Capítulo I

PLANO GEOMETRICO

1.1 Números reales.

A cualquier número real lo podemos denotar con muchos símbolos diferentes. Por ejemplo, el número seis lo podemos denotar con seis palitos ||||| | , o siguiendo el sistema romano con VI , o en el sistema decimal con 6 , o en el lenguaje con la palabra "seis" . Desde luego estas no son la únicas maneras , pues si usamos las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, podemos denotar al seis con muchísimos otros símbolos, como: $5+1$, $10-4$, $6-0$, 2×3, $\frac{12}{2}$, etc. Todos estos símbolos tienen diferente forma , pero denotan el mismo número , por lo que decimos que son iguales y escribimos $6=5+1$, $10-4=6-0$, $2\times 3=\frac{12}{2}$, etc. De hecho, una de las finalidades de las matemáticas escolares es enseñar como transformar un número de una forma a otra, de modo que sean iguales.

En general, decimos que dos símbolos son iguales, cuando denotan la misma cosa.

Ejerc. 1.-Denote el número diez con veinte símbolos de diferente forma.

Las dos maneras mas usuales de denotar a los números son: la forma de quebrado y la forma decimal. No todos los números reales se pueden escribir en la forma de quebrado, y de hecho, clasificamos a los reales en racionales e irracionales, según se puedan escribir o nó en la forma de quebrado. En cambio, todos los números reales se pueden escribir en la forma decimal, con un número finito o infinito de cifras según el caso. Por ejemplo, $\frac{5}{4}=1.25$ tiene tres cifras, mientras que $\frac{1}{3}=0.3333....$ tiene un número infinito de cifras. Desde luego, como no podemos escribir todas las cifras, para indicar las que faltan ponemos puntos suspensivos. En este caso las cifras que faltan son todas 3. Pero no siempre las cifras se repiten, como en $\sqrt{5}=2.235....$ Nótese que $\sqrt{5}$ no es igual a 2.235 , pues $\sqrt{5}$ tiene mas de cuatro cifras. Lo mas que podemos decir es que 2.235 es una aproximación de $\sqrt{5}$ hasta la cuarta cifra.

Ejerc. 2.- Poner en la forma decimal con cinco cifras, los números: $\frac{3}{16}$, 8^3, - log 2.3 , sen 31° , $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{2}$.

Otra manera de denotar a los números reales es a través de la escala real. En una línea recta (vea fig. 1.1) escogemos arbitrariamente dos puntos distintos. Al punto de la izquierda lo asociamos con el número real cero y lo llamamos punto cero; al punto de la derecha lo asociamos con el número real uno y lo llamamos punto uno. Para obtener los enteros positivos movemos el segmento $\overline{0,1}$ a la derecha y para obtener los enteros negativos lo movemos a la izquierda. Los números racionales se obtienen cortando el segmento $\overline{0,1}$ en un número de partes iguales; moviendo una de estas partes a la izquierda y a la derecha, obtenemos los racionales negativos y positivos respectivamente. Los puntos de la escala real que no son racionales, como $\sqrt{2}$, π, $\log 5$, etc., representan a los números irracionales.

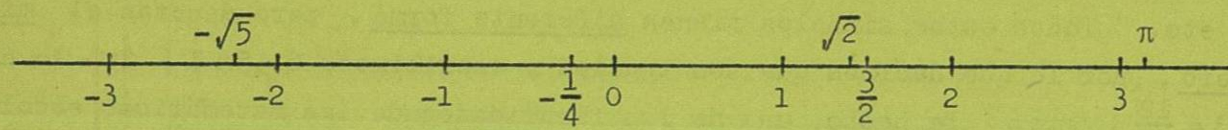

Fig. 1.1.- Escala Real.

Sobre la escala real, el orden de los números reales es evidente. Cuando el número a queda a la izquierda de b, decimos que a es menor que b escribiendo $a < b$, ó que b es mayor que a escribiendo $b > a$.

Ejerc. 3.- a) Graficar sobre la escala real los números: -0, -3.5, $1+\frac{1}{4}$, $-\sqrt{2}$, 2^3, 4.001, $\log 10$, $\sqrt{-2}$, $2+3i$.

b) Decir cual es el menor en cada una de las siguientes parejas: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$; 4.56, 4.06; $\sqrt{2}$, 1.414; π, 3.1416, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$.

1.2 Coordenadas Cartesianas.

En la sección anterior establecimos la asociación entre puntos de una recta y números reales, por medio de la escala real. Esta asociación es ventajosa pues permite ver gráficamente ciertas propiedades de los números reales, como las propiedades de orden.

Ahora queremos asociar de alguna manera los puntos de un plano con números reales. Encontramos que la asociación mas útil en la práctica y en Matemáticas, es la asociación, nó con números reales, sino con parejas de números reales. (Por eso decimos en Matemáticas que el plano tiene dimensión dos, mientras que la recta tiene dimensión uno). Esta asociación se puede hacer de varias maneras, y de todas ellas, aquí consideramos la asociación determinada por las coordenadas cartesianas (en la sección 2.8 veremos la asociación que se establece con las coordenadas polares).

Sobre el plano trazamos dos escalas reales X y Y, formando ángulo recto y cortándose en el punto cero. (Las escalas X y Y, usualmente se toman iguales, excepto en aplicaciones especiales.

Dado cualquier punto P sobre el plano (vea fig. 1.2), para encontrar con cual par de números vamos a asociarlo, proyectamos P sobre la recta X y sobre Y. Los pies de las dos proyecciones nos dan dos números, en este caso 2 y 3. Entonces asociamos P con el par (2,3). Llamamos a (2,3) las coordenadas cartesianas (o coordenadas) de P; llamamos al 2 abscisa y al 3 ordenada de P.

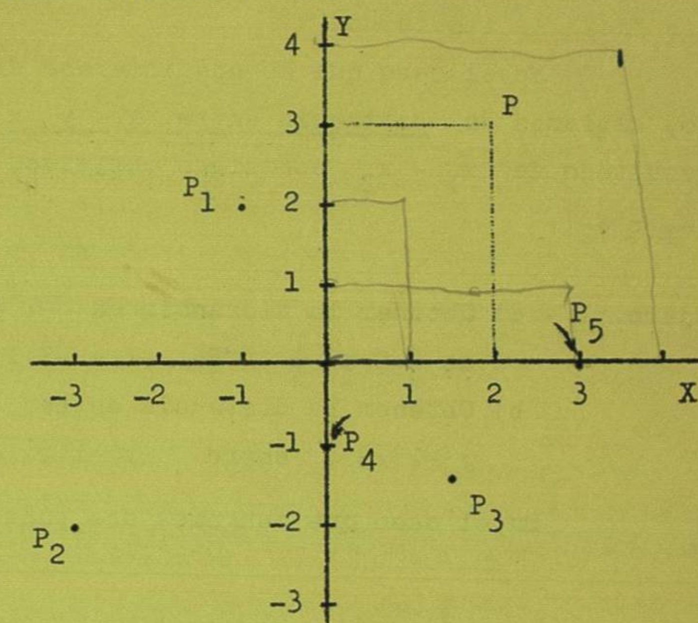

Fig. 1.2.- Coordenadas Cartesianas.

Ejerc. 1.- a) Dé las coordenadas de P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 en la figura 1.2.

b) Grafique los pares $(-1,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{5})$, (π,π), $(5-2, \frac{4}{2})$.

A la recta X la llamamos eje X, o eje horizontal, o eje de abscisas (pues los números sobre X los llamamos abscisas), mientras que a Y la llamamos eje Y, o eje vertical, o eje de ordenadas. Denotando con x cualquier número sobre el eje X, y con y cualquier número sobre Y, entonces las coordenadas de cualquier punto del plano son (x,y). Por convención, el primer número del par (x,y) se refiere a la proyección sobre el eje horizontal, y el segundo número se refiere a la proyección sobre el eje vertical.

1.3 Distancias y Angulos.

Dados dos puntos x_1 y x_2 sobre la escala real, nos podemos mover de x_1 a x_2 ó de x_2 a x_1 cierta distancia. Para distinguir entre uno y otro caso introducimos el concepto de distancia dirigida. Definimos la distancia de x_i a x_f, como $x_f - x_i$, es decir, abscisa final menos abscisa inicial.

Ejemplos: a) La distancia de -3 a 5 es $5-(-3)=8$.
b) La distancia de 5 a -3 es $-3-5=-8$.

Notamos inmediatamente que el signo de la distancia dirigida cambia, según nos movemos, siendo positiva si vamos hacia la derecha, y negativa si vamos hacia la izquierda.

En el caso que no nos interese distinguir la dirección del movimiento, hablamos de <u>distancia entre x_1 y x_2</u>, donde sencillamente tomamos el resultado de $x_1 - x_2$ con signo positivo, es decir, tomamos el valor absoluto $|x_1 - x_2|$.

Ejerc. 1.- a) Obtener la distancia de -1 a 20 , de -19 a 40 , de 4 a -4 , de 6.5 a $\frac{1}{4}$, de -1 a -7.1 , de -2 a π , de $-\pi$ a $\sqrt{3}$.
b) Obtener la distancia entre 4 y 5 , entre -3 y 6 , entre -8 y -13.3 , entre y -1 , entre -1 y π , entre 1 y $-\pi$.

En el caso que tengamos dos puntos en el plano (P_1 y P_2 en la fig. 1.3), el concepto de distancia dirigida de P_1 a P_2 requiere el uso de vectores, por lo cual no lo consideramos. Sólo consideramos la distancia entre P_1 y P_2 que definimos como la longitud del segmento de recta que los une. Si nos dan las coordenadas de P_1 como (x_1, y_1) y las de P_2 como (x_2, y_2), para obtener la distancia $\underline{D}$ entre P_1 y P_2 en términos de las coordenadas, consideramos el triángulo de la fig. 1.3 .

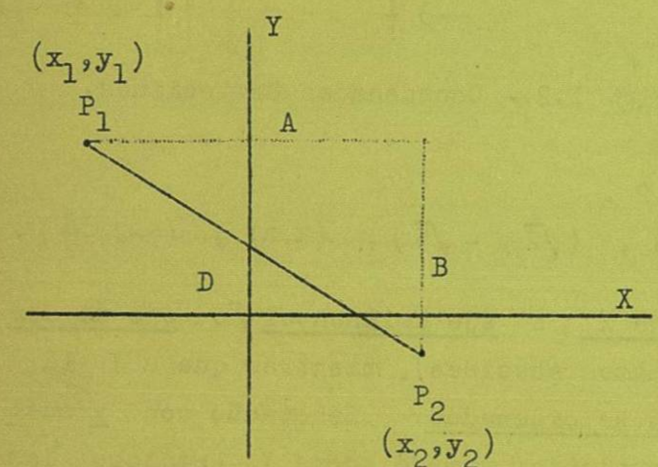

Fig. 1.3.- Distancia entre dos puntos.

D es la longitud de la hipotenusa, A y B las longitudes de sus catetos. Luego por el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = A^2 + B^2 \quad , \quad \text{pero} \quad A = |x_2 - x_1| \quad , \quad B = |y_2 - y_1| \quad , \quad \text{de donde}$$

$$\boxed{D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

(¿Cuál es la distancia entre $(3,4)$ y $(-1,2)$; entre $(-1,2)$ y $(3,4)$?. ¿Es la distancia entre (a_1,b_1) y (a_2,b_2) igual a la distancia entre (a_2,b_2) y (a_1,b_1) ?).

En trigonometría vieron como medir el ángulo dirigido del segmento $\underline{A}$ al segmento $\underline{B}$ (vea figura 1.4), ya sea en grados o en radianes, trazando un círculo con centro en el vértice común.

a) En el caso de medir en grados, dividimos la circunferencia en 360 partes iguales, representando cada parte, un grado.

Al rotar el segmento $\underline{A}$ hasta coincidir con el segmento $\underline{B}$, barre cierto número $\underline{p}$ de grados ($p \geq 0$). Si la rotación fué en el sentido la medida del ángulo es p^o , y si fué en el sentido la medida es $-p^o$.

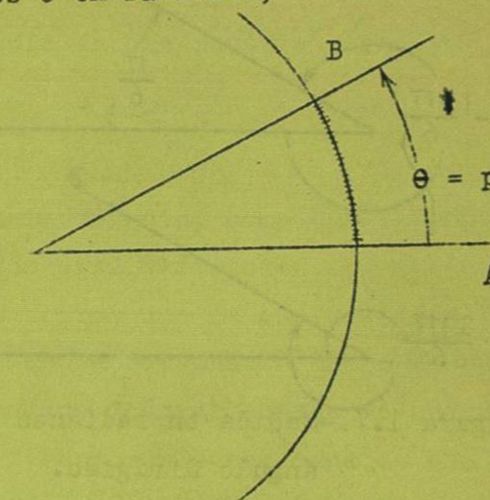

Figura 1.4.- Grados.

Si después rotamos una o mas vueltas completas, el segmento $\underline{A}$ vuelve a coincidir con el segmento $\underline{B}$, por lo que a dicho ángulo le asignamos también las medidas $(p+n360)^o$ ó $(-p-n360)^o$ respectivamente.

Por ejemplo, en la figura 1.5 la medida del ángulo dirigido de $\underline{A}$ a $\underline{B}$ es -40^o ó $(-40-360)^o = -400^o$ y en general $(-40-n360)^o$. Otras medidas del mismo ángulo son 320^o ó $320^o + n360^o$.

(Dé cuatro medidas del ángulo dirigido de $\underline{B}$ a $\underline{A}$ en la misma figura. ¿Es igual el ángulo dirigido de $\underline{A}$ a $\underline{B}$ al ángulo dirigido de $\underline{B}$ a $\underline{A}$?).

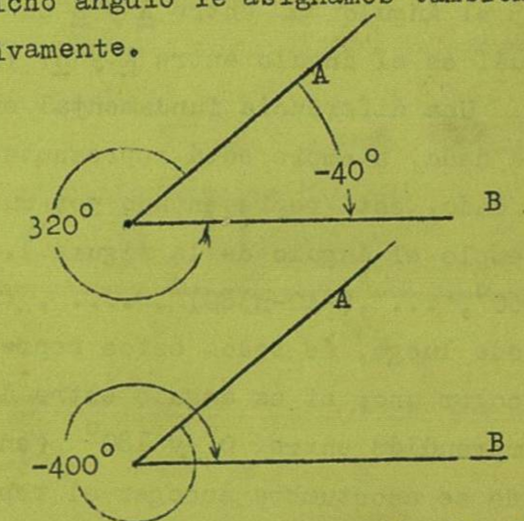

Figura 1.5.-Medida de un ángulo dirigido en grados.

b) En el caso de medir en radianes, la medida del ángulo dirigido de $\underline{A}$ a $\underline{B}$ es $\theta = \frac{s}{r}$ (ver figura 1.6), donde $\underline{r}$ es el radio del círculo, y $\underline{s}$ es la longitud del arco que barre $\underline{A}$ al rotarse hasta coincidir con $\underline{B}$. El arco $\underline{s}$ se toma positivo si la rotación fué en el sentido

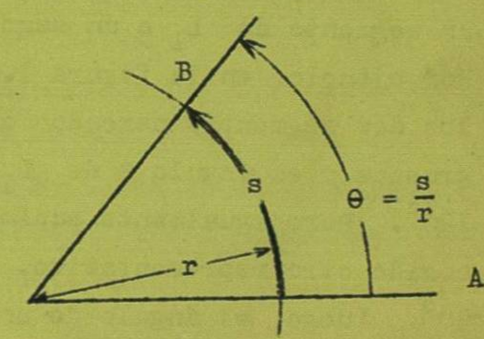

Figura 1.6.- Radianes.

y se toma negativo si la rotación fué en el sentido . Como la circunferencia de un círculo de radio 1 es 2π, una rotación de una vuelta dá un ángulo de 2π radianes (¿porqué?), y entonces, al rotar varias veces el segmento A , se obtienen otras medidas del mismo ángulo, como $\theta+n2\pi$.

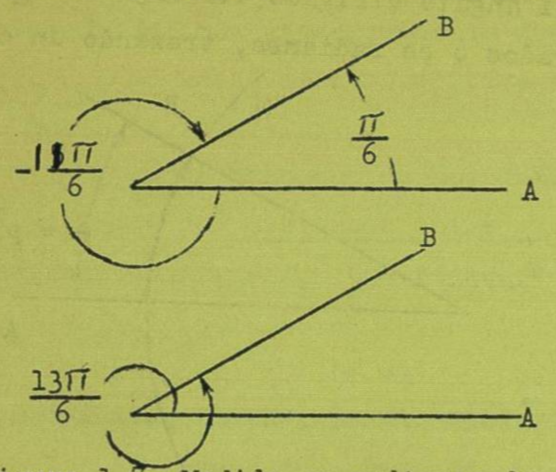

Figura 1.7.-Medida en radianes de un ángulo dirigido.

Por ejemplo en la figura 1.7 la medida del ángulo dirigido de A a B es $\frac{\pi}{6}$, ó $\frac{\pi}{6}+2\pi = \frac{13\pi}{6}$, ó $\frac{\pi}{6}+n2\pi$.

Otras medidas del mismo ángulo son $-\frac{5\pi}{6}$, ó $-\frac{5\pi}{6}-2\pi = -\frac{17\pi}{6}$ etc.

(Dé cuatro medidas del ángulo dirigido de B a A en radianes. ¿A qué equivale un radián en grados?)

Definimos el ángulo α entre dos segmentos A y B como el valor absoluto del ángulo θ de A a B, es decir $\alpha = |\theta|$. Por ejemplo en la figura 1.5 el ángulo α entre A y B es $\alpha = 40^\circ$. (Si el ángulo de A a B es -30°, ¿cuál es el ángulo entre A y B?).

Una diferencia fundamental entre distancia y ángulo, es que una distancia dada, siempre está representada por un sólo número, mientras que un ángulo dado, está representado por cualquiera de muchos números diferentes. Por ejemplo el ángulo de la figura 1.5 tiene como representativos a -40° , -400° -760°, ... ,$(-40-n360)^\circ$, ... , también a 320°, 680°,..., $(320+n360)^\circ$,... Desde luego, de todos estos representativos se acostumbra, para manipular, escoger uno; si es ángulo entre dos segmentos, se escoge el representativo comprendido entre 0° y 180° (entre 0 y π radianes), y si es ángulo dirigido se acostumbra escoger el representativo comprendido entre -180° y 180° ($-\pi$ y π radianes).

El ángulo de una linea recta L_1 a otra L_2 se define como el ángulo de un segmento de L_1 a un segmento de L_2 . Por ejemplo, en la figura 1.8 escogimos los dos segmentos marcados con líneas gruesas y el ángulo θ de L_1 a L_2 es de 120°. Pero igualmente pudimos haber escogido otro representativo, como el de -30°. Luego, el ángulo de una recta a

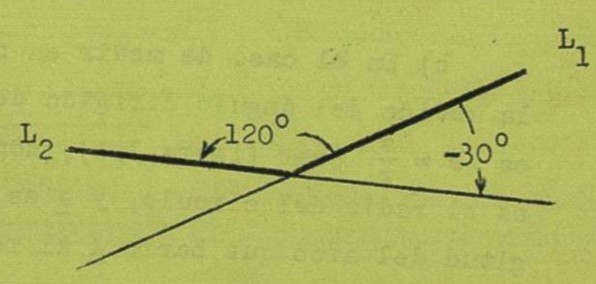

Figura 1.8.-Angulo entre dos rectas.

otra está dado también por muchos representativos.

El ángulo entre dos rectas se define como el valor absoluto del ángulo de una recta a otra. Por ejemplo, el ángulo entre L_1 y L_2 en la fig. 1.8 sería $|-30^\circ| = 30^\circ$.

Ejerc. 4.- Dé cinco representativos para el ángulo de una recta a otra, si uno de ellos es $-\frac{\pi}{4}$.

1.4 Ecuaciones.

Podemos definir ecuación de una manera directa, como dos expresiones algebraicas ligadas por el signo "=" . Con esta definición, $4x^2 + bc = \frac{3a+1}{2b}$ es una ecuación. La ecuación afirma que la expresión de la izquierda es numéricamente igual a la expresión de la derecha. Luego es una proposición acerca de las dos expresiones, y podemos indagar acerca de cuándo la proposición es verdadera o nó es verdadera. Pero antes nos tenemos que poner de acuerdo sobre qué entendemos por "ecuación verdadera".

En el caso de la ecuación en que ocurren sólo números particulares , o letras que denotan números particulares, como $16 = 2\pi - \sqrt{25}$, no hay problema. La ecuación es verdadera cuando ambos lados denotan el mismo número, y no lo es cuando denotan números diferentes. Para determinar ésto, basta con transformar ambos lados a expresiones que se reconozcan como iguales o nó.

En la ecuación dada podemos escribir $2\pi - \sqrt{25}$ en la forma decimal, obteniendo $2 \times 3.14.... - 5 = 1.28....$ que evidentemente es distinto a 16. Luego $16 = 2\pi - \sqrt{25}$ no es verdadera.

En cambio $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ es verdadera, o como decimos, es una igualdad pues $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Ejerc. 1.-Determine cuales de las siguientes ecuaciones son igualdades y cuales nó: $2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}$, $1 + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$, $2\sqrt{5} = \sqrt{10}$, $3^2 \times 3^3 = 3^5$, $\sqrt{5}\ \sqrt{6} = \sqrt{30}$, $2 - \log 100 = 0.000$.

En el caso que ocurran una o mas letras que denoten un número cualquiera, como en $3a = 2b - 5$, donde a y b denotan cualquier número real, aún podemos reducirlo al caso anterior sustituyendo las letras por algunos de sus valores. Por ejemplo, si sustituímos a por 3 y b por 6, es decir, (a,b) por (3,6), obtenemos la ecuación $3 \times 3 = 2 \times 6 - 5$ en la que ocurren sólo números particulares y claramente no es verdadera. Pero no hay nada que nos diga que debemos darle ese par de valores. Sustituyendo otro par (-1,1) obtenemos $3(-1) = 2-5$, que sí es verdadera.

Luego, sustituyendo algunos pares de valores en la ecuación, se obtiene una igualdad, y esto queremos expresar al decir que el par satisface la ecuación , ó que el par es una solución de la ecuación. En cambio otros pares no dan una igualdad y entonces decimos que no satisfacen la ecuación, o que no son soluciones de ella.

Ejerc. 2.- a) ¿Cuáles de los siguientes pares son soluciones de la ecuación $3a = 2b-5$?: $(a,b) = (0,0)$; $(0,\frac{5}{2})$; $(\frac{5}{3},0)$; $(1,2)$; $(3,7)$

b) Dada la ecuación $w^2 = h-1$, obtener tres pares que sean soluciones y tres pares que no sean soluciones.

No sería justo decir que la ecuación $3a = 2b-5$ es verdadera, pues como vimos, al sustituir sus letras por números particulares a veces resultan ecuaciones verdaderas y a veces no. En lugar, nos conformamos con llamarla ecuación condicional o simplemente ecuación.

Cuando se dá el caso de una ecuación como $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, en que al sustituir sus letras por números siempre se obtienen ecuaciones verdaderas, entonces sí la llamamos ecuación verdadera o identidad . En Física e Ingeniería a veces se llama "ecuación verdadera" a una ecuación que según nuestra definición no lo es. Por ejemplo, se dice que $D = VT$ donde D distancia, V velocidad y T tiempo, es "verdadera", aunque claramente $(D,V,T) = (1,2,2)$ no la satisface. Nosotros preferimos llamarla ecuación concordante pues su "verdad" consiste en concordar con un aspecto del mundo físico.

Para demostrar que una ecuación es una identidad, no basta con sustituir varios números y comprobar que satisfacen la ecuación (aunque es una guía útil), pues habría qué sustituir todos y cada uno de los números reales, lo cual no es posible. Hay que seguir un método que de un solo golpe dé la demostración para todos los números reales, por ejemplo, el método de transformar ambos lados hasta obtener expresiones que se reconozcan como iguales. Así $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ es una identidad, pues efectuando la multiplicación $(a+b)(a+b)$ obtenemos $a^2+2ab+b^2$. En el caso de querer demostrar que una ecuación no es identidad, basta con encontrar valores que nó la satisfagan. Así, sabemos que $3a = 2b-5$ no es una identidad, puesto que $(3,6)$ no la satisface.

1.5 Gráfica de Ecuaciones.

Si consideramos los pares de números que satisfacen una ecuación con dos letras, como $t = s^2$, obtenemos un conjunto de valores de (s,t). Estos pares (s,t) los podemos graficar sobre el plano cartesiano, tomando s como abscisa y t como ordenada, y obtenemos así la gráfica de la ecuación.

En la práctica, para graficar una ecuación no podemos trazar todos los puntos que son soluciones, pues son una infinidad. Entonces seguimos el método de tabulación , que consiste en :

a) Obtener un número conveniente de soluciones y graficarlas.

b) Unir a mano limpia los puntos graficados.

Por ejemplo, para graficar la ecuación $t = s^2$, primero formamos una tabla donde obtenemos los pares de soluciones, como se vé en la fig. 1.9 . Luego graficamos estos puntos y finalmente los unimos a mano limpia :

s	s^2	Soluciones de $t = s^2$ (s,t)
-2	4	(-2,4)
-1.5	2.25	(-1.5,2.25)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
1.5	2.25	(1.5,2.25)
2	4	(2,4)

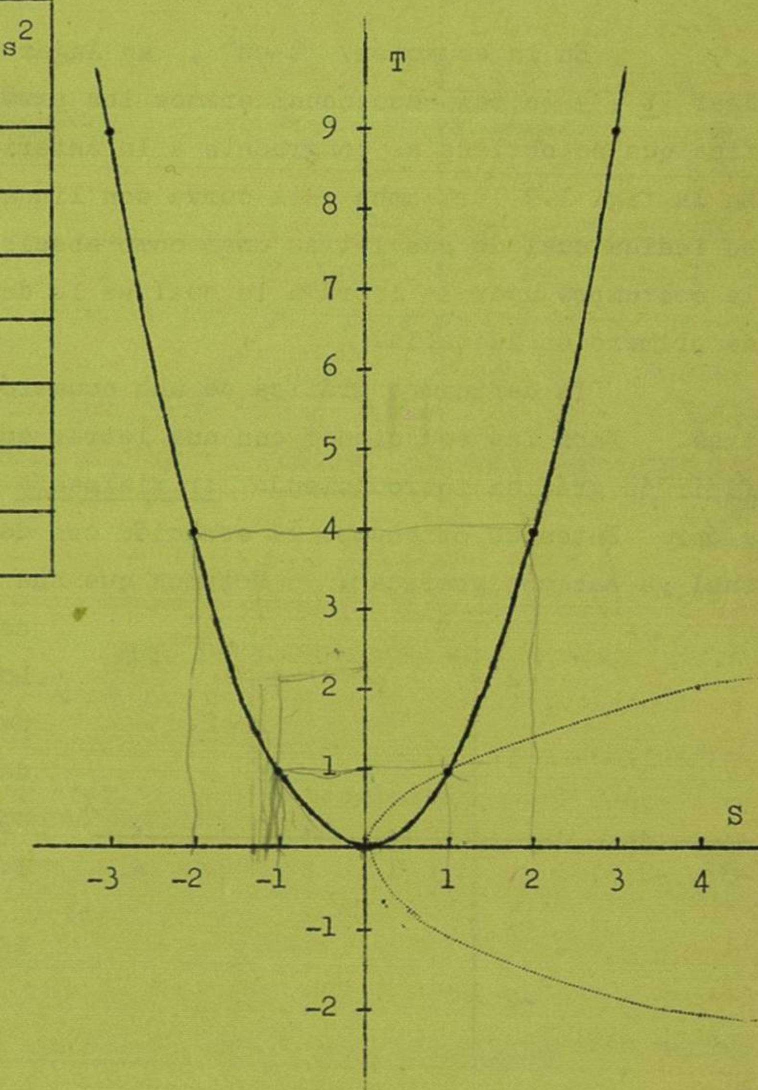

Fig. 1.9.- Tabulación y Gráfica de la ecuación $t = s^2$.