2.5 Ecuaciones y Curvas.

Para visualizar mejor las propiedades de las ecuaciones, estudiamos las propiedades de sus gráficas.

Dada una curva como en la fig. 2.5, por cualquiera de sus puntos (x,y) podemos trazar una recta tangente a la curva en ese punto, que llamamos tangente a la curva en el punto (x,y). Cada punto de la curva tiene su tangente, por lo que estas rectas forman una familia: la familia de tangentes a la curva.

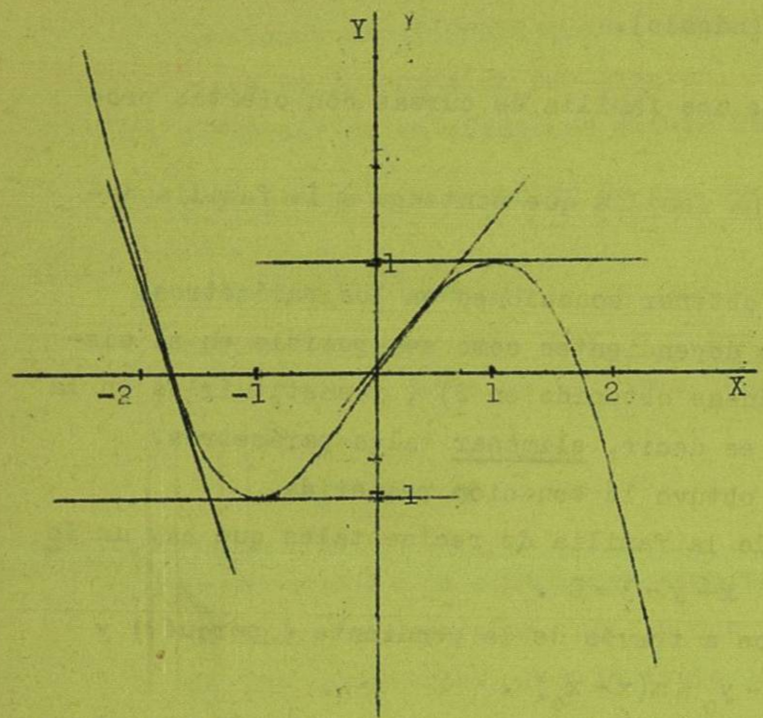


Fig. 2.5.- Tangentes de una curva.

Cada tramo de la curva está mas o menos inclinado con respecto al eje X, y de hecho la inclinación varía de punto a punto de la curva. Para medir esta inclinación definimos la pendiente de la curva en el punto (x,y) como la pendiente de la recta tangente a la curva en (x,y). Por ejemplo, en la fig. 2.5, la pendiente en (1,1) es cero, pues la recta tangente en ese punto es paralela al eje X.

Ejerc. 1.-En la curva de la fig. 2.5, dar la pendiente en los puntos de abscisa $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$, $x=-1.75$.

Al movernos sobre una curva podemos subir o bajar según su inclinación, la rapidez con que se sube o baja, depende de lo inclinada que esté la curva: mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, mayor es la rapidez de cambio de la curva, y así decimos que

a) La curva crece en el punto (x,y) cuando al aumentar x aumenta y, y al disminuír x disminuye y.

b) La curva decrece en el punto (x,y) cuando al aumentar x disminuye y y al disminuír x aumenta y.

Por ejemplo, la curva de la figura 2.5 es creciente en el punto (0,0) y en cambio es decreciente para el punto de abscisa $x=2$; también es creciente para los puntos del intervalo $-1<x<1$.

Ejerc. 2.-a) Diga para cuáles intervalos la curva de la fig. 2.5 es creciente y para cuales es decreciente.

b) ¿Crece la curva mas rápido para x=0 que para $x=.75$?

c) Si la pendiente es negativa, ¿la curva crece o decrece?.

En ciertos puntos la curva ni crece ni decrece. Por ejemplo, en el punto (1,1), de la fig. 2.5, la curva no es creciente (al aumentar x no aumenta y) ni decreciente (al disminuír x no aumenta y). En lugar, a ambos lados de (1,1) la curva baja, es decir, la y disminuye, por lo que decimos que el punto es un máximo relativo (ó simplemente máximo) de la curva. Igualmente la curva no crece ni decrece para $x=-1$, pues la y aumenta a ambos lados de $x=-1$, y decimos que el punto es un mínimo relativo (ó simplemente un mínimo) de la curva. Compendiando decimos que:

a) El punto (x,y) es un máximo relativo de una curva, cuando al cambiar x (ya sea aumentando o disminuyendo), la y disminuye.

b) El punto (x,y) es un mínimo relativo de una curva, cuando al cambiar x la y aumenta.

Así, al graficar una ecuación, como $y = 2x-x^3$, conviene fijarse si crece o decrece y unir los puntos tabulados de acuerdo a ello. Tabulando y graficando los puntos uno a la vez, tenemos (vea fig. 2.5):

x	y	
0	0	Desde este punto, la gráfica puede subir o bajar, lo cual averiguaremos trazando el siguiente punto.
1	1	La curva subió a uno; podemos esperar que siga subiendo, aunque aún puede doblarse y bajar.
2	-4	Bajó... y con ganas. ¿Seguirá bajando? Podemos tratar el siguiente punto para cerciorarnos.
3	-21	Sigue bajando rapidamente. Todo parece indicar que seguirá bajando, pero hay que evitar una sorpresa.

Para asegurarnos que seguirá bajando nos fijamos en la ecuación $y = 2x-x^3$. El término $2x$ así como x^3, resulta positivo para $x>3$, y como en esas condiciones $2x$ es menor que x^3, al crecer x se hace mas y mas negativa la diferencia $2x-x^3$, decreciendo la curva.

Ejerc. 3.-Analice la ecuación $m=p^4-2p+4$, siguiendo las sugestiones delineadas arriba. Diga donde crece y donde decrece, y donde están sus puntos máximos y mínimos.

Otra propiedad importante de las curvas es su <u>convexidad</u>. Decimos que la curva es convexa (o cóncava para abajo) si al ir de izquierda a derecha, su crecimiento de punto a punto se hace cada vez menor; o si está decreciendo, decrece cada vez mas. (Vea fig. 2.6).

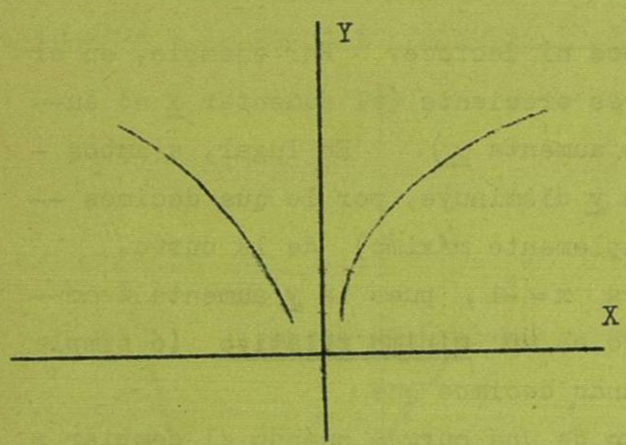


Fig. 2.6.- Curvas convexas (ó cóncavas para abajo)

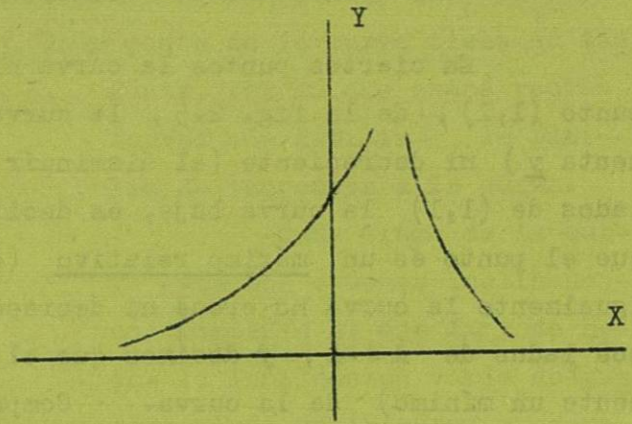


Fig. 2.7.- Curvas cóncavas (ó cóncavas para arriba)

Decimos que la curva es cóncava (o cóncava para arriba), si al ir de izquierda a derecha su crecimiento se hace cada vez mayor; o si está decreciendo, decrece cada vez menos. (Vea fig. 2.7).

Por ejemplo, en la fig. 2.8 la curva es convexa en el intervalo $-1 < x < 1$, luego decimos que la curva es convexa para cualquiera de los puntos de este intervalo. Para el intervalo $1 < x < 2$, la curva cambia a cóncava.

Los puntos donde la curva cambia de convexidad los llamamos <u>puntos de inflexión</u>. Por ejemplo, en esta figura $(1,0)$ y $(3,0)$ son puntos de inflexión.

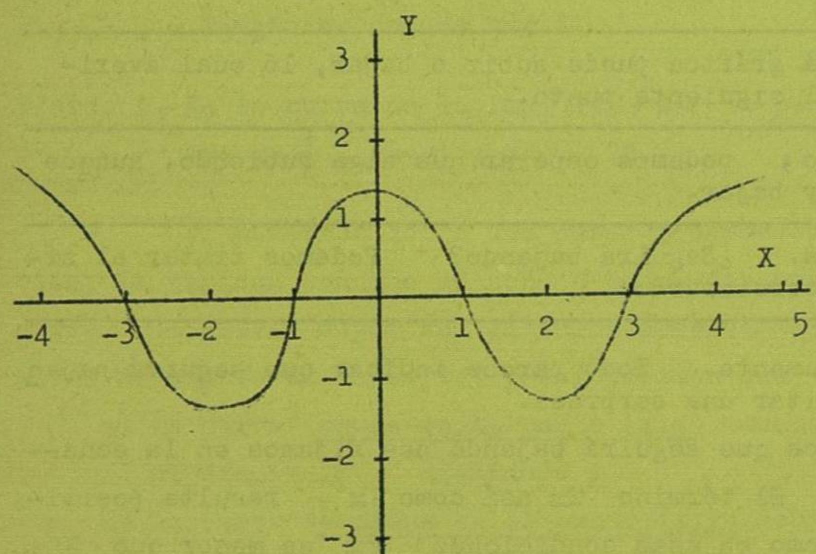


Fig. 2.8.- Convexidad de una curva.

Ejerc. 4.-Dar otros dos puntos de inflexión de la curva en la fig. 2.8.
Para la curva de la fig. 2.5, decir en cuales intervalos es convexa, en cuales es cóncava, y cuales son sus puntos de inflexión.

Decimos que una curva está definida para la abscisa x_0, cuando hay un punto de la curva con tal abscisa. En el caso que la curva esté definida para todos los puntos de un intervalo del eje X, decimos que la curva está definida en ese intervalo.

Por ejemplo, la curva de la fig. 2.9, no está definida en el intervalo $-1 < x < 1$, es decir, no hay curva en ese intervalo. En cambio, para $x = 1$ sí está definida, y para todo el intervalo $1 < x$ también está definida.

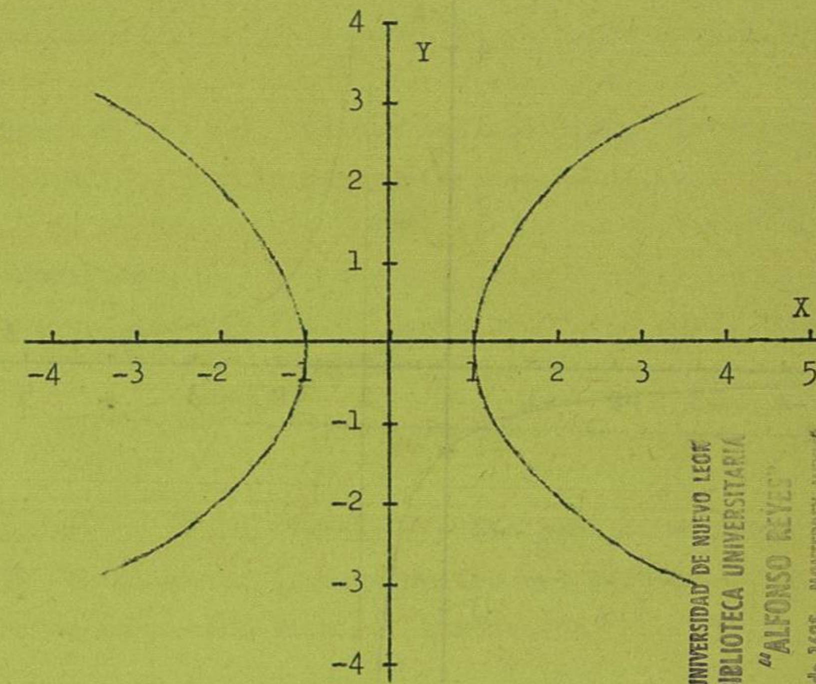


Fig. 2,9.- Intervalos para los cuales una curva está definida.

Así, para graficar $x^2 - y^2 = 1$ (vea fig. 2.9), despejamos <u>y</u>, obteniendo

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

y además,

$$y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

Tabulando la rama positiva:

x	y	
0	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1}$ nó es un número real, luego el par $(0, \sqrt{-1})$ no se puede graficar: no hay punto de la curva para la abscisa $x=0$.
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{-3}{4}}$	La curva aún no está definida.
1	0	Obtenemos el primer punto. Para saber si hay algún punto entre 0 y 1, basta con notar que para esos valores x^2 es menor que 1, luego $x^2 - 1$ es negativo. Mas allá del <u>1</u>, x^2 es mayor que 1, luego $x^2 - 1$ es positivo y su raíz cuadrada es un número real.

Ejerc. 5.-Analice y grafique las curvas: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$, diciendo para qué valores de <u>x</u> no está definida cada curva.

Otros puntos singulares de una curva son los <u>puntos de discontinuidad</u>. Decimos que una curva es discontinua en la abscisa $\underline{x}$, cuando al trazar la tenemos que levantar el lápiz al pasar por $\underline{x}$. En otras palabras, la curva está rota en esa abscisa y queda dividida en dos partes separadas. Por ejemplo, en la fig. 2.10 la curva es discontinua para $x = 1$.

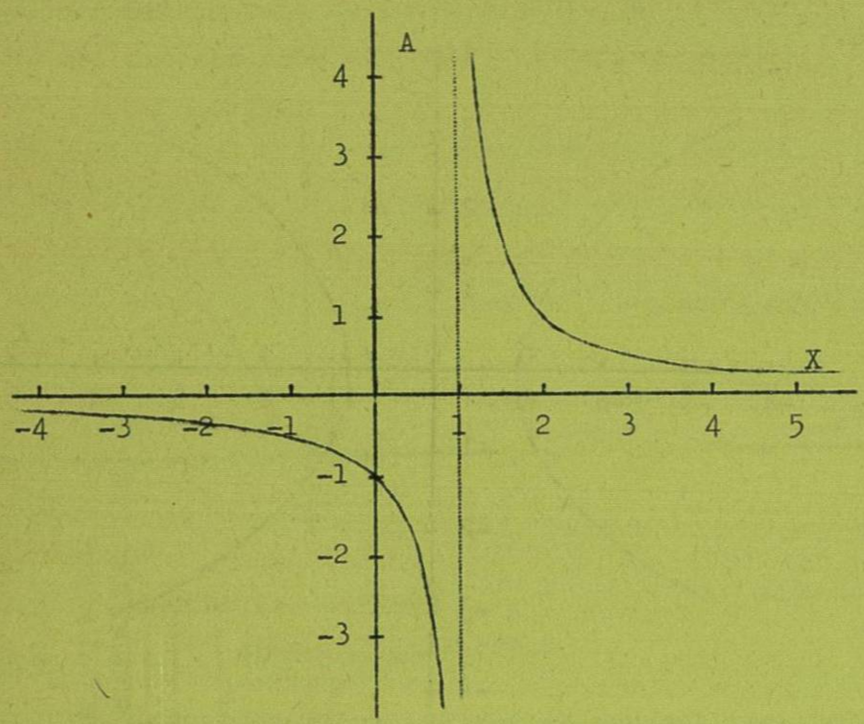


Fig. 2.10.- Discontinuidad de la ecuación $a = \frac{1}{x-1}$.

En este caso notamos que cerca de $x = 1$, la curva, a la derecha se vá para arriba indefinidamente, y a la izquierda se vá para abajo indefinidamente. A este tipo de discontinuidad lo llamamos <u>discontinuidad infinita</u> y es el que ocurre más a menudo al graficar ecuaciones.

Así, al graficar $a = \frac{1}{x-1}$, notamos que para $x = 1$, $a = \frac{1}{0}$. El símbolo $\frac{1}{0}$ no denota ningún número real, luego no hay curva para $x = 1$. Aún más, dá lugar a una discontinuidad infinita, pues tabulando valores cerca de $x = 1$:

x	a	
1.5	2	
1.1	10	A la derecha de $x = 1$:
1.01	10^2	La curva sube mientras mas se acerca a $x = 1$.
1.0001	10^4	
.5	-2	
.9	-10	A la izquierda de $x = 1$:
.99	-10^2	La curva baja mientras mas se acerca a $x = 1$.
.99999	-10^5	

La curva no intersecta a la recta $x = 1$, y sin embargo se acerca indefinidamente a ella. En tal caso decimos que la recta es una <u>asíntota</u> de la curva.

Este resultado dá lugar a la costumbre de poner $\frac{1}{0} = \infty$, tratando de indicar que al hacerse el denominador cero, la curva se vá hacia arriba. Pero a la izquierda de $\underline{1}$ la curva se vá para abajo, luego con igual razón podemos escribir $\frac{1}{0} = -\infty$. Como ∞ y $-\infty$ indican dos cosas muy distintas, no podemos poner las dos iguales a $\frac{1}{0}$, por lo que preferimos no definir $\frac{1}{0}$, y dejarlo sólo como una llamada de atención para investigar la curva cerca de la abscisa que hace cero al denominador.

Entonces en una ecuación, cada vez que el denominador sea cero, tenemos un punto de discontinuidad.

2.6 <u>Círculo</u>.

Definimos geométricamente la curva llamada círculo como: el conjunto de puntos a una distancia $\underline{r}$ de un punto llamado centro del círculo.

Con un sistema de coordenadas cartesianas, la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, donde (x,y) son las variables, representa cualquier círculo del plano, siendo (a,b) el centro, y $\underline{r}$ el radio.

Para demostrar este importante resultado, tenemos que comprobar que la distancia $\underline{D}$ entre los puntos (x,y) y (a,b), es siempre igual a $\underline{r}$. (Vea fig. 2.11).

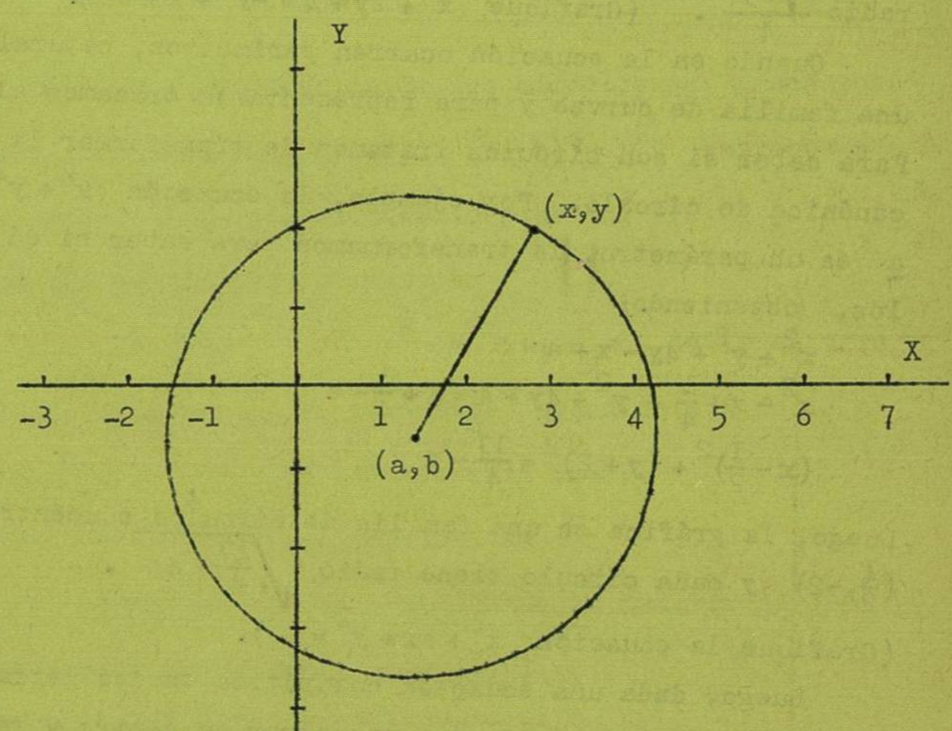


Fig. 2.11.- Círculo.

Según la fórmula para la distancia entre dos puntos, la distancia $\underline{D}$ entre (x,y) y (a,b) está dada por:

$$D = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

pero $\quad r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ $\quad$ (¿porqué?)

luego $\quad r = D$ $\quad$ como queríamos.

Luego, cualquier punto (x,y) que satisface la ecuación está a una distancia $\underline{r}$ de (a,b).

Luego, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ tiene por gráfica un círculo con centro en (a,b) y radio $\underline{r}$.

Conversamente se demuestra que la ecuación de cualquier círculo con centro (a,b) y radio $\underline{r}$ es $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (Hágalo).

Para saber si una ecuación cuadrática en dos letras representa un círculo, tratamos de transformarla a la forma canónica $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Si se puede transformar a esta forma, sabemos que su gráfica es un círculo, obteniéndose su centro y su radio directamente de la ecuación. Por ejemplo la ecuación $4x^2-2x+4y^2=16$ la transformamos para saber si es un círculo, obteniendo:

$$4x^2-2x+4y^2=16$$

$$x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+y^2=4+\frac{1}{16} \qquad \text{dividiendo entre 4 y completando el cuadrado,}$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{65}{16} \qquad \text{forma canónica.}$$

Luego la ecuación tiene por gráfica un círculo con centro $\left(\frac{1}{4},0\right)$ y con radio $\frac{\sqrt{65}}{4}$. (Grafique $x^2+2y+4=-y^2+y+6$).

Cuando en la ecuación ocurren parámetros, naturalmente su gráfica es una familia de curvas y para representarla trazamos algunos de sus miembros. Para saber si son círculos tratamos de transformar la ecuación a la forma canónica de círculo. Por ejemplo, la ecuación $x^2+y^2+3y-x+a=0$ donde $\underline{a}$ es un parámetro, la transformamos para saber si dá una familia de círculos, obteniendo:

$$x^2+y^2+4y-x+a=0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+4y+4=4+\frac{1}{4}-a$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{17}{4}-a$$

Luego, la gráfica es una familia de círculos concéntricos con centro en $\left(\frac{1}{2},-2\right)$ y cada círculo tiene radio $\sqrt{\frac{17}{4}-a}$.

(Grafique la ecuación $x^2+ax+y^2=0$).

Luego, dada una ecuación cuadrática en dos letras, ya sabemos como probar si es un círculo, y como encontrar su centro y radio, para entonces graficarlo.

Conversamente, dado un círculo con ciertas propiedades, para obtener su ecuación, seguimos el método general ya conocido:

1) Encontrar la ecuación de una familia de círculos que incluya al círculo deseado. En este caso podemos usar la ecuación canónica $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ pues representa a todos los círculos del plano.

2) Determinar los valores de los parámetros con las condiciones dadas. Por ejemplo, para determinar la ecuación del círculo que tiene centro en $(-3,4)$ y pasa por el punto $(1,1)$ tenemos:

en la ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $\quad a=-3$ y $b=4$, puesto que (a,b) es el centro del círculo. Sustituyendo obtenemos

$$(x+3)^2+(y-4)^2=r^2 .$$

Para determinar $\underline{r}$, recordando que $(1,1)$ satisface la ecuación, tenemos

$$(1+3)^2+(1-4)^2=r^2 \qquad \text{es decir,} \qquad r^2=25 .$$

Luego, $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ es la ecuación deseada.

(Dé la ecuación del círculo con centro en $(-1,-2)$ y radio 10).

Dada una familia de círculos con ciertas propiedades, para obtener su ecuación, se sigue el mismo método, pero entonces no se eliminan todos los parámetros.

Por ejemplo, para encontrar la ecuación de los círculos que pasan por el punto $(0,0)$ tenemos: la ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ representa a todos los círculos del plano. Para que el círculo pase por $(0,0)$, los parámetros a,b,r tienen que satisfacer la ecuación

$(0-a)^2+(0-b)^2=r^2$ de donde $r^2=a^2+b^2$ que nos dá $\underline{r}$ en términos de (a,b) . Luego, eliminando el parámetro dependiente $\underline{r}$ de la ecuación en (x,y) obtenemos la ecuación de la familia dada:

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ que transformando dá

$x^2-2ax+y^2-2by=0$ (Hágalo. Dé la ecuación de la familia de círculos concéntricos con centro en el punto $(-1,\sqrt{3})$).

La pendiente $\underline{m}$ del círculo $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ en un punto cualquiera (x,y) , cambia de punto a punto del círculo. Luego $\underline{m}$ depende de (x,y) y naturalmente nos gustaría tener una expresión para $\underline{m}$ en términos de (x,y).

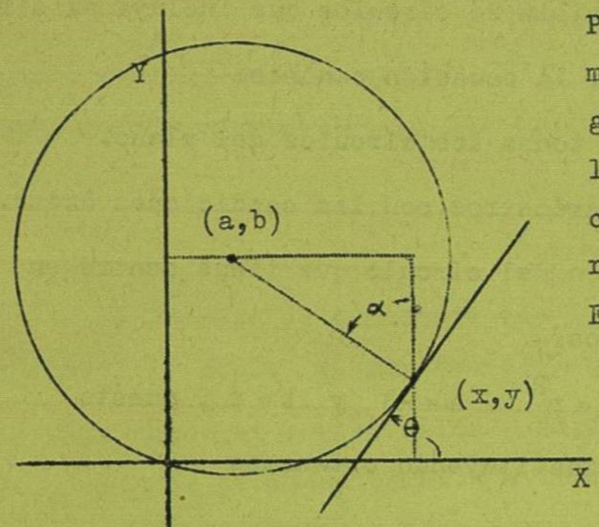


Figura 2.12.-Pendiente del círculo.

Para obtenerla (vea figura 2.12), usamos la propiedad geométrica de una tangente a un círculo, de ser perpendicular al radio en el punto de tangencia. Luego $\theta = \alpha$ por tener los lados respectivamente perpendiculares. Entonces

$$m = \tan\theta = \tan\alpha = \frac{x-a}{b-y}$$

$$\boxed{m = -\frac{x-a}{y-b}}$$

Por ejemplo, encontrar la pendiente del círculo $x^2 + 2x + y^2 = 3$ en los puntos con abscisa $x = -2$.

Transformando a la forma canónica: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$

$(x+1)^2 + y^2 = 4$

nos dá que $(-1,0)$ es el centro del círculo. Despejando la $\underline{y}$ obtenemos las dos expresiones

$$y = \pm\sqrt{4-(x+1)^2}$$

luego, para $x = -2$ se tiene que $y = \pm\sqrt{3}$. Por lo que, para el punto la pendiente es $m = -\frac{-2-(-1)}{\sqrt{3}-0} = -\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(¿Qué pendiente tiene el punto $(-2,-\sqrt{3})$?. Encuentre la pendiente del círculo $x^2 + y^2 = 6$ para los puntos con abscisa $x = 0$).

2.7 Parábola.

Al igual que el círculo, la parábola se puede definir geométricamente. Aquí la definimos solamente por medio de su ecuación. Cualquiera ecuación en (x,y) reducible a una de las dos formas canónicas:

$$x - x_0 = k(y-y_0)^2 \qquad ó \qquad y - y_0 = k(x-x_0)^2$$

es una parábola horizontal con vértice en el punto (x_0,y_0) y eje de simetría $y = y_0$. La parábola está abierta para la izquierda (o derecha) cuando $\underline{k}$ es negativa (o positiva).

es una parábola vertical con vértice en el punto (x_0,y_0) y eje de simetría $x = x_0$. La parábola está abierta para abajo (o arriba) cuando $\underline{k}$ es negativa (o positiva).

La magnitud de $\underline{k}$ determina la abertura de la parábola, pues mientras mas grande es $|k|$, mas cerrada es la parábola. Por ejemplo, las parábolas

Por ejemplo, las parábolas horizontales $x + 2 = y^2$ y $x + 2 = 4y^2$ tienen el punto $(-2,0)$ por vértice, el eje X como eje de simetría y se abren a la derecha. Para graficar estas ecuaciones basta con trazar otro punto que nos indique qué de abiertas están las parábolas. Por ejemplo, el punto $(0,\sqrt{2})$ es una solución de la primera ecuación; $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ es una solución de la segunda, con lo cual trazamos las dos parábolas de la figura 2.13 (Grafique la ecuación $x^2 + 2x - y = 0$) Para encontrar la ecuación de una parábola o familia de parábolas que satisfagan ciertas condiciones usamos una de las dos formas canónicas, según deban ser horizontales o verticales, y determinamos los parámetros.

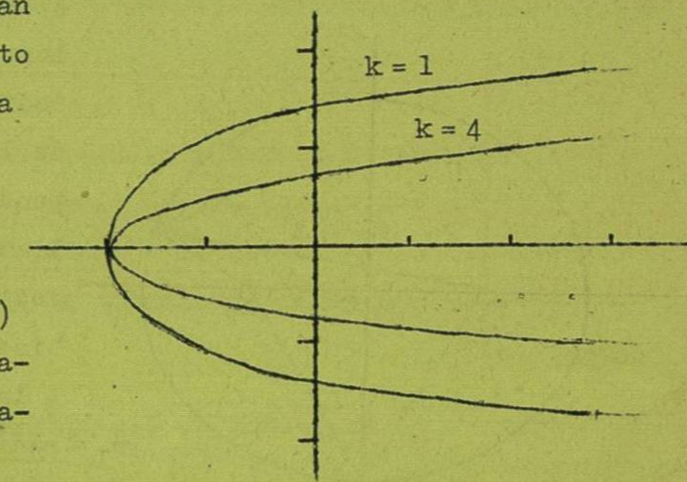


Figura 2.13.- Parábolas $x + 2 = ky^2$

Por ejemplo, para encontrar la ecuación de la familia de parábolas con eje de simetría $x = -6$ y que pasen por $(1,1)$, usamos la ecuación $y - y_0 = k(x-x_0)^2$ pues se trata de parábolas verticales (¿porqué?). Ya que el eje de simetría es $x = -6$ se tiene que $x_0 = -6$ (¿porqué?). Como pasan por el punto $(1,1)$, las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación y tenemos:

$$1 - y_0 = k(1+6)^2 \qquad \text{de donde} \qquad y_0 = 1 - 49k\ ,$$

luego eliminando y_0 obtenemos la ecuación con un parámetro $\underline{k}$

$$y - (1-49k) = k(x+6)^2$$

que representa a la familia deseada.

Para el círculo encontramos una expresión de su pendiente $\underline{m}$ en el punto (x,y) en términos de $\underline{x}$ y $\underline{y}$, usando ciertas propiedades geométricas. También para la parábola nos gustaría tener una expresión de su pendiente en términos de (x,y). Pero si tratamos de obtenerla geométricamente nos encontraremos con un problema difícil de resolver, por lo que preferimos esperar hasta el próximo capítulo, donde desarrollamos entre otras cosas, un método para obtener la pendiente de una curva cualquiera partiendo de su ecuación.

2.8 Elipse.

Definimos geométricamente la elipse como el conjunto de puntos (x,y) tal que la suma de las distancias de (x,y) a dos puntos dados F_1 y F_2 no cambia.

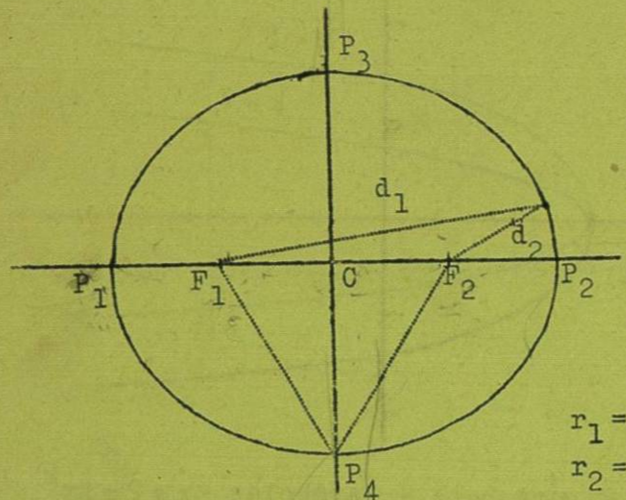


Figura 2.14.- Elipse.

A los puntos F_1 y F_2 (vea figura 2.14) los llamamos focos de la elipse. A la recta que pasa por los focos, eje mayor de la elipse $(\overline{P_1P_2})$. A la recta per - pendicular bisectriz del eje mayor, la llamamos eje menor (P_3P_4). Estas dos rectas, son los ejes de simetría y se bisectan mutuamente en el centro (C).

A la distancia $CP_1 = CP_2$ la llamamos r_1 = radio mayor , y a la distancia $CP_3 = CP_4$ r_2 = radio menor de la elipse.

$P_1F_2 + P_1F_1$ es la suma de las distan - cias de P_1 a los focos. Dada la simetría de la figura, $P_1F_1 = F_2P_2$, luego

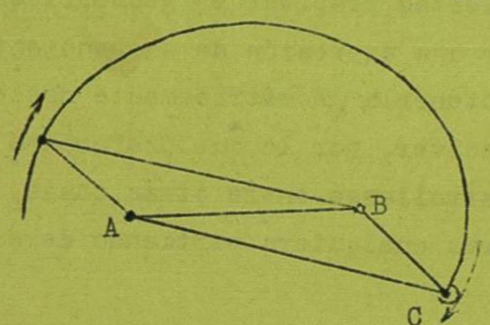
$P_1F_2 + P_1F_1 = P_1F_2 + F_2P_2 = P_1P_2 = 2r_1$

y como la suma $L = d_1 + d_2$ de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos, no cambia, se sigue que para cualquier punto de la elipse $L = 2r_1$. (¿qué relación hay entre L y el eje mayor?).

Por la misma simetría, $P_4F_1 = P_4F_2$, luego para el punto P_4

$L = d_1 + d_2 = 2P_4F_1$ de donde $P_4F_1 = r_1$ (¿porqué?). Entonces en el triángulo CP_4F_1 , la hipotenusa es r_1 , el cateto vertical es r_2 y c la distancia del centro a un foco está dada por la expresión

$$c = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$ (distancia del centro a un foco, en términos de los radios).



(Con un hilo anudado en los extremos, y deslizándose por dos puntos fijos separados 5 cms., trazar una elipse con radio mayor 4. Vea la figura 2.15 en que A y B son dos alfileres fijos (los focos); ABCA es el hilo que se desliza por A y B cuando C ,la punta de un lápiz, se mueve manteniendo tenso el hilo, diga porqué la figura trazada es una elipse).

Figura 2.15.- Trazado de una elipse.

Cualquier ecuación en (x,y) reducible a la forma canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

representa una elipse con centro en (h,k), radio horizontal a y radio vertical b

Si $a > b$, el radio horizontal a es el radio mayor, por lo que la elipse está horizontal y los focos quedan sobre la recta $y = k$ (¿porqué?)

Si $a < b$, el radio vertical b es el radio mayor, por lo que la elipse está vertical y los focos quedan sobre la recta $x = h$ (¿porqué?).

Si $a = b$, la elipse se convierte en un círculo de radio a (¿porqué?).

(Dé el centro, radios mayor y menor de la elipse $(y+1)^2 + \frac{x^2}{4} = 1$).

Para graficar la ecuación de una elipse la reducimos a la forma canónica de la elipse, la cual, como en el caso del círculo, nos dá toda la información necesaria para graficarla; por ejemplo, para graficar la ecuación $2x^2 + 4x + y^2 + 1 = 5$ (¿puede ser ésta, la ecuación de un círculo?): Transformándola a la forma canónica de la elipse tenemos:

$2x^2 + 4x + y^2 = 4$

$2(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 4 + 2$ (completando cuadrados en forma apropiada).

$2(x+1)^2 + y^2 = 6$

$\frac{(x+1)^2}{6/2} + \frac{y^2}{6} = 1$ (dividiendo entre 6 para arreglar en la forma canónica).

$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

Luego, su centro está en $(-1,0)$, su radio horizontal es igual a $\sqrt{3}$, su radio vertical es igual a $\sqrt{6}$. Como el radio vertical es mayor, la elipse está vertical, como vemos en la figura 2.16.

(Grafique $y^2 - 2y + 2x^2 = 1$)

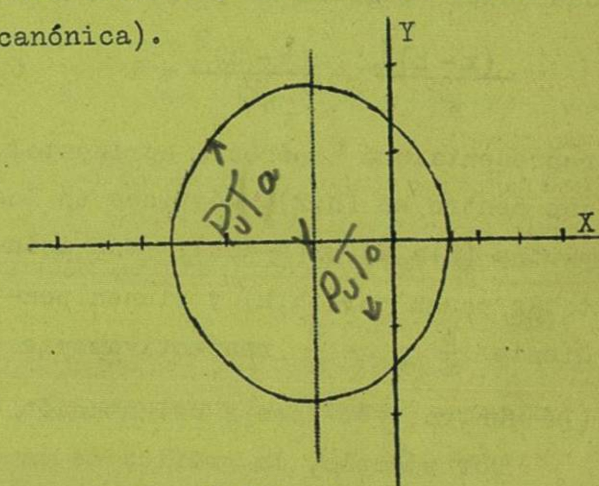


Figura 2.16.-Gráfica de $2x^2 + 4x + y^2 + 1 = 5$.