6) Cambiar las siguientes coordenadas polares a cartesianas :

a) $(3,\pi)$ b) $(3,-\pi)$ c) $(-3,\pi)$ d) $(-3,-\pi)$

e) $(1, -\frac{\pi}{3})$ f) $(1, \frac{\pi}{3})$ g) $(-1, \frac{\pi}{3})$ h) $(-1, -\frac{\pi}{3})$

i) $(2,2)$ j) $(-3,1)$ k) $(-1,0.7)$ m) $(-2, -0.5)$

n) $(-2, \sqrt{2})$ ñ) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ p) (π,π) q) $(-\pi, \frac{\pi}{4})$

r) $(1.66, 35^{\circ})$ s) $(-1.5, -185^{\circ})$ t) $(-10,53)$ u) $(2,812)$

PROBLEMAS

SECCION 2.11

A.- Grafique las siguientes ecuaciones en coordenadas polares :

1) $\rho = 2\cos\theta$ 2) $\rho = 0.5 \operatorname{sen}\theta$ 3) $\rho = -\cos\theta$

4) $\rho = \frac{1}{1-\cos\theta}$ 5) $\rho = \frac{2}{2-\cos\theta}$ 6) $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$

7) $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$ 8) $\rho = 2\cos 3\theta$ 9) $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$

10) $\rho = 3(1-\cos\theta)$ 11) $\rho\theta = 1$ 12) $\rho = \theta$

13) $w = 2k - 1$; $\underline{k}$ ángulo. 14) $h^2 = f + 2$; $\underline{f}$ ángulo.

B.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas cartesianas. Transformar a coordenadas polares, y esbozar su gráfica :

1) $(x^2+y^2)^2 + 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$

2) $(w^2+h^2)^2 = w^2 + h^2$ 4) $a^2 = 4b + 4$

3) $\sqrt{3}\,x + y = 2$ 5) $m^2 + k^2 - 2k = 0$.

C.- Las siguientes ecuaciones están en coordenadas polares, transformarlas a coordenadas cartesianas, y esbozar su gráfica :

1) $\rho = 6\operatorname{sen}\theta$ 2) $\rho = 2\cos\theta$ 3) $\rho = \operatorname{sen}2\theta$ 4) $\rho^2 = 2\cos 2\theta$

5) $\rho = \frac{1}{1-2\cos\theta}$ 6) $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

PROBLEMAS

SECCION 2.12

Graficar la siguientes ecuaciones paramétricas ($\underline{\lambda}$ es el parámetro) :

1) $x = 2\cos\lambda$, $y = 2\operatorname{sen}\lambda$ 2) $m = 3\cos\lambda$, $g = \operatorname{sen}\lambda$ 3) $h = 2\cos\lambda$, $u = 4\operatorname{sen}\lambda$

4) $x = -6\operatorname{sen}\lambda$, $r = 2\cos\lambda$ 5) $x = 4\lambda^{-2}$, $k = 4\lambda^{-1}$ 6) $a = \cos^3\lambda$, $b = \operatorname{sen}^3\lambda$

7) $w = \lambda$, $y = (1+\lambda^2)^{-1}$ 8) $p = \lambda - \operatorname{sen}\lambda$, $r = 1 - \cos\lambda$ 9) $s = \lambda - 1$, $t = \lambda^3$

Capítulo III

FUNCIONES Y DERIVADAS

3.1 Funciones.

Ya sabemos como formar parejas de números a partir de una ecuación en dos letras. Ahora veremos a estas parejas desde un nuevo punto de vista, para formar el concepto de función.

Podemos considerar que una pareja como $(3,-2)$, al número $\underline{3}$ le asigna el número $\underline{-2}$, y bajo esta consideración escribimos el par en la forma $3 \longrightarrow -2$ (léase : a $\underline{3}$ le asigna -2).

Si tenemos un conjunto de parejas, como el de las soluciones de $a = b^2 - 1$, el conjunto nos dá una regla para que a cada número le asignemos otro número, pues usando los pares : a cada primer número del par, le asignamos el segundo. Por ejemplo :

$3 \longrightarrow 8$		$(3,8)$	
$-1 \longrightarrow 0$	ya que	$(-1,0)$	son soluciones de $a = b^2 - 1$.
$-2 \longrightarrow 3$		$(-2,3)$	
etc.		etc.	

Entonces llamamos función a : la regla que a cada número le asigna otro número. La función queda constituída por el conjunto de pares que dicen la manera de asignar, y que escribimos en la forma $b \longrightarrow a$.

Así, la regla que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, es una función. Esta función a cada número asigna otro, de la siguiente manera:

$0 \longrightarrow 0^2 - 1 = -1$

$1 \longrightarrow 1^2 - 1 = 0$

$2 \longrightarrow 2^2 - 1 = 3$

$3 \longrightarrow 3^2 - 1 = 8$

etc.

es decir, que la función está formada por los pares : $0 \longrightarrow -1$

$1 \longrightarrow 0$

$2 \longrightarrow 3$

$3 \longrightarrow 8$ etc.

Las funciones no sólo pueden ser con números. Por ejemplo, la regla que a cada país le asigna su capital, es también una función. Algunos de sus pares son :

México $\longrightarrow$ México
Francia $\longrightarrow$ París
Cuba $\longrightarrow$ La Habana
Uruguay $\longrightarrow$ Montevideo
etc.

Ejerc. 1.-Dé otras cinco funciones, escribiendo para cada una, 6 de sus pares.

Las funciones nacen de una manera natural al considerar relaciones entre cantidades físicas. Es por ésto que su estudio es básico para la Física y la Ingeniería. Todas las relaciones se expresan con el concepto de función, y a continuación damos dos ejemplos de ello :

1) Al considerar la relación entre la hora del día y la temperatura ambiente, tenemos que para cada hora, el termómetro marca cierta temperatura. Entonces podemos formar la función que a cada hora le asigna la temperatura ambiente de esa hora.

Ejerc. 2.-Dar tres parejas de la función anterior.

2) Al considerar la relación entre presión y volumen de un gas, a cada presión le corresponde cierto volumen. Entonces formamos la función que a cada presión le asigna el volumen correspondiente.

Ejerc. 3.-Dar tres parejas de la función anterior.

Hay que fijarse que en la relación descrita, no nos interesa solo una presión y su correspondiente volumen, sino todas las presiones con sus correspondientes volúmenes. Igualmente hay que fijarse que la función no consta de un solo par, sino de todo un conjunto de pares.

Ahora introducimos la necesaria notación y nomenclatura para poder referirnos a las funciones. Dada una función, como la que a cada número le asigna su cuadrado menos uno, al primer número de un par lo llamamos valor y lo denotamos genéricamente con una letra, como z . Luego en este caso, z denota cualquier número real. Al segundo número de un par, lo llamamos contravalor . Para encontrar el contravalor correspondiente al valor z , notamos que hay que elevarlo al cuadrado y restarle uno. Luego el contravalor es $z^2 - 1$ y tenemos que la función a : $z \longrightarrow z^2 - 1$.

Llamamos a $z^2 - 1$ variable dependiente . Variable porque su valor cambia, y dependiente porque su valor depende del valor que se le dé a z.

El par con flecha : $z \longrightarrow z^2 - 1$ determina la función, pues todos los pares de la función se pueden obtener por sustitución de z , como se muestra en la fig. 3.1 :

Función que a cada número le asigna su cuadrado menos uno. Denotada por: $z \longrightarrow z^2 - 1$	valores $\longrightarrow$ contravalores	variable independiente	variable dependiente
	$z \longrightarrow z^2 - 1$	z	$z^2 - 1$
	$0 \longrightarrow -1$		
	$1 \longrightarrow 0$		
	$2 \longrightarrow 3$		
	$3 \longrightarrow 8$		
	etc.		

Fig. 3.1.- Nomenclatura de Funciones.

Para la función que a cada país le asigna su capital, sus valores son países, sus contravalores son capitales. Usando "país" como variable independiente, la función queda denotada por la pareja :

país $\longrightarrow$ capital del país .

Ejerc. 4.- Denote a las siguientes funciones por pares con flecha, diciendo cual es la variable independiente y cual es la variable dependiente

a) A cada número le asigna el doble de ese número.
b) A cada número le asigna el cubo de ese número entre 3.
c) A cada número le asigna el recíproco de ese número.
d) A cada número le asigna el logaritmo de ese número.
e) A cada número le asigna el número 2.
f) A cada número le asigna el mismo número.

Ya denotamos las funciones por pares con flecha, ahora veremos otras dos notaciones mas cortas y manipulativas que son las que siempre se usan.

A) En el par $x \longrightarrow x^2 - 1$, si suprimimos x y la flecha, nos queda $x^2 - 1$. Esta expresión algebraica basta para determinar la función de que se trata, pues para cada valor de x nos dá su contravalor $x^2 - 1$. Luego, usamos la expresión $x^2 - 1$ para denotar la función $x \longrightarrow x^2 - 1$. En general, cualquier expresión algebraica, como $\frac{z+1}{z}$, puede conside rarse que denota una función : la que a $z \longrightarrow \frac{z+1}{z}$. Para indicar nuestra intención de considerarla como función, decimos que <u>z</u> es la variable independiente. Naturalmente $\frac{z+1}{z}$ queda como la variable dependiente.

B) Si denotamos el contravalor $x^2 - 1$ con una sola letra como <u>y</u>, entonces escribimos la ecuación $y = x^2 - 1$. Con esta ecuación también podemos determinar la función $x^2 - 1$, pues los pares de soluciones (x,y) de la ecuación, son las parejas $x \longrightarrow y$ de la función. En general, cualquier ecuación, como $w = \frac{z+1}{z}$, determina una función : la que a $z \longrightarrow \frac{z+1}{z}$. Para indicar nuestra intención, decimos que <u>z</u> es la variable independiente, y que <u>w</u> es la variable dependiente.

Ejerc. 5.- Dada una función en una forma, ponerla en las otras dos :

a) $x^3 - 3$	b) $z \longrightarrow \frac{z^2+4}{2}$
c) $y = m - 4$	d) $a = \frac{1}{b-1}$
e) $\frac{1}{x}$	f) sen k

Para referirnos a las funciones en general, usamos las siguientes notaciones. Usando la <u>z</u> como variable independiente y la <u>w</u> como dependiente, denotamos funciones genéricamente con : $z \longrightarrow w$.

Naturalmente, si nos dán un valor de <u>z</u> como <u>5</u>, del símbolo $z \longrightarrow w$ no podemos obtener el contravalor correspondiente, ya que no dice nada específico acerca de la función, excepto que <u>z</u> es la variable independiente, y <u>w</u> es la variable dependiente.

Introducimos el símbolo $w(z)$ para indicar que <u>w</u> depende de <u>z</u> , pues la letra <u>w</u> por sí sola nó lo sugiere.

$w(z)$ <u>no denota</u> el producto de <u>w</u> por <u>z</u> . La idea de encerrar <u>z</u> en un paréntesis y ponerlo pegado a <u>w</u> , es sugerir que <u>w</u> representa una expresión en que ocurre <u>z</u> . $w(z)$ denota esa expresión o contravalor en la que ocurre <u>z</u> , y como ya es costumbre, también denota a la función.

Entonces, las notaciones para la función genérica son :

1) $z \longrightarrow w$
2) $w(z)$
3) $w = w(z)$

Las tres primeras notaciones indican que <u>z</u> es la variable independiente, y <u>w</u> la variable dependiente.

4) w

La 4a. notación indica que <u>w</u> es variable dependiente.

Si sustituímos la <u>z</u> que ocurre en $w(z)$ por valores como -1, 0, π, $a+b$, obtenemos $w(-1)$, $w(0)$, $w(\pi)$, $w(a+b)$, que denotan respectivamente los contravalores correspondientes a -1, 0, π, $a+b$. La <u>w</u> que ocurre en $w(z)$ no se puede sustituír por contravalores, sólo está para indicar cual es la variable dependiente. Pero si de antemano ya sabemos cual es la variable dependiente, hay la costumbre de usar otra letra como f, g , h, etc. Así, escribimos $w = f(z)$ (léase : <u>w</u> igual a una función de <u>z</u>), pues ya sabemos que <u>w</u> es la variable dependiente por su posición como letra a la izquierda del igual.

Ejerc. 6.- Si $a(b) = b^3 - 4b + 1$, entonces $a(2) = 2^3 - 4\times2 + 1$.
Obtener $a(0)$, $a(2.5)$, $a(-3)$, $a(\sqrt[3]{5})$, $a(b^2)$.

3.2 <u>Gráfica de Funciones</u>.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, para graficar cualquier función, como $s = s(t)$, asociamos la variable independiente <u>t</u> con las abscisas y la dependiente <u>s</u> con las ordenadas (por costumbre, siempre se asocia la variable independiente con las abscisas). La gráfica de la función es la gráfica de la ecuación $s = s(t)$, es decir, es el conjunto de puntos (t,s) que son soluciones de la ecuación. Por ejemplo, la gráfica de la función $s(t) = 2t + 6$, es la gráfica de una ecuación lineal, donde <u>t</u> es la abscisa y <u>s</u> es la ordenada. Para graficarla, como ya sabemos, basta trazar dos puntos de la recta y unirlos.

Ejerc. 1.- Los puntos $(3,4)$, $(-1,0)$ $(0,-6)$ ¿son puntos de $s(t) = 2t + 6$?.

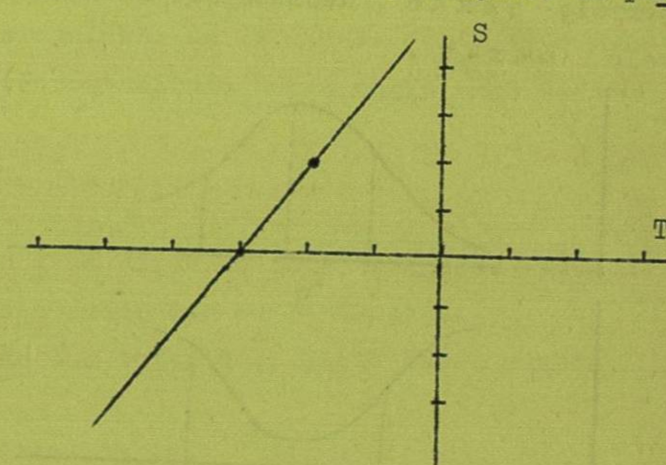

Fig. 3.1.- Gráfica de $s(t) = 2t + 6$.

En la sección 2.5 definimos varias propiedades de las curvas, por ejemplo, creciente, decreciente, máximos, asíntotas, etc.. Ahora definimos analíticamente estas propiedades para las funciones, correspondiendo en su gráfica a las definiciones ya dadas.

Dada una función cualquiera:

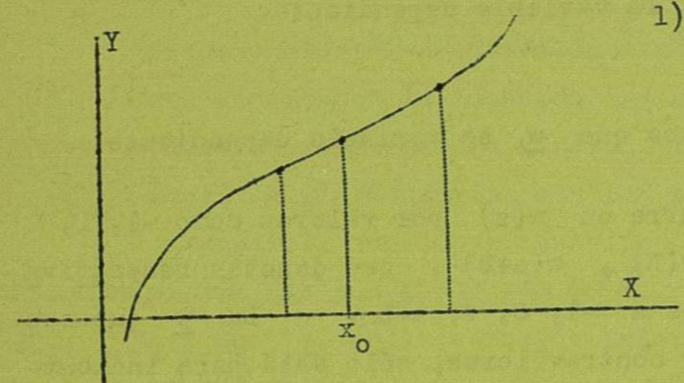

Fig. 3.2.-Curva creciente para $x = x_o$

1) Decimos que la función $y(x)$ es <u>creciente para $x=x_o$</u> cuando para cualquier valor <u>x</u> suficientemente cerca de <u>x_o</u> tenemos

$y(x) < y(x_o)$ para $x < x_o$

$y(x) > y(x_o)$ para $x > x_o$

es decir, cuando aumentamos x_o, aumenta $y(x)$, y cuando disminuímos x_o, disminuye $y(x)$.

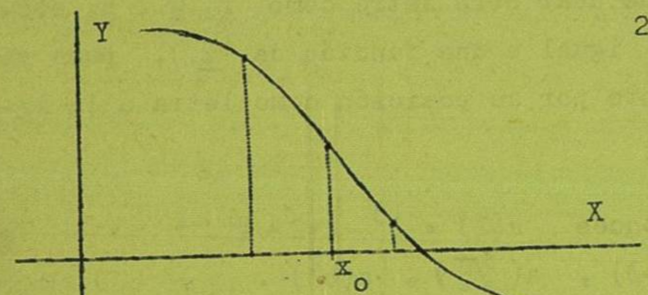

Fig. 3.3.-Curva decreciente para $x=x_o$

2) Decimos que la función $y(x)$ es <u>decreciente para $x=x_o$</u> cuando para cualquier valor <u>x</u> suficientemente cerca de x_o tenemos

$y(x) > y(x_o)$ para $x < x_o$

$y(x) < y(x_o)$ para $x > x_o$

Por ejemplo, la función $y = x^3 - 3x^2 + 1$ es creciente para $x = 3$ pues si disminuímos <u>x</u> a 2.9, tenemos $y(2.9) < y(3)$, y si aumentamos <u>x</u> a 3.1, tenemos que $y(3.1) > y(3)$. (Compruébelo; calcule $y(2.8)$, $y(0)$, $y(4)$, y compárelo con $y(3)$).

En el caso de que la función sea creciente para todos los puntos del intervalo $a < x < b$, decimos que la función <u>crece monótonamente</u> en el intervalo $a < x < b$.

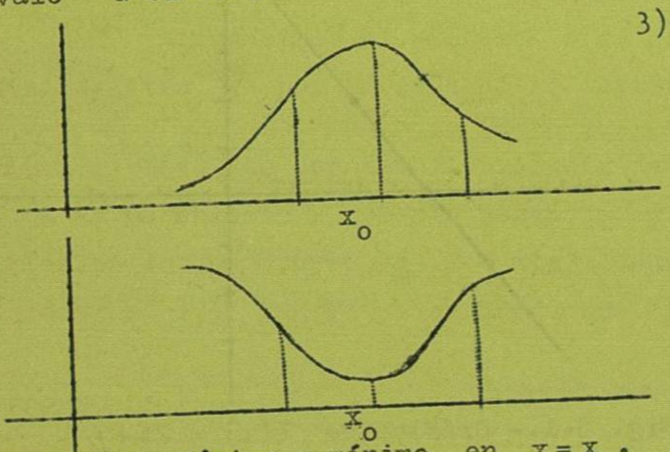

Fig. 3.4.-Máximo y mínimo en $x = x_o$.

3) Decimos que la función $y(x)$ tiene un <u>máximo relativo en $x = x_o$</u>, cuando para cualquier valor <u>x</u> suficientemente próximo a x_o tenemos

$y(x) < y(x_o)$

y tiene un <u>mínimo relativo en $x = x_o$</u> cuando $y(x) > y(x_o)$.

Por ejemplo, la función $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$, pues si disminuímos <u>x</u> a 1.9 tenemos $y(1.9) > y(2)$, y si aumentamos <u>x</u> a 2.1, tenemos $y(2.1) > y(2)$. (Compruébelo).

4) Decimos que la función $y(x)$ está definida para el intervalo $a \leq x \leq b$, cuando todos los números del intervalo son valores del dominio de $y(x)$.

Ejemplos:

a) La función $u = 3v^4 + 1$ está definida para cualquier <u>v</u>, pues a cualquier valor de <u>v</u> le asigna cierto número.

b) La función $y = \sqrt{x^2 - 1}$ no está definida para el intervalo $-1 < x < 1$, pues en ese intervalo $x^2 - 1 < 0$ y no se puede obtener la raíz cuadrada.

c) La función $z = \frac{x^2 + 1}{x-1}$ está definida para cualquier valor de <u>x</u>, excepto para $x = 1$. Entonces decimos que $x = 1$ es una <u>abscisa singular</u> de la función, y la recta $x = 1$ es una asíntota de su gráfica, como veremos.

Para encontrar las propiedades de una función, a menudo resulta útil graficarla. Si conocemos la forma general de la curva, trazarla es muy fácil como vimos en el capítulo anterior. Pero solo conocemos hasta ahora unas cuantas formas: rectas, círculos, parábolas, elipses, e hipérbolas, por lo que relativamente pocas funciones podemos graficar siguiendo tal método. Para la mayoría de los casos tenemos que recurrir al método fundamental: el de tabulación inteligente, que damos a continuación:

Método de tabulación para graficar cualquier función $y = y(x)$.

1) Estudiar el comportamiento de la función para abscisas muy a la derecha y muy a la izquierda, es decir, para valores grandes, positivos y negativos de <u>x</u>.

2) Si la función tiene un cociente, averiguar para que valores es cero el denominador, pues nos dá abscisa singulares de la curva. Para cada abscisa singular tenemos que estudiar el comportamiento de la curva a la derecha e izquierda de esas abscisas.

3) Averiguar donde corta la curva los ejes.

4) Averiguar para que valores de <u>x</u> la curva no está definida. Esto usualmente sucede cuando ocurren raíces cuadradas en la función.

5) Tabular otros puntos además de los obtenidos, hasta darse cuenta clara de su forma.

6) Unir los puntos obtenidos a mano limpia.

Por ejemplo, para la gráfica de $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ tenemos:

1) Para $\underline{x}$ grande positivo, como $x = 10^3$, $y = \frac{10^6+1}{10^3} \approx \frac{10^6}{10^3} = 10^3$

Para $\underline{x}$, grande negativo, como $x = -10^3$ se tiene que $y = \frac{10^6+1}{-10^3}$ $y = -10^3$.

2) La función tiene denominador, que es cero para $x = 1$ (¿porqué?), luego investigamos su comportamiento a la derecha e izquierda de $x = 1$:

Para $x = 1.1$, $y = 20$ (Obtenga estos valores de $\underline{y}$).
Para $x = 0.9$, $y = -18$

3) Para las intersecciones con el eje Y, $x = 0$, luego $y = -1$ (¿porqué?)

Para las intersecciones con el eje X, $y = 0$, luego $0 = x^2 + 1$ (¿porqué?), esta ecuación no tiene solución (¿porqué?), por lo cual no intersecta al eje X.

4) Con ésto ya obtuvimos 5 puntos dados, por donde pasa la curva. Con los tres puntos del lado izquierdo se vé claramente la forma de la curva (vea figura 3.5). Del lado derecho no es tan obvio, por lo cual tabulamos para $x = 2$, obteniendo $y = 5$ (obténgalo), lo cual basta para darnos una idea de la curva. Uniendo los puntos a mano limpia tenemos la figura 3.5

x	y
10^3	10^3
-10^3	-10^3
1.1	20
0.9	-18
0	-1
2	5

Asíntota: $x = 1$
No cruza el eje X

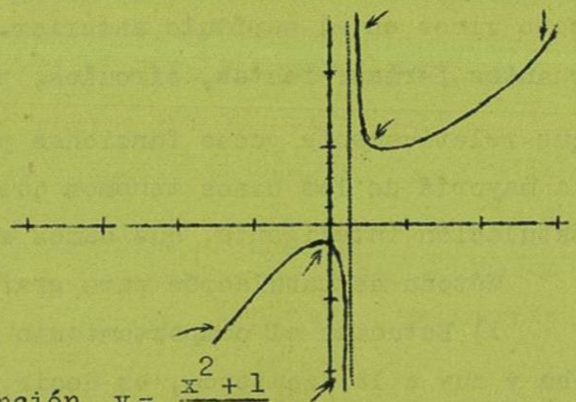

Figura 3.5.-Gráfica de la función $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

Para comprobar si los puntos interpolados a mano limpia son puntos de la gráfica, podemos tabular mas puntos y compararlos con los interpolados.(Calcule ordenada para $x = 4$, $x = -3$). Además en las siguientes secciones y capítulos iremos dando mas armas y refinamientos de este método, como eje de simetría cambio de coordenadas, derivadas de una función, etc. (Grafique $\frac{x}{x^2-1}$).

3.3 Incrementos.

Para saber cuando una función $y(x)$ es creciente en un punto (x,y) , cambiamos el valor de $\underline{x}$ y observamos el cambio de $\underline{y}$ correspondiente. Denotamos el cambio de $\underline{x}$ con el símbolo Δx (léase, delta equis), que llamamos incremento de x . Δx no representa el producto de un número Δ por x,

sino la consideramos como un solo símbolo que denota cualquier número real. Luego en lugar de Δx podemos usar una letra como $\underline{h}$, pero preferimos usar este símbolo, pues la $\underline{x}$ que ocurre en x nos sugiere que está asociada con un cambio de valor de la variable $\underline{x}$. Entonces dada la abscisa inicial $\underline{x}$, la abscisa final es $x + \Delta x$ (vea figura 3.3). Por ejemplo, para una abscisa inicial $x = 2.5$ y un incremento $\Delta x = 0.5$, tenemos para abscisa final $x=3$ (para $\Delta x = -0.5$, 0.1 , -0.01 , ¿cuál es la abscisa final?). En el caso que $\Delta x > 0$, se aumenta el valor de $\underline{x}$, y en el caso que $\Delta x < 0$, se disminuye.

Denotamos el cambio de $\underline{y}$ con el símbolo Δy (léase, delta y), que llamamos incremento de y. y denota el cambio del contravalor $\underline{y}$ correspondiente al incremento Δx del valor, es decir

$$\boxed{\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)}$$

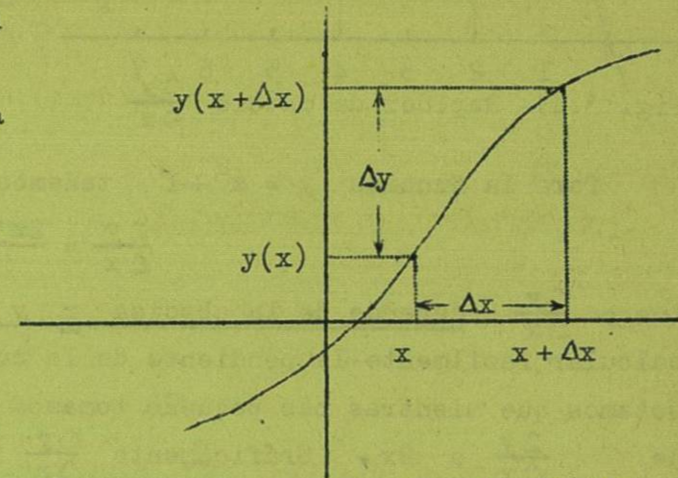

Figura 3.3.-Incrementos Δx y Δy .

Por ejemplo, para la función $y = x^2 + 1$, dada la abscisa inicial $x = 3$ y $\Delta x = 1$, se tiene que $\Delta y = y(3+1) - y(3) = 4^2 + 1 - (3^2 + 1) = 7$ (calcule Δy para $x = 4$, $\Delta x = 0.5$, -0.1); en general dada la abscisa inicial $\underline{x}$, e incremento Δx tenemos para esta función:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1 \\ \Delta y &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Luego $\underline{\Delta y \text{ depende de } x \text{ y } \Delta x}$. Con esta expresión de Δy en términos de $\underline{x}$ y $\underline{\Delta x}$, es fácil calcular el incremento de $\underline{y}$ para cualquier valor de $\underline{x}$ y Δx. Así, para $x = 4$ y $\Delta x = -0.1$ tenemos

$$\Delta y = 2(4)(-0.1) + (-0.1)^2 = -0.8 + 0.1 = -0.79$$

(calcule Δy en términos de $\underline{x}$ y $\underline{\Delta x}$ para la función $y = x^2 + x$ con esta expresión evalúe Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$, -0.1 , 0.001).

Las abscisa $\underline{x}$ y $\underline{x + \Delta x}$ determinan dos puntos sobre la gráfica, que llamamos punto inicial y punto final. Sus coordenadas son $\underline{y}$ y $\underline{y + \Delta y}$ respectivamente. La pendiente de la cuerda que une estos dos puntos es igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ según vemos en la figura 3.4, siendo la pendiente negativa si la curva decrece, y positiva si la curva crece en el intervalo. Llamamos a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, rapidez de cambio de la función en el intervalo Δx , pues nos dá una medida de lo rápido que cambia $\underline{y}$ en relación con un cambio de $\underline{x}$.

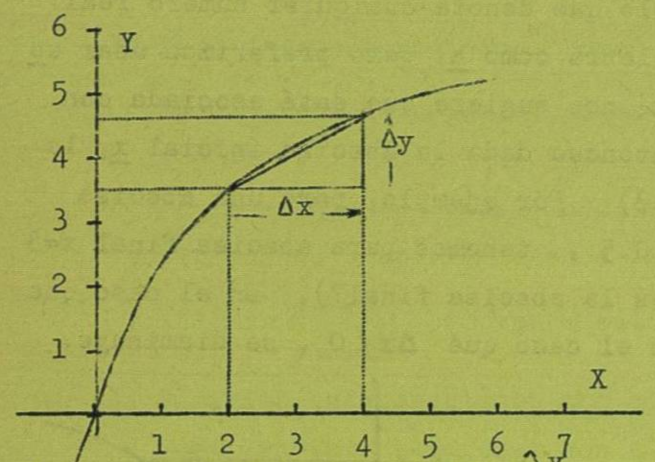

Fig. 3.4.- Rapidez de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Por ejemplo, en la fig. 3.4, para $x = 2$, el cambio de $\underline{y}$ para $\Delta x = 2$ es 1, luego $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ en el intervalo de $\underline{2}$ a $\underline{4}$. Mientras que para $x = 0$, con el mismo cambio de $\underline{x}$, $\Delta x = 2$, el cambio de $\underline{y}$ es mucho mayor: $\Delta y = 3.5$; luego $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.7$ en el intervalo de $\underline{0}$ a $\underline{2}$. (Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x = 2$ y $\Delta x = 1$, usando la gráfica).

Para la función $y = x^2 + 1$ tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Luego $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ <u>depende de la abscisa x y Δx</u>. Esta expresión nos permite calcular facilmente la pendiente de la cuerda para cualquier $\underline{x}$ y $\underline{\Delta x}$. Notamos que mientras mas pequeño tomamos $|\Delta x|$, más se aproxima el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a $2x$. Gráficamente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima a la pendiente de la curva en el punto (x,y), por lo que la pendiente de la curva en el punto (x,y), es $2x$. En la siguiente sección usamos este método para calcular la pendiente de cualquier función para cualquier abscisa.

Ejerc.- Encuentre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en términos de $\underline{x}$ y $\underline{\Delta x}$ para la función $y = x^2 + x$.

3.4 <u>Sucesiones Infinitas</u>.

Si tenemos un grupo de números reales marcados con subíndices, y estos subíndices son enteros positivos, podemos ordenar tales números en una hilera según sus subíndices, para formar lo que llamamos una <u>sucesión</u>. A los elementos así ordenados los llamamos <u>términos de la sucesión</u>. En el caso que usemos todos los enteros positivos para marcar el grupo de números, decimos -- que se trata de una <u>sucesión infinita</u>. Por ejemplo:

a) La sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ de números reales genéricos

b) La sucesión infinita $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ dada por la expresión $\frac{1}{n}$, donde $\underline{n}$ es el índice.

Ejerc.- Escriba la sucesión infinita dada por $\frac{1}{n^2}$, por $(-1)^n$, por $2n$, por n^3.

Ahora vemos la propiedad más interesante de las sucesiones (de ahora en adelante entendemos por "sucesión", únicamente sucesión infinita).

Si graficamos sobre una escala real los puntos representados por los tér-

minos de una sucesión, pueden suceder dos cosas:

a) Casi todos los puntos se acumulan sobre un solo punto.

b) Los puntos no se acumulan sobre un solo punto.

Por ejemplo: los puntos de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ se acumulan sobre el punto cero (vea la Fig. 3.5 y en ella marque los términos $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$).

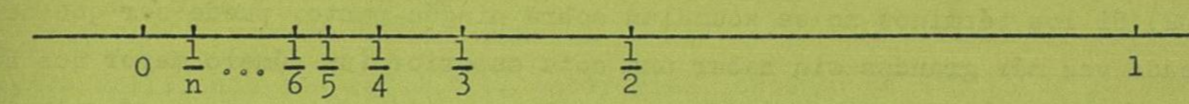

Fig. 3.5.- Sucesión Convergente.

En cambio los puntos de la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ no se acumulan so-- bre ningún punto (ver Fig. 3.6 y marcar los término 10, 100, 500, 10000).

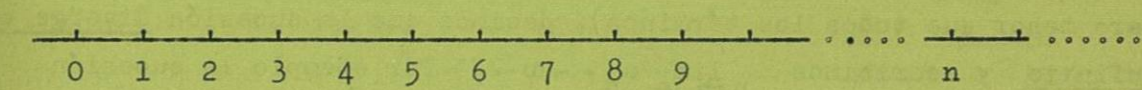

Fig. 3.6.- Sucesión no convergente.

Ejerc.- Grafique los puntos de las sucesiones $\frac{1}{n^2}$, $(-1)^n$, n^{-3}, $(-1)^n$, $\frac{1}{n}$, y diga si se acumulan sobre un punto o nó.

En el caso que los términos de la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se acumulen sobre el punto $\underline{a}$, a este punto lo llamamos: <u>límite de la sucesión</u>, y lo denotamos por:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{(léase: límite de } a_n \text{ cuando } \underline{n} \text{ tiende a infinito).}$$

En la expresión anterior:

"a_n" representa cualquier término de la sucesión.

"lim" es una abreviación de límite, y

"$n \to \infty$" ($\underline{n}$ tiende a infinito) indica que la sucesión es infinita, y para obtener su límite observamos sus términos para $\underline{n}$ cada vez mas grande.

En este caso decimos que la sucesión es <u>convergente</u> ó que <u>converge al límite "a"</u>. Por ejemplo:

a) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ converge a 0, pues sus puntos se acumulan sobre cer. Luego $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) La sucesión $1, 2, 3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ converge a 3; luego $\lim_{n \to \infty} 3 = 3$

De hecho, cualquier sucesión en que casi todos sus términos son iguales, con-- verge.

Ejerc.-¿A qué convergen las sucesiones $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$; $0, 3, 4, 4, 4, \ldots$?