Naturalmente nos preguntamos que razones tenemos para pensar que la curva así trazada es la gráfica de $t = s^2$, es decir, cómo sabemos que los puntos intermedios trazados a mano limpia son también soluciones. Para asegurarnos podemos :

a) Tabular puntos intermedios para advertir ondulaciones o pliegues en la curva. Esto se hace sobre todo, si los puntos tabulados están muy separados.

b) Conocer la forma general de la curva según sea su ecuación. En el siguiente capítulo estudiamos varias formas generales de curvas.

c) Analizar la ecuación con respecto a monotonicidad y presencia de máximos y mínimos. Este análisis se estudia en el tercer capítulo y usualmente es el mas adecuado.

Ejerc. 1.-Graficar las ecuaciones : $3a - 2b = 1$, $z = \frac{1}{x}$, $t = \frac{s}{s+1}$.

En la ecuación $t = s^2$, en lugar de usar s como abscisa, podemos usar t, y en tal caso consideramos los pares de soluciones (t,s). La gráfica que se obtiene es congruente a la anterior pero en una posición diferente. En la fig. 1.9 trazamos esta curva con lineas punteadas. La ecuación en sí no indica cual de sus letras usar como abscisa y cual como ordenada. Pero es la costumbre usar la letra a la cual se le dan valores como abscisa, pues queda primero en la tabla.

Ya definimos gráfica de una ecuación cuando la ecuación tiene dos letras. Para las ecuaciones con una letra, como $x - 1 = 1$, también podemos definir su gráfica introduciendo trivialmente otra letra como y en la ecuación. Entonces obtenemos la ecuación con dos letras $0 \cdot y + x - 1 = 1$, la cual ya sabemos graficar. Notamos que sus soluciones son del tipo $(2,y)$, donde y es cualquier número real. Luego al graficar, estos puntos tienen todos la misma abscisa, y nos dan una recta perpendicular al eje X, como lo muestra la fig. 1.10 .

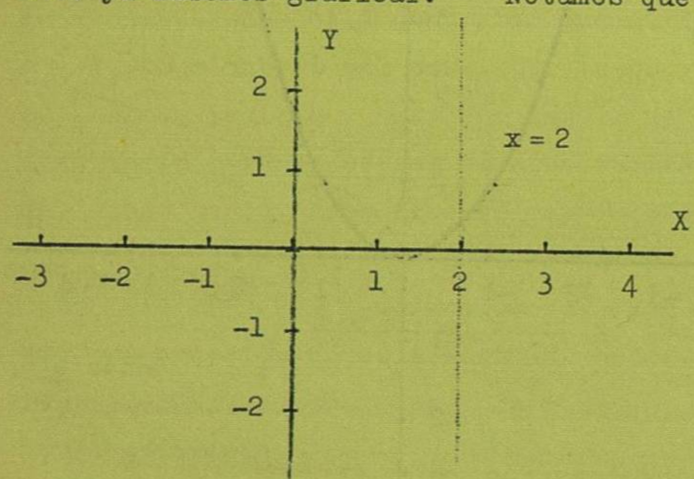


Fig. 1.10.-Gráfica de Ecuaciones con una letra.

Ejerc. 2.-Grafique las ecuaciones :

$$a^2 - 3 + 0 = 0$$

$$\frac{b}{b+1} = 2 \quad ; \quad a = -3 .$$

1.6 Familia de Curvas.

En la sección anterior graficamos ecuaciones con una o dos letras. Ahora falta ver como podemos graficar en el plano cartesiano ecuaciones con mas de dos letras, como $y = kx^2$.

Para las coordenadas solo necesitamos un par de letras, por ejemplo (x,y), por lo que nos queda sobrando la k en la ecuación y no nos permite obtener los pares de números que necesitamos. Para quitarnos esta dificultad sencillamente sustituímos la k por un valor como 2 y obtenemos la ecuación $y = 2x^2$, que muy bien sabemos graficar (vea fig. 1.11). Igualmente podemos sustituir k por otro valor como -1, obteniendo otra ecuación $(y = -x^2)$ y otra curva (vea fig. 1.11).

Entonces para no mostrar favoritismo a algún valor de k, consideramos la familia de ecuaciones que se obtienen sustituyendo k por sus valores. Cada ecuación nos dá una curva, por lo que obtenemos una familia de curvas que llamamos gráfica de la ecuación $y = kx^2$.

Para indicar que la k se sustituye para obtener ecuaciones, decimos que k es parámetro. En este caso x y y son las variables, pues son las que se cambian para obtener los diversos puntos de cada curva.

En la ecuación $y = kx^2$ podemos escoger otra letra para sustituir es decir, escoger otra letra como parámetro, por ejemplo la y ó la x, y en cada caso obtenemos otras familias.

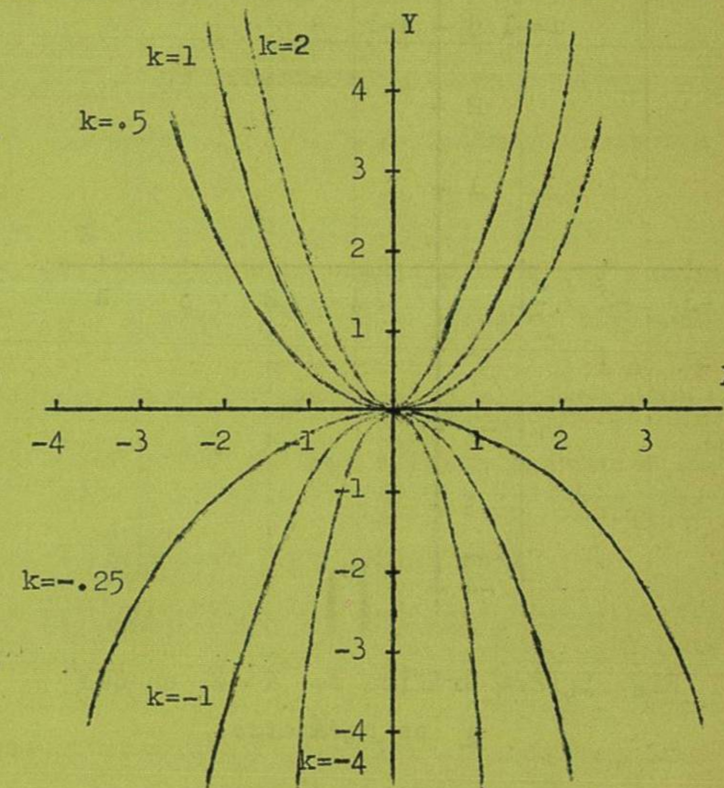


Fig. 1.11.- Gráfica de $y = kx^2$.

Ejerc. 1.- a) Grafique cuatro curvas de la ecuación $y = kx^2$, usando x como parámetro. Idem., usando y como parámetro.

b) Grafique cuatro curvas de la ecuación $az + w = b$, donde a y b son parámetros.

c) Igual que b) pero tomando a y z como parámetros.

Como se ha visto hasta aquí, cualquiera de las letras de una ecua -- ción puede ser considerada como parámetro. En el caso que tratemos con una - ecuación de dos letras como $x = a$, aún podemos considerar a una de ellas co mo parámetro, por ejemplo la a ; si sustituímos la a por un valor como 2 - obtenemos la ecuación $x = 2$ (ó $0 \cdot y + x = 2$) cuya gráfica ya sabemos trazar (vea fig. 1.12), igualmente si sustituímos la a por otro valor como -1 obte nemos la ecuación $x = -1$ (ó $0 \cdot y + x = -1$) que también sabe-- mos graficar. Y en general, si -- sustituímos la a por sus valores, obtenemos una familia de ecuaciones y una correspondiente familia de rectas verticales, las cuales constituyen la gráfica de la ecuación $x = a$ en que a es parámetro. (Vea Fig. 1.12).

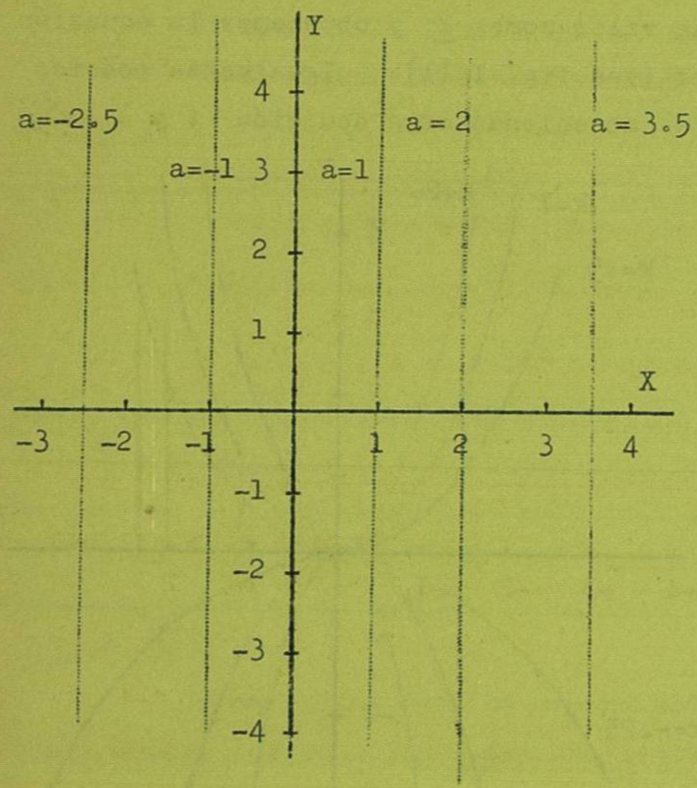


Fig. 1.12.- Gráfica de $x = a$ en que a es parámetro.

Ejerc. 2.-Trace la gráfica de la ecuación $x = a$ en que x es parámetro.

PROBLEMAS

SECCION 1.1

A.- Denote con seis diferentes símbolos cada uno de los siguientes números , y diga cuales de esos símbolos denotan números enteros, cuales denotan números - racionales, y cuales irracionales:

1) -2	2) π	3) $\frac{3}{12}$	4) $.0001$
5) $\frac{6}{3}$	6) $2\frac{2}{3}$	7) $1 + \sqrt{3}$	8) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$
9) $a - 2$	10) n	11) 0	12) $\pi + 0$
13) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$	14) $.24 - \log 100$	15) $\text{Sen } 30^\circ - \pi$	16) $4 \times 3.51 - 3\pi$

B.- En los siguientes problemas transformar a la forma decimal o a la de que-- brado según el caso, señalando cuales números son racionales y cuales irracio- nales, y aclarar cuando se hagan aproximaciones:

1) $-\frac{31}{5}$	2) $.0005$	3) $\frac{-7}{8000}$	4) 0.000
5) $2\frac{2}{7}$	6) $-\sqrt{18}$	7) $\sqrt[3]{3}$	8) $\frac{\pi}{2}$
9) 12.012	10) n	11) $\frac{m}{n}$	12) $\frac{236}{41}$
13) $0.333\ldots$	14) $1.454545\ldots.$	15) $.010101\ldots$	16) $.9999\ldots.$

C.- De las siguientes parejas de símbolos, decir cuales denotan el mismo núme- ro real. Si no denotan el mismo, ordénelas en la forma $a < b$:

1) $\frac{1}{2}$, $\frac{-8}{-16}$	2) π , 3.14159	3) $-\frac{1}{3}$, $-.333$	4) $\frac{1}{9}$, $0.111\ldots$
5) $-\pi$, $-\frac{22}{7}$	6) -1000 , $\frac{1}{2}$	7) $\frac{1000}{1001}$, 1	8) $-\frac{1001}{1000}$, -1
9) $-.0001$, 0	10) $\frac{15}{16}$, 1	11) -34 , $.002$	12) $.01$, $.0001$
13) a , 0	14) $-a$, 0	15) $-b$, k	16) m , 2m

D.- Conteste las siguientes preguntas:

1) Al construir una escala real, ¿cuánto ha de medir el segmento $\overline{0,1}$?.
2) ¿Qué diferencia hay entre el proceso de construcción de los enteros positi- vos, y el de los negativos en la escala real?.
3) ¿Porqué no se construyen los positivos hacia la izquierda?.
4) ¿Es el cero un entero positivo? ¿es entero negativo? , ¿es racional?.
5) ¿Hay racionales que sean enteros negativos? ¿enteros positivos?.
6) ¿Hay enteros que son racionales?, ¿los hay que no son racionales?.
7) ¿Hay números enteros que no son números reales?.
8) Si a denota un número positivo, ¿qué denota $-a$? ¿y $-(-a)$?.
9) Si b denota cualquier número real ¿qué denota $-b$? ¿ y $-(-b)$? .
10) Si c denota al cero, ¿qué denota $-c$? ¿ y $-(-c)$? .

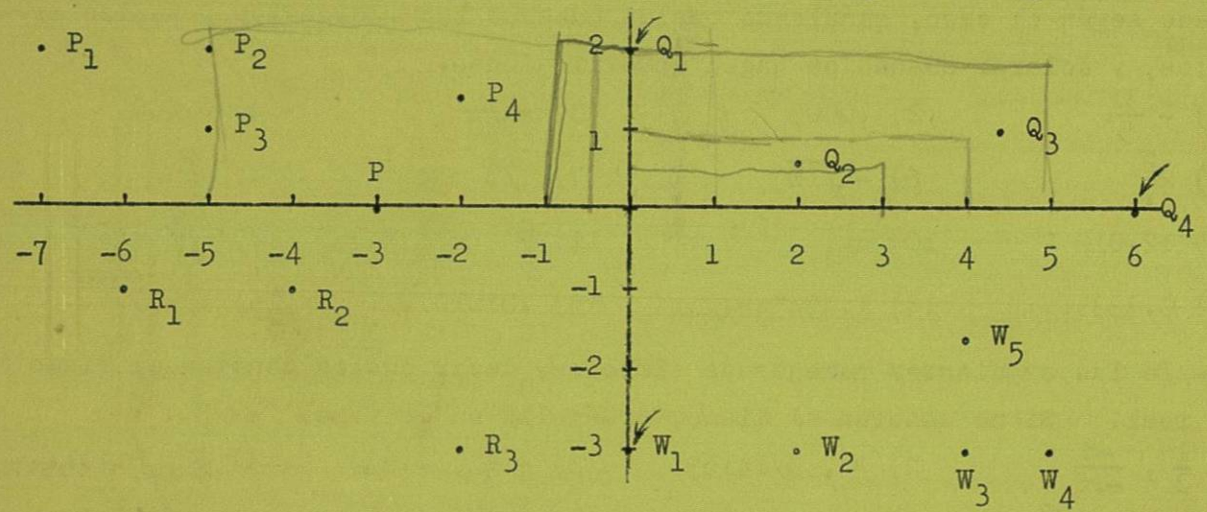
PROBLEMAS

SECCION 1.2

A.-Sin trazar, decir en que cuadrante está cada punto. Después trazar:

1) (4,1)	2) (1,4)	3) $(-\frac{1}{2}, 3)$	4) $(3, -\frac{1}{2})$	5) (-1,2)
6) (5,3)	7) (-5,-3)	8) (5,-3)	9) (-5,3)	10) (3,-5)
11) (1.4,2)	12) (.6,-3)	13) (0,-1)	14) (6,0)	15) (0,0)
16) $(\frac{2}{3}, -4)$	17) $(-3.7, -\frac{5}{2})$	18) (-3,-2.001)	19) $(\frac{12}{5}, \frac{3}{5})$	
20) $(\sqrt{3}, \pi)$	21) $(\frac{1}{4}, \log 2)$	22) $(\sqrt[3]{4}, -\frac{5}{16})$	23) $(2^{-1/2}, 3^{-1/2})$	
24) (a,0)	25) (0,m)	26) (-k,2)	27) (-x,-y)	

B.- Dar las coordenadas de los puntos marcados en la siguiente figura:



C.- Conteste las siguientes preguntas:

1) ¿Como se llama la pareja de números reales asociados con un punto?
2) ¿Podríamos llamar eje de las abscisas al eje vertical?.
3) ¿Podríamos denotar al eje X con otra letra, por ejemplo W?.
4) ¿Podríamos denotar al eje Y con otra letra, por ejemplo V?.
5) ¿Podríamos poner al eje de ordenadas con los números positivos abajo?
6) ¿Podríamos poner al eje X con los negativos a la izquierda?.
7) ¿Tiene que ser horizontal el eje de abscisas?.
8) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre el eje X?.
9) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre el eje Y?.
10) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre una recta vertical en el plano cartesiano?.
11) ¿Qué característica especial tienen en común los puntos sobre una recta horizontal en el plano cartesiano?.
12) ¿Qué figura determina el conjunto de puntos cuya abscisa es igual a su ordenada?.

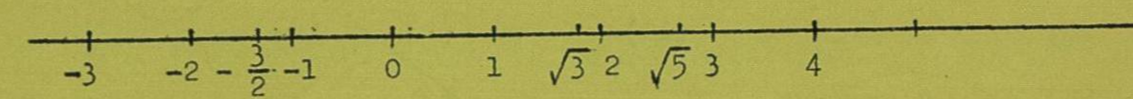
PROBLEMAS

SECCION 1.3

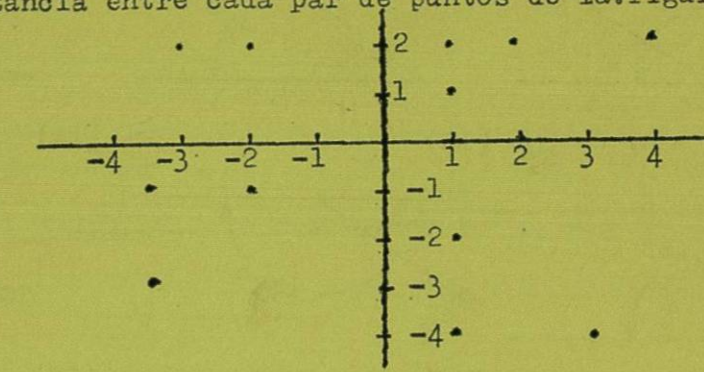
I.-

1) Defina distancia dirigida de a a b y distancia entre a y b.

2) Dé la distancia dirigida y la distancia entre cada par de puntos de la figura:



3) Dé la distancia entre cada par de puntos de la figura:



4) ¿A qué es igual la distancia entre dos puntos con igual abscisa?
5) ¿" " " " " " " " " " ordenada?
6) ¿" " " " " " " el origen y (a,b)?
7) ¿" " " " " " " dos puntos sobre el eje X?
8) ¿" " " " " " " " " " eje Y?
9) Dé la distancia entre cada uno de los pares de puntos dados a continuación:

$(3,-1)$ y $(-5,6)$; $(2, \sqrt{2})$ y $(-1, \sqrt{3})$; $(5,-6)$ y $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{7})$; $(-\sqrt{5}, -\frac{7}{3})$ y $(5, -\pi)$; $(3, -\log 2)$ y $(\pi, -\log 2)$; $(2, -\sqrt{75})$ y $(-1, -\sqrt{75})$; $(5r, -1)$ y $(5r, -\frac{3}{2})$; $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\pi}{6})$ y $(1,0)$; $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi})$; $(1000,-500)$ y $(999,500)$; $(1,-2)$ y $(-1,2)$ $(0,-3)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$; $(\frac{2}{7}, -\frac{\pi}{7})$ y $(0,0)$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ y $(0,0)$.

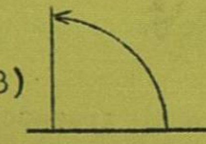
II.-

1) ¿Cuál es el sentido positivo al medir un ángulo dirigido de un segmento a otro?

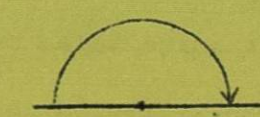
2) ¿Qué sentido debe seguirse al medir un ángulo entre dos segmentos?

Dar tres medidas positivas en grados, 3 negativas en grados, 3 positivas en radianes y 3 negativas en radianes de cada ángulo a continuación:

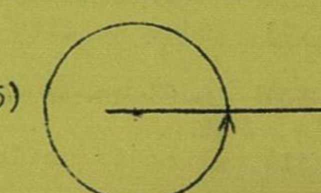
(3)



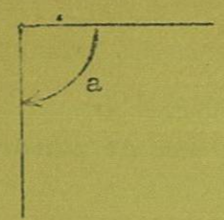
(4)



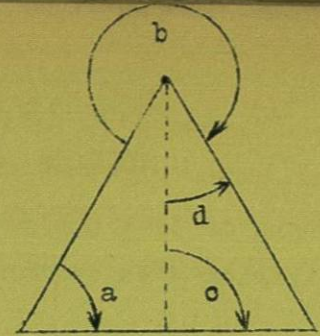
(5)



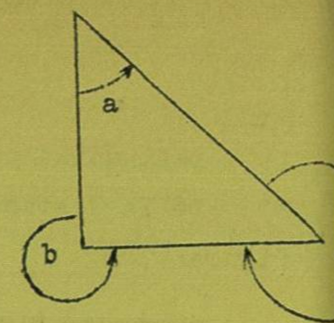
(6)



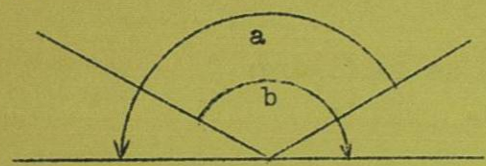
(7)



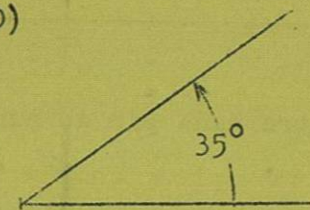
(8)



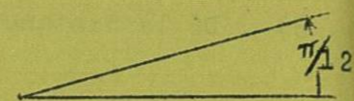
(9)



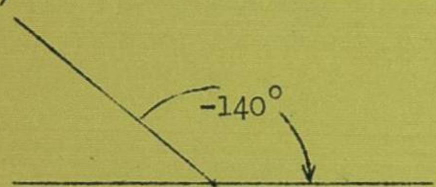
(10)



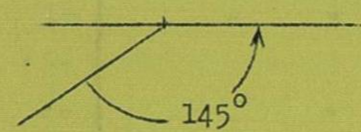
(11)



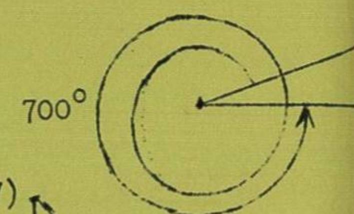
(12)



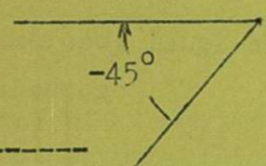
(13)



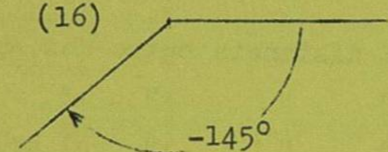
(14)



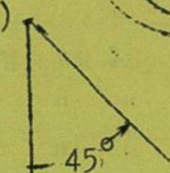
(15)



(16)



(17)



Cada ángulo a continuación es el ángulo dirigido del eje X a otra recta. Trace esta última en un plano cartesiano:

18) π radianes. (19) -45° (20) $-\frac{\pi}{3}$ rad.

21) 3715° (22) -1500° (23) $\frac{7}{2}\pi$ rad.

24) $-\frac{16}{3}\pi$ rad. (25) 5000π rad. (26) 90°

27) $\frac{\pi}{2}$ rad. (28) -135° (29) $-\frac{7}{2}\pi$ radianes.

30) 120° (31) -120° (32) -1300°

33) $-.0001\pi$ rad. (34) $\sqrt{2}$ rad. (35) $\frac{60}{\sqrt{3}}$ rad.

36) $\frac{400^\circ}{\sqrt{2}}$ (37) $(4 \cdot 10^4)^\circ$

---

38) ¿Cómo se mide un ángulo en grados?

39) ¿Cómo se mide un ángulo en radianes?

40) ¿Cuál es la equivalencia entre tales unidades?

41) Al medir un ángulo en rad.,¿importa la longitud del radio trazado?

PROBLEMAS

SECCION 1.4

A.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son igualdades:

1) $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{5+2}$ 2) $5 + \frac{9}{3} = \frac{5+9}{3}$

3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3}$ 4) $-3\frac{1}{2} = -3 + \frac{1}{2}$

5) $-(-5-7) = 5-7$ 6) $\sqrt{8} - \sqrt{5} = \sqrt{8-5}$

7) $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{5-2}{7-3}$ 8) $\frac{8}{3} - 3 = \frac{8-3}{3}$

9) $-4 - \frac{1}{2} = \frac{-4-1}{2}$ 10) $\frac{6}{7} - (-\frac{3}{4}) = \frac{6+3}{7+4}$

11) $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2\times 3}{2\times 5}$ 12) $2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$

13) $6 \times 5 - 2 = 6 \times 3$ 14) $7(3+2) = 21+2$

15) $\frac{5+3}{7+3} = \frac{5}{7}$ 16) $\frac{7-5}{3-5} = \frac{7}{3}$

17) $\frac{3\times 4+7}{3\times 4} = \frac{4+7}{4}$ 18) $\frac{4\times 6}{4\times 6-5} = \frac{6}{6-5} = \frac{0}{-5}$

B.- De los pares de valores de la izquierda, decir cuales son soluciones de las ecuaciones de la derecha:

(p,k) a) $pk = 2-k$ b) $5p - 2 = \frac{3}{k}$

1) (1,1) 2) (0,-6) c) $p-k = 3p+6$ d) $(p+1)^2 = k-1$

3) (1,5) 4) $(-\frac{1}{3}, 3)$ e) $\frac{3-p}{k} = \frac{2}{5}$

5) (-1,1) 6) $(\pi, .45)$

C.- De las "triadas" de valores de la izquierda, decir cuáles satisfacen a las ecuaciones de la derecha:

(w,b,g) a) $w - b = g+1$

1) (4,8,4) 2) (4,2,1) b) $wb = g$

3) (2,3,6) 4) (3,-1,5) c) $w - 2 = \frac{b}{g}$

D.- De las "n-adas" de valores de la izquierda decir cuáles son soluciones de la ecuación de la derecha:

(f,g,h,x)

1) (0,-3,4,1) 3) (2,1,-1,0) $-g + 2h = 2x - 1 - f$

2) (3,4,5,-2) 4) $(\sqrt{2}, 1, \text{sen } 45^\circ, \frac{1}{2})$

E.- Para cada una de las siguientes ecuaciones, dar tres pares de valores que sean soluciones y tres pares que no las satisfagan:

1) $d - 3j = 4$ 2) $2m - 4n = 1$ 3) $a = 2b - 3$ 4) $y-1 = -2(x+6)$.

5) $\frac{p}{2} - \frac{q}{4} = 1$ 6) $y^2 = 4x$ 7) $a^2 + b^2 = 25$ 8) $w^2 - r^2 = 1$

9) $2p^2 - s^2 = 2$ 10) $(y-1)^2 = 4(x+2)$ 11) $mn - 1 = m^2$ 12) $bk^2 - 3 = 2b$

F.- Para cada una de las siguientes ecuaciones dar 3 n-adas de valores que sean soluciones y 3 n-adas que no las satisfagan:

1) $a+2b-1 = k$ 2) $rk-3mn = 2x$ 3) $\frac{a-x}{2y} = \frac{b}{c-1}$ 4) $2mn^2 - pq = \frac{r-m}{n-p} + f$

G.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son identidades:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$ 2) $a - \frac{k}{m} = \frac{a-k}{m}$ 3) $\frac{g}{y} - 2 = \frac{g}{y-2}$

4) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ 5) $a(b+c) = ab + ac$ 6) $mb - mh = m(b-h)$

7) $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$ 8) $m^2 + n^2 = (m+n)(m+n)$ 9) $(h+a)^3 = h^3 + a^3$

H.- Dé la definición de cada uno de los siguientes términos:

1) Ecuación. 2) Igualdad.
3) Solución de una ecuación en la que ocurren dos letras (x,y).
4) Solución de una ecuación en la que ocurren tres letras (a,b,c).
5) Solución de una ecuación en la que ocurren $\underline{n}$ letras $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$
6) Solución de una ecuación en la que ocurre una letra $\underline{x}$.
7) Ecuación condicional. 8) Identidad.
9) Ecuación concordante.

PROBLEMAS

SECCION 1.5

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones: 1) $a - 1 = x + 3$

2) $3b + m = -m + 4$ 3) $-2(g-3)=5h$ 4) $p(q-1)=2$ 5) $m(n+2) = -n$

6) $w-x = x^2+3$ 7) $d - c^3+1 = 0$ 8) $x-y^2+2y = 0$ 9) $2b^2 - n^2 = 1$

10) $k^2 + 3s^2 - 1 = 0$ 11) $a - 3 = 0$ 12) $g^2+g-6 = 0$ 13) $2(x+4) - 1 = 2$

14) $(b-1)(b+2)=b^2$ 15) $(f-1)(f+2)=0$ 16) $f^2+j^2 = 4$ 17) $a^2 - b^3 = 1$

PROBLEMAS

SECCION 1.6

Para cada una de las siguientes ecuaciones, trazar todas las posibles gráficas que se obtienen de considerar una u otras letras como parámetros:

1) $y = mx$ 2) $t-2 = j(h+1)$ 3) $f = p(q+1)$ 4) $g - 1 = p^2h$

5) $a^2 + b^2 = k$ 6) $j(b-1) = 1$ 7) $ab - xy = m$ 8) $zg = 3$

9) $y - y(r+1) = 0$ 10) $dk^3 - w = 0$ 11) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 12) $y - h = m(x-k)$

13) $g^2h^2 = p$ 14) $k - f = y - m$ 15) $\frac{r}{j} = 1$ 16) $h^2 - 2t^2 = s$

Capítulo II

GEOMETRIA ANALITICA

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que dá lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una linea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela hasta ser perpendicular al eje X. Para medir la inclinación, definimos la pendiente m de cualquier recta L:

$$\boxed{m = \tan \theta}$$

donde θ es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).

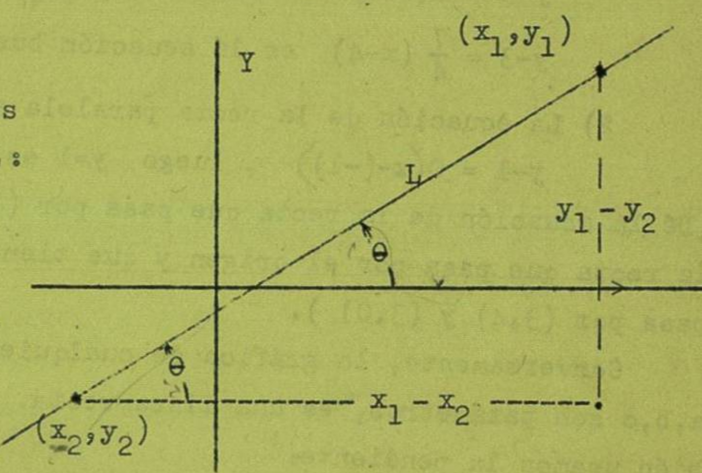


Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella es 30°; -45°.

b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?.

c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?

d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?.

Dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente $\underline{m}$ en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por $(-3,4)$ y $(1,2)$. Su pendiente es $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$.