2.9 Hipérbola.

Dada cualquier ecuación cuadrática en dos letras, su gráfica puedo ser: un círculo, una parábola, una elipse, o una hipérbola, y sólo una de esas cuatro. Luego conociéndolas y sabiendo como transformar sus ecuaciones a la forma canónica, podemos trazarrapidamente la gráfica de cualquier ecuación cuadrática.

Definimos geométricamente la hipérbola como el conjunto de puntos (x,y) tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias de (x,y) a dos puntos dados F_1 y F_2, no cambia.

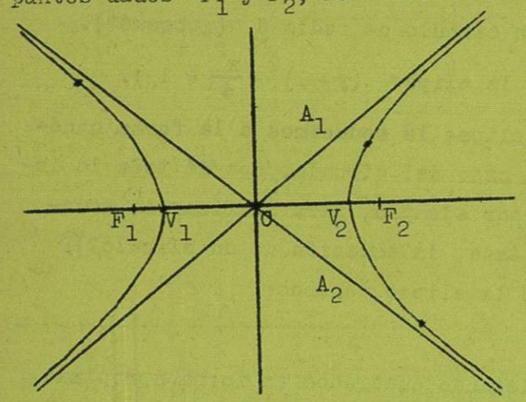


Figura 2.17.-Hipérbola.

Vea la figura 2.17 y compare la diferencia de distancias de los puntos marcados a los focos F_1 y F_2. Llamamos a los puntos F_1 y F_2, los focos de la hipérbola. A los puntos V_1 y V_2, vértices. Al punto C, centro. La recta que pasa por los focos, y la perpendicular que pasa por C son los ejes de simetría. Las rectas A_1 y A_2 son las asíntotas de la hipérbola.

Cualquier ecuación en (x,y) reducible a la forma canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

representa una hipérbola horizontal con centro en (h,k), vértices en los puntos (h+a,k) y (h-a,k). Sus asíntotas pasan por (h,k) y tienen pendiente $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ respectivamente.

representa una hipérbola vertical con centro en (h,k), vértices en los puntos (h,k+b) y (h,k-b). Sus asíntotas pasan por (h,k) y tienen pendiente $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ respectivamente.

(Dé centro, vértices y orientación de $x^2 - y^2 = 2$; $-x^2 + (y-1)^2 = 4$).

Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $-x^2 + y^2 + 2x = 5$ se obtiene así:

$y^2 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - 1$ (completando el cuadrado).

$y^2 - (x-1)^2 = 4$

$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$ (arreglando en la forma canónica).

Luego, es una hipérbola vertical con centro en (1,0), vértices en (2,1) y (-2,1), y asíntotas que pasan por (1,0) y con pendientes 1 y -1 respectivamente.(Dé la ecuación de las asíntotas. Grafique $x^2 + 2 = y^2 + 2y$).

2.10 Coordenadas polares.

En la sección 1.2 vimos como asociar puntos del plano con pares de números reales usando las coordenadas cartesianas. Ahora estudiamos una asociación diferente introduciendo las coordenadas polares.

Sobre el plano trazamos horizontalmente el segmento positivo de una escala real, como en la fig. 2.18 . Al punto O lo llamamos origen o polo y al segmento OX eje polar.

Dado cualquier punto del plano como P, unimos O con P y consideramos la longitud de OP y el ángulo de OX a OP, que en este caso -- son 3 y 45° respectivamente.

Entonces asociamos P con el par (3,45°) ó con $(3,\frac{\pi}{4})$ según se mida el ángulo en grados o radianes.

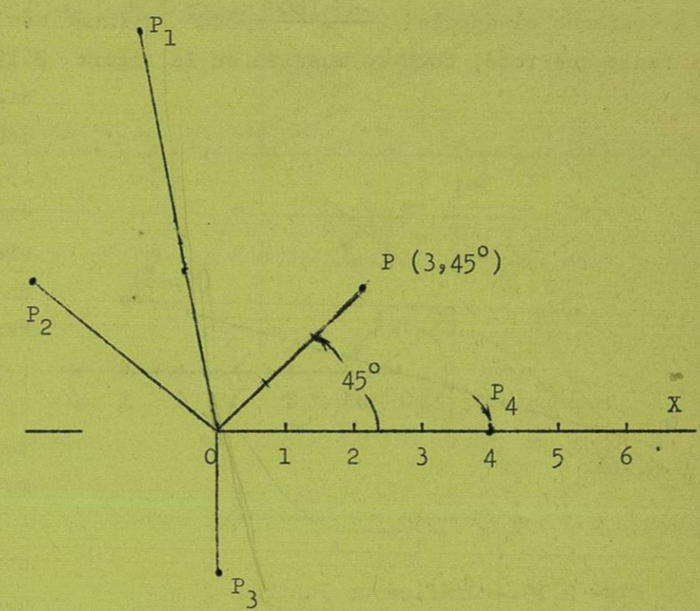


Fig. 2.18.- Coordenadas Polares.

Llamamos al par (3,45°) coordenadas polares de P, al 3 radio, y al 45° ángulo polar ó ángulo.

Por convención, el primer número del par se refiere siempre al radio y se denota genéricamente con la letra ρ, mientras el segundo se refiere al ángulo y se denota genéricamente con la letra θ. Luego (ρ, θ) denota -- cualquier punto del plano en coordenadas polares.

Ejerc. 1.-Dar las coordenadas polares de los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 en la fig. 2.18 .

Como el ángulo de OX a OP se puede medir de varias maneras, según rotemos OP varias veces, con o en contra de las manecillas del reloj, P queda asociado, nó con un solo par de números (como en el caso de las carte-

sianas) sino con una multitud de pares. Por ejemplo, el punto P de la fig. 2.18 queda asociado con $(3,45^\circ)$, $(3,405^\circ)$, $(3,-315^\circ)$; $(3,\frac{\pi}{4})$, $(3,\frac{9\pi}{4})$ etc.

Ejerc. 2.-Dé otros cinco pares asociados con P , y con P_1.

Dado un par de números, como $(5,-6)$ (si no se indican grados, se sobreentiende que el -6 está en radianes), para graficar en coordenadas polares trazamos el ángulo $\frac{-6 \times 180}{\pi} = -344^\circ$ y luego medimos la distancia 5 sobre el radio que rotó, como se muestra en la figura 2.19 . En el caso que la medida del ángulo se pase de 360° ó -360° , como en $(5,-1424^\circ)$, la reducimos dividiendo entre 360°, y el residuo -344° nos dá una medida que sabemos como trazar. Pero si nos dán el par $(-5,-6)$, no sabemos como trazarlo, pues el radio lo tomábamos solo como un número positivo.

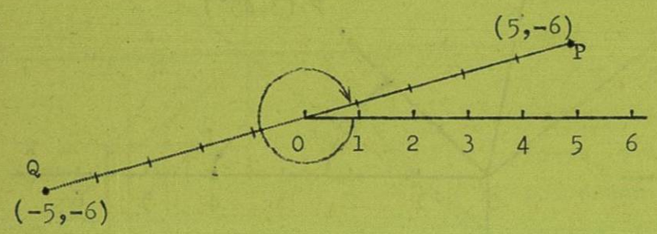


Fig. 2.19.- Gráfica de Puntos.

Entonces, para generalizar la asociación para que incluya radios negativos hacemos lo siguiente :

Dado un ángulo como el de la fig. 2.19 , al segmento OP lo podemos extender mas allá de O. Los puntos que caen sobre esta extensión, como Q , los tomamos con radio negativo. Luego Q queda asociado con $(-5,-6)$.

Esta generalización tiene una desventaja, pues ahora con cada punto quedan asociados mas pares, según se tome el radio positivo o negativo. Por ejemplo, el punto representado por $(3,45^\circ)$, puede también representarse por $(-3, 45^\circ+180^\circ)$, $(-3, 45^\circ-180^\circ)$, etc.

Haciendo un resumen : cualquier punto del plano está asociado a una infinidad de coordenadas polares, y en cambio, cualquier par de números reales está asociado con un solo punto en el plano.

Ejerc. 3.- a) Grafique los pares $(-3,180^\circ)$, $(2.5,10)$, $(-4,-30^\circ)$, $(-4,30^\circ)$, $(0,20^\circ)$, $(0,0)$, $(-1,3\pi)$, $(4,\pi^\circ)$.

b) Para cada punto dado arriba dé otras tres coordenadas.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

En el plano, podemos introducir las coordenadas cartesianas y las polares simultáneamente. Entonces cada punto P queda asociado con dos pares: sus coordenadas cartesianas (x,y) y sus coordenadas polares (ρ, θ) . (Vea fig. 2.20).

Naturalmente nos interesa poder pasar de un par al otro, Por ejemplo, si nos dán las coordenadas cartesianas $(-2,-4)$, obtener las polares correspondientes y viceversa, dadas las polares obtener las cartesianas.

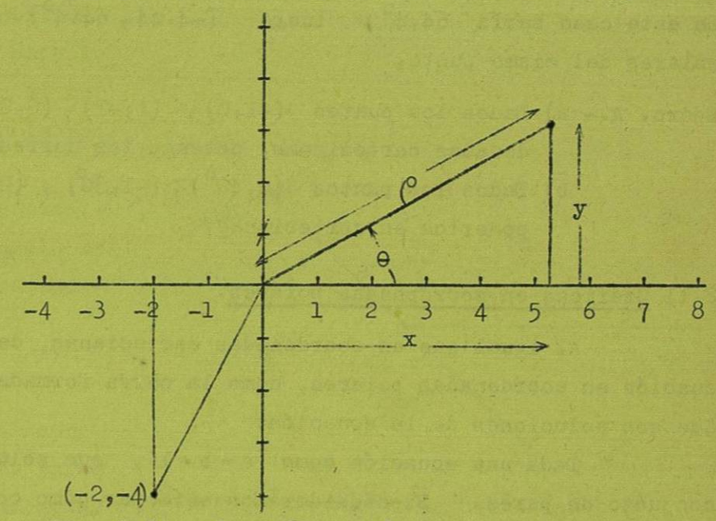


Fig. 2.20.- Transformación de coordenadas.

Para hacer ésto, notamos la relación que existe entre x, y, ρ, θ dada por el triángulo de la fig. 2.20 :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \end{aligned}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

Así, si nos dán las coordenadas polares $(-3,30^\circ)$, las cartesianas correspondientes son $(-2.6 , -1.5)$ pues :

$$x = -3 \cos 30^\circ = -2.6$$
$$y = -3 \operatorname{sen} 30^\circ = -1.5$$

Conversamente, si nos dán las coordenadas cartesianas $(-2,-4)$, vamos a tener muchas coordenadas polares, como es de esperarse.

Usando las ecuaciones de arriba tenemos :

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 4.44....$$

$$\operatorname{Tan} \theta = \frac{-4}{-2} = 2$$

Hay muchos ángulos θ cuya tangente dá 2 , como 64.4° , $64.4^\circ+180^\circ$, etc. y de todos éstos hay que saber cual escoger. De la fig. 2.20 vemos que 64.4° no puede ser, pero que $64.4^\circ+180^\circ$ ó $64.4^\circ-180^\circ$ sí pueden. Luego, $(4.44 , 244.4^\circ)$ ó $(4.44 , -115.6^\circ)$ son las coordenadas polares del punto.

50268

La ecuación $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ siempre nos dá radios positivos. Si tomamos $\rho = -\sqrt{x^2 + y^2}$ entonces el ángulo que se escoge arriba es diferente. En este caso sería 64.4°; luego $(-4.44, 64.4^\circ)$ son también coordenadas polares del mismo punto.

Ejerc. 4.- a) Dados los puntos $(-1,0)$, $(1,-1)$, $(0,0)$, $(3,-2)$, $(0,4)$ en coordenadas cartesianas, obtenga las correspondientes polares.

b) Dados los puntos $(0,40^\circ)$, $(-1,30^\circ)$, $(2,\pi)$, $(-5,-\pi)$ en polares, ponerlos en cartesianas.

2.11 Gráficas en coordenadas polares.

Al igual que en coordenadas cartesianas, definimos gráfica de una ecuación en coordenadas polares, como la curva formada por el conjunto de pares que son soluciones de la ecuación.

Dada una ecuación como $a = b - 1$, sus soluciones (a,b) forman un conjunto de pares. Si consideramos este par como coordenadas polares, de modo que a sea radio y b ángulo, la gráfica de estos pares nos dá la gráfica de la ecuación en coordenadas polares. Para obtener su gráfica:

1) Tabulamos dándole valores a b, primero positivos y luego negativos. Naturalmente escogemos valores fáciles de graficar. Si no se especifica lo contrario, la medida del ángulo se toma en radianes.
2) Graficamos los pares así obtenidos, empezando con cero y notando cómo vá la curva a medida que b aumenta y luego cuando b disminuye.
3) Unimos los puntos así obtenidos a mano limpia.

b	a	b	a
0	-1	$\frac{-\pi}{2}$	-1.79
$\frac{\pi}{4}$	-0.21	$-\pi$	-4.14
$\frac{\pi}{2}$	0.68		
π	2.14		
$\frac{3\pi}{2}$	3.7		
2π	5.3		
$\frac{-\pi}{4}$	-1.79		

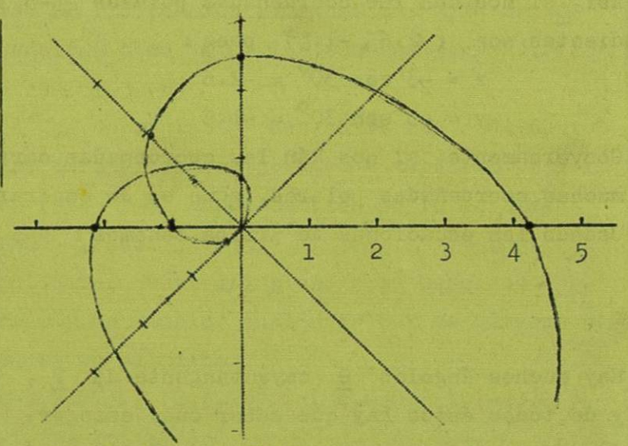


Fig. 2.21.- Tabulación y gráfica de $a = b - 1$ donde a radio, y b ángulo.

En la fig. 2.21 hacemos ésto, obteniendo una espiral con dos brazos, obteniéndose un brazo al girar el ángulo contra las manecillas del reloj, y el otro al girar con las manecillas.

Ahora obtenemos ecuaciones en coordenadas polares de curvas que ya conocemos, como la recta y el círculo.

1) Dada una recta que pasa por el polo formando un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ del eje polar a la recta, su ecuación polar es:

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

El radio ρ ocurre trivialmente, pues la curva consta de los pares $(\rho, \frac{3\pi}{4})$, donde ρ es cualquier número real.

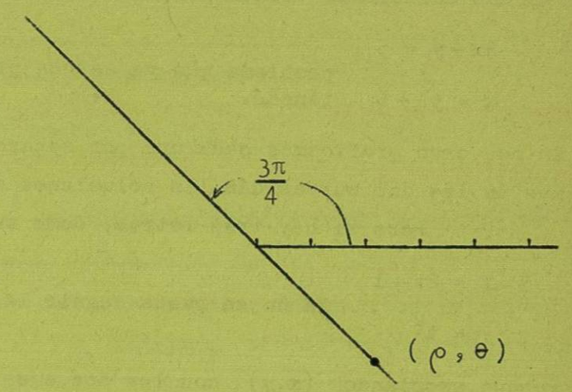


Fig. 2.22.- Ecuación polar de recta por el polo.

2) La ecuación de un círculo con centro en (p, α) y radio a, la obtenemos usando el triángulo que mostramos en la fig. 2.23:

$$a^2 = \rho^2 + p^2 - 2\rho p \cos(\theta - \alpha)$$

que despejando ρ nos dá:

$$\rho = p\cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{a^2\cos^2(\theta - \alpha) + a^2 - p^2}$$

Cuando el centro está en el origen, la ecuación se reduce a:

$\rho = a$, pues $(p, \alpha) = (0,0)$.

Ejerc. 1.-Grafique las ecuaciones: $\rho = 3$, $\theta = 60^\circ$

$\rho = 4\cos\theta$, y

$y = x^2$ (x es ángulo).

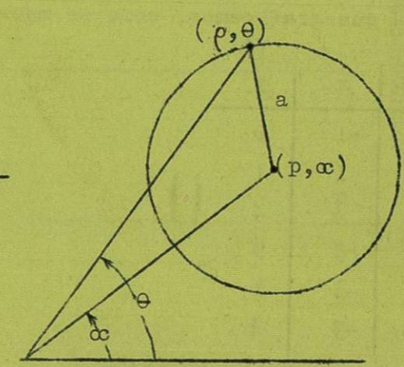


Fig. 2.23.- Ecuación polar del círculo.

2.12 Ecuaciones Paramétricas.

Ya estudiamos como graficar una ecuación con una o más letras. Ahora consideramos el caso de cómo graficar dos ecuaciones. El caso cuando las dos ecuaciones tienen a lo más dos letras, como:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x &= y^2 + 6 \end{aligned}$$

problema que ya se nos presentó al resolver ecuaciones simultáneas.

En ese caso graficamos cada una por separado, y si recuerdan, las intersecciones de las dos curvas dán las soluciones del sistema.

Pero si hay tres letras, como en:

$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= t^2 \end{aligned}$$

Ya no se puede seguir la misma idea.

Porque asociando (x,y) con los dos ejes, ya no nos queda otro eje para asociar con t (aunque si tuviésemos tres ejes de coordenadas como en la geometría del espacio, no habría dificultad).

Entonces lo que hacemos es considerar t como parámetro y llamamos al sistema ecuaciones paramétricas con parámetro t. Para cada valor de t obtenemos un valor de x y otro de y, y estos dos valores (x,y) forman la pareja que graficamos, como se muestra en la fig. 2.24:

t	x	y
0	-1	0
1	1	1
2	3	4
3	5	9
-1	-3	1
-2	-5	4

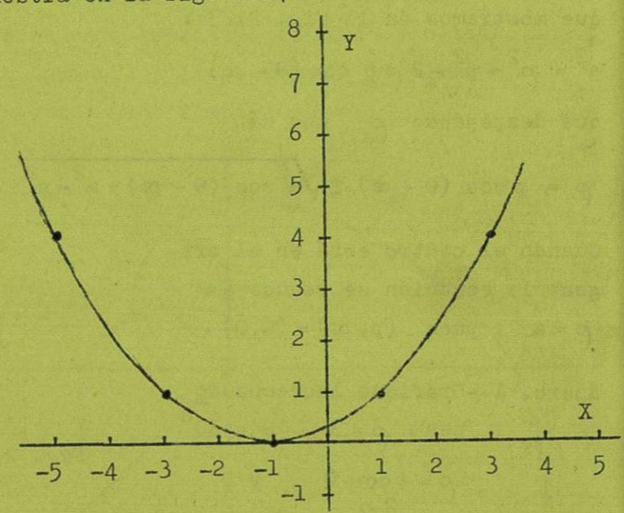


Fig. 2.24.- Tabulación y gráfica de las ecuaciones paramétricas: $x = 2t - 1$, $y = t^2$

Cuando se puede eliminar t de las dos ecuaciones, conviene hacerlo y encontrar directamente la ecuación en (x,y). Así, para las ecuaciones anteriores, $x = 2t - 1$ y $y = t^2$ tenemos:

$x + 1 = 2t$ (despejando la t)

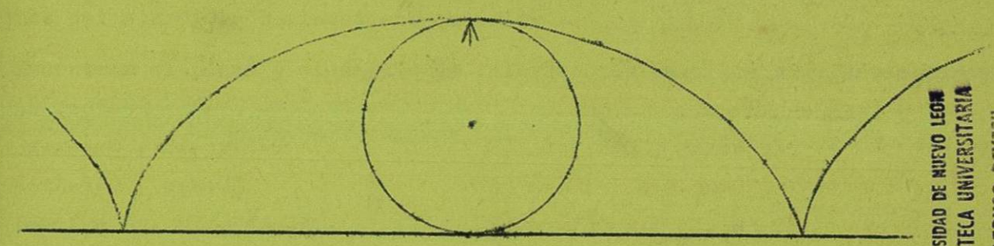
$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = t^2$$

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}$$ (sustituyendo t en $y = t^2$).

Luego $4y = (x+1)^2$ que reconocemos como la ecuación de una parábola vertical con vértice en $(-1,0)$ y que se abre hacia arriba.

Ejerc.1.- Graficar $\begin{aligned} x &= 3 \text{ sen } t \\ y &= 3 \cos t \end{aligned}$; $\begin{aligned} x &= \text{sen } t \\ y &= 3 \cos t \end{aligned}$.

Las ecuaciones paramétricas ocurren a veces al tratar de encontrar la ecuación de una curva con propiedades geométricas dadas. Por ejemplo, si rodamos un círculo sobre una recta, con una puntilla en la circunferencia, la puntilla dibujará la curva que se llama cicloide que graficamos en la fig. 2.25:



UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

Fig. 2.25.- Cicloide.

Para obtener la ecuación de una curva de este tipo, ponemos el origen de las coordenadas cartesianas al principio de la curva y rodamos el círculo de radio a sobre el eje X. Formando el triángulo como en la fig. 2.26, notamos que para cual-

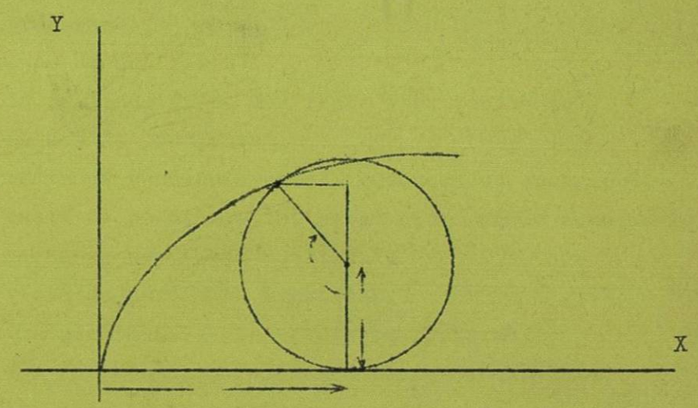


Fig. 2.26.- Ecuación de la cicloide.

quier (x,y) sobre la curva:

$$y = a - a\cos\phi$$

$$x = d - a\,\text{sen}\,\phi$$

y sustituyendo $d = a\phi$ (por definición de ángulo en radianes $\phi = \frac{d}{a}$)
Luego:

$$y = a - a\cos\phi$$

$$x = a\phi - a\,\text{sen}\,\phi$$

son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, con parámetro ϕ.

PROBLEMAS

SECCION 2.2

A.- Cuánto vale la pendiente de la recta cuyo ángulo del eje X a ella vale:

1) 15° 2) 40° 3) 60° 4) 80° 5) 90° 6) 105°
7) 135° 8) 160° 9) 180° 10) 190° 11) 220° 12) 252°
13) 270° 14) 284° 15) 300° 16) 335° 17) 360° 18) -5865°
19) -888° 20) -964° 21) -1000° 22) -5430° 23) -4495° 24) 8975°
25) 4 rad 26) -5 radianes. 27) 3π rad 28) $.7\pi$ rad 29) $-.06\pi$ rad.

B.- Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1) $(3,4),(-1,6)$ 2) $(5,-6),(3,-1)$ 3) $(0,0).(1,-7)$
4) $(-\pi,\sqrt{2}),(1,-1)$ 5) $(2,-3)$, $(-\sqrt{3},\pi)$ 6) $(\frac{1}{2},2),(-.5,\sqrt{5})$
7) $(2.3, 3\frac{1}{2}), (-\sqrt{6},0)$ 8) $(3.1,\pi), (-2.1,.3)$ 9) $(5,-1), (-\sqrt[3]{4},2)$
10) $(3,9), (3,2\pi)$ 11) $(5,-6), (-3,-6)$ 12) $(4,4), (7,7)$.

C.- Dar la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos en los problemas del ejercicio B, inmediato anterior.

D.- Encontrar el punto y el ángulo de intersección para los siguientes pares de rectas:

1) $3x+y+4=0$, $2x-5y+4=0$ 2) $3x+y+2=0$, $3x+6=3y$
3) $a+4b-5=0$, $a+b=0$ 4) $m-n=1$, $m+3.5n=0$
5) $\pi k+f=\pi$, $-\pi k+f=3\pi$ 6) $h-\sqrt{3}t=1$, $h=0$
7) $y+6x-7=0$, $2y-x=2$ 8) $y=3$, $y-2x=4$
9) $3w-2k=4$, $6w-4k=5$ 10) $0.1b-2t=1$, $b+0.04t=2$
11) $2h-j=2$, $h+2j=4$ 12) $0.1b-2t=1$, $b+0.05t=1$

E.- Conteste las siguientes preguntas:

1.- ¿Cómo se define la pendiente de una recta?.
2.- ¿Qué relación hay entre la inclinación de una recta y su pendiente?
3.- ¿Cómo varía la inclinación con la pendiente?.
4.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente cero?. ¿Cómo es su ecuación?.
5.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente infinita? ¿Cómo es su ecuación?
6.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente positiva?.
7.- ¿Qué posición tiene una recta de pendiente negativa?.
8.- ¿Qué valores puede tomar la pendiente de una recta cualquiera?.
9.- ¿Cómo se puede saber si dos rectas son paralelas o perpendiculares?.
10.-¿Cuántos puntos se necesita conocer para trazar la gráfica de una recta?.

PROBLEMAS

SECCION 2.3

A.- En los siguientes problemas se dá la ecuación de una familia de rectas. Las letras subrayadas son los parámetros. Encontrar la recta de la familia que cumple la condición indicada a la derecha y dar su pendiente :

Además trazar la gráfica de la familia en forma aproximada, señalando la recta pedida.

1) $ax - 3y = 1$, $\underline{a}$, que pase por $(-1,3)$
2) $2x - 3by + 6 = 0$, $\underline{b}$, que tenga pendiente 2.
3) $3a - xy + 3 = 0$, $\underline{x}$, que tenga pendiente 15.
4) $2wz - 3b = 0$, $\underline{z}$, que pase por $(3,4)$.
5) $5g - 3h + k - 1 = 0$, $\underline{k}$, que pase por el origen.
6) $7ab - 13x + 2 = 0$, $\underline{a}$, que tenga pendiente -2 .
7) $30my + 2a - 3 = 0$, $\underline{y}$, que pase por $(3,-6)$.
8) $5r - 3st + 1 = 0$, $\underline{s}$, que tenga pendiente ∞ .
9) $3as - 5t = -3$, $\underline{a}$, que sea horizontal.

B.- Encontrar la ecuación de la familia de rectas que satisface la condición indicada, trazando la gráfica correspondiente en forma aproximada.

1) Que pasen por $(-1,2)$.
2) Que pasen por $(-3,4)$.
3) Que pasen por $(\pi,-3)$.
4) Que pasen por $(\sqrt{2}, -2)$.
5) Que pasen por $(4.31 , 2)$
6) Que pasen por $(-\frac{2}{5} , \frac{13}{4})$.
7) Que pasen por el origen.
8) Que pasen por $(1,0)$.
9) Que tengan pendiente 2.
10) Que tengan pendiente -4.
11) Que tengan pendiente cero.
12) Que tengan pendiente ∞ .
13) Que sean verticales.
14) Que sean horizontales.
15) Que sean paralelas a $3x + 8y - 1 = 0$.
16) Que sean perpendiculares a $x - 2y = 5$.
17) Que sean perpendiculares a $3y - 4x + 2 = 0$.
18) Que sean paralelas a $\pi x + 2y = 0$.
19) Que de ellas a $x - 3y - 2 = 0$ haya un ángulo de 30°.
20) Que de ellas a $6x - 1 = y$ haya un ángulo de -80°.
21) Que de ellas a $x + y = 0$ haya un ángulo de -100°.
22) Que de ellas a $x = 0$ haya un ángulo de -1450°.
23) Que pasen por el punto de intersección de $x - y = 1$ y $2x - y = 2$.
24) Que pasen por el punto de intersección de $3a + b = 2$ y $a - 5b = 0$.
25) Que pasen por el punto de intersección de $m - \pi k = 0$ y $m + k - 1 = 0$.
26) Que pasen por el punto de intersección de $4g - 3\pi p = 1$ y $6g = 0$.
27) Que pase por el punto de intersección de $x = 3$ y $y = -\pi$.

PROBLEMAS

SECCION 2.4

Dar la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones, y trazar la gráfica correspondiente :

1) Pasa por $(3,8)$ y $(\pi,8)$.
2) Pasa por $(-1,3)$ y $(-1,5)$.
3) Pasa por $(3,-5)$ y $(5,-3)$.
4) Pasa por $(0,-\pi)$ y $(\sqrt{2},0)$.
5) Pasa por $(8,2)$ y $m = 3$.
6) Pasa por $(3,-1)$ y $m = -1$.
7) Pasa por $(-3,\pi)$ y $m = 0.1$.
8) Pasa por $(-3,\pi)$ y $m = 1000$.
9) Pasa por $(4,-3)$ y $m = -9$.
10) Pasa por $(0,0)$ y $m = 1$.
11) Pasa por $(-1,0)$ y $m = \infty$.
12) Pasa por $(-4,0.3)$ y $m = 0$.
13) Pasa por $(0,2)$ y $m = \infty$.
14) Pasa por $(0,0)$ y $m = 0$.
15) Pasa por $(-1,5)$ y es paralela a $3x - 4y + 3 = 0$.
16) Pasa por $(-1,5)$ y es perpendicular a $3x - 4y + 3 = 0$.
17) Pasa por $(0,0)$ y es perpendicular a $2x - y = 0$.
18) Pasa por $(-1,1)$ y es paralela a $x = -5y + 2$.
19) Pasa por $(3,5)$ y es paralela al eje X.
20) Pasa por $(1,-4)$ es paralela al eje Y .
21) Pasa por $(5,-1)$ y es vertical .
22) Pasa por $(-7,-3)$ y es horizontal.
23) Pasa por $(-1,2)$ y hay un ángulo -30° de ella a $x + y = 0$.
24) Pasa por $(3,-5)$ y hay un ángulo 45° de ella a $(x-3y)(x-4) = x^2 - 3xy + 5$.
25) Pasa por $(-3,4)$ y hay un ángulo de -120° de ella a $3s + k + 5 = 0$.
26) Pasa por $(2,-1)$ y hay un ángulo de 2010° de ella a $5r - 3t + 1 = 0$.
27) Pasa por el punto de intersección de $2x+y-1 = 0$ con $2x+3y = 4$, y además es paralela a $x = -5y + 1$.
28) Pasa por el punto de intersección de $3x-5y+2 = 0$ con $3x+y = 0$, y además es perpendicular a $2x-1 = y$.
29) Pasa por el punto de intersección de $2x-1 = 3y$ con $5y - 2 = 3x$, y además hay un ángulo de 100° de ella a $x-3y+2 = 0$.
30) Pasa por el punto de intersección de $x+4y+3 = 0$ y $y-2x+1 = 0$, y además hay un ángulo de -40° de ella a $2x+y = 1$.
31) Es vertical y es tangente a un círculo de radio 6 y centro en $(-\pi,\pi)$.
32) Es horizontal y pasa por el punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos $(3,1)$ y $(6,3)$.
33) Su pendiente es $m = 1$, y su distancia perpendicularmente al origen es 2.
34) Corta un triángulo isósceles en el primer cuadrante, y pasa por $(-4,-1)$.
35) Es paralela a $x+y = 0$ y está separada de ella 8 unidades.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO