5) $\frac{p}{2} - \frac{q}{4} = 1$ 6) $y^2 = 4x$ 7) $a^2 + b^2 = 25$ 8) $w^2 - r^2 = 1$

9) $2p^2 - s^2 = 2$ 10) $(y-1)^2 = 4(x+2)$ 11) $mn - 1 = m^2$ 12) $bk^2 - 3 = 2b$

F.- Para cada una de las siguientes ecuaciones dar 3 n-adas de valores que sean soluciones y 3 n-adas que no las satisfagan:

1) $a+2b-1 = k$ 2) $rk-3mn = 2x$ 3) $\frac{a-x}{2y} = \frac{b}{c-1}$ 4) $2mn^2 - pq = \frac{r-m}{n-p} + f$

G.- Decir cuales de las siguientes ecuaciones son identidades:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$ 2) $a - \frac{k}{m} = \frac{a-k}{m}$ 3) $\frac{g}{y} - 2 = \frac{g}{y-2}$

4) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ 5) $a(b+c) = ab + ac$ 6) $mb - mh = m(b-h)$

7) $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$ 8) $m^2 + n^2 = (m+n)(m+n)$ 9) $(h+a)^3 = h^3 + a^3$

H.- Dé la definición de cada uno de los siguientes términos:

1) Ecuación. 2) Igualdad.
3) Solución de una ecuación en la que ocurren dos letras (x,y).
4) Solución de una ecuación en la que ocurren tres letras (a,b,c).
5) Solución de una ecuación en la que ocurren $\underline{n}$ letras $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$
6) Solución de una ecuación en la que ocurre una letra $\underline{x}$.
7) Ecuación condicional. 8) Identidad.
9) Ecuación concordante.

PROBLEMAS

SECCION 1.5

Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones: 1) $a - 1 = x + 3$

2) $3b + m = -m + 4$ 3) $-2(g-3) = 5h$ 4) $p(q-1) = 2$ 5) $m(n+2) = -n$

6) $w - x = x^2 + 3$ 7) $d - c^3 + 1 = 0$ 8) $x - y^2 + 2y = 0$ 9) $2b^2 - n^2 = 1$

10) $k^2 + 3s^2 - 1 = 0$ 11) $a - 3 = 0$ 12) $g^2 + g - 6 = 0$ 13) $2(x+4) - 1 = 2$

14) $(b-1)(b+2) = b^2$ 15) $(f-1)(f+2) = 0$ 16) $f^2 + j^2 = 4$ 17) $a^2 - b^3 = 1$

PROBLEMAS

SECCION 1.6

Para cada una de las siguientes ecuaciones, trazar todas las posibles gráficas que se obtienen de considerar una u otras letras como parámetros:

1) $y = mx$ 2) $t-2 = j(h+1)$ 3) $f = p(q+1)$ 4) $g - 1 = p^2 h$

5) $a^2 + b^2 = k$ 6) $j(b-1) = 1$ 7) $ab - xy = m$ 8) $zg = 3$

9) $y - y(r+1) = 0$ 10) $dk^3 - w = 0$ 11) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 12) $y - h = m(x-k)$

13) $g^2 h^2 = p$ 14) $k - f = y - m$ 15) $\frac{r}{j} = 1$ 16) $h^2 - 2t^2 = s$

Capítulo II
GEOMETRIA ANALITICA

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que dá lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una linea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela hasta ser perpendicular al eje X. Para medir la inclinación, definimos la pendiente $\underline{m}$ de cualquier recta L:

$$\boxed{m = \tan\theta}$$

donde θ es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).

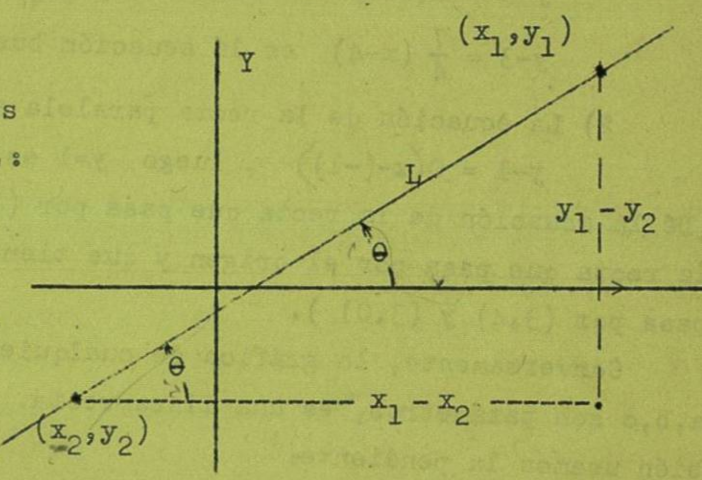

Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella es $30°$; $-45°$.
b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?.
c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?
d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?.

Dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente $\underline{m}$ en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por $(-3,4)$ y $(1,2)$. Su pendiente es $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$.

En Algebra aprendieron que la ecuación de cualquier recta es una ecuación lineal en dos variables. (Vea I.A. sección 5.8). Ahora demostramos que en efecto es así, usando el concepto de pendiente:

Sea (x,y) cualquier punto de la recta L,

(x_o,y_o) un punto dado de L, y

$\underline{m}$ la pendiente de L,

queremos demostrar que la ecuación de la recta L es una ecuación lineal.

Por la fórmula (1.2) se tiene que $m = \frac{y-y_o}{x-x_o}$ de donde se concluye que $y-y_o = m(x-x_o)$ es la ecuación de la recta, es lineal en (x,y).

En el caso que la recta sea perpendicular al eje X, esta ecuación no tiene sentido, pues $m = \infty$, y en su lugar tenemos la ecuación $x = x_o$ para la recta (¿porqué?). En este caso también se obtuvo una ecuación lineal en (x,y).

Ejemplos:

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,3)$ y $(8,10)$ es:

$y-3 = m(x-4)$, pero $m = \frac{10-3}{8-4} = \frac{7}{4}$ (¿porqué?). Luego

$y-3 = \frac{7}{4}(x-4)$ es la ecuación buscada.

2) La ecuación de la recta paralela al eje X y que pasa por $(-1,1)$ es:

$y-1 = 0(x-(-1))$, luego $y=1$ es la ecuación buscada.

(Dé la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y tiene pendiente 2 ; la de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente $\frac{1}{2}$; la de la recta que pasa por $(3,4)$ y $(3,0)$).

Conversamente, la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax+by+c=0$ donde a,b,c son parámetros, es una linea recta. Para demostrar este resultado también usamos la pendiente:

La curva L., gráfica de la ecuación $ax+by+c = 0$ pasa por los puntos $(-\frac{c}{a},0)$ y $(0,-\frac{c}{b})$ (¿porqué?).

La recta L' que pasa por esos dos puntos tiene pendiente $m = -\frac{a}{b}$ (¿porqué?).

La ecuación de L' por lo tanto, es $y-(-\frac{c}{b}) = -\frac{a}{b}(x-0)$ (¿porqué?).

Ecuación que transformada dá: $ax+by+c = 0$ (transfórmela). Por lo tanto la curva L y la recta L' tienen la misma ecuación, luego deben coincidir y L tiene que ser una recta.

Entonces para graficar una ecuación lineal, basta con trazar dos puntos soluciones de la ecuación y pasar una recta por ellos. Generalmente los puntos que se escogen son las intersecciones con los ejes.

Por ejemplo, para graficar la ecuación $2x+y = 3$, tenemos para $x=0$, $y=3$; y para $y=0$, $x=\frac{3}{2}$; luego $(0,3)$ y $(\frac{3}{2},0)$ son las

Capítulo II

GEOMETRIA ANALITICA

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior asociamos las ecuaciones con las curvas en el plano cartesiano. La utilidad de esta asociación (hecha por René Descartes en el siglo XVII) es: poder transformar un problema geométrico a uno de ecuaciones y viceversa, darse cuenta de algunas propiedades de las ecuaciones a través de sus gráficas. En este capítulo profundizamos esta idea, que dá lugar a la Geometría Analítica, estudiando varias formas de curvas y sus ecuaciones respectivas.

2.2 Ecuaciones lineales y rectas.

Si tenemos una linea recta L en el plano cartesiano con ejes X y Y, (vea fig. 2.1), la recta puede estar mas o menos inclinada con respecto al eje horizontal, desde ser paralela hasta ser perpendicular al eje X. Para medir la inclinación, definimos la pendiente $\underline{m}$ de cualquier recta L:

$$\boxed{m = \tan \theta}$$

donde θ es el ángulo dirigido del eje X a la recta L. (Fig. 2.1).

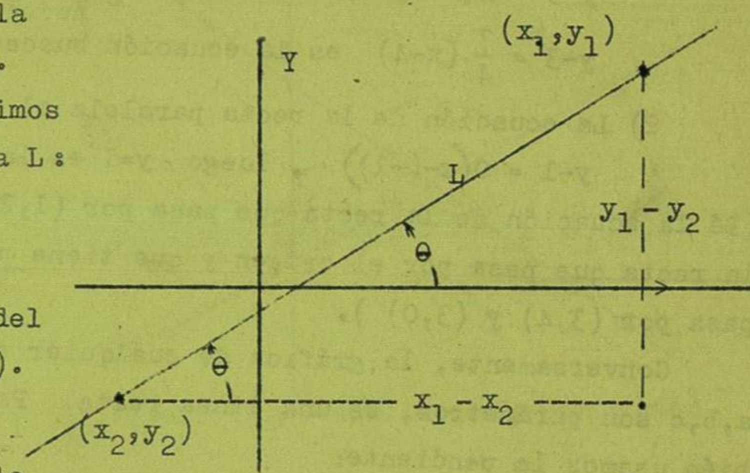

Fig. 2.1.- Pendiente de una recta.

Ejerc. 1.- a) Dé la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella es 30^o; -45^o.

b) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje X?.

c) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular al eje X?

d) ¿De qué signo es la pendiente de una recta que crece al ir de izquierda a derecha?.

Dados dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de la recta L (Fig. 2.1), podemos dar una expresión para la pendiente $\underline{m}$ en términos de las coordenadas de esos dos puntos, tal expresión es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo.-Una recta pasa por $(-3,4)$ y $(1,2)$. Su pendiente es $m = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}$.

En Algebra aprendieron que la ecuación de cualquier recta es una ecuación lineal en dos variables. (Vea I.A. sección 5.8). Ahora demostramos que en efecto es así, usando el concepto de pendiente:

Sea (x,y) cualquier punto de la recta L,

(x_o,y_o) un punto dado de L, y

$\underline{m}$ la pendiente de L,

queremos demostrar que la ecuación de la recta L es una ecuación lineal.

Por la fórmula (1.2) se tiene que $m = \frac{y-y_o}{x-x_o}$ de donde se concluye que $y-y_o = m(x-x_o)$ es la ecuación de la recta; es lineal en (x,y).

En el caso que la recta sea perpendicular al eje X, esta ecuación no tiene sentido, pues $m = \infty$, y en su lugar tenemos la ecuación $x = x_o$ para la recta (¿porqué?). En este caso también se obtuvo una ecuación lineal en (x,y).

Ejemplos:

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,3)$ y $(8,10)$ es:

$y-3 = m(x-4)$, pero $m = \frac{10-3}{8-4} = \frac{7}{4}$ (¿porqué?). Luego

$y-3 = \frac{7}{4}(x-4)$ es la ecuación buscada.

2) La ecuación de la recta paralela al eje X y que pasa por $(-1,1)$ es:

$y-1 = 0(x-(-1))$, luego $y=1$ es la ecuación buscada.

(Dé la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y tiene pendiente 2 ; la de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente $\frac{1}{2}$; la de la recta que pasa por $(3,4)$ y $(3,0)$).

Conversamente, la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax+by+c=0$ donde a,b,c son parámetros, es una linea recta. Para demostrar este resultado también usamos la pendiente:

La curva L., gráfica de la ecuación $ax+by+c = 0$ pasa por los puntos $(-\frac{c}{a},0)$ y $(0,-\frac{c}{b})$ (¿porqué?).

La recta L' que pasa por esos dos puntos tiene pendiente $m = -\frac{a}{b}$ (¿porqué?).

La ecuación de L' por lo tanto, es $y-(-\frac{c}{b}) = -\frac{a}{b}(x-0)$ (¿porqué?). Ecuación que transformada dá: $ax+by+c = 0$ (transfórmela). Por lo tanto la curva L y la recta L' tienen la misma ecuación, luego deben coincidir y L tiene que ser una recta.

Entonces para graficar una ecuación lineal, basta con trazar dos puntos soluciones de la ecuación y pasar una recta por ellos. Generalmente los puntos que se escogen son las intersecciones con los ejes.

Por ejemplo, para graficar la ecuación $2x+y = 3$, tenemos para $x=0$, $y=3$; y para $y=0$, $x=\frac{2}{3}$; luego $(0,3)$ y $(\frac{3}{2},0)$ son las

intersecciones con los ejes.
(Vea figura 2.2)
(¿Cuál es la pendiente de la recta?
Grafique las rectas $3y = x$;
$x = y+1$; $x = -5$; $y = 2$, y
dé sus pendientes respectivas).

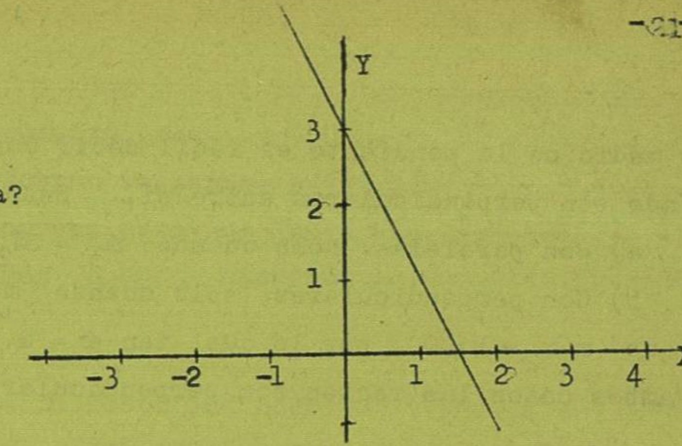

Figura 2.2 .-Gráfica de $2x+y = 3$.

Dadas dos rectas L_1 y L_2 , para encontrar su <u>punto de intersección</u>, es decir, el punto común a las dos, hacemos simultáneas sus dos ecuaciones y resolvemos el sistema.(Vea I.A. sección 6.2).

El <u>ángulo de intersección</u> lo definimos como el ángulo entre L_1 y L_2 .

Para encontrar el ángulo α entre L_1 y L_2 usamos sus pendientes como sigue (vea figura 2.3):

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2$$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1-\theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + (\tan\theta_1)(\tan\theta_2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

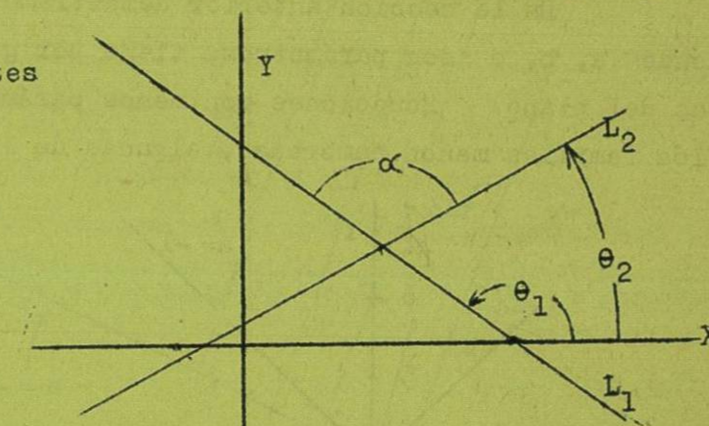

Figura 2.3 .-Angulo de intersección.

donde m_1 es la pendiente de L_1, y m_2 es la pendiente de L_2.

Por ejemplo, dadas las rectas $3x+y = 1$ y $2x-y = 4$, su intersección es la solución del sistema:

$$\begin{array}{r} 3x+y = 1 \\ \underline{2x-y = 4} \\ 5x = 5 \\ x = 1 \end{array}$$

de donde $3(1)+y = 1$ luego $y = -2$

por lo cual, el punto de intersección de las rectas es $(1,-2)$.

La pendiente de $3x+y = 1$ es $m_1= -3$ (¿porqué?)

La pendiente de $2x-y = 4$ es $m_2= 2$ (¿porqué?)

luego, $\tan\alpha = \frac{-3 - 2}{1+(-3)(2)} = 1$

luego, el ángulo de intersección es $\alpha = 45^o$.

Por medio de la pendiente es fácil decir cuándo dos rectas son paralelas y cuándo son perpendiculares entre sí. Sean m_1 y m_2 las pendientes de ellas:

a) Son paralelas, solo cuando $m_1 = m_2$ (¿porqué?).

b) Son perpendiculares, solo cuando $m_1 m_2 = -1$, pues en este caso se tiene que $m_1 m_2 + 1 = 0$, por lo que $\tan \alpha = \infty$, es decir, $\alpha = 90^\circ$ ó $\alpha = 270^\circ$, y en ambos casos las rectas son perpendiculares.

Ejerc. 2.-Diga cuales de los siguientes pares de rectas son paralelas, cuales perpendiculares, y cuáles forman otros ángulos:

a) $3x+y=1$, $-3x=y-3$ b) $x+2y=1$, $2x=y+1$

c) $2y+4x-1=0$, $y=-2x$ d) $2x-7y=4$, $x+14y=0$.

2.3 Familia de Rectas.

En la sección anterior demostramos que la ecuación $ax+by+c=0$, donde a, b, c son parámetros, tiene por gráfica la familia de todas las rectas del plano. Ecuaciones con menos parámetros naturalmente tienen por gráfica familias menos numerosas, algunas de las cuales vemos a continuación:

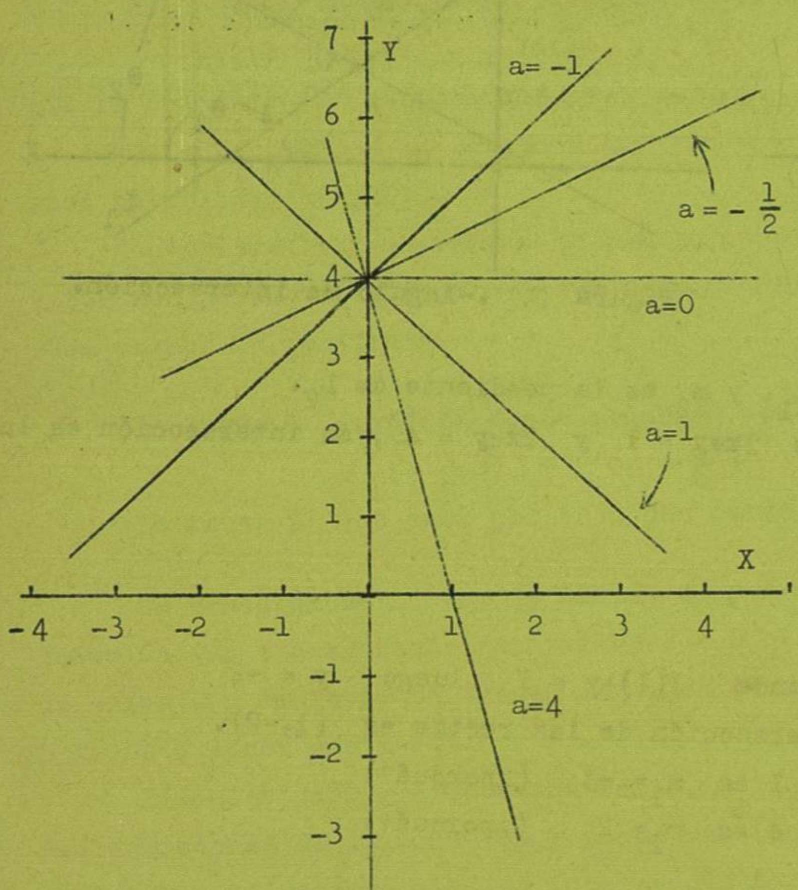

Fig. 2.2.- Gráfica de $ax+y=4$
a parámetro.

1.- La ecuación $ax+y=4$ (en que a es parámetro), tiene por gráfica la familia de rectas que mostramos en la fig. 2.2, para los valores de a indicados. Notamos que las rectas se intersectan en el punto $(0,4)$, y de hecho todas las rectas de la familia pasan por este punto, pues $(0,4)$ es una solución de $ax+y=4$ para cualquier valor de a, como se vé sustituyendo $(0,4)$ en la ecuación.

Aún mas, la familia está formada por todas las rectas que pasan por $(0,4)$, excepto la perpendicular al eje X. Para demostrar ésto, notamos que la pendiente de cualquier recta de la familia está dada por $m=-a$, pues la pendiente

de $ax+by+c=0$ es $m=-\frac{a}{b}$ y en nuestro caso $b=1$ y $c=-4$. Como a puede tener cualquier valor numérico excepto infinito, puede ajustarse a la pendiente de cualquier recta. Por ejemplo, para una recta con pendiente 3 y que pase por el punto $(0,4)$, ponemos $a=-3$, dándonos la ecuación deseada $-3x+y=4$.

Ejerc. 1.- a) Obtener la ecuación de la recta que pase por $(0,4)$, y que tenga pendiente $\frac{3}{4}$.

b) Obtener la ecuación de la recta que pase por los puntos $(0,4)$ y $(-1,2)$.

c) Graficar cinco miembros de la familia $x-k^2y=-2$ en que k es parámetro, y demostrar que se intersectan en un solo punto.

2.- La ecuación $3x-y=c$ en que c es parámetro, tiene por gráfica la familia de rectas que mostramos en la fig. 2.3.

Notamos que las rectas son todas paralelas, pues tienen la misma pendiente, a decir: $m=3$.

Ejerc. 2.-Graficar cinco rectas de la familia: $3x-y=k^2$ en que k es parámetro. ¿Es la familia igual a la anterior?.

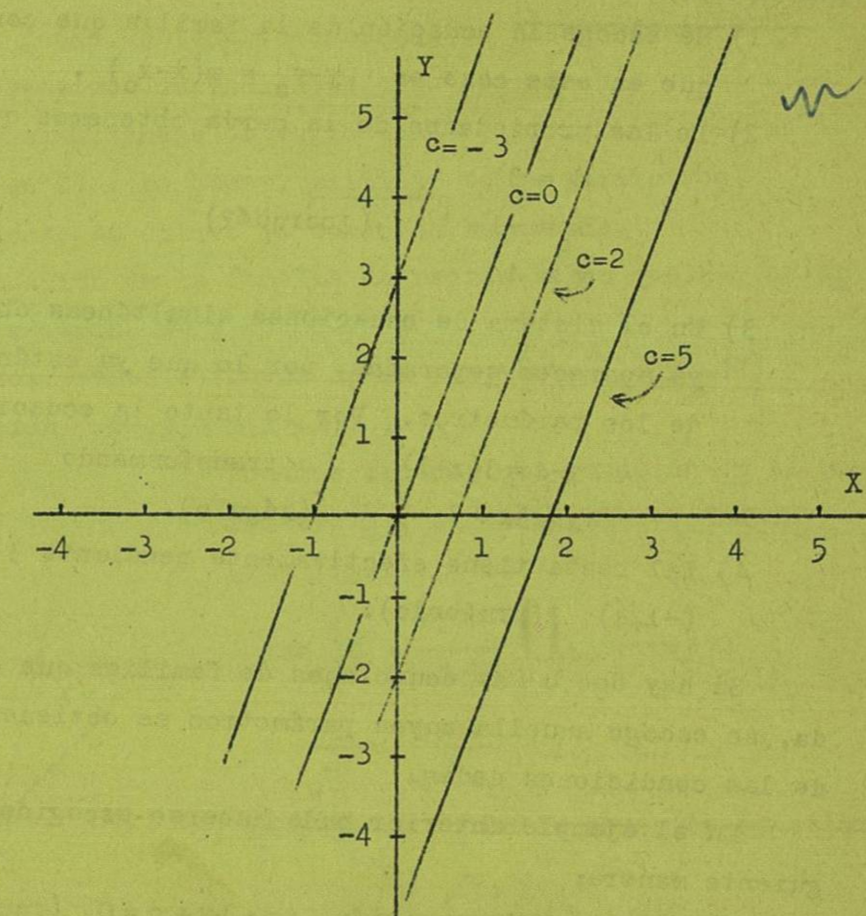

Figura 2.3.- Gráfica de $3x-y=c$
c parámetro.

2.4.- Ecuaciones de rectas.

El problema de encontrar la ecuación de una curva que tiene ciertas propiedades, se puede atacar como sigue.

1) Encontrar la ecuación de una familia que contenga a la curva deseada.
2) Con las propiedades que se dan para la curva, obtener ecuaciones en los parámetros.
3) Determinar los valores de los parámetros dados por el sistema de ecuaciones simultáneas que se obtienen en 2), y sustituir esos valores en la ecuación escogida en 1), obteniendo la ecuación buscada.
4) Comprobar si en efecto se obtuvo la ecuación requerida.

Por ejemplo: obtener la ecuación de una recta que tenga pendiente 3 y pase por $(-1,4)$.

1) Se escoge la ecuación de la familia que contenga a la recta deseada, que en este caso es $y-y_0 = m(x-x_0)$.
2) De las propiedades de la curva obtenemos que

$$m = 3$$
$$x_0 = -1 \qquad (¿porqué?)$$
$$y_0 = 4$$

3) En el sistema de ecuaciones simultáneas obtenido en 2), las letras ya aparecen separadas, por lo que ya están determinados los valores de los parámetros. Por lo tanto la ecuación buscada es

$$y-4 = 3(x+1) \qquad \text{o transformando}$$
$$y = 3x+7 \qquad (\text{hágalo}).$$

4) Tal recta tiene efectivamente pendiente 3 (¿porqué?), y pasa por $(-1,4)$ (pruébelo).

Si hay dos o mas ecuaciones de familias que contienen a la recta deseada, se escoge aquella cuyos parámetros se obtienen mas fácilmente partiendo de las condiciones dadas.

En el ejemplo anterior pudo haberse escogido otra familia, de la siguiente manera;

1) Se escoge la ecuación $ax+by+c=0$ (¿qué familia denota?).
2) De las propiedades de la curva obtenemos

$$-\frac{a}{b} = 3$$
$$\qquad (¿porqué?)$$
$$a(-1)+b(4)+c=0$$

3) El sistema de ecuaciones simultaneas anterior, tiene 2 ecuaciones y 3 variables, por lo que determina dependencias de dos de las letras en términos de las otras (ver I.A. sección 6.1), digamos a y b en

términos de c :

$$\begin{array}{r} a+3b=0 \\ -a+4b+c=0 \\ \hline 7b+c=0 \end{array} \qquad \text{de donde} \qquad b=-\frac{c}{7} \quad y \quad a=\frac{3c}{7}$$

y sustituyendo en la ecuación de 1),

$$\left(\frac{3c}{7}\right)x+\left(-\frac{c}{7}\right)y+c=0 \qquad \text{que transformando dá}$$
$$3x-y+7=0 \qquad (\text{hágalo}).$$

Cuando se desea la ecuación de una familia de curvas con ciertas propiedades, el proceso es similar:

1) Encontrar la ecuación de una familia que contenga a la familia deseada.
2) De las condiciones dadas, obtener ecuaciones en los parámetros.
3) Despejar tantos parámetros dependientes como sea posible en el sistema de ecuaciones simultáneas obtenido en 2), y sustituírlos en la ecuación escogida en 1), es decir, eliminar tales parámetros.
4) Comprobar si en efecto se obtuvo la ecuación requerida.

Por ejemplo: obtener la ecuación de la familia de rectas tales que hay un ángulo de -30° de ellas a la recta $x-y-3=0$.

1) El problema lo resolveremos a través de la pendiente (¿porqué?) y escogemos la ecuación $y-y_0 = m(x-x_0)$.

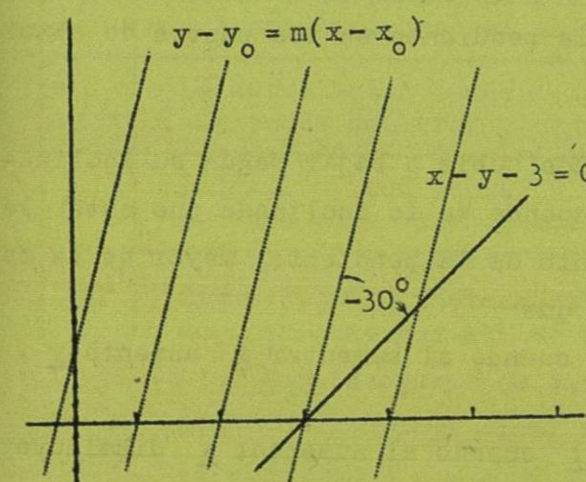

Figura 2.4 .- Rectas a un ángulo de -30° respecto a $x-y-3=0$.

2) Podemos obtener una ecuación en el parámetro m, de la siguiente manera (vea figura 1.12'):

$$\tan 30^\circ = \frac{m-m_2}{1+mm_2} \qquad (¿porqué?)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m-1}{1+m}$$

3) Despejando m de la ecuación anterior

$$m = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 3.735$$

y sustituyendo se obtiene

$$y-y_0 = 3.735(x-x_0)$$

que es la ecuación buscada.

4) Compruebe que hay un ángulo de -30° de estas rectas a $x-y=3$.