y'(1.1) = 3 \times 1.1^2 - 3 = .64$$

$$y'(-.9) = 3(-.9)^2 - 3 = -.57$$

El contravalor de la derivada cambia de - a + al ir de izquierda a derecha, luego tenemos un mínimo.

El contravalor de la derivada cambia de + a - al ir de izquierda a derecha, luego tenemos un máximo.

En el caso de un punto de inflexión, la derivada tiene el mismo signo, positivo o negativo, de ambos lados de la abscisa.

En la siguiente sección vemos aún otro método, relacionado con la convexidad, para determinar si un punto con pendiente cero es un máximo, ó un mínimo, ó un punto de inflexión.

Ejerc. 2.-Encontrar los puntos máximos y mínimos de las funciones  $z = x^2$ ,  $z = x^4 - x^3$ ,  $z = x^{-1}$ ,  $u = \text{sen } v$ . Grafíquelas.

#### 4.2 Convexidad.

El crecimiento de cualquier función  $z(x)$  se mide por los contravalores de su primera derivada  $z'(x)$ . Por ejemplo, dada la función  $z = x^2 - 4$  (vea Fig. 3.3):

para  $x = -3$ ,  $z'(-3) = -6$ , luego la función decrece rápidamente;

para  $x = -1$ ,  $z'(-1) = -2$ , luego la función decrece, pero no tan rápido;

para  $x = 0$ ,  $z'(0) = 0$ , luego la función no crece ni decrece;

para  $x = 1$ ,  $z'(1) = 2$ , luego la función crece;

para  $x = 3$ ,  $z'(3) = 6$ , luego la función crece rápidamente.

La manera de crecer o decrecer de la curva, está relacionada con su convexidad, pues:

A.-Cuando la curva es cóncava hacia arriba, al ir de izquierda a derecha su tangente rota contra las manecillas del reloj (vea Fig. 4.3a), es decir, su pendiente  $z'(x)$  aumenta de negativa, a cero, a positiva: es una función creciente. Luego,  $z''(x)$  es positiva, por ser la derivada de la función creciente  $z'(x)$ .

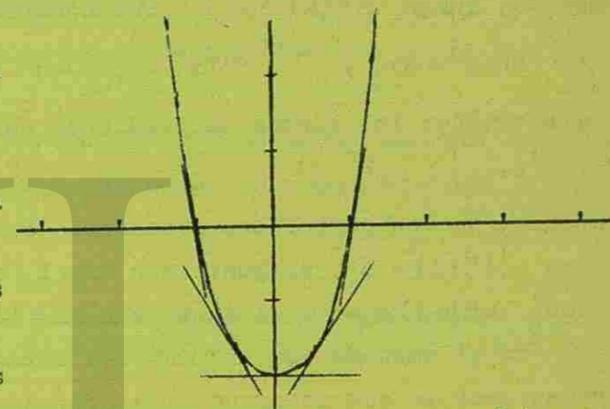


Fig. 4.3a.-Cóncava hacia arriba.

B.-Cuando la curva es cóncava hacia abajo, su tangente rota con las manecillas del reloj (vea Fig. 4.3b), es decir, su pendiente  $z'(x)$  disminuye de positiva, a cero, a negativa: es una función decreciente. Luego,  $z''(x)$  es negativa, por ser la derivada de la función decreciente  $z'(x)$ .

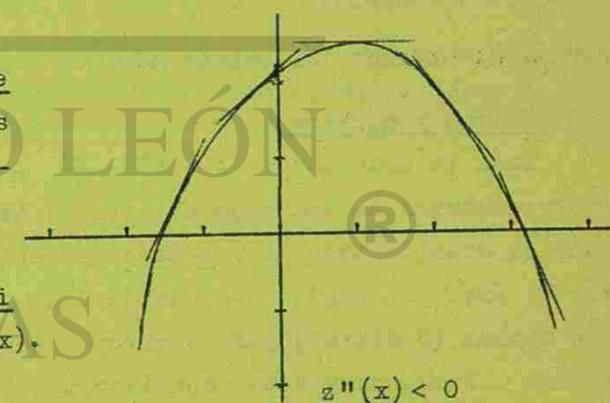


Fig. 4.3b.-Cóncava hacia abajo.

Por ejemplo, para  $y = x^3$ , se tiene que  $y' = 3x^2$ ,  $y'' = 6x$ .

Cuando  $x < 0$ , la curva es cóncava hacia abajo pues su segunda derivada es negativa, y cuando  $x > 0$ , la curva es cóncava hacia arriba, pues su segunda derivada es positiva. Para  $x = 0$ , la curva cambia de convexidad y  $y''(x)$  cambia de negativo a positivo, luego vale cero para el punto de inflexión en  $x = 0 : y''(0) = 6 \times 0 = 0$ .

Pero el converso no es cierto: la segunda derivada puede ser cero para cierta abscisa sin ser un punto de inflexión.

Ejerc. 1.- a) Grafique  $y=x^3$ ,  $y=x^4$ ,  $y=x^4-x^2$ . Diga para que abscisas,  $y'(x)$  y  $y''(x)$  valen cero, y cuales son los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Determine para que abscisas las curvas dadas son cóncavas hacia arriba o hacia abajo, examinando el signo de la segunda derivada.

Podemos usar la convexidad para determinar cuándo un punto con pendiente cero, es un máximo o mínimo. Para ser máximo, la función  $z(x)$  tiene que ser cóncava hacia arriba, y si  $a$  es la abscisa del punto en cuestión, se tendrá que  $z''(a) < 0$ . Para ser punto mínimo, tiene que ser cóncava hacia arriba, luego  $z''(a) > 0$ . Por ejemplo: para la función

$$z = x^3 - 3x, \quad z'(x) = 3x^2 - 3 \quad \text{y} \quad z''(x) = 6x,$$

para obtener los puntos de pendiente cero:

$z'(x) = 3x^2 - 3 = 0$  de donde  $x^2 = 1$  y de aquí  $x = 1, -1$  son las abscisa de los puntos con pendiente cero, como  $z''(1) = 6$ , el punto con  $x = 1$  es un punto mínimo, y como  $z''(-1) = -6$ , el punto con  $x = -1$  es un punto máximo.

En el caso de que  $z''(a)$  sea cero, no nos dice nada acerca de la concavidad, por lo que no ayuda a determinar si el punto con  $x = a$  es máximo o mínimo, y tenemos que usar los métodos ya dados. (Es posible hacer uso de tercera, cuarta, ..., n-ésima derivada en tales casos, como se vé en Kaplan, Advanced Calculus).

Ejerc. 2.- Obtener los puntos máximos y mínimos de la función  $u = \frac{v^2 - 1}{v}$

### 4.3 Máximos y mínimos.

Dada la ecuación  $A = b^2 + \frac{4v}{b}$ , relacionando las cantidades:

A área lateral de una caja abierta de base cuadrada,  $v$  su volumen, y  $b$  su ancho, si consideramos  $A$  y  $b$  como variables, al ir cambiando el ancho  $b$ , cambia el área  $A$ , según la ecuación dada. Puede suceder que  $A$  alcance un área máxima (o mínima) para ciertos valores de  $b$ , los cuales nos gustaría conocer. Para hacer esto, consideramos  $A$  como función de  $b$ , y le aplicamos los métodos para encontrar los máximos y mínimos de una función. Entonces, derivando la función  $A = b^2 + \frac{4v}{b}$  con respecto a  $b$ , e igualando a cero tenemos:

$$\frac{dA}{db} = 2b - \frac{4v}{b^2} = 0 \quad (v \text{ se considera independiente del ancho } b).$$

$$2b^3 = 4v$$

$b = \sqrt[3]{2v}$  es el valor de  $b$  para el cual la pendiente es cero.

De la gráfica de  $A = b^2 + \frac{4v}{b}$ , se vé que tiene un solo mínimo, luego, hemos obtenido el valor del ancho para el cual el área es mínima.

Ejerc. 1.- a) Graficar la función  $A = b^2 + \frac{4v}{b}$ ,  $b$  variable independiente.  
b) Si el volumen  $v = 16 \text{ cms}^3$ , ¿a cuánto es igual el ancho para que el área sea mínima? ¿Qué área corresponde a ese ancho?.

Cuando no se dá la ecuación relacionando las cantidades que se consideran como variables, entonces uno tiene que obtenerla con los datos del problema.

Ejemplos.--1) Encontrar el ancho y alto de una caja abierta, de base cuadrada y de 4 lts. de volumen, tal que su área total sea mínima.

Asociando las cantidades con letras:  $A$  área total,  $b$  ancho, y  $h$  alto en cm.

La ecuación que expresa la relación entre estas cantidades es:

$$A = b^2 + 4bh.$$

El área es la cantidad que se quiere hacer mínima, luego se considera como función de alguna otra cantidad, por ejemplo  $b$ .

$h$  no es independiente de  $b$ , pues al cambiar  $b$  hay que cambiar  $h$  para mantener el volumen igual a  $4000 \text{ cm}^3$ . La relación entre ellas está dada por la ecuación  $4000 = b^2h$ , la cual dá  $h$  en términos de  $b$ , y sustituyendo en la primera ecuación, permite obtener  $A$  en términos de  $b$  únicamente:

$$A = b^2 + \frac{4 \times 4000b}{b^2}, \text{ de donde}$$

$$A'(b) = 2b - \frac{16000}{b^2} = 0$$

$$2b^3 - 16000 = 0$$

$$b^3 = 8000$$

$b = 20 \text{ cm.}$  es el valor de  $b$  para el cual el área es mínima.

Además  $h = \frac{4000}{20^2} = 10 \text{ cm.}$  es el valor de  $h$  para el cual el área es mínima.

Ejerc. 2.- Encontrar el ancho y alto de una caja cerrada, de base cuadrada y de 8 lts. de volumen, tal que su área total sea mínima.

2) Encontrar la distancia mínima de la parábola al punto (3,-1). La distancia L de cualquier punto (x,y) de la parábola al punto (3,-1), está dada por  $L = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$ . En esta ecuación consideramos L como función de  $x$ , pues queremos obtener su mínimo valor al cambiar de punto sobre la parábola. La  $y$  depende de  $x$ , pues  $y = x^2$ , por lo cual la eliminamos de la ecuación primera, para obtener L en términos de  $x$ :

$$L = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+1)^2}$$

$$L^2 = (x-3)^2 + (x^2+1)^2$$

$$2L L'(x) = 2(x-3) + 2(x^2+1)2x$$

$$x-3 + 2x^3 + 2x^2 = 0$$

$$2x^3 + 3x - 3 = 0, \text{ de donde por tanteos}$$

$$x = .75... \text{ es el valor de } x \text{ para } L \text{ mínima,}$$

$$\text{y de aquí } y = .56... \text{ es el valor de } y \text{ para } L \text{ mínima.}$$

Luego la distancia mínima es:

$$L = \sqrt{(.75-3)^2 + (.56+1)^2} = \sqrt{2.25^2 + 1.56^2} = \sqrt{7.5} = 2.7$$

Ejerc. 3.-Encontrar la distancia mínima de la recta  $3x+y=5$  al punto (a,b).

3) Encontrar las dimensiones del cono de máximo volumen y área lateral dada.

Sean  $r$  radio,  $h$  altura,  $V$  volumen y  $A$  área lateral del cono.  $A$  se toma como constante pues nos dicen que el área lateral "está dada".  $V$  se considera como función de  $r$ , pues queremos obtener su máximo al cambiar las dimensiones del cono; y  $h$  depende de  $r$ , ya que el área lateral debe permanecer constante. Las fórmulas del volumen y área lateral del cono son: (vea Burington, Handbook of Mathematical Tables and Formulas)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

las cuales nos dan  $V$  en términos de  $r$  y  $h$ , y la relación entre  $r$  y  $h$ , que permitirá poner  $V$  en términos de  $r$  solamente.

Podemos eliminar  $h$  de la primera ecuación usando la segunda, pero es preferible derivar las dos ecuaciones respecto a  $r$ , y luego eliminar  $h'(r)$  para encontrar la relación entre  $r$  y  $h$  cuando el volumen es máximo. Derivando e igualando  $V'(r)$  a cero,

$$V'(r) = \frac{\pi}{3}(r^2 h' + 2rh) \quad 0 = \pi \left[ \frac{r(2r + 2h h')}{2\sqrt{r^2 + h^2}} + \sqrt{r^2 + h^2} \right]$$

$$\frac{\pi r}{3}(r h' + 2h) = 0 \quad 0 = r(r + h h') + r^2 + h^2$$

$$r h' + 2h = 0 \quad 0 = r^2 + r h h' + h^2 + r^2$$

$$h' = \frac{-2h}{r} \quad 0 = 2r^2 + r h h' + h^2$$

y eliminando  $h'$  de la ecuación de la derecha:

$$0 = 2r^2 - \frac{2hrh}{r} + h^2 = 2r^2 - 2h^2 + h^2 = 2r^2 - h^2$$

$$\text{luego } h^2 = 2r^2$$

$h = \sqrt{2}r$  es la relación que debe haber entre  $r$  y  $h$ , para que el volumen del cono sea máximo.

Ejerc. 4.- a) Expresar  $h$  (y  $r$ ) en términos de  $A$  cuando el volumen es máximo.

Si  $A = 100 \text{ cm}^2$ , qué volumen máximo tiene el cono.

b) Encontrar las dimensiones del cilindro de mínima superficie y volumen dado. ¿Qué dimensiones tiene para un volumen de  $100 \text{ cm}^3$ ?

Sintetizando, dado un problema donde nos pidan:

a) Encontrar el máximo (o mínimo) de una cantidad  $A$  al variar otra cantidad  $B$ , ó

b) Encontrar el valor de  $B$  para que  $A$  sea máximo (o mínimo),

seguimos el proceso de:

1) Obtener una ecuación entre  $A$  y  $B$ . Si en la ecuación ocurre una letra que dependa de  $B$ , tenemos que encontrar una ecuación que la relacione con  $B$ . Entonces podemos eliminarla o nó, de la ecuación entre  $A$  y  $B$  según nos convenga.

2) Considerar  $A$  como función de  $B$  en la ecuación.

3) Derivar la ecuación e igualar  $A'(B)$  a cero. Si las letras dependientes de  $B$  no se eliminaron de la ecuación, obtenemos sus derivadas con las otras ecuaciones y las eliminamos.

4) Despejamos  $B$ .

#### 4.4 Rapidez de cambio.

Dadas dos cantidades, como la solubilidad  $S$  del sulfato de sodio en agua, y la temperatura  $T$  del agua, decimos que están relacionadas, pues al cambiar el valor de  $T$ , cambia el valor de  $S$  según vemos en la tabla de la Fig. 3.4. En el caso que no cambie, decimos que  $S$  es independiente de  $T$ , o que es constante respecto a  $T$ . Pero no solo nos interesa saber cuanta sal es soluble a una temperatura dada, sino también qué de rápido cambia la solubilidad para esa temperatura, es decir, si la solubilidad es poco o muy sensible a un cambio de temperatura. Para averiguar esto graficamos

S como función de T con los datos dados:

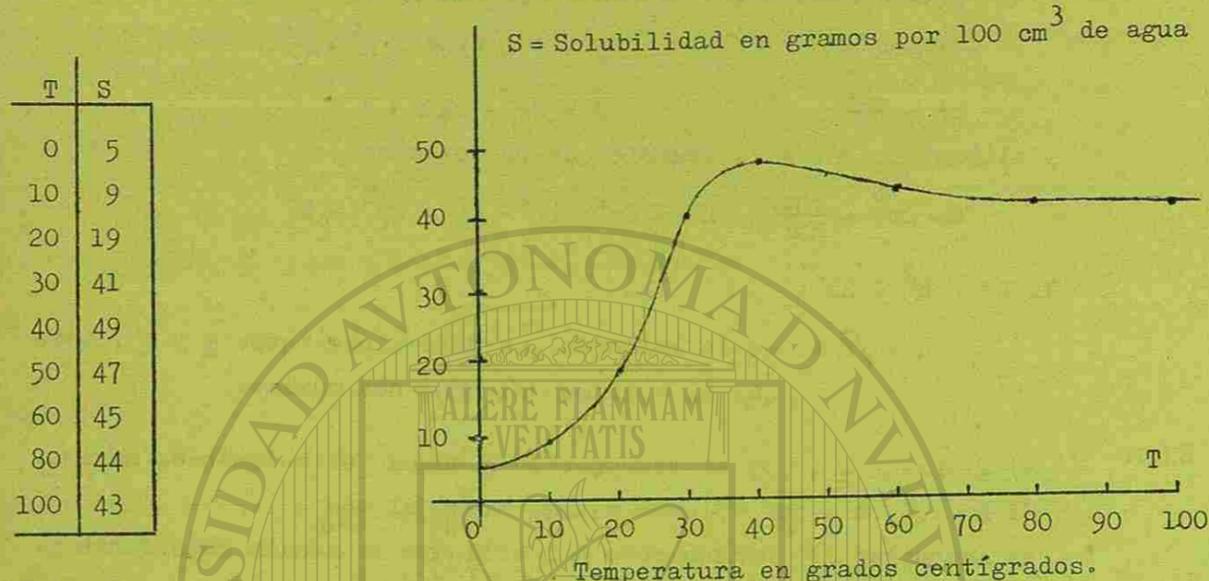


Fig. 4.4.-Solubilidad del sulfato de sodio en agua, en función de temperatura.

Notamos que:

- a) Para  $T=0$  la solubilidad aumenta lentamente, pues para un cambio  $\Delta T = 10$ ,  $S$  cambia de 5 a 9, es decir  $\Delta S = 4$ , luego la rapidez media de cambio es  $\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{4}{10} = .4$
- b) Para  $T=20$ ,  $\Delta S = 41-19 = 22$ , luego  $\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{22}{10} = 2.2$ .
- c) Para  $T=80$ , la solubilidad decrece lentamente.

Como ya hemos visto, mientras mas pequeño se toma  $\Delta T$ , mas se aproxima  $\frac{\Delta S}{\Delta T}$  a la pendiente de la curva en el punto de abscisa  $T$ . Por lo que definimos: la rapidez de cambio de S con respecto a T como  $\frac{dS}{dT}$ . La rapidez de cambio  $S'(T)$  varía con la temperatura, pues la curva tiene diferentes pendientes según la temperatura que se tome. En general varía de punto a punto, excepto cuando la curva es una línea recta y todos sus puntos tienen la misma pendiente.

- Ejerc. 1.-
- a) Obtener gráficamente la rapidez de cambio de S con respecto a T, para  $T=10, 20, 80$ .
  - b) Obtener la rapidez de cambio media entre  $T=30$  y  $40$ ;  $80$  y  $100$
  - c) Si la longitud L de un cuerpo depende de su temperatura T según la ecuación  $L = L_0 + 3 \times 10^{-3} T$ , donde  $L_0$  longitud inicial. Obtenga la rapidez de cambio de L con respecto a T. ¿Depende de la temperatura?.

En general, dadas dos cantidades cualquiera A y B, considerando A como función de B, definimos la rapidez de cambio de A con respecto a B, como  $\frac{dA}{dB}$ . Por ejemplo, podemos considerar la rapidez de cambio entre las cantidades:

- 1) V volumen de un cuerpo, T temperatura:  $\frac{dV}{dT}$
- 2) P presión de un gas, V volumen:  $\frac{dP}{dV}$
- 3) x distancia al origen, t tiempo:  $\frac{dx}{dt}$
- 4) v velocidad, t tiempo:  $\frac{dv}{dt}$
- 5) H calor producido, i corriente eléctrica:  $\frac{dH}{di}$

Para obtener la rapidez de cambio para valores de B dados podemos:

- a) Si la relación entre A y B está dada por una tabla o gráficamente, calculamos con transportador la pendiente de la curva para los valores de B dados. (hay que tener cuidado de multiplicar por el factor apropiado si las escalas de A y B son diferentes).
- b) Obtener una ecuación en A y B. Derivándola nos da una expresión para  $\frac{dA}{dB}$  con la cual podemos calcular los contravalores deseados.

Ejemplos.-1) Obtener la rapidez de cambio del volumen V de una esfera con respecto al radio r. Para  $r=10$  cm. ¿cual es la rapidez de cambio?: La ecuación entre V y r, es

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = 4 \pi r^2 \text{ es la rapidez de cambio del volumen respecto al radio.}$$

$$\frac{dV(10)}{dr} = 4 \pi \times 10^2 = 400 \pi \text{ cm}^2 \text{ es la rapidez de cambio para } r=10 \text{ cm.}$$

2) Si en el problema anterior  $r = \frac{5}{t}$  donde t tiempo en segundos. Obtener la rapidez de cambio de V con respecto a t para  $t=5$  seg. Podemos obtener V en términos de t:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{5}{t}\right)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \pi \left(\frac{5}{t}\right)^2 \left(-\frac{5}{t^2}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-4 \pi 5^3}{t^4}$$

$$\frac{dV(5)}{dt} = \frac{-4 \pi 5^3}{5^4} = -\frac{4 \pi}{5}$$

$$V'(5) = -2.51 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}; \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{5}{t^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \pi r^2 \left(-\frac{5}{t^2}\right)$$

$$\text{para } t=5, \quad r = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{dV(5)}{dt} = 4 \pi \times 1^2 \left(-\frac{5}{5^2}\right) = -\frac{4 \pi}{5}$$

$$V'(5) = -2.51 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

3) Obtener la rapidez de cambio del área  $A$  con respecto a la altura  $h$  de un triángulo rectángulo de perímetro dado. ¿Cuál es la rapidez de cambio para  $h=4$  cm. y base  $b=3$  cm.?

La ecuación entre las variables es:  $A = \frac{1}{2}bh$ , donde  $b$  depende de  $h$  pues el perímetro es constante. La relación entre  $b$  y  $h$  está dada por

$$P = h + b + c = h + b + \sqrt{h^2 + b^2} \quad \text{donde } c \text{ hipotenusa.}$$

En lugar de eliminar  $b$  en la primera ecuación, preferimos derivar ambas ecuaciones respecto a  $h$  obteniendo:

$$1 + b' + \frac{2h + 2bb'}{2\sqrt{h^2 + b^2}} = 0 \quad \frac{dA}{dh} = \frac{1}{2}(b + hb')$$

$$c + b'c + h + bb' = 0$$

$$b' = -\frac{c+h}{c+b} \quad \text{y sustituyendo en } \frac{dA}{dh}$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{2} \left[ b - \frac{h(c+h)}{c+b} \right]$$

para  $h=4$ ,  $b=3$ , se tiene  $c = \sqrt{16+9} = 5$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{2} \left[ 3 - \frac{4(5+4)}{5+3} \right] = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{4 \times 9}{8} \right) = -0.75 \text{ cm.}$$

- Ejerc. 2.-
- Obtener la rapidez de cambio del área de una esfera con respecto a su radio, y evaluarla para  $r=15$ .
  - Obtener la rapidez de cambio del área de un rectángulo respecto a la base si el perímetro es dado. Evaluarla para base igual a 10 cm. y perímetro igual a 50 cm.

### 5 Relaciones entre rapidez de cambio.

De la misma manera que tenemos relaciones entre cantidades, podemos considerar relaciones entre rapidez de cambio las cuales expresamos por ecuaciones.

- Ejemplos.-
- Encontrar la relación entre la rapidez de cambio de volumen  $V$  y de radio  $r$  con respecto al tiempo  $t$ , de una esfera. Si para  $r=2$  cm., el radio crece con una rapidez de  $5 \frac{\text{cm.}}{\text{seg.}}$ , ¿con qué rapidez crece el volumen?

Conocemos la relación entre el volumen  $V$  y el radio  $r$  de una esfera  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Entonces para encontrar la relación entre

$$\frac{dV}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dt} :$$

derivamos con respecto a  $t$  ó diferenciamos y luego dividimos entre  $dt$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi r^2 dr$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

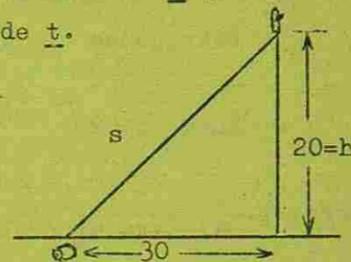
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\text{Para } r=2 \text{ y } \frac{dr}{dt} = 5, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi 2^2 \times 5 = 80\pi$$

$$\frac{dV}{dt} = 251 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

En la ecuación  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  consideramos  $r$  como una función de  $t$  (la cual no conocemos), por lo que  $V$  resulta una función cadena de  $t$ .

- Un barco se aleja perpendicularmente de la costa con una velocidad de  $15 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ . ¿Con qué velocidad se aleja de un faro a 30 km del pie de la perpendicular, cuando está a 20 km. de la costa?



Si  $h$  distancia a la costa, y  $s$  distancia al faro,  $\frac{dh}{dt}$  velocidad del barco, y  $\frac{ds}{dt}$  velocidad con que se aleja del faro.

Por el teorema de Pitágoras tenemos la ecuación:

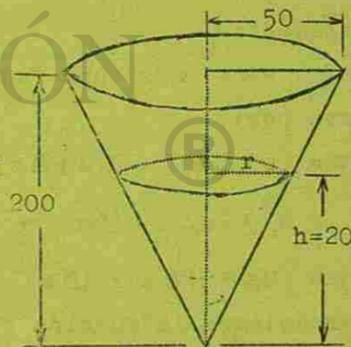
$$s^2 = h^2 + 30^2, \quad \text{que derivando respecto a } t, \text{ nos da}$$

$2s \frac{ds}{dt} = 2h \frac{dh}{dt}$ , de donde  $\frac{ds}{dt} = \frac{h}{s} \frac{dh}{dt}$ , relación que nos permite calcular  $s'(t)$  con los datos dados.

$$\text{Para } h=20, \quad s = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1300} = 36.1 \text{ km. Entonces}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{20}{36.1} \times 15 = 8.3 \frac{\text{km}}{\text{seg}}$$

- Un tanque cónico de 200 cm. de alto y 100 cm. de diámetro, se llena con una rapidez de  $500 \text{ cm}^3/\text{seg.}$  Obtener la rapidez con que sube el nivel del agua, cuando está a 20 cm. de altura. Sea  $h$  la altura,  $V$  el volumen del agua, y  $r$  el radio de la superficie. Entonces:



$\frac{dh}{dt}$  rapidez con que sube el agua.

$\frac{dV}{dt}$  rapidez con que se llena el tanque =  $500 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$

Para calcular  $\frac{dh}{dt}$  necesitamos una relación entre  $\frac{dh}{dt}$  y  $\frac{dV}{dt}$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEÓN  
 BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
 "ALFONSO REYES"  
 Apto. 1025 MONTERREY, MEXICO

Para hacer esto, buscamos una relación entre  $h$  y  $V$ , y ella es volumen de agua en el cono  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

Como no conocemos el valor de  $r$ , nos conviene obtenerlo en términos de  $h$ , que sí nos dan.

Por triángulos semejantes:  $\frac{r}{h} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$  de donde  $r = \frac{h}{4}$

Sustituyendo  $V = \frac{1}{3} \pi (\frac{h}{4})^2 h = \frac{\pi h^3}{3 \times 16}$

Derivando  $\frac{dV}{dt} = \frac{3 \pi h^2}{3 \times 16} \times \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{16} \times \frac{dh}{dt}$

Despejando  $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi h^2} \times \frac{dV}{dt}$

Para  $h = 20$   $\frac{dh}{dt} = \frac{16 \times 500}{\pi \times 20^2} = \frac{16 \times 500}{\pi \times 400} = \frac{20}{\pi} = 6.38 \frac{cm}{min}$

- Ejerc. 1.- a) Para el problema del ejemplo 1, calcular la rapidez con que crece la superficie, si el volumen aumenta con una rapidez de 200 cm/min
b) Para el problema del ejemplo 3, calcular la rapidez con que crece el área de la superficie del agua.
c) Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo de base b crece con una rapidez de 5 cm/min. Obtener la rapidez con que crece el área.

4.6 Diferenciales e incrementos.

Ya vimos una aplicación de las diferenciales para obtener la derivada de una función, pues el cociente de dos diferenciales nos da la derivada. Pero la aplicación mas interesante de las diferenciales está en su relación con los incrementos.

Sea w = z^2 + 3z una función de z. Si le damos un incremento a z, w aumenta por:

Delta w = (z + Delta z)^2 + 3(z + Delta z) - (z^2 + 3z)
= z^2 + 2z Delta z + (Delta z)^2 + 3z - z^2 - 3z
Delta w = (2z + 3) Delta z + (Delta z)^2

Si diferenciamos la función obtenemos la forma diferencial:

dw = (2z + 3) dz

Esta ecuación se parece mucho a la anterior, y de hecho representa una "buena aproximación", pues si sustituimos las diferenciales por sus incrementos, obtenemos la aproximación:

PROBLEMAS

SECCION 4.1

A.-En cada problema a continuación se da una función y una abscisa:

- a) Dar las coordenadas del punto con la abscisa indicada.
b) Decir si la curva crece o decrece en tal punto.
c) Dar la ecuación de la recta tangente en ese punto.
d) Dar la ecuación de la normal en ese punto (perpendicular a la tangente en el punto de tangencia).
e) Decir para que abscisa se tiene un punto máximo, mínimo, o de inflexión.
f) Decir para que abscisas se tienen tangentes verticales.

- 1) a = 2b^3 - 3b + 1, b = 1
2) m = -2n^4 + n^2 - 1, n = -1
3) p = -3q^2 + 5q - 1, q = 0
4) f = g^3 - 2g^2 + 3, g = 2
5) b = 3w^5 - w, w = -2
6) h = 3/k - k, k = 3
7) w = 2h^-2 - 2h^2, h = -3
8) x = -3b^-1 + b, b = -pi
9) n = f/(f-1), f = sqrt(2) + 1
10) r = (3s+2)/-s, s = -1/3
11) t = (a-3)(2a-5), a = -1/2
12) k = b^2(b-5), b = -5/2
13) y = sen h, h = pi
14) g = -tan x, x = 3pi/4
15) n = x sen x, x = pi/6
16) m = y^2 cos y, y = 1
17) f = 3g - sec g, g = -5pi/6
18) h = cot b - 3b, b = -pi/4
19) u = cos v / (v+1), v = 0
20) w = x / sen x, x = -pi/4
21) a - 3b^4 - 5b^3 = 0, b = 1
22) y^2 - 2xy + 4 = 0, x = 0
23) f^2 + 6fg + 36 = 0, g = -2
24) k = n^2 - 2/n, n = 1
25) y - 3 = 5(x-2)^2, x = 0
26) y = w^3, w = 0
27) w = v^4, v = 0
28) v = x^5, x = 0
29) g = h^n, h = 0 (n es un entero positivo).

B.-Resolver los siguientes problemas:

- 1) Para la curva y = 3x^2 - x + 1, encontrar:
a) La ecuación de la familia de sus tangentes.
b) La ecuación de su tangente trazada desde (-3,-2).
c) La ecuación de su tangente paralela a 2x - y = 0
d) La ecuación de la familia de sus normales.
e) La ecuación de la normal que pasa por el punto (-1,-4).

PROBLEMAS

SECCION 4.2

A.-Para las siguientes funciones:

- a) Obtener las coordenadas de los puntos máximos, mínimos, de inflexión de tangente vertical y de intersecciones con los ejes.
- b) Obtener los intervalos en que la curva crece, decrece, en que es cóncava hacia arriba, hacia abajo, y en que no está definida.
- c) A partir de los datos anteriores, graficar la función.

- |                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| 1) $a = w^3 - 3w - 4$             | 2) $u = 3y^4 - 4y^3 + 1$      |
| 3) $f = \frac{g}{g+1}$            | 4) $m = v + \frac{4}{v}$      |
| 5) $k = 1 + 2h - 2h^2 - 2h^3$     | 6) $x = 2n^3 - 3n^2 - 36n$    |
| 7) $z = 2b^5 - 5b^2$              | 8) $u = r^5 - 5r^3$           |
| 9) $t = s(s-4)^2$                 | 10) $t = x^2(x-4)$            |
| 11) $h = 2j^3 - j^2 - 36j + 25$   | 12) $m = (p-2)^3$             |
| 13) $c(q+1)^2 = 4$                | 14) $(4-z^2)r = 8$            |
| 15) $s = f + f^{-2}$              | 16) $x = \frac{1}{y} + y^2$   |
| 17) $4b = m^3(m-3)$               | 18) $16n = 48 + h^4 - 32h$    |
| 19) $e = 24w^2 - w^4$             | 20) $20f = 5s^4 - 4s^5$       |
| 21) $y = \text{sen } x$           | 22) $h = \tan k$              |
| 23) $p = x \cos x$                | 24) $k = \text{sen } j^2$     |
| 25) $f = \frac{\text{sen } g}{g}$ | 26) $t = x^2 - \text{sec } x$ |

B.-En los siguientes problemas se dan características de una curva en un intervalo, dibujar la gráfica aproximada de esa curva:

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $y' > 0$ , $y'' > 0$ | 2) $y' < 0$ , $y'' < 0$ |
| 3) $y' < 0$ , $y'' > 0$ | 4) $y' > 0$ , $y'' < 0$ |

C.-En los siguientes problemas se dan en tal orden, las características de una curva a la izquierda de un punto de abscisa  $a$ , en el punto  $a$ , y a la derecha del punto. Dibujar la gráfica aproximada alrededor de tal punto:

- 1) A la izquierda del punto de abscisa  $a$ :  $y' < 0$ ,  $y'' > 0$   
En el punto de abscisa  $a$ :  $y' = 0$ ,  $y'' > 0$   
A la derecha del punto de abscisa  $a$ :  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$ .
- 2) Idem.:  $y' > 0$ ,  $y'' < 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' > 0$ ;  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$ .
- 3) Idem.:  $y' < 0$ ,  $y'' < 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' > 0$ ;  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$ .

2) Para la curva  $a = (b-1)(b^2+b+1)$ , encontrar la ecuación de:

- a) La familia de sus normales.
- b) La normal que pasa por el origen.
- c) La familia de sus tangentes.
- d) La tangente perpendicular a  $9x+y=0$

3) Para la parábola  $w = y^2 - 2y - 3$ , encontrar la ecuación de:

- a) La familia de sus tangentes.
- b) La tangente en el vértice.
- c) La tangente que forma un ángulo de  $45^\circ$  con su eje de simetría.

4) Para la elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$ , encontrar la ecuación de:

- a) La familia de sus tangentes.
- b) La tangente trazada desde  $(5,0)$ .
- c) La tangente tal que de ella a la línea  $x-y+1=0$  haya un ángulo de  $15^\circ$

5) Dada la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , encontrar la ecuación de:

- a) La familia de sus tangentes.
- b) La tangente trazada desde  $(0,-3)$ .
- c) La tangente que pase por el centro de  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ .

6) De la familia de círculos  $(x-a)^2 + y^2 = 5$ , determinar la ecuación del que es tangente a  $x - 3y = 0$

7) Encontrar la ecuación de la tangente común a los círculos  $x^2 + y^2 = 1$ , y  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ .

8) De la familia de curvas  $ay - 2x^2 + 1 = 0$ , ( $a$  parámetro), encontrar aquella cuya pendiente en el punto de abscisa 3, valga 2.

9)  $z = k + xy + wy^2$ , en que  $k, x, w$ , son parámetros, es una familia de funciones  $z(y)$ , Determinar la ecuación de esa familia que tiene un mínimo relativo en  $y=3$ , y un máximo en  $y=-1$ .

10)  $a = b^{-1}(x - b^3)$ , en que  $x$  es parámetro, es una familia de funciones  $a(b)$ . Determinar la ecuación que tiene un máximo en  $b=2$ .

11) De la familia  $t = as^2 + bs + c$ , donde  $a, b, c$ , son parámetros,

- a) Encontrar la ecuación del miembro que pasa por  $(-1,4)$  y que tiene un máximo en  $s=2$ .
- b) Encontrar el elemento con mínimo en  $s=-3$  y pasa por  $(1,5)$ .

12) Encontrar los puntos de intersección de los círculos  $a^2 - 4a + b^2 - 1 = 0$  y  $a^2 + b^2 - 2b - 9 = 0$ . Para cada punto de intersección, encontrar las respectivas tangentes, y el ángulo entre ellas (este ángulo es llamado el ángulo de intersección de las dos curvas).

- 4) Idem.:  $y' < 0$ ,  $y'' > 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' < 0$ ;  $y' < 0$ ,  $y'' < 0$
- 5) Idem.:  $y' > 0$ ,  $y'' < 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' = 0$ ;  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$
- 6) Idem.:  $y' < 0$ ,  $y'' > 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' = 0$ ;  $y' < 0$ ,  $y'' < 0$
- 7) Idem.:  $y' < 0$ ,  $y'' > 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' = 0$ ;  $y' > 0$ ,  $y'' > 0$
- 8) Idem.:  $y' > 0$ ,  $y'' < 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y'' = 0$ ;  $y' < 0$ ,  $y'' < 0$ .

D.-Para las siguientes familias de funciones, dar las coordenadas del punto máximo o mínimo, especificando las condiciones bajo las cuales es máximo. (Se indican los parámetros).

- 1)  $p = \frac{n}{k} - k$ ,  $\frac{n}{k}$ .
- 2)  $c = bn - \frac{a}{n}$ ,  $b, a$ .
- 3)  $h = bx - yx^3$ ,  $b, y$ .
- 4)  $y - y_0 = k(x - x_0)^2$ ,  $k, y_0, x_0$ .
- 5)  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r$ .
- 6)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ,  $a, b, r$ .
- 7)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a, b$ .
- 8)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a, b$ .
- 9)  $j = 3ma - ka^{-2}$ ,  $m, k$ .
- 10)  $a^2w = y^3 + \frac{a^4}{y}$ ,  $a$ .
- 11)  $b = \frac{8w^3}{x^2 + 4w^2}$ ,  $w$ .
- 12)  $z = \frac{y}{(y+n)^2}$ ,  $n$ .
- 13)  $u = (v-x)^3 + y$ ,  $x, y$ .
- 14)  $an = m^2 + \frac{a^4}{m}$ ,  $a$ .

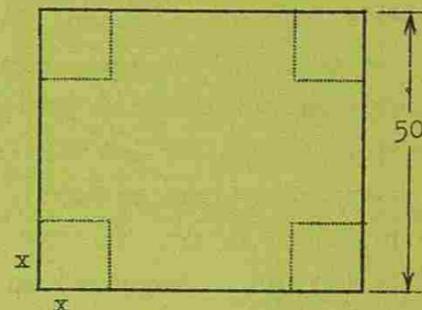
E.-De la familia de funciones  $y = ax^2 + bx + c$  donde  $a, b, c$ , son parámetros:

- 1) Dar tres miembros de la familia, que sean crecientes en el punto de abscisa 2, y que sean cóncavos hacia abajo en el punto de abscisa 5.
- 2) Analizar para qué valores de los parámetros, los elementos correspondientes son cóncavos hacia arriba.
- 3) Dar las coordenadas del punto máximo o mínimo, y decir bajo qué condiciones se tiene un punto máximo.

PROBLEMAS  
SECCION 4.3

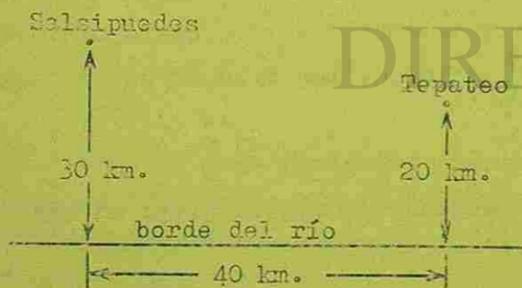
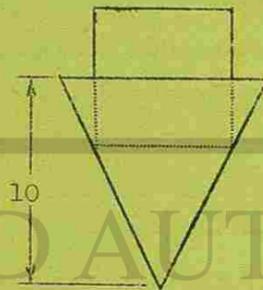
- 1) Encontrar dos números cuya suma sea cincuenta, y cuyo producto sea máximo; ¿puede haber un par cuyo producto sea mínimo?.
- 2) Encontrar dos números cuya suma sea  $b$ , y cuyo producto sea máximo.
- 3) Encontrar dos números cuya suma sea 10 y cuyo cociente sea mínimo.
- 4) Encontrar dos números cuyo producto sea 10, y cuya suma sea máxima. ¿Puede haber un par cuya suma sea mínima?.

- 5) Encontrar dos números cuyo producto sea  $k$ , y cuya suma sea máxima.
- 6) Un cartón cuadrado de 50 cm. de lado, se va a usar para construir una caja cortando las esquinas. ¿De qué tamaño deben cortarse las esquinas para formar una caja de volumen máximo?.



- 7) ¿Cuál es el número que al restarle su cuadrado, dá la cantidad mas grande?
- 8) ¿Cuál es el número que al restarle su cubo, dá la cantidad mas grande?.
- 9) ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de máxima área inscrito en un círculo de radio 5?.
- 10) ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de máxima área inscrito en un círculo de radio  $r$  ?.
- 11) ¿Cuál es el rectángulo de máximo perímetro inscrito en un círculo de diámetro  $D$  ?.
- 12) La resistencia de una viga rectangular, varía como el producto de su ancho por el cuadrado de su alto. ¿Cuáles son el ancho y la altura para una viga de  $100 \text{ cm}^2$  de área, y máxima resistencia?.
- 13) La misma pregunta del 12), para una viga cortada de un tronco de 25 cms. de radio.
- 14) La misma pregunta del 12), para una viga cortada de un tronco de radio  $k$ .
- 15) La intensidad luminosa en un punto varía como la luminosidad del foco y como el recíproco del cuadrado de su distancia. Encontrar el punto entre dos focos cuya luminosidad es de 5 y 10 bujías, donde la intensidad luminosa es máxima.
- 16) Las utilidades de un industrial varían como el producto del dinero invertido en la manufactura y el cuadrado del dinero invertido en la propaganda. Si dispone de un millón de pesos ¿como debe invertirlo para máxima utilidad?.
- 17) Un tanque de agua rectangular de  $100 \text{ m}^3$  se construye a \$20 el  $\text{m}^2$  de fondo, y a \$40 el  $\text{m}^2$  de lados. ¿Cuáles son sus dimensiones para costo mínimo?.
- 18) Encontrar la altura de un cono de máximo volumen, inscrito en una esfera radio 25 cms.
- 19) El mismo problema anterior, pero el radio de la esfera es  $r$ .
- 20) Encontrar altura y radio de cilindro de máximo volumen inscrito en una esfera de radio 10 cms.
- 21) El mismo problema anterior, pero la esfera tiene radio  $k$ .
- 22) Encontrar altura y radio del cilindro de máximo volumen inscrito en un cono de altura 10 y radio 5 cm.

- 23) -¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro de 1000 lts. de capacidad, para que el costo sea mínimo? ¿Y si la capacidad es  $c$  lts.?
- 24) Teniendo un lado sobre una pared ya construída, se va a cercar un terreno de forma rectangular con 5000 mts. de alambre, encerrando la máxima área posible. Encontrar las dimensiones del terreno. (¿Y si hay  $g$  mts. de alambre disponibles para cercar?).
- 25) Un tanque abierto de base cuadrada y lados verticales tiene una capacidad de  $6000 \text{ m}^3$ . Encontrar sus dimensiones para que su costo sea mínimo. (¿Y si su capacidad es  $t \text{ m}^3$ ?).
- 26) Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 15 m. ¿Cuáles son sus dimensiones para área máxima? ¿Y si el perímetro es  $w$  metros?
- 27) Un alambre de 100 cm. se corta en dos porciones: una se dobla en forma de círculo, y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo cortar el alambre para que el área total de las dos figuras sea máxima? (¿Y si el alambre mide  $j$  m?).
- 28) Un papel filtro circular de 6 cms. de radio es doblado en forma de cono circular recto. ¿Cuál es la altura de ese cono para volumen máximo? (¿Y si el papel filtro tiene un radio de  $m$  cm.?).
- 29) Un barco consume  $400 + 2v^3$  kilos de carbón por hora, donde  $v$  es la velocidad en kph. ¿Cuál es la velocidad más económica y la cantidad de carbón consumido a esa velocidad en un viaje de 8000 km.? (¿Y si el viaje es de  $g$  km.?).
- 30) Encontrar el lado del cubo que desplaza mayor volumen de un cono de radio 5 y altura 10, tal como muestra la figura:
- 31) Idem. para un cono de radio  $r$  y altura  $h$ .
- 32) Encontrar el radio del cilindro que desplaza mayor volumen de un cono de radio 6 y altura 9.
- 33) Idem. para un cono de radio  $h$  y altura  $j$ .



34) Dos pueblos (Salsipuedes y Tepateo) situados respecto a un río como marca el diagrama, han decidido instalar una bomba antigua que abastezca de agua a las dos poblaciones. Para que la economía sea completa, se necesita usar el mínimo de tubería. ¿En qué punto del río hay que montar la bomba?.

PROBLEMAS

SECCION 4.4

- A)
- Obtener las siguientes rapidezces de cambio, y evaluarlas para los valores indicados:
- 1) Volumen de una esfera respecto al radio. Para  $r=10$ .
  - 2) Volumen de un cono respecto a su radio. Para  $h=10$ ,  $r=7$ .
  - 3) Volumen de un cono con respecto a su altura, cuando su área total permanece constante. Para  $h=12$ ,  $A=500 \text{ cm}^2$ .
  - 4) Volumen de un gas ideal con respecto a la presión a temperatura constante. Para  $p=3$  atmósferas.
  - 5) Area de una esfera con respecto al tiempo, si el radio aumenta  $1 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}$ .
  - 6) Longitud de una varilla con respecto al tiempo, si la longitud de la varilla varía como la temperatura y la temperatura como el recíproco del tiempo. Para  $t=15$ ,  $T=200^\circ\text{C}$ .
  - 7) Las coordenadas de una partícula respecto al tiempo, si su posición está dada por  $x=t^2+3t$ ;  $y=\text{sen } t$ . Para  $t=3$ .
  - 8) Area de un rectángulo con respecto a su base, si el perímetro es constante. Para  $b=5$  cms.,  $P=30$  cms.
  - 9) Area de un triángulo respecto a su altura si el perímetro es constante. Evaluar la rapidez para  $h=6$  cm. y  $P=15$  cm.
  - 10) Volumen de un cubo, respecto a un lado. Para  $l=3$  cms.
  - 11) Area de un cilindro, respecto a su altura, si el volumen es constante
  - 12) Espacio respecto al tiempo en movimiento uniforme. Para  $t=15$  min.
  - 13) Espacio respecto al tiempo en la caída libre de los cuerpos.  $t=8$  seg.
  - 14) Volumen de un cilindro respecto al radio, si el área total es constante. Evaluar la rapidez, para  $r=5$ ,  $A=70 \text{ cm}^2$ .
  - 15) Volumen de una esfera respecto área de la esfera. Para  $A=5 \text{ cm}^2$ .
  - 16) Volumen de un cono, respecto área de la base si la altura es constante.

B.-Resolver los siguientes problemas gráficamente:

1) Experimentalmente se ha encontrado que las presiones de vapor de  $\text{CO}_2$  sólido a bajas temperaturas, son las siguientes: (la presión está dada en mm. de Hg., y la temperatura en  $^\circ\text{C}$ ).

T	-130	-120	-110	-100	-90	-80	-70	-60
P	2.3	9.8	34.6	104.8	279.5	672.2	1486	3073

¿Cual es la rapidez de variación de la presión respecto a la temperatura, a  $-125^\circ\text{C}$ , a  $-100^\circ\text{C}$ , y a  $-65^\circ\text{C}$ ? ¿Cual es la rapidez media de variación entre  $-110^\circ$  y  $-80^\circ\text{C}$ ?

2) A continuación se dá el calor de vaporización del CO<sub>2</sub> en cal/gr. a distintas presiones en kg/cm<sup>2</sup>:

P	15.5	18.4	21.7	25.44	29.7	33.9	39.2	45	51.6	58.9	67	74
L	70	67.8	65.4	62.7	59.6	56.6	52.7	48.2	42.4	36.2	26.7	12

¿Cual es la rapidez de variación del calor de vaporización respecto a la presión, cuando la presión vale p = 19, 30, 70 kg/cm<sup>2</sup> ?  
¿Cual es la rapidez media entre 25 y 30 kg/cm<sup>2</sup> ?

3) La solubilidad del Acetato de Bario (en gr/100 gr. de agua) a distintas temperaturas en °C es

T	30	40	50	60	70	100
S	75	79	77	74	74	75

¿Cual es la rapidez de variación de la solubilidad respecto a la temperatura a 35°, 45°, 65°, 90°C ?

¿Cual es la rapidez de variación de la temperatura respecto a la solubilidad, cuando esta es 78 gr/100 gr. de agua? .

4) A continuación se dan distintos porcentajes en peso de alcohol en soluciones acuosas y sus correspondientes porcentajes en volumen:

% en peso	.79	8.04	16.26	24.66	33.35	37.84	41.5
% en vol.	1	10	20	30	40	45	49

¿Cual es la rapidez de variación del % en peso, con respecto al % en volumen a 5, 25, y 45 % en volumen ?

¿Cual es la rapidez de variación del % en volumen con respecto al % en peso a 10, 25, y 40 % en peso ? .

PROBLEMAS  
SECCION 4.5

- 1) El lado de un triángulo equilátero es k cm. y está creciendo con una rapidez de  $h \frac{cm}{hr}$ . ¿Cual es la rapidez de crecimiento del área?
- 2) De un jamón de forma cónica, se están cortando tajadas de 3mm. de espesor con una rapidez de  $.5 \frac{tajadas}{segundo}$ . ¿Cual es la rapidez de crecimiento del área de las tajadas?
- 3) Un globo esférico pierde gas con una rapidez de  $6 \frac{lbs}{min}$ . En el instante en que el radio es 20 cm. ¿con qué rapidez decrece el radio? ¿con qué rapidez decrece el área?.

4) Un punto se mueve sobre la parábola  $x^2 = 6y$  en tal forma que su ordenada aumenta uniformemente con una rapidez de  $2 \frac{cm}{seg}$ . ¿Cual es la rapidez de crecimiento de la abscisa? ¿Para que punto, la rapidez de crecimiento de la abscisa, vale  $6 \frac{cm}{seg}$  ?.

5) Un profesor de Cálculo es arrojado por sus alumnos en un tanque de agua, y produce una serie de ondas que avanzan radialmente con una rapidez de  $2 \frac{mt}{seg}$ . Al final de 5 segundos, ¿cual es la rapidez de crecimiento del área cubierta por las ondas?

6) En el Averno hay una licuadora que funde a los estudiantes no estudiosos, y que descarga a un perol semi-esférico de 10 m. de radio, con una rapidez de  $3 \frac{lbs. de estudiante}{segundo}$ . ¿Cual es la rapidez con que sube el nivel en el perol, cuando ha subido 3 m.? ¿Cual es la rapidez en el instante en que se llena?

7) Un globo a 50 mts. del suelo, se eleva verticalmente a  $6 \frac{mt.}{seg}$ . Un automóvil que pasa bajo el globo tiene una velocidad horizontal de  $25 \frac{mt}{seg}$

¿Cual es la rapidez con que se aleja el globo del automóvil?.

8) El volumen de una esfera de nieve que rueda en una colina, aumenta con una rapidez proporcional a su superficie. ¿Cual es la rapidez de aumento de su radio?.

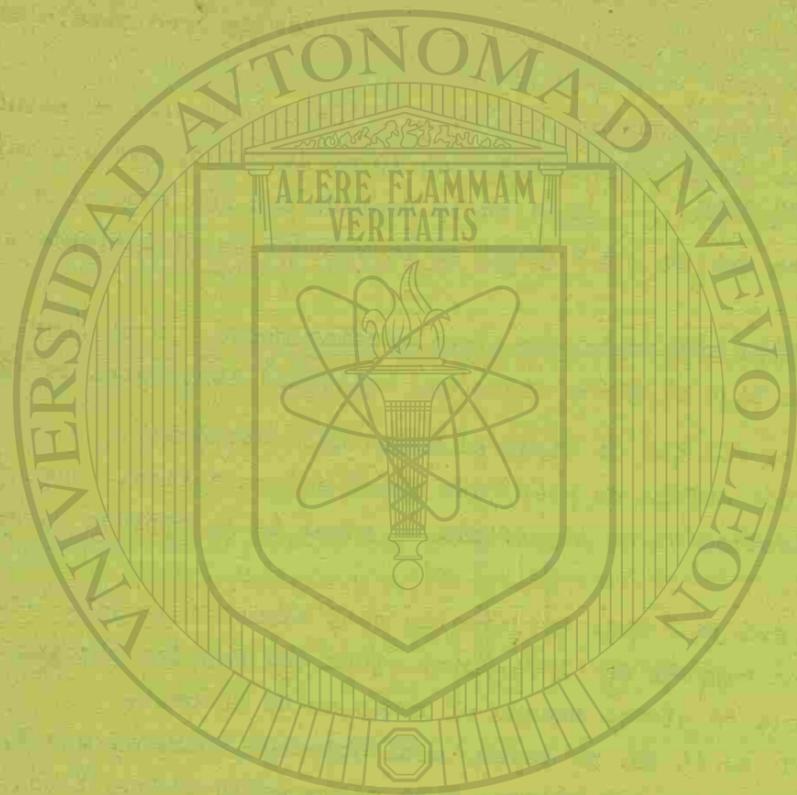
9) Una bola de nieve de 2 mts. de diámetro está expuesta al sol. La nieve se derrite con una rapidez de 1 lt./min. ¿Con qué rapidez disminuye la superficie de la bola de nieve, cuando el radio es de 50 cm.?

10) Una barra MN de 15 dm. de largo, está colocada sobre el eje X, con un extremo en el origen. Si ese extremo M se eleva sobre el eje Y con una rapidez de  $2 \frac{dm}{min}$ , mientras el otro extremo N resbala sobre el eje X. ¿Con qué rapidez se mueve N después de 10 min?.

11) La distancia s en millas al horizonte, para un observador colocado a h pies sobre el suelo, es  $s = \sqrt{1.5h}$ . Si un hombre asciende en un elevador con una rapidez de 6 pies/seg., ¿cual es la rapidez de crecimiento de la distancia al horizonte, cuando está a una altura de 76 pies?.

12) Un hombre de 2 mts. de alto camina hacia un poste con un foco a 11 mt. de altura. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra de su cabeza, cuando está a 8 mts. del poste, y moviéndose con una rapidez de 3 mt./seg.?

13) El filo de una mesa está a 1.1 mts. sobre el suelo, y a 3 mts. de un punto directamente abajo de una luz que se mueve verticalmente con una rapidez de 2 mts./seg. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra de la mesa, cuando la luz está a 10 mts. sobre el piso?.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Capítulo V INTEGRAL Y AREA

### 5.1 Area.

En gemoetría se vé como calcular el área de varias superficies -- planas, como rectángulos, triángulos, polígonos. El método es como sigue: se corta la figura en partes cuyas áreas ya sabemos calcular, y se suman -- las áreas de las partes. Este es el método clásico que se aplica al polígono, al triangularlo y calcular el área de cada triángulo.

También se vé como calcular el área de un círculo, pero entonces el método es radicalmente distinto. Aquel método que sirve tan bien para calcular áreas de figuras con lados rectos, no trabaja para figuras con lados curvos. La intuición nos dice que para estas últimas figuras, debe poder medirse su área. Y es por ello que se hace necesaria una extensión de la definición de medida del área, para que incluya figuras con lados curvos, como círculos, elipses, cicloides, etc.

El método que dá la Geometría para medir el área del círculo consiste en considerar el área de polígonos inscritos en el círculo. Tomamos una sucesión infinita de polígonos regulares inscritos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  tales que sus lados se hagan cada vez mas numerosos, por ejemplo, que el polígono  $P_n$  tenga  $4n$  lados para cualquier valor de  $n$ . Entonces los polígonos se acercan cada vez más al círculo. Si  $A_n$  es el área del polígono  $P_n$ , se forma la sucesión infinita de números  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$

Definimos el área del círculo como:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Luego el área de un círculo es el límite del área de polígonos que se acercan cada vez más a él.

Un método similar se usa para definir el área de cualquier figura.

Por ejemplo, dada la ecuación  $x = y^2$ , graficándola en el plano cartesiano podemos considerar el área bajo la curva entre  $x=1$  y  $x=5$  (Fig 5.1) Para definir su área, cortamos el segmento de 1 a 5 en partes iguales, y sobre cada di-

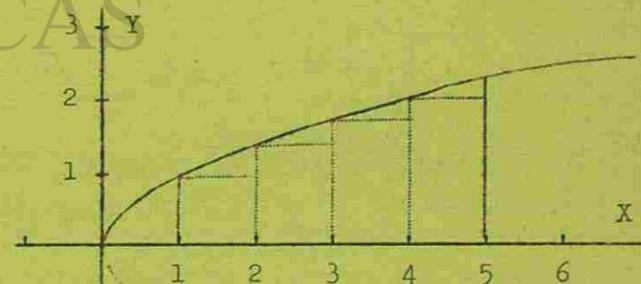


Fig. 5.1.-Definición de área bajo curva.

visión levantamos un rectángulo hasta la curva. En la fig. 5.1 mostramos esto para cuatro rectángulos.

El área de cada rectángulo es: base x altura. La base es 1, y la altura está dada por  $y(x) = \sqrt{x}$ , donde  $x$  toma los valores de cada división. Luego su área es  $y(x) \times 1$ , y la suma de las áreas es:

$$\sum_1^5 y(x) \times 1 = \sum_1^5 \sqrt{x} \text{ que nos da}$$

$$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 1 + 1.41 + 1.72 + 2$$

$$= 6.13 \dots$$

Repitiendo este proceso con mas divisiones, obtenemos otra suma.

En general, si la base de cada rectángulo es  $\Delta x$ , la suma de sus áreas es

$$\sum_1^5 y(x) \Delta x = \sum_1^5 \sqrt{x} \Delta x$$

Mientras mas pequeño tomemos  $\Delta x$ , los rectángulos inscritos se pegan mas a la curva. Entonces, tomando una sucesión de incrementos  $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, (\Delta x)_3, \dots, (\Delta x)_n, \dots$  tal que  $(\Delta x)_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos una sucesión de sumas:

$$\sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_1, \sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_2, \sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_3, \dots, \sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_n, \dots$$

Cada suma representa el área total de los rectángulos inscritos en la curva tomándolos cada vez mas delgados. Finalmente:

Definimos el área bajo la curva como:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_n$

Denotamos esta área con el símbolo  $\int_1^5 \sqrt{x} dx$  (léase: integral de 1 a 5 de  $\sqrt{x} dx$ ).

$$\text{Luego: } \int_1^5 \sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^5 \sqrt{x} (\Delta x)_n$$

En general, dada una función  $z(x)$ , al área bajo su curva entre las abscisas  $a$  y  $b$ , la denotamos por:

$$\int_a^b z(x) dx$$

Cuando sabemos qué función de  $x$  es  $z(x)$ , por ejemplo, que sea  $z = x^3 + 1$ , la sustituimos en la integral, obteniendo:

$$\int_a^b (x^3 + 1) dx$$

El símbolo  $\int_a^b z(x) dx$  nos sugiere la definición del área bajo

la curva. El signo de integrar  $\int$  es una  $\Sigma$  enderezada. Los límites de integración  $a$  y  $b$  se ponen para indicar de dónde a dónde se toma el área.  $a$  se llama límite inferior y  $b$  límite superior.  $z(x) dx$  representa el área de un rectángulo (altura x base), siendo  $z(x)$  su altura y  $dx$  su base. Usamos  $dx$  en lugar de  $\Delta x$  para indicar que se tomó el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Entonces  $\int_a^b z(x) dx$  sugiere la suma de áreas de rectángulos tomados de  $a$  hasta  $b$ , mas la idea de tomar el límite.

Si tratamos de calcular  $\int_a^b z(x) dx$  a partir de su definición, notamos que es un método impráctico por lo largo y engorroso. Entonces, uno de los objetivos del Cálculo es dar métodos para hacer este cómputo mas corto y sencillo. Con este fin introducimos el concepto de integral en la siguiente sección.

Ejerc. 1.- a) Expresé en la forma de integral el área bajo la curva  $z = x^2 - 2$ , entre  $-1$  y  $3$ ; entre  $2$  y  $\sqrt{8}$ .

b) Dada la curva  $y = \frac{1}{w}$ , obtener el área total de rectángulos de  $1$  a  $2$ , cortando el segmento en  $10$  partes iguales.

### 5.2 Integral indefinida.

Dada una función, como  $y = x^3 - 3x + 1$ , su derivada es otra función:  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ . Conversamente, si nos dan la función  $3x^2 - 3$ , nos podemos preguntar qué función  $F(x)$  al derivarla, nos daría  $3x^2 - 3$ . Naturalmente se nos ocurre  $x^3 - 3x + 1$ . Entonces llamamos a  $x^3 - 3x + 1$  la antiderivada de  $3x^2 - 3$ .

Pero también  $x^3 - 3x + 4$  tiene por derivada  $3x^2 - 3$ , y en general  $x^3 - 3x + C$ , donde  $C$  constante, tiene por derivada  $3x^2 - 3$ . Luego la función tiene muchas antiderivadas. A la familia de antiderivadas la llamamos integral indefinida ó integral y la denotamos con el símbolo

$\int (3x^2 - 3) dx$ . Nó es pura coincidencia que usemos el mismo símbolo, pero sin límites que para el área bajo la curva  $\int_a^b (3x^2 - 3) dx$ . Los escri-

bimos así por la estrecha relación que existe entre los dos, como pronto veremos, y que nos permite calcular el área bajo una curva.

La familia de antiderivadas de  $3x^2 - 3$  es  $x^3 - 3x + C$ , luego

$$\int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

Y en general, dada cualquier función  $y(x)$ , si  $F(x)$  denota una de sus antiderivadas entonces:

$$\int y(x) dx = F(x) + C$$

Nótese que no introducimos una notación especial para la antiderivada, sino que en el momento oportuno le damos tal notación a un símbolo de función como lo es  $F(x)$ .

Así, la integral de las siguientes funciones es:

1)  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$  ya que  $\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) = \frac{3x^2}{3} = x^2$ .

2)  $\int \sin z dz = -\cos z + C$  ya que  $\frac{d}{dz}(-\cos z) = -(-\sin z) = \sin z$

3)  $\int 3 dw = 3w + C$  ya que  $\frac{d}{dw}(3w) = 3$

4)  $\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C$  ya que  $\frac{d}{dx} [\frac{2}{3} (x+1)^{3/2}] = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} (x+1)^{1/2} = \sqrt{x+1}$

Entonces, para obtener la integral de una función, basta con ingeniarse en buscar otra función cuya derivada dé lo que estamos integrando y sumarle  $C$  (o cualquier otra letra conveniente) para denotar la familia. En la siguiente sección damos reglas de integración que ayudan al ingenio.

5.3 Fórmulas de Integración.

a) Integral de funciones de potencia:  $x^n$ .

Al integrar  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$   
 $\int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

notamos que obtenemos otra función de potencia con el exponente aumentado por 1, y todo dividido entre el nuevo exponente. Luego pensamos que en general:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1.$$

Para demostrarlo derivamos:  $\frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}}{n+1}) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$ . Luego la identidad es verdadera. Excepto que cuando  $n = -1$ , nos dá

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0}$$

con denominador cero, por lo que la identidad no sirve en este caso. Mas tarde se verá a qué es igual esta última integral, una función estrechamente ligada con la función logaritmo.

Aplicando la identidad a:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2} dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y} + C.$$

Una generalización de la identidad dada es:

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \text{ y } a \text{ constante.}$$

Ejerc. 1.- Integrar  $x^4, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \sqrt[3]{w}, (x+1)^5, \frac{1}{(x-3)^2}$  (R)

b) Integral de Suma de Funciones.

Al integrar  $\int (x^3 + x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ , notamos que obtenemos el mismo resultado integrando separadamente  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$ ,  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ , y luego sumando los resultados, es decir:

$$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$$

es decir, al integrar una suma de términos, podemos separarlos e integrar-- los independientemente.

Para más términos, el resultado es similar: la integral de una suma de términos, es igual a la suma de las integrales de los términos.

$$\int (u+v+w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx .$$

Así, 
$$\int (z^3 - 3z^2 + z + 1) dz = \int z^3 dz - \int 3z^2 dz + \int z dz + \int dz$$
$$= \frac{z^4}{4} - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + C .$$

Ejerc. 2.- Integrar  $\int (3z^2 - z + 1) dz$  ,  $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^3} dx$

c) Sacar constante fuera del signo de integrar.

Al integrar  $\int 5x^2 dx = \frac{5x^3}{3} + C$  notamos que dá lo mismo sacar el 5 pri-- mero y luego integrar:  $\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx = \frac{5x^3}{3} + C .$

Luego en general, para cualquier número  $C$  y función  $u(x)$ :

$$\int C u dx = C \int u dx$$

Así, para integrar  $\int \frac{3w}{\sqrt{5}} dw = \frac{3}{\sqrt{5}} \int w dw = \frac{3w^2}{2\sqrt{5}} + C .$

Hay que fijarse de no sacar fuera de la integral una letra que de penda de la variable de integración. Por ejemplo, al integrar  $\int x \cos x$  , hay la tentación de escribir:

$$\int x \cos x dx = x \int \cos x dx = x(\sen x + C)$$

pero al derivar  $x(\sen x + C)$  no se obtiene  $x \cos x$  como fácilmente - puede comprobarse. Luego no se puede sacar del signo de integrar una letra que dependa de la variable de integración.

Ejerc. 3.- Integrar:  $\int \frac{4}{5} \sen x dx$  ,  $\int (\sqrt{2}b + 3.5b^2) db$  ,  
 $\int \sen 35^\circ df$  ,  $\int \sec^2 a da$  .

### 5.4 Integral Definida.

Usamos el símbolo  $\int_a^b f(x) dx$  para denotar el área bajo la cur- va  $f(x)$  , desde  $x=a$  , hasta  $x=b$  , y usamos  $\int f(x) dx$  para denotar la familia de antiderivadas de  $f(x)$  . Ahora establecemos la estrecha re- lación que existe entre uno y otro. La relación es:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

donde  $F(x)$  es una cualquiera de las antiderivadas denotadas por  $\int f(x) dx$ .

Ejemplos: 1)  $\int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

2)  $\int_0^1 (2x+1) dx = \left[ x^2 + x \right]_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$

Luego, el área bajo la curva  $y = x^2$  de 1 a 3, es  $\frac{26}{3}$  (vea Fig. 5.2).

Sin gran trabajo hemos obte- nido la medida de un área cu- yo cálculo a primera vista parece muy complicado. Con este poderoso resultado, lla- mado con justicia el "Teore- ma Fundamental del Cálculo", obtener el área de figuras curvas es relativamente sen- cillo: consiste en inte- grar y tomar la diferencia - de los contravalores de los límites de integración.

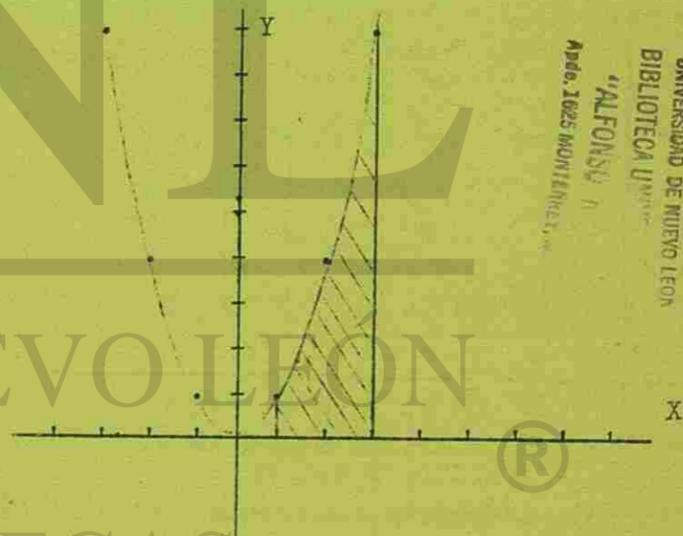


Fig. 5.2.- Area bajo  $y = x^2$

Ejerc. 1.- Evaluar:  $\int_2^{10} \frac{dx}{x^2}$  ,  $\int_0^\pi \sen z dz$  ,  $\int_{-1}^4 (x^4 - 3x^2) dx$  .

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
"ALFONSO" N.  
Apto. 1025 MONTREAL, P.

Para demostrar el teorema fundamental del Cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ donde } F(x) \text{ es una antiderivada de } f(x),$$

formamos la siguiente función: para cada abscisa  $b$ , se obtiene un número que da el área bajo la curva  $f(x)$  entre  $a$  y  $b$ . Luego, si a  $b$  le asignamos este número, es decir:

$$b \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

obtenemos una función. Denotamos con  $A$  la variable dependiente de esta función, por lo que  $A = A(b)$ . Ahora demostramos gráficamente que esta función  $A(b)$  es una antiderivada de  $f(x)$ , es decir  $\frac{dA}{db} = f(b)$ . Para hacer esto, recordamos la definición de derivada como límite del cociente del incremento del contravalor, entre el incremento del valor.

Como se vé en la Fig. 5.3,  $A(b)$  es el área bajo la curva  $f(x)$  desde  $a$  hasta  $b$ . Dándole un incremento  $\Delta b$  al valor  $b$ , el contravalor  $\Delta A$  aumenta por el área sombreada. Esta área la podemos aproximar por un rectángulo de altura  $f(b)$  y base  $\Delta b$ . Luego  $\Delta A \approx f(b) \Delta b$  o sea  $\frac{\Delta A}{\Delta b} \approx f(b)$ .

Cuando  $\Delta b$  tiende a cero, esta aproximación mejora, pues el rectángulo se aproxima a la curva. Luego en el límite tenemos la igualdad:

$$\frac{dA}{db} = \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta b} = f(b) \text{ LCDD.}$$

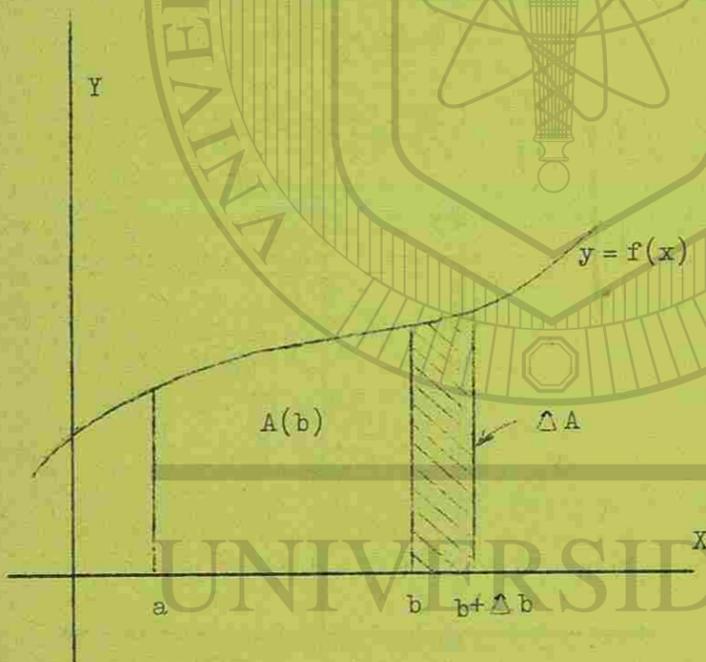


Fig. 5.3.- Teorema Fundamental del Cálculo.

Entonces  $A(b)$  es una de las antiderivadas de  $f(x)$  y solo falta averiguar cuál de ellas es. Si  $F(b)$  es una antiderivada, la familia está dada por  $F(b) + C$ , donde  $C$  constante, por lo que solo falta determinar  $C$ . Queremos  $C$  tal que  $A(b) = F(b) + C$ . Para  $b=a$  sabemos que

$A(a) = 0$  (por definición  $A(a)$  es el área desde  $a$  hasta  $a$ ). Luego  $A(a) = 0 = F(a) + C$ , de donde  $C = -F(a)$ , y entonces:

$$A(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ LCDD.}$$

### 5.5 Cálculo de Areas .

En esta sección damos varios ejemplos de como calcular áreas de figuras dadas:

a) Obtener el área bajo un arco de la curva  $z = \text{sen } x$ .

Graficando la función  $\text{sen } x$ , en la fig. 5.4 vemos que hay un arco comprendido entre las abscisas  $0$  y  $\pi$ . Para calcular su área, cortamos el arco en rectángulos verticales de base  $\Delta x$  y que tienen por altura  $\text{sen } x$ . Luego su área es  $(\text{sen } x)(\Delta x)$ . Sumándolos todos de  $0$  hasta  $\pi$  y tomando el límite, nos da

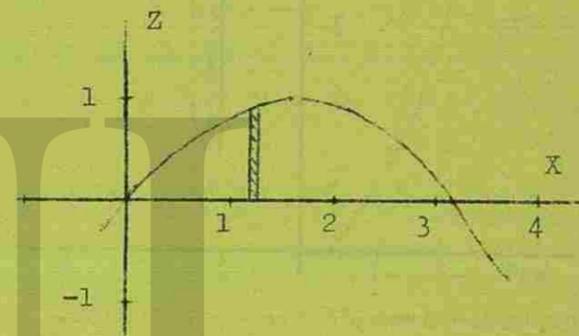


Fig. 5.4.- Area de un arco de  $\text{sen } x$

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen } x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

b) Obtener área bajo la curva  $z = w^3$  de  $-2$  a  $0$ .

En la fig. 5.5 mostramos el área entre dicha curva y el eje de abscisas, entre  $-2$  y  $0$ , cortada en rectángulos de base  $\Delta w$ , y altura  $w^3$ . Luego el área descrita en este párrafo es:

$$\int_{-2}^0 w^3 dw = \left[ \frac{w^4}{4} \right]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}$$

$$= -4.$$

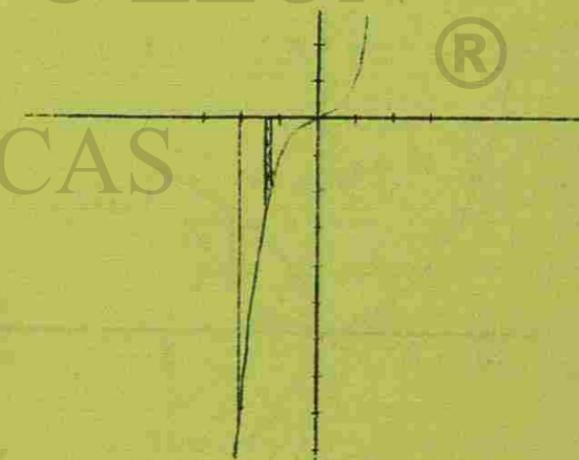


Fig. 5.5.- Areas negativas.

Nos dió un resultado negativo. La razón de ésto es que el área queda bajo el eje  $W$ , luego al tomar  $w^3$  como altura, resulta un número negativo y resulta por tanto una suma negativa. Pero el área de la figura es simplemente  $4$ .

c) Obtener el área limitada por la parábola  $y=x^2$  y la recta  $y=4$ .

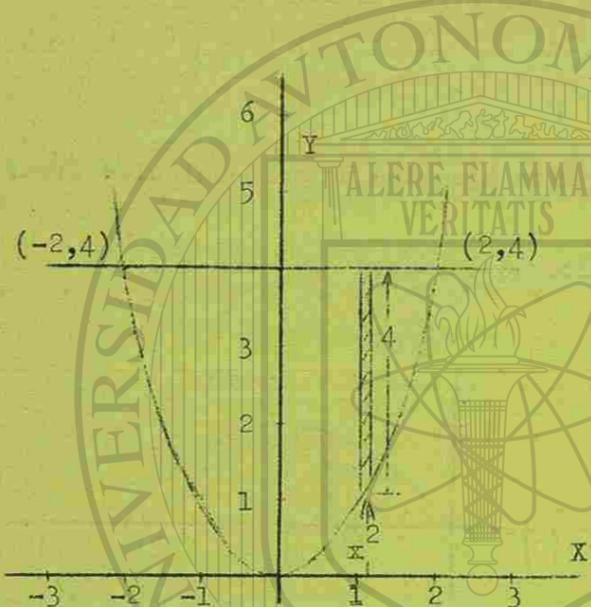


Fig. 5.6.- Area de arco parabólico.

de donde  $x = \pm 2$ . Luego  $(2, 4)$ ,  $(-2, 4)$  son los puntos de intersección, y los rectángulos se extienden del  $-2$  al  $2$ . Entonces el área es:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left( 4 \times 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left[ 4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

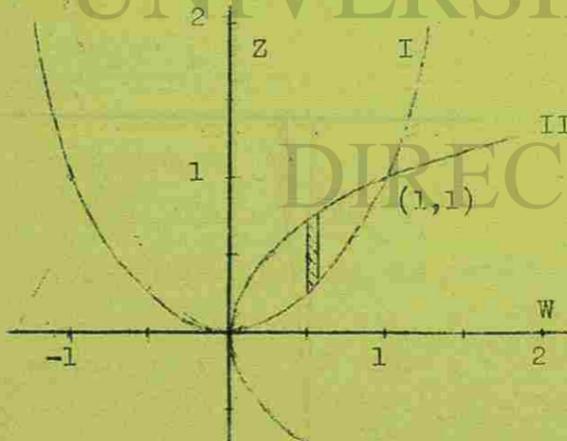


Fig. 5.7.- Area entre dos curvas.

Graficando las dos curvas como en la fig. 5.6, podemos cortar la figura en rectángulos de base  $\Delta x$  y altura  $4 - x^2$ . Obtenemos  $4 - x^2$  en lugar de  $4$ , ya que los rectángulos no se extienden hasta el eje  $X$ , sino solo hasta la parábola. Para saber de qué abscisa a qué abscisa se extienden los rectángulos, tenemos que encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de  $y = 4$  y  $y = x^2$ . Resolviéndolas simultáneamente tenemos  $4 = x^2$

d) Obtener el área limitada por las curvas  $z=w^2$ ,  $w=z^2$ .

Graficándolas como en la fig. 5.7, podemos cortar el área en rectángulos verticales de base  $\Delta w$  y altura igual a la altura de la curva II menos la altura de la curva I.

La altura de la curva I es  $z$  donde  $z = w^2$

y la de la curva II es  $w$  donde  $w = z^2$ . Luego, en términos de  $w$  obtenemos  $w^2$  y  $\sqrt{w}$  respectivamente. Entonces la altura del rectángulo es  $\sqrt{w} - w^2$ . Los rectángulos empiezan en  $(0, 0)$  hasta la siguiente intersección dada por las soluciones del sistema:

$$z = w^2 \quad \text{luego,} \quad z = z^2 \quad \begin{matrix} z = 1 \\ w = 1, \text{ ó} \\ z = 0 \\ w = 0. \end{matrix}$$

Luego el área deseada es:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{w} - w^2) dw = \left[ \frac{2}{3} w^{3/2} - \frac{w^3}{3} \right]_0^1 = \left( \frac{2}{3} 1^{3/2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{2}{3} 0 - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ejerc.-- a) Obtener el área de un arco de la curva  $x = \cos z$ .

b) Obtener el área limitada por  $y = x^2$  y recta  $y = a$ , en que  $a$  es parámetro.

c) Obtener el área bajo la curva  $y = \frac{1}{x^2}$  de  $-3$  a  $-1$ .

PROBLEMAS  
SECCION 5.1

A.- En los siguientes problemas se pide:

- a) Dibujar aproximadamente en un plano cartesiano, el área entre el eje horizontal y la curva indicada.  
b) Denotar esa área usando el signo de integrar:

- 1)  $y = x - 1$ , de  $x = 1$  a  $x = 4$ .    2)  $a = 2b + 3$ , de  $b = 2$  a  $b = 6$ .  
3)  $x = -y + 3$ , de  $y = -3$  a  $y = h$ .    4)  $w = -2c + 1$ , de  $c = -\pi$  a  $c = \sqrt{2}$ .  
5)  $p = 3w^0$ , de  $w = \sqrt{3}$  a  $w = 3\pi$ .    6)  $b = -2n^0$ , de  $n = -.66$  a  $n = -.002$ .  
7)  $y = \sqrt{6-x}$ , de  $x = -2$  a  $x = 0$ .    8)  $k = h^2 - 2h$ , de  $h = j$  a  $h = \tilde{n}$ .  
9)  $u = \frac{1}{v-1}$ , de  $v = 3$  a  $v = 4$ .    10)  $t = s^3 - 3s^2$ , de  $s = 0$  a  $s = 7$ .  
11)  $t = 4k - k^2$ , de  $k = 1$  a  $k = x$ .    12)  $h = 2f^3 - 3$ , de  $f = n - 1$ , a  $f = n^2$ .  
13)  $m = (3g+4)^2$ , de  $g = 1$  a  $g = g^2 - 2g + 1$ .  
14)  $a(b)$ , de  $b = 1$ , a  $b = 5$ .    15)  $f(g)$ , de  $g = -2$  a  $g = k$ .  
16)  $w(k)$ , de  $k = 3$  a  $k = -m$ .    17)  $k(w)$ , de  $w = 3w$  a  $w = w^3$ .

B.-

1) Triangulando, calcular el área de un polígono inscrito en un círculo de radio 1, y con el siguiente número de lados:

- a) 4.    b) 8.    c) 16.    d) 32.    e) 64.    f) 128.

2) Calcular el área entre la curva  $w = k^2 + 1$  y el eje horizontal, desde  $k = 0$  hasta  $k = 3$ , utilizando el siguiente número de rectángulos con bases iguales:

- a) 2.    b) 3.    c) 4.    d) 5.    e) 6.    f) 8.

3) Calcular el área entre el eje horizontal y la curva  $y = \sqrt{4-x^2}$  usando el siguiente número de rectángulos con bases iguales:

- a) 6.    b) 8.    c) 16.

4) Calcular  $\sum_0^2 y(x) (\Delta x)_n$ , con  $y(x) = 4 - x^2$ , para los siguientes

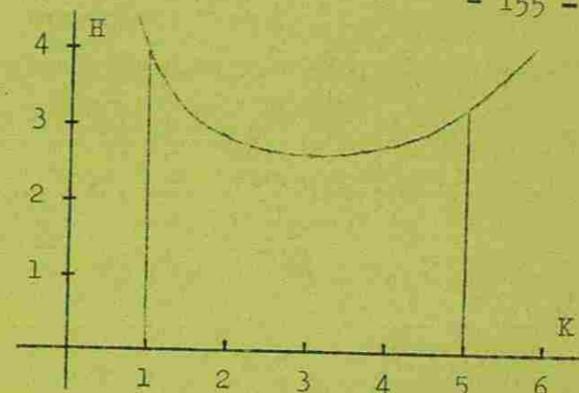
valores de n:

- a) 4.    b) 8.    c) 16.

Nótese que el símbolo:  $\sum_0^2 y(x) (\Delta x)_8$ , denota el área de

8 rectángulos de base igual  $(\Delta x)_8$ , y alturas  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_8)$  donde  $x_1 \dots x_8$  son las abscisas de los puntos de división de las bases.

5) Utilizando la división en rectángulos, calcule el área sombreada en la figura de la derecha. Si la curva de la figura es  $h(k)$  ¿con qué símbolo denota el área citada?.



6) A continuación se dan varias parejas de valor y contravalor de una función  $s(t)$ :  $(0.5, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 2.5)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(3.5, 5)$ . Calcule el área entre el eje T, y la curva correspondiente a tal función, desde  $t = .75$  hasta  $t = 5.5$ .

C.- Conteste las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la diferencia entre el método que se sigue para calcular el área de una figura de lados rectos, y el que se sigue para una de lados curvos?
- Al definir el área de un círculo, se utiliza una sucesión de polígonos ¿hay algún polígono de la sucesión cuya área sea igual a la del círculo? ¿en caso contrario, el área de cual de esos polígonos es la más próxima a la del círculo?.
- ¿Cómo se define el área del círculo?.
- ¿Cómo se define el área entre el eje X y la curva  $y = \sqrt{x} + 1$ , desde  $x = 3$  hasta  $x = 5$ ?
- Explique el significado del símbolo  $\sum_3^5 (\sqrt{x} + 1) (\Delta x)_6$
- Explique el significado del símbolo  $\int_3^5 (\sqrt{x} + 1) dx$
- Denotan lo mismo los dos símbolos anteriores? ¿Cuál es la diferencia?.
- Dé el nombre y el significado de cada una de las partes del símbolo

$\int_x^y g(a) da$ , y diga qué es lo que denota tal símbolo.

PROBLEMAS  
SECCION 5.2

A.- Indicar y evaluar la integral indefinida de las siguientes funciones:

- |                                    |                                    |                                      |                               |                               |
|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x$                             | 2) $3x^2$                          | 3) $4x^3$                            | 4) $5x^4$                     | 5) $6x^5$                     |
| 6) $-x^{-2}$                       | 7) $-2x^{-3}$                      | 8) $-3x^{-4}$                        | 9) $-4x^{-5}$                 | 10) $-5x^{-6}$                |
| 11) $\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1}$ | 12) $\frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1}$ | 13) $\frac{-6}{5}B^{\frac{-6}{5}-1}$ | 14) $\pi Y^{\pi-1}$           | 15) $\sqrt{2}w^{\sqrt{2}-1}$  |
| 16) $1.67z^{.67}$                  | 17) $1.8K^{.8}$                    | 18) $\sqrt{3}\pi R^0$                | 19) $(\pi+1)X^\pi$            | 20) $.0001.M^0$               |
| 21) $\sqrt[3]{x^2}$                | 22) $\sqrt[3]{x^{-2}}$             | 23) $\sqrt{\frac{1}{x^3}}$           | 24) $\sqrt[3]{\frac{1}{w^2}}$ | 25) $\sqrt[5]{\frac{1}{z^4}}$ |
| 26) $\sin u$                       | 27) $\cos h$                       | 28) $\sec^2 f$                       | 29) $-\csc^2 k$               | 30) $-\tan g \sec g$          |
| 31) $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$       | 32) $\frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}$      | 33) $\frac{1}{1+n^2}$                | 34) $\frac{-1}{1+g^2}$        | 35) $\frac{1}{h\sqrt{h^2-1}}$ |
| 36) $x+2$                          | 37) $-a^2-1$                       | 38) $b^3-b$                          | 39) $t^2-2t+1$                |                               |
| 40) $4s^3-4s^2+3$                  | 41) $6p^4-p$                       | 42) $k-\sin k$                       | 43) $1+\cos t$                |                               |
| 44) $\sqrt{x}-\cos x$              | 45) $\sec^2 p+2p$                  | 46) $\tan u \sec u - \sin u$         |                               |                               |
| 47) $4x^3+3x^2+4x-3$               | 48) $5(2x^3-1)^4(6x^2-0)$          |                                      |                               |                               |
| 49) $7(x^3+x^2)^6(3x^2+2x)$        | 50) $3(\sin y)^2(\cos y)$          |                                      |                               |                               |

B.-  $\int \frac{x}{2} dx = x^2 + C$  es la función que a  $x \rightarrow x^2 + C$ . Pero como  $C$  es parámetro, en realidad se trata de una familia de funciones (la familia de antiderivadas de  $\frac{x}{2}$ ). De esa familia, encontrar aquella función que:

- 1)  $2 \rightarrow 3$       2)  $\pi \rightarrow -1$       3)  $-3 \rightarrow -\sqrt{3}$       4)  $a \rightarrow k$ .

C.- De la familia de antiderivadas de  $x+3$ , encontrar aquella que:

- 1)  $0 \rightarrow \pi$       2)  $-4 \rightarrow 0$       3)  $0 \rightarrow 0$       4)  $b \rightarrow h+1$ .

D.- De la familia de antiderivadas de  $\cos h$ , encontrar aquella que:

- 1)  $0.5\pi \rightarrow 3$       2)  $-30^\circ \rightarrow 1$       3)  $\pi \rightarrow \pi$       4)  $135^\circ \rightarrow \sqrt{2}$

E.- De la familia de antiderivadas de  $a - \sin a$ , encontrar aquella que:

- 1)  $\frac{\pi}{3} \rightarrow 1$       2)  $2 \rightarrow 3$       3)  $-\frac{\pi}{2} \rightarrow 2.3$       4)  $\frac{7\pi}{4} \rightarrow 0$

F.- Conteste las siguientes preguntas:

- 1) Defina antiderivada de una función  $f(x)$ .
- 2) ¿La antiderivada de  $f(x)$  es también una función?
- 3) ¿Cuántas antiderivadas tiene una función?
- 4) ¿Qué denota la integral indefinida de  $y(x)$ ? ¿Cómo se representa?
- 5) ¿Qué método se sigue para encontrar la integral de una función?

PROBLEMAS  
SECCION 5.3

Indicar y efectuar la integral de las siguientes funciones:

- |   |   |                                 |                              |                              |
|---|---|---------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $a$                                      | 2) $b^2$  | 3) $c^3$                        | 4) $d^4$                     | 5) $e^5$                     |
| 6) $f^{-2}$                                 | 7) $g^{-3}$   | 8) $h^{-4}$                     | 9) $j^{-5}$                  | 10) $k^{-6}$                 |
| 11) $m^{1/2}$                               | 12) $n^{3/2}$   | 13) $p^{-7/2}$                  | 14) $q^{-8/3}$               | 15) $r^{-4/3}$               |
| 16) $s^{-\pi}$                              | 17) $t^{\sqrt{2}}$                                      | 18) $u^{-2\pi}$                 | 19) $v^{-.2}$                | 20) $w^{-.07}$               |
| 21) $3x^0$                                  | 22) $\frac{3}{4}\sqrt{y^{-3}}$                          | 23) $\frac{-5}{7}\sqrt[3]{z^4}$ | 24) $\frac{3\sqrt{2}}{4}m^3$ | 25) $-3\pi f^{1/2}$          |
| 26) $\frac{1}{\sqrt{x}}$                    | 27) $\frac{-2}{\sqrt{b}}$                               | 28) $\frac{-5}{\sqrt[3]{a}}$    | 29) $\frac{7\pi}{5\sqrt{y}}$ | 30) $\frac{-6}{\sqrt[7]{u}}$ |
| 31) $2x^4 - 5x + 2$                         | 32) $-7x^3 + 6x^{-2} + 3$                               | 33) $-5x^3 + 2\sqrt{x}$         |                              |                              |
| 34) $\frac{-3}{4}\sqrt[5]{x} + 4x^4$        | 35) $5x^{-0.5} - 3x^4 - 1$                              | 36) $ax^2 + bx + c$             |                              |                              |
| 37) $5 \sin y + \pi y$                      | 38) $-4 \cos v + \frac{5}{3} \sec^2 v$                  | 39) $2w^2 - \sec w \tan w$      |                              |                              |
| 40) $\pi \csc^2 q - \pi q^3 + \sqrt{q} - 1$ | 41) $15z^3 + \pi \sqrt{z} - \frac{8}{z} + 4 \sin z - 3$ |                                 |                              |                              |
| 42) $\frac{x^2 - 3 + x^3}{3x^2} + 2\pi$     | 43) $-5(1+x)^2$   |                                 |                              |                              |
| 44) $2(\lambda - 3)^3$                      | 45) $.02(z - 3)^2$                                      |                                 |                              |                              |
| 46) $3(4b + 1)^2 \times 3$                  | 47) $4(8 - \pi w)^3 \times (-\pi)$                      |                                 |                              |                              |

- 48)  $4(4+x^2)^3 \times (2x)$       49)  $3(x^2-x^3)^2 \times (2x-3x^2)$   
 50)  $3(\sqrt{x}-1)^2 \times (\frac{1}{2}x^{-1/2})$       51)  $4(\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)$   
 52)  $3(\cos \lambda)^2 (-\operatorname{sen} \lambda)$       53)  $4(\tan \lambda)^3 (\sec^2 \lambda)$   
 54)  $6(\sec u)^5 (\sec u \tan u)$       55)  $3(\csc y)^2 (-\csc y \operatorname{ctn} y)$   
 56)  $-\operatorname{sen} x^2 \times (2x)$       57)  $\cos a^3 \times (3a^2)$   
 58)  $\tan(3p^2+1) \sec(3p^2+1) \times (6p)$       59)  $-\operatorname{sen}(6v^4-3v+2) \times (24v^3-3)$   
 60)  $(x^2+4)^{3/2} \times (2x)$       61)  $4(\operatorname{sen} x^2)^3 \cos x^2 \times (2x)$

PROBLEMAS  
SECCION 5.4

A.- Evaluar las siguientes integrales definidas:

- 1)  $\int_3^4 x \, dx$       2)  $\int_{-1}^2 h^2 \, dh$       3)  $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$   
 4)  $\int_{-2}^{-1} \sqrt{g} \, dg$       5)  $\int_{\pi/2}^\pi \cos u \, du$       6)  $\int_{-2}^2 y^3 \, dy$   
 7)  $\int_{-2}^2 y^2 \, dy$       8)  $\int_{-3}^{-2} k^{-2} \, dk$       9)  $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt[3]{p} \, dp$   
 10)  $\int_{10^\circ}^{45^\circ} \sec^2 z \, dz$       11)  $\int_{-50^\circ}^{-20^\circ} \sec f \tan f \, df$       12)  $\int_{5-\sqrt{2}}^{5+\sqrt{2}} dh$   
 13)  $\int_1^2 x^4 \, dx$       14)  $\int_{-2}^{-1} x^4 \, dx$       15)  $\int_2^1 x^4 \, dx$   
 16)  $\int_1^3 a \, da$       17)  $\int_1^3 u \, du$       18)  $\int_1^3 k \, dk$   
 19)  $\int_1^x b^2 \, db$       20)  $\int_1^y b^2 \, db$       21)  $\int_1^k b^2 \, db$

- 22)  $\int_1^2 (x^2-5x+1) \, dx$       23)  $\int_{-2}^0 (2r^3-3r+4) \, dr$   
 24)  $\int_2^5 (f-f^2-1) \, df$       25)  $\int_{-1}^\pi (h^3-1) \, dh$   
 26)  $\int_0^{0.5} x(x-1)(x+1) \, dx$       27)  $\int_{1/2}^{3.5} x(x-x^2) \, dx$   
 28)  $\int_0^1 (x-1)(x+2)(x-3) \, dx$       29)  $\int_2^3 (x+4)(x-5) \, dx$   
 30)  $\int_{30^\circ}^{60^\circ} (\operatorname{sen} u + \cos u + 2) \, du$       31)  $\int_{90^\circ}^{135^\circ} (\operatorname{sen}^2 u + 2 \operatorname{sen} u) \cos u \, du$   
 32)  $\int_{.5\pi}^{.75\pi} (\cos u - 3 \sec^2 u) \, du$       33)  $\int_{-.5\pi}^{2\pi} (w - 3 \tan w \sec w - 1) \, dw$

B.- Conteste las siguientes preguntas:

- 1) ¿Qué denota el símbolo  $\int_a^b f(x) \, dx$  ?  
 2) ¿Qué denota el símbolo  $\int_a^b f(x) \, dx$  ?  
 3) ¿Qué denota el símbolo  $\left[ F(x) \right]_a^b$  ?  
 4) Si  $G(h)$  es una antiderivada de  $k(h)$ , ¿qué relación existe entre ambas funciones?  
 5) Si  $A(y)$  es una antiderivada de  $x(y)$ , diga cuáles de las siguientes igualdades son ciertas:  
 $\int_k^n x(y) \, dy = \left[ A(y) \right]_k^n = A(n) - A(k)$   
 $\frac{dA}{dy} = x(y)$

6) Sea  $\int_1^x a^2$  da la función que a :  $x \rightarrow \int_1^x a^2$  da .

Completar las siguientes parejas de valor y contravalor de tal función :

a)  $2 \rightarrow ?$     b)  $\pi \rightarrow ?$     c)  $1 \rightarrow ?$     d)  $0 \rightarrow ?$     e)  $-\sqrt{2} \rightarrow ?$

f)  $k \rightarrow ?$     g)  $h-1 \rightarrow ?$     h)  $? \rightarrow \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}$     j)  $? \rightarrow \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$

7) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo.

PROBLEMAS  
SECCION 5.5

Encontrar las siguientes áreas, graficando previamente en forma aproximada:

- 1) Area de un arco de la curva  $y = \cos x$  .
- 2) Area entre el eje horizontal y la curva  $y = 2x - x^2$  .
- 3) Area entre el eje horizontal y la curva  $y = k^2 - 1$  .
- 4) Area entre el eje horizontal y la curva  $f = 2 - g^2$  .
- 5) Area entre el eje vertical y la curva  $y = y^2 - y^3$  .
- 6) Area entre eje X y la curva  $y = x^3 - 4x$  desde  $-2$  a  $0$  , de  $0$  a  $2$  .
- 7) Area entre eje K y la curva  $p = k^4 - 16$  de  $-1$  a  $1$  .
- 8) Area entre eje W y la curva  $h = 2w^2 - 4w$  de  $2$  a  $4$  .
- 9) Area entre eje M y la curva  $a = 2m - 4$  de  $-3$  a  $1$  .
- 10) Area entre eje G y la curva  $b = \sqrt{25 - g^2}$  de  $0$  a  $5$  .
- 11) Area limitada por las curvas  $a^2 = b$  y  $b = 4$  .
- 12) Area limitada por  $h = 2r - r^2$  y  $h = -3$  .
- 13) Area limitada por  $t = 3s - s^2$  y  $t + s - 3 = 0$  .
- 14) Area limitada por  $j = b^4 - 2b^2$  y  $j = 2b^2$  .
- 15) Area limitada por  $w = \sin \lambda$  ,  $w = \cos \lambda$  y el eje W .
- 16) Area limitada por  $\sqrt{p} + \sqrt{c} = 1$  , el eje P , y el eje C .
- 17) Area limitada por  $h^2 = 4k$  ,  $h + 2k - 4 = 0$  , y el eje K .
- 18) Area limitada por  $y = \frac{1}{x^2}$  , y el eje X , desde  $1$  hasta  $10^8$  .
- 19) Area limitada por  $k = \frac{1}{\sqrt{v}}$  , y el eje V , desde  $1$  hasta  $10^6$  .

$a = 67$   
 $c = 33$   
 $B = 36^\circ$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$   
 $b^2 = (67)^2 + (33)^2 - 2(67)(33) \cos 36^\circ$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ \hline 469 \\ 102 \\ \hline 489 \\ 089 \\ \hline 578 \end{array} \quad \begin{array}{r} 33 \\ 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \\ 67 \\ 33 \\ \hline 201 \\ 201 \\ \hline 2211 \\ 2 \\ \hline 4422 \end{array}$$

$b^2 = 5578 -$   
 $b^2 = 2000$   
 $b = \sqrt{2000}$   
 $\frac{a+c}{a-c} = \tan^2 \frac{A}{2}$

$$\begin{array}{r} 80902 \\ 4422 \\ \hline 161804 \\ 81804 \\ \hline 323608 \\ 323608 \\ \hline 356948644 \end{array}$$

$5578$   
 $3578$   
 $2000$   
 $6002.64828$   
 $200$   
 $2426$   
 $44$   
 $48$



