62) Parábolas verticales que pasan por $(0,1)$ y $(-3,0)$.

63) Parábolas verticales con punto mínimo, que pasan por $(0,0)$ y $(-5,0)$.

64) Parábolas verticales con punto máximo, que pasan por $(3,2)$ y $(5,2)$.

65) Parábolas verticales con punto mínimo, que pasan por $(4,3)$ y $(-1,3)$.

66) Parábolas verticales con vértice en $3x-y=0$.

67) Parábolas verticales con punto mínimo y vértice en $3x-y=0$.

68) Parábolas verticales con punto máximo y vértice en $y-x^2=0$.

69) Parábolas horizontales con vértice en $x^2+y^2=1$.

70) Parábolas horizontales abiertas a la izquierda y vértice en $x^2+y^2=9$.

71) Parábolas horizontales, con vértice en $x=y^2$.

72) Parábolas verticales, con vértice en $x=y^2+1$ y pasan por $(-1,4)$.

73) Parábolas verticales.

74) Parábolas vertical s con vértice en $x^3-y=0$.

75) Parábolas verticales con vértice en $x^3-y=0$ y punto máximo.

76) Parábolas verticales con vértice en $x^3-y=0$, punto máximo y pasan por $(-1,4)$.

77) Parábolas verticales con vértice en $y-x^2=3$, punto mínimo y pasan por $(2,-5)$.

78) Círculos con centro en el vértice de $y-3x^2+6x-1=0$.

79) Círculos con centro en las intersecciones de $y-2x^2+5x=0$ con $x-y=0$.

80) Rectas con pendiente igual a la de la recta que une el vértice de $y=x^2+3x-2$ con el centro de $2x^2-4x+2y^2+6y=0$.

81) Parábolas verticales con vértice en las intersecciones de $x^2+5x+y^2-3y=0$ con $x-2y+1=0$.

82) Parábolas que pasn por las intersecciones de $x^2+y^2=9$ con $x-y^2=0$.

En los siguientes problemas se dan ecuaciones de familias de curvas, indicando los parámetros. Decir que tipo de curvas denota la ecuación, y encontrar el elemento o elementos que cumplen la condicion citada en cada caso:

83) $y^2-4px=0$; $\underline{p}$; pasa por $(-2,4)$.

84) $y-4x^2-4ax+b=0$; $\underline{a,b}$; vértice en $x=3y$, pasa por $(1,2)$.

85) $y-4x^2-4ax+b=0$; $\underline{a,b}$; pasan por$(3,4)$.

86) $ax^2+b^2y=4$; $\underline{a,b}$; pasan por $(2,5)$ y vértice en $(2,3)$.

87) $ax^2+b^2y=4$; $\underline{x,y}$; pasan por $(2,5)$ y vértice en $(2,3)$.

88) $ax^2+b^2y=4$; $\underline{x,b}$; pasan por $(3,-1)$.

89) $ax^2+b^2y=4$; $\underline{a,y}$; pasan por $(2,1)$ y $(0,4)$.

90) $ax^2+b^2y=4$; $\underline{a,x,b}$, ;

PROBLEMAS
SECCION 2.8

Analice cualos son: a) coordenadas del centro,
b) coordenadas de los focos,
c) ecuaciones de los ejes,
d) longitud de los radios mayor y menor,
e) distancia del centro a un foco,

y grafique cada una de las siguientes elipses:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

3) $\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{6}=1$ 4) $\frac{(w+3)^2}{15}+\frac{(z-2)^2}{10}=1$

5) $\frac{2(x^2-6x+9)}{8}+\frac{4(y^2-2y+1)}{8}=\frac{8}{8}$ 6) $3(x^2+4x+2)+2(y^2+8y+16)=12$.

7) $2(x^2-6x)+3(y^2-2y)=2$ 8) $x^2+2y^2-8y+1=0$.

9) $3p^2-6p+q^2=3$ 10) $a^2-4a+3b^2+5b=0$.

11) $2x^2+10x+3y+y^2-5=0$ 12) $g^2+5h^2-2h+3g-5=0$.

13) $\frac{c^2}{2}+\frac{c}{3}+d^2+4-2d=1$ 14) $\frac{3f^2}{5}+\frac{2f}{3}-\frac{4k}{3}+\frac{k^2}{15}-3=0$.

15) $(3g+2k)(g+k)=5kg-8y+9k$ 16) $(r-2s)(3r-s)+7rs=3$

17) $\sqrt{7}\,t^2-t+\sqrt{10}\,u^2-3u+1=0$ 18) $y^2-3a=5y-2a^2+4$.

19) $\frac{w^2}{4}+\frac{y^2}{9}=-1$ 20) $\frac{w^2}{-16}+\frac{x^2}{25}=1$

Para cada uno de los siguientes problemas, trazar la gráfica aproximada y dar la ecuación de la elipse que cumple la condición indicada (r_v = radio vertical ; r_h = radio horizontal ; c = dist. centro a foco) :

21) Centro en el origen, $r_v=4$, $r_h=3$.

22) Centro en el origen, $r_v=1$, $r_h=3$.

23) Centro en $(-2,3)$, $r_v=4$, $r_h=10$.

24) Centro en $(-3,-1)$, $r_v=2$, $r_h=3$.

25) Centro en $(4,5)$, $r_v=4$, $c=3$, y es vertical.

26) Centro en $(-1,6)$, $r_h=8$, $c=2$, y es horizontal.

27) Centro en $(3,2)$, $r_v=3$, pasa por $(4,1)$.

28) Centro en $(1/2,4/3)$, $r_h=2$, pasa por $(2,1/2)$.

29) Centro en $(1,2)$, $c=3$, $r_h=1$.

30) Centro en $(-1,2)$, $c=4$, $r_v=2$.

31) Centro en $(3,3)$, $c=3$, $r_h=5$, y es horizontal.

32) Centro en $(-3,2)$, $c=5$, $r_v=6$, y es horizontal.

33) $r_h = 2$, $r_v = 1$, y pasa por $(0,0)$ y $(0,-2)$.
34) $r_h = 6$, $r_v = 4$, y pasa por $(0,0)$ y $(0,-2)$.
35) $r_h = 6$, $r_v = 4$, y pasa por $(0,0)$ y $(-2,0)$.
36) Focos en $(2,4)$ y $(2,-2)$, $r_h = 2$.
37) Focos en $(3,-6)$ y $(5,-6)$, $r_v = 1$.
38) Focos en $(3,-3)$ y $(-1,-3)$, $r_v = 3/2$.
39) Focos en $(6,-1)$ y $(6,-9)$, $r_h = 4$.
40) Focos en $(1,3)$ y $(1,3)$, $r_h = 3$.
41) Centro en $y = x$, $c = 2$, y pasa por $(0,3)$ y $(0,1)$.
42) Centro en $y - x^2 = 0$, $c = 1$, y pasa por $(-1,0)$ y $(3,0)$.
43) Focos en la línea $x = 2$ separados 4 unidades , $r_h = 1$.
44) Puntos máximo y mínimo en $(0,\pm 6)$, y focos en $(0,\pm 4)$.
45) Los puntos mas a la izquierda y a la derecha son $(\pm 5,0)$, focos $(\pm 1,0)$.
46) Centro en el origen, un foco en $(-4,0)$, $r_v = 2$.
47) Centro en $(2,2)$, un foco en $(7,2)$, $r_v = 3$.
48) Centro en $(-1,3)$, un foco en $(-1,-3)$, $r_h = 4$.
49) Los focos en $(1,\pm 3)$, el eje mayor mide 12.
50) Los focos en $(\pm 4,6)$, el eje menor mide 5 .

Para cada problema, encontrar la ecuación de las familias de curvas que satisfacen la condición dada, y trazar la gráfica aproximada de algunos de sus elementos:

51) Elipses con centro en el origen.
52) Elipses verticales con centro en el origen.
53) Elipses con $r_h = 3$, y $r_v = 2$.
54) Elipses con centro en $y - 2x = 0$, tangentes a $x = 2$ y $x = 8$.
55) Elipses con centro en $y^2 - x = 0$, tangentes a $y = 2$ y $y = -2$.
56) Elipses con focos en $x = 3$ y $r_h = 2$.
57) Elipses con focos en $y = -1$ y $r_v = 3$.
58) Elipses con centro en $x^2 + y^2 = 1$, y con el eje mayor doble del menor.
59) Elipses verticales con un foco en $x - 2y = 0$, $c = 1$, $r_h = 1$.
60) Elipses horizontales con un foco en $x^2 - y = 0$, $c = 2$, $r_v = 2$.
61) Elipses verticales con punto máximo en $y = 10$, punto mínimo en $y = 3$.
62) Elipses cuyos puntos máximo y mínimo, coinciden con los de $x^2 + y^2 = 25$.
63) Elipses con $r_h = 1$, $r_v = 3$ y centro en $2x - 5y + 1 = 0$.
64) Elipses con centro en el origen, contenidas dentro de $x^2 + y^2 = 36$.
65) Elipses con centro en el origen que contienen a $x^2 + y^2 = 1$.
66) Elipses con foco en las intersecciones de $x^2 + y^2 = 4$ con $y = 1$.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de cada par de ecuaciones:

67) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, $x^2 + y^2 = 2.25$

68) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

69) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y - x^2 = 0$

70) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, $x - 2y^2 = 0$.

Encontrar los puntos de intersección de la elipse $x^2 + 3y^2 - 6x = 0$ con cada una de las siguientes curvas:

71) $x - 2y = 0$
72) $x - y + 20 = 0$
73) $x^2 + y^2 = 1$
74) $y - 3x^2 = 0$.
75) $x^2 + y^2 = 100$
76) $y - 10 = x^2$
77) $3x^2 + y^2 - 18x = 0$
78) $x^2 + 2y^2 - 40 = 0$.

Dada la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ y la familia de rectas $ax - y + 3 = 0$, encontrar

79) Los puntos de intersección.
80) El elemento de la familia que intersecta a la elipse en el punto de abscisa 0.
81) El elemento de la familia que intersecta a la elipse en el punto de ordenada 1/2.
82) El elemento de la familia que es tangente a la elipse. (Sugestión: para que sea tangente, las dos intersecciones de la recta y la elipse deben coincidir).

---

83) Encuentre las coordenadas de los focos de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Encuentre también un punto de la elipse con abscisa 2 , y otro punto con ordenada 1. Calcule las distancias de tales puntos a los focos, y compruebe que para ellos, la suma de sus distancias a los focos no cambia, y es igual al eje mayor.

84) De la familia de elipses $x^2 + ax + 2y^2 - b = 0$, determinar aquella que pasa por el origen y por $(1,1)$.
85) De la familia de elipses $x^2 - bx - dy + 3y^2 = 0$, encontrar aquella que es tangente a la línea $y = 2x$.
86) De la familia del problema anterior, determinar aquella elipse que tiene su centro en $y - 3x = 0$ y que pasa por el origen.
87) De la misma familia determinar aquella elipse que tiene su centro en el punto de intersección de $y - x^3 - x = 0$, con el eje X .

SECCION 2.9
PROBLEMAS.

Analice cuales son: a) las coordenadas del centro,
b) las coordenadas de los focos,
c) las coordenadas de los vértices,
d) ecuaciones de los ejes de simetría
e) ecuaciones de las asíntotas,

y grafique cada una de las siguientes hipérbolas :

1) $\frac{w^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ 2) $\frac{(w-1)^2}{25} - \frac{(z+2)^2}{16} = 1$

3) $\frac{w^2}{5} - \frac{a^2}{6} = 1$ 4) $\frac{(w+3)^2}{15} - \frac{(b-2)^2}{10} = 1$

5) $\frac{2(x^2-6x+9)}{8} - \frac{4(y^2-2y+1)}{8} = \frac{8}{8}$ 6) $3(x^2+4x+4) - 2(y^2+8y+16) = 12$

7) $2(p^2-6p) - 3(q^2+4q) = 2$ 8) $a^2 - 2b^2 + b - 1 = 0$

9) $3g^2 - 6g - h^2 = 3$ 10) $k^2 - 4k - 3m^2 - 5m = 0.$

11) $2u^2 + 10u - 3v - v^2 + 5 = 0$ 12) $-s^2 + 5t^2 - 2t - 3s + 5 = 0$

13) $-mn - 8m + 9n = (3m+2n)(m-n)$ 14) $(g-2s)(3g+s) + 5gs = 0$

15) $\frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} - z^2 + 1 + 2z = 1$ 16) $\frac{5x^2}{3} + \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} - \frac{y^2}{15} + 1 = 0$

17) $3w^2 - 6w + 2y - 5y^2 + 3 = 0$ 18) $2a - 6b + 3b^2 - 5a^2 - 3 = 0$

19) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 20) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = -1$

En cada uno de los siguientes problemas, trazar la gráfica aproximada, y dar la ecuación de la hipérbola que cumple la condición indicada (m = pendiente de asíntota) :

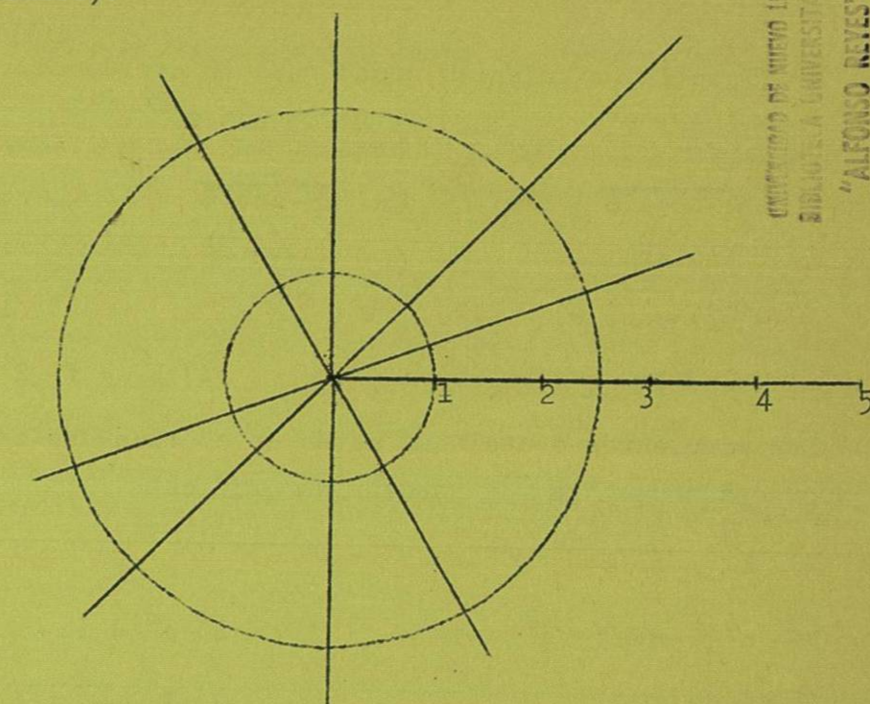
21) Centro en el origen, vértices en $(\pm 3,0)$, $m = \pm 1$.
22) Centro en el origen, vértices en $(0,\pm 2)$, $m = \pm 2$.
23) Centro en $(-1,4)$, vértices en $(-1,6)$ y $(-1,2)$, $m = \pm(1/3)$
24) Centro en $(2,-5)$, vértices en $(2\pm\sqrt{3},-5)$, $m = \pm\sqrt{3}$.
25) Centro en $(\pi,\sqrt{3})$, vértices en $(\pi,\sqrt{3}\pm\sqrt{5})$, $m = \pm\sqrt{7}$.
26) Centro en $(4,-\pi)$, vértices a 3 unidades del centro, horizontalmente, la pendiente de las asíntotas es -2 y 2 .
27) Las asíntotas son $y = \pm 3x + 6$, la distancia entre los vértices es 4, y es vertical.
28) Las asíntotas son $2y \pm 4x - 5 = 0$, la distancia entre los vértices es 6, y es horizontal.
29) Centro en $(2,5)$, pasa por $(2,-1)$ y por $(7,5)$.
30) Centro en $(-1,-6)$, pasa por $(2,-3)$ y por el origen.

PROBLEMAS
SECCION 2.10

1) Si la carátula de un reloj de diámetro 6 , se coloca con el centro en el polo de un plano, y con el número 3 del reloj sobre el eje polar, dar las coordenadas polares de los 12 números del reloj (grados y radianes).

2) Una escala real se coloca con el cero sobre el polo, y a un ángulo de -30° de ella al eje polar. Dar coordenadas polares de los puntos enteros de la escala real. (Grados y radianes).

3) Dar las coordenadas polares de los puntos de intersección de las rectas y círculos que aparecen en la gráfica de la derecha :



4) Para cada uno de los siguientes puntos, dar cuatro coordenadas polares más con radio positivo, y cuatro con radio negativo, además de graficarlos :

a) $(2,-15^\circ)$ b) $(-3,10^\circ)$ c) $(4,30^\circ)$ d) $(-1,-80^\circ)$
e) $(3,30^\circ)$ f) $(-3,30^\circ)$ g) $(3,-30^\circ)$ h) $(-3,-30^\circ)$
i) $(6,\frac{\pi}{3})$ j) $(4,1)$ k) $(\frac{8}{3},\frac{1}{2})$ m) $(\pi,-\pi)$
n) $(2,9569^\circ)$ ñ) $(4,\frac{89\pi}{3})$ p) $(-2,-\frac{576\pi}{5})$ q) $(-3,-1111^\circ)$.

5) Cambiar las siguientes coordenadas cartesianas a polares :

a) $(1,0)$ b) $(0,1)$ c) $(-1,0)$ d) $(0,-1)$
e) $(1,\sqrt{3})$ f) $(1,-\sqrt{3})$ g) $(-1,\sqrt{3})$ h) $(-1,-\sqrt{3})$
i) $(0.866 , -0.5)$ j) $(-0.866 , 0.5)$ k) $(-0.866 , -0.5)$ m) $(0.866 , 0.5)$
n) $(1,1)$ ñ) $(-1,1)$ p) $(1,-1)$ q) $(-1,-1)$
r) $(1,2)$ s) $(-0.6 , \sqrt{2})$ t) $(\frac{1}{3}, -\pi)$ u) $(-\frac{4}{5}, -2\pi)$.
v) $(-3 , 4)$ w) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{7})$ x) $(2\sqrt{5} , -3)$ y) $(0,0)$

6) Cambiar las siguientes coordenadas polares a cartesianas:

a) $(3,\pi)$ b) $(3,-\pi)$ c) $(-3,\pi)$ d) $(-3,-\pi)$

e) $(1,-\frac{\pi}{3})$ f) $(1,\frac{\pi}{3})$ g) $(-1,\frac{\pi}{3})$ h) $(-1,-\frac{\pi}{3})$

i) $(2,2)$ j) $(-3,1)$ k) $(-1,0.7)$ m) $(-2,-0.5)$

n) $(-2,\sqrt{2})$ ñ) $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ p) (π,π) q) $(-\pi,\frac{\pi}{4})$

r) $(1.66, 35^\circ)$ s) $(-1.5, -185^\circ)$ t) $(-10,53)$ u) $(2,812)$

PROBLEMAS

SECCION 2.11

A.- Grafique las siguientes ecuaciones en coordenadas polares:

1) $\rho = 2\cos\theta$ 2) $\rho = 0.5\,\mathrm{sen}\,\theta$ 3) $\rho = -\cos\theta$

4) $\rho = \frac{1}{1-\cos\theta}$ 5) $\rho = \frac{2}{2-\cos\theta}$ 6) $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$

7) $\rho = \mathrm{sen}\,2\theta$ 8) $\rho = 2\cos 3\theta$ 9) $\rho = \mathrm{sen}\,3\theta$

10) $\rho = 3(1-\cos\theta)$ 11) $\rho\theta = 1$ 12) $\rho = \theta$

13) $w = 2k - 1$; $\underline{k}$ ángulo. 14) $h^2 = f + 2$; $\underline{f}$ ángulo.

B.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas cartesianas. Transformar a coordenadas polares, y esbozar su gráfica:

1) $(x^2+y^2)^2 + 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$

2) $(w^2+h^2)^2 = w^2 + h^2$ 4) $a^2 = 4b + 4$

3) $\sqrt{3}\,x + y = 2$ 5) $m^2 + k^2 - 2k = 0$.

C.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas polares, transformarlas a coordenadas cartesianas, y esbozar su gráfica:

1) $\rho = 6\,\mathrm{sen}\,\theta$ 2) $\rho = 2\cos\theta$ 3) $\rho = \mathrm{sen}\,2\theta$ 4) $\rho^2 = 2\cos 2\theta$

5) $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$ 6) $\rho = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$.

PROBLEMAS

SECCION 2.12

Graficar la siguientes ecuaciones paramétricas ($\underline{\lambda}$ es el parámetro):

1) $x = 2\cos\lambda$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,\lambda$ 2) $m = 3\cos\lambda$, $g = \mathrm{sen}\,\lambda$ 3) $h = 2\cos\lambda$, $u = 4\,\mathrm{sen}\,\lambda$

4) $x = -6\,\mathrm{sen}\,\lambda$, $r = 2\cos\lambda$ 5) $x = 4\lambda^{-2}$, $k = 4\lambda^{-1}$ 6) $a = \cos^3\lambda$, $b = \mathrm{sen}^3\lambda$

7) $w = \lambda$, $y = (1+\lambda^2)^{-1}$ 8) $p = \lambda - \mathrm{sen}\,\lambda$, $r = 1 - \cos\lambda$ 9) $s = \lambda - 1$, $t = \lambda^3$

Capítulo III

FUNCIONES Y DERIVADAS

3.1 Funciones.

Ya sabemos como formar parejas de números a partir de una ecuación en dos letras. Ahora veremos a estas parejas desde un nuevo punto de vista, para formar el concepto de función.

Podemos considerar que una pareja como $(3,-2)$, al número $\underline{3}$ le asigna el número $\underline{-2}$, y bajo esta consideración escribimos el par en la forma $3 \longrightarrow -2$ (léase: a $\underline{3}$ le asigna -2).

Si tenemos un conjunto de parejas, como el de las soluciones de $a = b^2 - 1$, el conjunto nos dá una regla para que a cada número le asignemos otro número, pues usando los pares: a cada primer número del par, le asignamos el segundo. Por ejemplo:

$3 \longrightarrow 8$		$(3,8)$	
$-1 \longrightarrow 0$	ya que	$(-1,0)$	son soluciones de $a = b^2 - 1$.
$-2 \longrightarrow 3$		$(-2,3)$	
etc.		etc.	

Entonces llamamos función a: la regla que a cada número le asigna otro número. La función queda constituída por el conjunto de pares que dicen la manera de asignar, y que escribimos en la forma $b \longrightarrow a$.

Así, la regla que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, es una función. Esta función a cada número asigna otro, de la siguiente manera:

$0 \longrightarrow 0^2 - 1 = -1$

$1 \longrightarrow 1^2 - 1 = 0$

$2 \longrightarrow 2^2 - 1 = 3$

$3 \longrightarrow 3^2 - 1 = 8$

etc.

es decir, que la función está formada por los pares: $0 \longrightarrow -1$, $1 \longrightarrow 0$, $2 \longrightarrow 3$, $3 \longrightarrow 8$ etc.