En el caso que los términos de la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ no se acumulen sobre un solo punto, decimos que la sucesión no es convergente. En este caso puede suceder una de tres cosas:

1) Que los términos se acumulen sobre dos o más puntos que llamamos puntos de acumulación de la sucesión. Por ejemplo, en la sucesión dada por: $(-1)^n$, los términos se acumulan sobre -1 y sobre 1 (grafique esa sucesión y diga cuales son sus puntos de acumulación).

2) Si los términos no se acumulan sobre ningún punto, puede ser que se hagan cada vez más grandes sin haber una cota superior (un número mayor que todos los términos). Entonces decimos que la sucesión diverge a infinito y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Por ejemplo, la sucesión $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$ diverge a infinito (¿porqué?). Luego $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

3) Si los términos se hacen cada vez menores sin haber una cota inferior (un número menor que todos los términos), decimos que la sucesión diverge a menos infinito y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Por ejemplo la sucesión $-10, -20, -30, \dots, -10n, \dots$ diverge a $-\infty$ (¿porqué?). Luego

$\lim\limits_{n\to\infty} (-10\,n) = -\infty$.

Dadas dos sucesiones cualesquiera podemos definir las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, efectuando la operación con cada uno de los dos términos correspondientes. Por ejemplo, con las sucesiones $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ obtenemos las sucesiones

$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \dots,\ a_n+b_n, \dots$	Suma de las dos sucesiones.
$a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3,\ \dots,\ a_n-b_n, \dots$	Resta de las dos sucesiones.
$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ \dots,\ a_nb_n, \dots$	Producto de las dos sucesiones.
$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$	Cociente de las dos sucesiones.

Ejerc.- Sume, reste, multiplique y divida las dos sucesiones:
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ y $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Si las sucesiones $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ y $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ son convergentes, también son convergentes su suma, resta y producto, y tenemos las siguientes relaciones entre sus límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ es decir, el límite de la suma de dos sucesiones, es igual a la suma de los límites de las dos sucesiones.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (póngalo en palabras).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$ (póngalo en palabras).

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (póngalo en palabras).

Ejerc.- Utilizando las relaciones anteriores, obtenga el límite de la suma, resta, producto y cociente de las sucesiones dadas por $\frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\frac{1}{n}$.

La convergencia de la sucesión cociente es mas complicada:

a) Si el numerador converge y el denominador converge a un límite diferente de cero, entonces la sucesión cociente converge y es válida la relación 4) de arriba. Por ejemplo:

Ya que la sucesión $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$ converge a 1 (grafíquelo para combrobar), y que la sucesión $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$ converge a 2 (grafíquelo para comprobar), se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{2n-1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n}} = \frac{1}{2}$$

b) Si el denominador converge a cero, la sucesión cociente puede o nó ser convergente. Por ejemplo:

En la sucesión dada por $\dfrac{-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}$ la sucesión del denominador converge a cero y la sucesión cociente converge a cero también. (Pruébelo).

Por otra parte, si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ es una sucesión de términos positivos que converge a cero, se tiene que la sucesión cociente dada por $\frac{1}{a_n}$ diverge a $-\infty$. (De aquí obtenemos las convenciones $\frac{1}{+0} = \infty$, y $\frac{1}{-0} = -\infty$).

c) Si el denominador diverge, la sucesión cociente puede o nó ser convergente. Por ejemplo:

En la sucesión dada por $\frac{n^3}{n}$, la sucesión del denominador diverge, y la sucesión cociente también (compruébelo gráficamente).

En cambio, si $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ diverge a $\pm\infty$, se tiene que la sucesión cociente $\frac{1}{a_n}$ converge a cero. (De aquí el acuerdo $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

Hasta ahora la única manera de saber si una sucesión es convergente o nó, y a qué límite converge, ha sido la de graficar sus términos y ver si se acumulan sobre un solo punto o nó. En el caso de sucesiones complicadas podemos aprovechar las relaciones entre límites arriba mencionadas, para descomponerlas en sucesiones mas simples. Ejemplos:

1) La sucesión dada por la expresión $\frac{2n^2+1}{n^2}$ podemos expresarla por la -- suma $\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}$. La primera denota a la sucesión 2, 2, 2, ..., 2,... y la segunda denota a la sucesión $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}$. De donde

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{n^2} = 2+0 = 2$$

2) La sucesión dada por la expresión $\frac{n^2}{n^2+3}$, si la consideramos como cociente de la sucesión n^2 entre la sucesión n^2+3, no podemos concluír nada ya que ambas son divergentes. Pero si dividimos numerador y denominador entre n^2 obtenemos una sucesión igual, dada por la expresión $\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}$ que nos sugiere considerar las dos sucesiones: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ y la sucesión dada por $1+\frac{3}{n^2}$. Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = 1$$

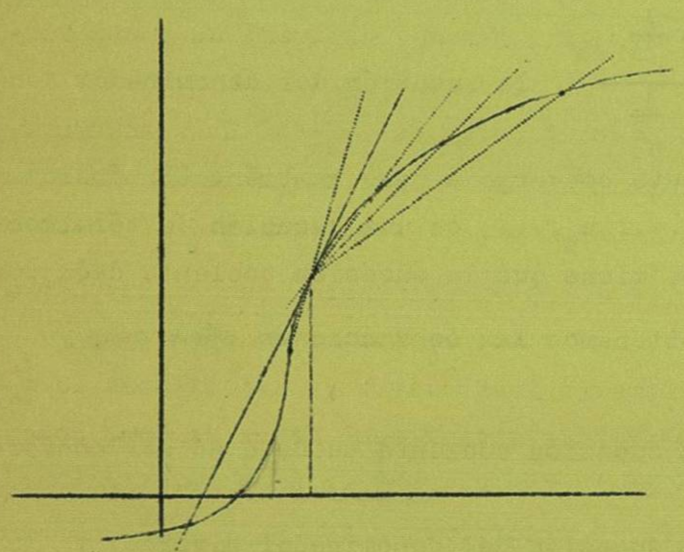

Fig. 3.5.- La tangente como límite.

3.5 Derivada de una Función.

En la sección 3.3 vimo que la rapidez de cambio de la función $y(x)$ en el intervalo Δx es decir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es igual a la - pendiente de la cuerda que une en la gráfica los puntos con abscisa x y $x+\Delta x$. Mientras mas pequeño tomemos $|\Delta x|$, la pendiente de la cuerda se aproxima mas a la pendiente de la curva en (x,y). Y si tomamos una sucesión de incrementos: $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \ldots, (\Delta x)_n, \ldots$ tal que su límite sea cero, la sucesión de pendientes de las cuerdas co-

rrespondientes, es decir, $\frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1}, \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}, \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3}, \ldots, \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}, \ldots$ tiene por límite la pendiente de la curva en ese punto, y escribimos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{pendiente de la curva.}$$

Por ejemplo, para la función $y=x^2+1$, ya sabemos que $\Delta y = 2x\Delta x+(\Delta x)^2$, luego $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x$, y además

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad \text{(¿porqué?).}$$

Para cada abscisa x se obtiene el valor $2x$ para la pendiente. Por ejemplo para $x=-1$, la pendiente de la función es -2. Luego partiendo de la función $y(x)$ podemos definir una nueva función de la siguiente manera: la función

$$x \longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Llamamos a esta nueva función la <u>derivada de y con respecto a x</u> y la denotamos con el símbolo $\frac{dy}{dx}$ (léase, derivada de y con respecto a x o también, dy entre dx); donde la y denota la función $y(x)$ que se deriva la x indica la variable independiente, y todo el símbolo denota la nueva función: la derivada de y con respecto a x. El símbolo $\frac{dy}{dx}$ sugiere la manera como se definió la nueva función, pues dy representa a Δy, dx representa a Δx, y $\frac{dy}{dx}$ representa el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde la Δ se sustituye por d para indicar el límite que hay que tomar. Otras notaciones que se usan para la derivada de y son $D_x(y)$ (léase, derivada de y con respecto a x), y' (léase y prima), $y'(x)$ (léase, y prima de x).

Para la función $y=x^2+1$, la nueva función es $\frac{dy}{dx} = 2x$, es decir, la función que a $x \longrightarrow 2x$. (Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para $y = x+x^2$).

Para denotar el contravalor de la derivada, correspondiente al valor de x, usamos el símbolo $\frac{dy(x)}{dx}$ (que, como ya es costumbre, denota también a la función). Por ejemplo, para $x=3$, el contravalor es denotado por $\frac{dy(3)}{dx}$. Nótese que sólo la x del numerador se sustituye por 3, pues la x del denominador <u>no denota valor</u>, sino sólo indica cual letra se toma como variable independiente. A $\frac{dy(x)}{dx}$ lo llamamos <u>rapidez de cambio instantánea</u> o rapidez de cambio de la función, y naturalmente es igual a la pendiente de la gráfica para la abscisa x. Por ejemplo, para la función $y=x^2+1$ $\frac{dy(1)}{dx} = 2(1) = 2$, luego su pendiente es 2 para $x=1$.

(Obtenga la pendiente de la función x^2+x para $x=1, -1, 0$).

Ahora obtenemos la derivada de varias funciones comunes:

1).- La función $x \longrightarrow a$ donde $\underline{a}$ es un parámetro, es decir, la función que a cada valor de $\underline{x}$ le asigna el mismo contravalor $\underline{a}$, la llamamos <u>función constante</u>, y la denotamos con $\underline{a}$. Por eso decimos que <u>a es una constante</u> o que <u>a es independiente de x</u>. Por ejemplo, para $a=3$, tenemos la función $x \longrightarrow 3$, es decir, la función que a cualquier valor de $\underline{x}$ le asigna 3. Luego la función $\underline{a}$ denota la familia de funciones constantes: para cada valor que le dé al parámetro $\underline{a}$, se obtiene una función constante particular. (¿Qué contravalores asigna a $x = 3, -1, \pi, x_0, x+\Delta x$, la función constante $\underline{b}$, la función 3, la función $\sqrt{2}$?).

El incremento de la función constante es $\Delta a = a - a = 0$, luego para cualquier x y Δx, $\frac{\Delta a}{\Delta x} = 0$ y su derivada es:

$$\boxed{\frac{da}{dx} = 0}$$ es decir, la función $x \longrightarrow 0$.

Luego, la derivada de cualquier función constante con respecto a $\underline{x}$, es igual a cero. (Cuál es la derivada $\frac{d3}{dx}$, $\frac{d\sqrt{2}}{dx}$, $\frac{d\pi}{dx}$, $\frac{db}{dx}$ donde $\underline{b}$ es constante? ¿Qué pendiente tiene la función $y(x) = -6$ para $x = 0$, 3 para $x = \pi$).

2).- La función ax donde $\underline{x}$ variable independiente y $\underline{a}$ parámetro, tiene por incremento $\Delta(ax) = a(x+\Delta x) - ax = a\Delta x$, luego $\frac{\Delta(ax)}{\Delta x} = a$, y su derivada es:

$$\boxed{\frac{d(ax)}{dx} = a}$$ es decir, la función constante $\underline{a}$.

En particular, para $a=1$, obtenemos la función $x \longrightarrow x$; a esta función la llamamos función identidad, pues a cada número $\underline{x}$ le asigna el mismo número $\underline{x}$. Su derivada es $\frac{dx}{dx} = 1$. Nótese que si consideramos $\frac{dx}{dx}$ como un cociente de dos números, obtenemos también al resultado 1,

Si recordamos, la función $y = ax$ tiene por gráfica una recta con pendiente $\underline{a}$, y aquí obtenemos con su derivada que para cualquier abscisa $\underline{x}$ la gráfica tiene pendiente $\underline{a}$, como era de esperarse. (~~Evaluar~~, para $x=5$ $\Delta x = 2$, las funciones y, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$, dadas las funciones $y = 3x$, $y = \frac{x}{3}$, $y = -12x$).

3).- La función $y = \frac{1}{x}$, tiene por derivada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x^2 - x\Delta x} = -\frac{1}{x^2 - x\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{por lo que} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}}$$

(Obtengan la pendiente de $y = \frac{1}{x}$ para $x = 1$, -1, 100, 0.01 y grafique la función. Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para $y = x^2$).

3.6 <u>Identidades para derivar funciones</u>.

Hasta ahora, para derivar una función hemos usado un camino bastante largo, siguiendo los pasos dados por su definición. Siendo la operación de derivar tan importante, naturalmente nos conviene desarrollar métodos para ejecutarla rápidamente, lo cual hacemos en esta sección. Una manera sería recordar la derivada de cada función; pero esto no es práctico pues hay infinidad de funciones. En su lugar, lo que recordaremos será la derivada de unas cuantas funciones y cómo obtener la derivada de varios tipos de funciones que se pueden formar a partir de funciones dadas. Tenemos los siguientes resultados, donde $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son dos funciones de $\underline{x}$,

1) Derivada de una suma o resta.

$$\boxed{\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas.

Igualmente para la resta tenemos

$$\frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$ (Dígalo en palabras).

Por ejemplo, la derivada de la función $y = x+3$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x+3)}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d3}{dx}$$; pero $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{d3}{dx} = 0$ luego,

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

(Obtenga $D_x(y)$ para $y = 3x+1$, $y = x - \pi$, $y = \lambda x + \frac{\pi}{x}$).

En el caso de tener la suma (o resta) de varios términos, la función se deriva análogamente: su derivada es igual a la suma (o resta) de las derivadas de sus términos. Por ejemplo, la derivada de $3x - \frac{1}{x} + b$ donde $\underline{b}$ es función constante de $\underline{x}$, es:

$$\frac{d}{dx}\left(3x - \frac{1}{x} + b\right) = \frac{d}{dx}(3x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{d}{dx}(b) = 3 + \frac{1}{x^2}$$

pues $\frac{d3x}{dx} = 3$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, y $\frac{db}{dx} = 0$ (¿porqué?)

(Derive las funciones de $\underline{x}$, $3x - \frac{1}{x} - \sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{\pi}\,x}{2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{4}$, $(x+1)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$).

2) Derivada de un producto.

$$\boxed{\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, mas la segunda por la derivada de la primera.

Por ejemplo, la derivada de $y = (3x+1)(x-1)$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(3x+1)(x-1)\right] = (3x+1)\,\frac{d(x-1)}{dx} + (x-1)\,\frac{d(3x+1)}{dx} =$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x+1)\cdot 1 + (x-1)\cdot 3 = 3x+1+3x-3 = 6x-2 \quad .$$

(Obtenga la derivada de $(3x+1)(x-1)$ efectuando primero la multiplicación y derivando la suma de términos).

En el caso de que una de las funciones u sea una función constante de x entonces:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = u\frac{dv}{dx} \qquad \text{(¿porqué?)},$$

es decir, las constantes se pueden sacar de la derivada y derivar el resto.

Ejemplos: $\frac{d(3x)}{dx} = 3\,\frac{dx}{dx} = 3$; $\frac{d(4\ \mathrm{sen}\ x)}{dx} = 4\,\frac{d(\mathrm{sen}\ x)}{dx}$.

(Obtenga $D_x y$ para $y = (x-3)(4x-5)$, $y = ax(x-5)$ donde a constante).

Si tenemos un producto de varios factores, como $(y+1)(\pi y-1)(3y-5)$, para derivarlo podemos agrupar los factores en dos grupos tales como: $\left[(y+1)(\pi y-1)\right]$ y $(3y-5)$, obteniendo:

$$\frac{d}{dy}\left[(y+1)(\pi y-1)\right](3y-5) =$$

$$= (y+1)(\pi y-1)\frac{d}{dy}(3y-5) + (3y-5)\frac{d}{dy}(y+1)(\pi y-1)$$

$$= (y+1)(\pi y-1)3 + (3y-5)\left[(y+1)\frac{d}{dy}(\pi y-1) + (\pi y-1)\frac{d}{dy}(y+1)\right]$$

$$= 3(y+1)(\pi y-1) + (3y-5)(y+1)\pi + (3y-5)(\pi y-1)$$

Luego, la derivada de tres factores u,v,w es :

$$\frac{d(uvw)}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

(Derive: $3x(x-1)(\pi x+2)$, $4u^3$, $\frac{3x+5}{a}$ donde a es constante.
Derive: $(\frac{\pi}{z}+6)(\frac{z}{2}+1)$, $a(3x+a)$ donde a función de x.
¿Cuál es la derivada de $uvwz$ con respecto a x?).

3) Derivada de un cociente.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

(Expréselo en palabras)

Por ejemplo, la derivada de $t = \frac{4x+1}{3x}$ es:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3x\,\frac{d(4x+1)}{dx} - (4x+1)\,\frac{d(3x)}{dx}}{9x^2} = \frac{3x(4) - (4x+1)(3)}{9x^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{12x - 12x - 3}{9x^2} = -\frac{1}{3x^2}$$

(Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para $y = \frac{3x}{x+1}$, $y = \frac{x(x+1)}{x-1}$, $y = \frac{1}{x(x-1)}$) .

4) Derivada de una potencia.

Siendo u una función de x , y n cualquier entero, la función u^n tiene n por parámetro, por lo que denota una familia de funciones, llamada funciones de potencia . Su derivada es :

$$\boxed{\frac{d(u^n)}{dx} = n\,u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Es decir, la derivada de una función elevada a la n , es igual a: el producto de n por la función elevada a la $n-1$ por la derivada de la función-

(Mas tarde veremos que esta ecuación es verdadera, aún cuando el exponente n sea cualquier número real).

Ejemplos:

a) $y = (3x-1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(3x-1)^{3-1}\,\frac{d(3x-1)}{dx} = 9(3x-1)^2$$

b) $z = \frac{1}{(2u+1)^5} = (2u+1)^{-5}$

$$\frac{dz}{du} = -5\,(2u+1)^{-5-1}\,(2) = -10(2u+1)^{-6}$$

c) $w = (\mathrm{sen}\ v)^4$

$$\frac{dw}{dv} = 4\,(\mathrm{sen}\ v)^{4-1}\,D_v(\mathrm{sen}\ v)$$

(Derivar las siguientes funciones en las que la letra que ocurre en la expresión es la variable: b^3 , $(3s)^4$, $(-y)^n$, $\frac{1}{u^5}$, $(\frac{v-1}{v+1})^3$) .

Aplicando estas cuatro identidades, podemos obtener la derivada de cualquier función polinomial o cualquier función racional (cociente de dos polinomios). Por ejemplo, para la función

$$s = \frac{2t^2-3}{t} - 3t(t+1)^3$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{t(4t) - (2t^2-3)}{t^2} - \left[(3t)3(t+1)^2 + (t+1)^3(3)\right]$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t^2+3}{t^2} - 9t(t+1)^2 - 3(t+1)^3$$

(Obtener la derivada de $w(u) = 3u(u-1)^2 + u^2$. Calcular $w'(0)$, $w'(1)$. Para $z = \frac{3v^2}{a} + \frac{a}{v}(v-1)$ donde $\underline{a}$ es constante, obtener $\frac{dz(1)}{dv}$).

En resumen tenemos las cuatro identidades:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(u \pm v)}{dx} &= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \\ \frac{d(uv)}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\ \frac{d(u^n)}{dx} &= n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx} \end{aligned}}$$

3.7 <u>Operaciones con funciones.</u>

Según la sección anterior, para derivar una función, la descomponemos en funciones mas simples y derivamos estas funciones. Por ejemplo, para derivar $(x+1)(x-1)$ con respecto a $\underline{x}$, la descomponemos en las funciones $(x+1)$ y $(x-1)$, y derivamos cada una separadamente. Ahora estudiamos las diferentes maneras de formar una función a partir de funciones dadas.

1) <u>Suma de dos funciones.</u>

Definimos la suma de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ como la función $x \longrightarrow u(x) + v(x)$, es decir, la función que a $\underline{x}$ le asigna la suma del contravalor de $\underline{u}$ mas el contravalor de $\underline{v}$ correspondientes a $\underline{x}$. Esta función naturalmente la denotamos también con el contravalor $u(x)+v(x)$ o mas cortamente con $\underline{u+v}$. Por ejemplo, si $u = x^2$ y $v = \frac{1}{x}$, tenemos que $u+v = x^2 + \frac{1}{x}$. Conversamente, la función de $\underline{x}$: $x^2 + \frac{1}{x}$, se puede descomponer en la suma de las dos funciones x^2 y $\frac{1}{x}$.

(Descomponga las siguientes funciones en una suma de dos funciones: x^2+1, $u = w^3 + 3w$, $3w + 5w^3$. Defina la suma de tres funciones u, v, w.)

Análogamente definimos la resta de dos funciones $\underline{u}$ y $\underline{v}$ como la función $x \longrightarrow u(x) - v(x)$.

2) <u>Producto de dos funciones.</u>

Definimos el producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ como la función $x \longrightarrow u(x)\cdot v(x)$, es decir, le asigna el producto del contravalor de $\underline{u}$ por el contravalor de $\underline{v}$. (Nótese que $u(x)$ no denota $\underline{u}$ por $\underline{x}$, sino que denota contravalor). Denotamos la función con $u(x)v(x)$ o con $\underline{uv}$. Ejemplo, la función $3(x+1)$ la podemos descomponer en el producto de la función $\underline{3}$ por la función $x+1$.

Ejercicios.- Descomponga en el producto de dos funciones: $3x$, x^2, $(x-3)(x+3)$ x^3, $x(x-1)$, $x(x+2)(\pi x-5)$, $x^2(x-\pi)(2x-\lambda)$. Defina el producto de tres funciones de $\underline{x}$: u, v, w.

3) <u>Cociente de dos funciones.</u>

Definimos el cociente de dos funciones $u(x)$ entre $v(x)$ como la función $x \longrightarrow \frac{u(x)}{v(x)}$, es decir, el contravalor de $\underline{u}$ entre el contravalor de $\underline{v}$. Denotamos la función con $\frac{u(x)}{v(x)}$ o con $\frac{u}{v}$.

Ejercicios.- Descomponga en dos, las funciones $\frac{x}{3}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Ahora consideramos la mas interesante manera de formar funciones a partir de funciones dadas:

4) <u>Cadena de dos funciones.</u>

Dadas dos funciones, como $z = t^2 + t$ y $t = \frac{1}{x}$, notamos que en la primera, $\underline{t}$ es la variable independiente, y que en la segunda es variable dependiente. Si encadenamos la $\underline{t}$ de ambas ecuaciones, entonces $\underline{z}$ va a depender de $\underline{x}$. Al darle cualquier valor a $\underline{x}$, obtenemos un contravalor para $\underline{t}$ que sustituído en la primera función nos da un contravalor de $\underline{z}$. Gráficamente: $x \longrightarrow t \longrightarrow z$ (diga, a $\underline{x}$ le asigna $\underline{t}$, le asigna $\underline{z}$). Por ejemplo, para $x = 0.5$, obtenemos $t = \frac{1}{0.5} = 2$, luego $z = 2^2 + 2 = 6$; y en general a $x \longrightarrow z(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Asignándole a $\underline{x}$ el valor de $\underline{z}$ así obtenido, obtenemos una nueva función, aquella que a $\underline{x} \longrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ y que llamamos función <u>cadena</u>.

Ejercicio.- Calcule $\underline{z}$ para $x = 1, -0.5, 2$.

En estas circunstancias, $\underline{z}$ denota dos funciones:

a) La función $z = t^2 + t$ cuando se considera como función de $\underline{t}$.

b) La función $z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ cuando se considera como función de $\underline{x}$.

Para distinguir una función de otra, usualmente se escribe $z(t)$ para la primera y $z\left[t(x)\right]$ ó $z(x)$ para la segunda.

Ejemplos: 1.- Para $w = \text{sen } v$ y $v = 2y^2 + 1$, la función cadena es $w = \text{sen } (2y^2 + 1)$.

2.- La función $(x^2 + 1)^3$, considerándola como función cadena, está formada por las funciones t^3 y $t = x^2 + 1$.

Ejercicios: 1.- Forme la función cadena con $u = z + \text{sen } z$, y $z = y^3$.

2.- Descomponga las funciones $\text{sen } x^2$, $\text{sen}^2 2x$, $(4x-1)^{-2}$.

Análogamente definimos cadenas de funciones para tres o mas funciones. Por ejemplo, la función $\log (\text{sen } x^2)$ está compuesta de las funciones $\log z$, $z = \text{sen } w$, $w = x^2$.

Ejercicios: Descomponga las funciones $\log (\tan \frac{1}{x})$, $(\tan x^2)^3$.

Para derivar una función cadena tenemos la siguiente igualdad. Sean $u = u(v)$ y $v = v(x)$, es decir, $\underline{u}$ función de $\underline{v}$ y $\underline{v}$ función de $\underline{x}$. La función cadena $u[v(x)]$ tiene por derivada:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}}$$

La derivada de $\underline{u}$ con respecto a $\underline{v}$, es igual al producto de la derivada de $\underline{u}$ con respecto a $\underline{v}$ por la derivada de $\underline{v}$ con respecto a $\underline{x}$.

Nótese que esta igualdad es muy sugestiva, pues si consideramos du, dv, dx como números, en el producto de la derecha, podemos cancelar $\underline{dv}$ y obtener $\frac{du}{dx}$.

Ejemplos: 1.- La derivada de $y = (x^2 + 1)^3$ es

$$y'(x) = \frac{d(x^2 + 1)^3}{d(x^2 + 1)} \times \frac{d(x^2 + 1)}{dx} = 3(x^2 + 1)^2 \times 2x$$

$$y'(x) = 6x(x^2 + 1)^2 .$$

2.- La derivada de $z = \text{sen } x^2$ es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(\text{sen } x^2)}{dx^2} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \frac{d(\text{sen } x^2)}{dx^2}$$

3.- La derivada de $z = t^2 + t$, y $t = x^2 + 1$ es

$$D_x z = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = (2t + 1)(2x) \quad \text{y sustituyendo } \underline{t} \text{ por } x^2 + 1:$$

$$D_x z = 2x\big(2(x^2 + 1) + 1\big) = 2x(2x^2 + 3).$$

Desde luego, en este caso resulta mas conveniente obtener primero la expresión de $\underline{z}$ como función de $\underline{x}$, derivando después:

$$z = (x^2 + 1)^2 + x^2 + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 2(x^2 + 1)2x + 2x = 2x(2x^2 + 3) .$$

Ejercicios: Derivar $(3x - 1)^4$, $(\text{sen } x)^2$, $\log (x^2 + 1)$.

Como punto final demostramos dos de las identidades que usamos constantemente para derivar funciones (las restantes igualdades pueden ser demostradas por un método semejante):

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Denotemos con $\underline{z}$ el producto $\underline{uv}$. Calculando

$$\Delta z = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

Ahora, para obtener expresiones que den incrementos Δu y Δv, restamos y sumamos el mismo término $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$:

$$\Delta z = \big[u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)\big] + \big[u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)\big]$$

$$\Delta z = v(x + \Delta x) \cdot \big[u(x + \Delta x) - u(x)\big] + u(x) \cdot \big[v(x + \Delta x) - v(x)\big]$$

$$\Delta z = v(x + \Delta x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v .$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = v(x + \Delta x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$ y finalmente, tomando límites cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

luego $$\frac{dz}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} .$$

De la misma manera, para probar que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Si le damos un incremento Δx a $\underline{x}$, se obtiene para $\underline{v}$ un incremento Δv, y correspondientemente para $\underline{u}$ se obtiene un incremento Δu. Tenemos

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$ y tomando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si $\Delta v \neq 0$ para $\Delta x \neq 0$, el cociente $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ está definido, y como Δv tiende a cero cuando Δx tiende a cero, se tiene que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{du}{dv}$$ con lo cual obtenemos la igualdad deseada.