3.8 Funciones Implícitas.

Dada una ecuación cualquiera, como $x^3 - x + y^2 = y^3$, define dos funciones $x(y)$ y $y(x)$, según consideremos y ó x como variable independiente. Considerando y como función de x en la ecuación, como no está despejada y, decimos que la ecuación define la función implícitamente, o abusando del lenguaje, que la función es implícita. Para obtener su derivada por los métodos ya dados, tenemos que despejar la variable dependiente y, y entonces derivar. Pero usualmente no se puede despejar, como en la ecuación anterior, por lo que nos conviene tener métodos para derivar sin despejar. Veamos como se puede hacer. Si en la ecuación $x^3 - x + y^2 = y^3$ consideramos ambos lados como funciones de x, tenemos dos funciones iguales. Luego, sus derivadas con respecto a x son iguales, es decir:

$$\frac{d(x^3 - x + y^2)}{dx} = \frac{d(y^3)}{dx} \qquad \text{y efectuando operaciones.}$$

$$3x^2 - 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

La y que ocurre en la ecuación se considera como cierta función de x y naturalmente su derivada se deja indicada. Maravillosamente al derivar, $\frac{dy}{dx}$ siempre ocurre linealmente en la ecuación resultante, por lo que se puede despejar y obtener

$$2y\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2}{2y - 3y^2}$$

Ejercicios.- Obtener $z'(y)$ para $yz = yz^3 + 1$; $(z + y)^2 = az^4$.

Si queremos calcular un contravalor de esta derivada, por ejemplo $\frac{dy}{dx}(1)$ además de sustituir x por 1 en la expresión anterior, hay que sustituir y por $y(1)$. Naturalmente, el contravalor $y(1)$ se obtiene de la función inicial $x^3 - x + y^2 = y^3$ sustituyendo x por 1 y encontrando las soluciones de la ecuación resultante:

$$1^3 - 1 + y^2 = y^3$$

$y(y - 1) = 0$, de donde

$y = 1$, $y = 0$ son las soluciones,

entonces $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{1 - 3}{2\cdot 1 - 3\cdot 1^2} = 2$ para el punto $(1,1)$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{1 - 3}{2\cdot 0 - 3\cdot 0} = \frac{-2}{0} \quad \text{para el punto } (1,0)$$

el último resultado indica que la tangente en el punto $(1,0)$ es perpendicular al eje X, por lo que decimos que su pendiente es ∞ .

Ejerc. 2.-Obtener $\frac{dz}{dx}(0)$, $\frac{dz}{dx}(-1)$ para $z^3 + z = x^2 - 1$.

Si en la ecuación $x^3 - x + y^2 = y^3$, consideramos x como función de y , obtenemos su derivada de manera análoga:

$$3x^2\frac{dx}{dy} - \frac{dx}{dy} + 2y = 3y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2 - 2y}{3x^2 - 1}$$

Notamos que para estas dos derivadas $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$ tenemos:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

lo cual es cierto para cualquier par $y(x)$ y $x(y)$ de funciones inversas . Este resultado es muy sugestivo, pues si consideramos dy y dx como números, $\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 1 \times \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}$.

Ejerc. 3.-Obtenga $\frac{da}{db}$ y $\frac{db}{da}$ para $ba^3 + (b + 1)a + b^5 + b^3 + 6 = 0$

Dada una función cadena donde uno o mas eslabones son una función implícita, por ejemplo $z = 2x + 1$, $x^3 + x = t$, no podemos despejar x y obtener así una expresión de z en términos de t. Luego para derivar la función cadena $z(t)$, tenemos que hacer uso de la identidad $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\times\frac{dx}{dt}$ y derivar $x^3 + x = t$ implícitamente. Para estas funciones tenemos:

$z = 2x+1$ $\qquad$ $x^3+x = t$

$\frac{dz}{dx} = 2$ $\qquad$ $3x^2\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} = 1$ de donde $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3x^2 + 1}$

luego $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\times\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3x^2 + 1}$

Ejerc. 4.-a) Obtener $\frac{dy}{dx}$ para $y = x^3 + 1$, $(tx)^2 = (x+1)^3$

b) Obtener $\frac{du}{dw}$ para $(w+u)^3 = 6$; $\frac{v}{w} = v^3 - w^3$

3.9 Derivada de funciones trigonométricas.

En Trigonometría se definen las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. Denotamos estas seis funciones con los símbolos $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, y $\csc x$, que como ya es costumbre, denotan también los contravalores correspondientes a x . En estos símbolos por ejemplo en $\operatorname{sen} x$, la x es la variable independiente, y "sen" (abrevia ción de seno) denota la función, de igual manera que la $\underline{y}$ de $y(x)$, con la diferencia que $\underline{y}$ se usa además para denotar la variable independiente, mientras que "sen" nunca se usa así.

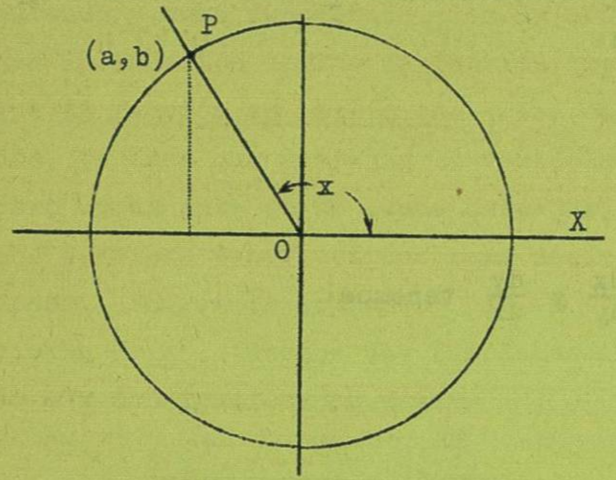

Fig. 3.8.-Funciones Trigonométricas.

Para definir las funciones trigonométricas (o circulares), usamos un círculo de radio 1, con centro en el origen (vea Fig. 3.3), y asociamos la variable independiente $\underline{x}$ con el ángulo de X a P. Entonces la función sen x se define por la asignación: $x \longrightarrow b$.

Ejerc. 1.-Con la figura 3.8, defina: cos x, tan x, cot x, sec x, csc x.

Como el ángulo de X a P puede medirse en grados o en radianes, obtenemos dos funciones sen x distintas, según se asocie $\underline{x}$ con la medida del ángulo en grados o radianes. Para el sen x tenemos:

Midiendo $\underline{x}$ en grados.	Midiendo $\underline{x}$ en radianes.
$0 \longrightarrow 0$	$0 \longrightarrow 0$
$1 \longrightarrow .01745...$	$1 \longrightarrow .8415$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow .02739...$	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 1$
$\pi \longrightarrow .05481...$	$\pi \longrightarrow 0$
$90 \longrightarrow 1$	$90 \longrightarrow .86603...$
$180 \longrightarrow 0$	$180 \longrightarrow -.86603...$

La mayoría de las tablas de funciones trigonométricas dan el ángulo en grados pero hay algunas que lo dan en radianes. En cualquier caso, podemos pasar de una función a otra, pues si asociamos $\underline{x}$ con la medi en radianes, y $\underline{\alpha}$ con la medida en grados, tenemos la ecuación $x = \frac{\pi\alpha}{180}$. Por ejemplo, para calcular con tablas en grados, sen 90, donde 90 está asociado con radianes, tenemos:

$$\alpha = \frac{180\,x}{\pi} = \frac{180 \times 90}{\pi} = 5160 = 14 \times 360 + 120$$

$$\text{sen } 90 = \text{sen } 5160^{\circ} = \text{sen } 120^{\circ} = .86603...$$

Ejerc. 2.-La función coseno, ¿qué contravalores asigna a:

$\frac{\pi}{4}$, 45, $-\frac{\pi}{2}$, -90, 10.5, 360, 2π,

considerándolos primero en grados y luego en radianes?.

En Topografía se usa exclusivamente la función sen x, donde $\underline{x}$ está asociada con grados, mientras que en Cálculo, Matemáticas avanzadas y todas sus aplicaciones a Ingeniería, se usa exclusivamente la función sen x, donde $\underline{x}$ asociado con radianes. Luego, de ahora en adelante siempre que hablemos de las funciones trigonométricas nos referimos a las que se obtienen al asociar la variable independiente con radianes.

Ahora obtenemos las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$1) \quad \boxed{\frac{d \text{ sen } x}{dx} = \cos x}$$

Desde luego, para obtener este resultado tenemos que partir de la definición de derivada, lo cual hacemos a continuación. El incremento del contravalor $\Delta(\text{sen } x)$ para un incremento Δx de la variable, es:

$$\Delta(\text{sen } x) = \text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x$$

$$= \text{sen } x \cos\Delta x + \text{sen}\Delta x \cos x - \text{sen } x \quad \text{(Usando identidad trigonométrica).}$$

$$\Delta(\text{sen } x) = \text{sen } x\,(\cos\Delta x - 1) + \text{sen}\Delta x \cos x.$$

Luego

$$\frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \text{sen } x\,\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x\,\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \text{sen } x \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}$$

Los límites que aparecen en el lado derecho de la ecuación, no los podemos obtener tomando el cociente de los límites, pues nos dá $\frac{0}{0}$, lo cual no nos dice nada acerca del límite. Luego, tenemos que estudiar el comportamiento del cociente cuando $\Delta x \to 0$.

En la Fig. 3.9 graficamos una parte de un círculo de radio 1, y Δx para tres valores distintos: .4, .2 y .1 El contravalor correspondiente $\text{sen}\Delta x$ está dado por cada una de las alturas $\underline{h}$ de los triángulos que se forman. Como el ángulo Δx se mide en radianes, es igual a la longitud del arco de círculo.

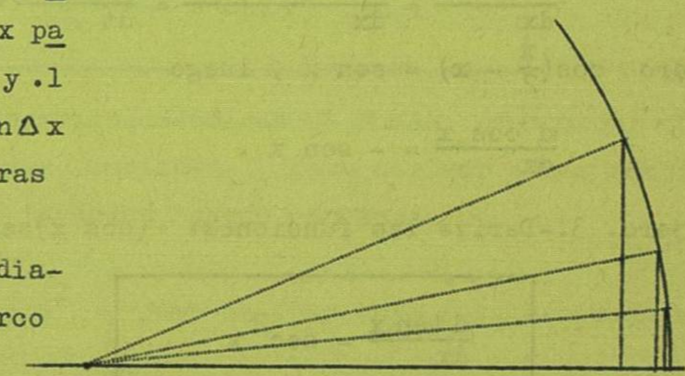

Fig. 3.9.-Límites de $\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}$ y de $\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}$

Vemos que la altura $h = \text{sen}\Delta x$ tiende a igualarse al arco Δx a medida que Δx se hace mas pequeño, luego el cociente $\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x}$ tiende a uno.

Por otra parte $\quad \frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} = \frac{1-\left[1-2(\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2})^2\right]}{\Delta x}$

$$= \frac{2(\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2})^2}{\Delta x}$$

$$\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} = \text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, se tiene que $\frac{\Delta x}{2} \to 0$, $\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2} \to 0$, y $\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$

De donde se concluye que también $\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} \to 0$

Luego, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x} = 1$ y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = 0.$

y de aquí

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\text{sen } x)}{\Delta x} = \frac{d\ \text{sen } x}{dx} = (\text{sen } x)\times 0 + (\cos x)\times 1$$

$$\frac{d\ \text{sen } x}{dx} = \cos x$$

Ejerc. 2.-Obtener la derivada de: $x \text{ sen } x$, $4x^2 + 3 \text{ sen } x$, $\frac{x}{\text{sen } x}$, $\text{sen}^2 x$

2) $\boxed{\frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen } x}$

Par obtener este resultado podemos seguir un proceso análogo al anterior trabajando con incrementos. Pero preferimos expresar $\cos x$ en términos del seno, con la identidad trigonométrica $\cos x = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$. El $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$ es una función cadena, con los eslabones $\text{sen } t$, $t = \frac{\pi}{2} - x$, luego su derivada es:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d\ \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{dx} = \frac{d\ \text{sen } t}{dt}\times\frac{dt}{dx} = (\cos t)(-1) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

pero $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen } x$, luego

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\text{ sen } x .$$

Ejerc. 3.-Derive las funciones: $(\cos x)\text{sen } x$, $x^2 \cos x$, $\cos 2x$, $\text{sen } x^2$.

3) $\boxed{\begin{array}{l} \frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x \\[2ex] \frac{d \cot x}{dx} = -\csc^2 x \end{array}}$

Para obtener la derivada de $\tan x$ usamos la identidad $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x(\cos x) - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Análogamente obtenemos la derivada de $\cot x$.

Ejerc. 4.-Derivar las funciones: $\cot x$, $\text{sen } x + \tan x$, $x \tan x^2$

4) $\boxed{\begin{array}{l} \frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x \\[2ex] \frac{d \csc x}{dx} = -\csc x \cot x \end{array}}$

Usando la identidad $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ tenemos:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x)\times 0 - 1\times(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x .$$

Ejerc. 5.-Derivar las funciones: $\csc x$, $x^2 + 3 \sec x$, $\frac{\sec x}{x}$, $\sec(x+1)$.

En resumen tenemos:

$\frac{d\ \text{sen } x}{dx} = \cos x$	$\frac{d \cos x}{dx} = -\text{sen } x$
$\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$	$\frac{d \cot x}{dx} = -\csc^2 x$
$\frac{d \sec x}{dx} = \sec x \tan x$	$\frac{d \csc x}{dx} = -\csc x \cot x$

Podemos combinar las funciones trigonométricas en sumas, productos, cocientes, cadenas, y así formar nuevas funciones. Para derivar estas combinaciones aplicamos las identidades ya dadas, según convenga.

Ejemplos:

1) $p = 2 \text{ sen } u + \frac{1}{3} \cot u + u^2$, suma de funciones cuya derivada es

$$\frac{dp}{du} = 2 \cos u + \frac{1}{3}(-\csc^2 u) + 2u .$$

2) $f = \frac{v \tan v}{2v+1}$, función cociente, cuya derivada es:

$$\frac{df}{dv} = \frac{(2v+1)(v \sec^2 v + \tan v) - (v \tan v)\times 2}{(2v+1)^2}$$

3) $g = \sec 2x^2$, función cadena con los eslabones
$g = \sec t$, $t = 2x^2$, y cuya derivada es:

$$\frac{dg}{dx} = \sec 2x^2 \, \tan 2x^2 \; 4x$$

4) $h = \text{sen}^4 2r$, función cadena con los eslabones
$h = t^4$, $t = \text{sen } u$, $u = 2r$, y cuya derivada es:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh}{dt} \times \frac{dt}{du} \times \frac{du}{dr} = 4t^3(\cos w)\,2 = 8 \,\text{sen}^3 2x \cos 2x \;.$$

5) $w = \text{sen}(x \cos^2 x)$, función cadena con los eslabones
$w = \text{sen } y$, $y = x \cos^2 x$, donde el segundo eslabón es un producto. La derivada es:

$$\frac{dw}{dx} = \cos(x \cos^2 x) \times \frac{d(x \cos^2 x)}{dx}$$

$$= \cos(x \cos^2 x)\left[x \times 2 \cos x\,(-\text{sen } x) + \cos^2 x \times 1\right]$$

$$= (\cos^2 x - 2 \cos x \,\text{sen } x) \cos(x \cos^2 x) \;.$$

Ejerc. 6.-Derivar las funciones: $w = \cos^2 m$, $w = \csc^2 4x$, $w = x \cos 2x - x \sec(x \,\text{sen } x)$, $\cot(x + \text{sen}^2 x)$, $\sec^2(\text{sen } x)$.

3.10 Diferenciales.

Al usar el símbolo $\frac{dz}{dx}$ para denotar la derivada de una función, vimos que dz y dx se comportan como números. Por ejemplo $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dt}$. Esto se debe á que $\frac{dz}{dx}$ se define a través del cociente de dos números: los incrementos $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Al símbolo dz (léase, de zeta) lo llamamos diferencial de z, y representa a Δz mas la idea de tomar el límite. Igualmente a dx lo llamamos diferencial de x , y representa a Δx mas la idea de tomar el límite. Y el cociente de dos diferenciales $\frac{dz}{dx}$ denota la derivada de la función $z(x)$.

Aprovechando la propiedad de las diferenciales de comportarse como números, en la derivada $\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2$ de la función $z = x^3 + 2x$, podemos multiplicar ambos lados por dx para obtener la ecuación $dz = 3x^2\, dx + 2\, dx$, llamada la forma diferencial (mas apropiado sería llamarle ecuación diferencial, pero ese nombre ya se usa para otra cosa). Para llegar a esta forma diferencial, no tenemos que obtener primero la derivada, para luego multiplicarla por dx. Podemos obtenerla directamente, aplicando las reglas para diferenciar que damos a continuación.

Sean u y v dos funciones cualesquiera, y sea b una función constante:

1) $db = 0$ $\qquad\qquad \frac{db}{dx} = 0$

2) $d(u + v) = du + dv$ $\qquad\qquad \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

3) $d(uv) = u\,dv + v\,du$ $\qquad\qquad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $\qquad\qquad \frac{d\,\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

5) $du^n = n u^{n-1}\,du$ $\qquad\qquad \frac{du^n}{dx} = n u^{n-1}\frac{du}{dx}$

6) $d \,\text{sen } u = \cos u \; du$ $\qquad\qquad \frac{d\,\text{sen } u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$

7) $d \cos u = -\text{sen } u \; du$ $\qquad\qquad \frac{d \cos u}{dx} = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$

Notamos que las igualdades para diferenciar se obtienen de las correspondientes igualdades para derivar, simplemente multiplicando ambos lados de la ecuación por dx.

Para diferenciar una función como $p = w^2 \,\text{sen } 4w$ tenemos:

$$dp = d(w^2 \,\text{sen } 4w) = w^2 \times d(\text{sen } 4w) + \text{sen } 4w \times dw^2$$

$$= w^2 \cos 4w \times d(4w) + \text{sen } 4w \times 2w \times dw$$

$$dp = 4w^2 \cos 4w \; dw + 2w \,\text{sen } 4w \; dw \;.$$

Ejerc. 1.-Diferenciar $w = (4z + 6)^2$, $w = \tan z^2$, $u = v^2 \cot^2 v$.

La ventaja de diferenciar sobre derivar, es que el proceso de diferenciar no distingue entre la variable independiente y la dependiente. En la forma diferencial cualquier letra se puede considerar como variable independiente según lo requiera el problema.

Ejemplos:

1) Obtener la derivada de las funciones $z(w)$ y $w(z)$ dadas por la ecuación $zw = z + w + 6$.

Diferenciando tenemos:

$d(zw) = d(z + w + 6) = dz + dw + d6$.

$z\,dw + w\,dz = dz + dw$

Despejando dw y dividiendo entre dz :

$z\,dw - dw = dz - w\,dz$

$$dw = \frac{(1-w)\,dz}{z - 1}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1 - w}{z - 1}$$

Despejando dz y dividiendo entre dw:

$dz - w\,dz = z\,dw - dw$

$$dz = \frac{(z-1)\,dw}{1 - w}$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{z - 1}{1 - w}$$

2) Obtener la derivada de la función cadena $z(t)$ dada por

$z^2 w = \tan w$, y $\operatorname{sen}(wt) = t^3 + 1$.

Diferenciando las dos ecuaciones:

$z^2\,dw + w\,2z\,dz = \sec^2 w\,dw$; $(\cos wt)(w\,dt + t\,dw) = 3t^2\,dt$.

Ahora despejando dz y dw respectivamente:

$2wz\,dz = \sec^2 w\,dw - z^2\,dw$ $\qquad w\,dt + t\,dw = \dfrac{3t^2\,dt}{\cos wt}$

$$dz = \frac{(\sec^2 w - z^2)\,dw}{2wz} \qquad dw = \frac{3t^2\,dt - w\cos wt\,dt}{t\cos wt}$$

Luego

$$dz = \frac{(\sec^2 w - z^2)}{2wz} \times \frac{(3t^2 - w\cos wt)\,dt}{t\cos wt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(\sec^2 w - z^2)(3t^2 - w\cos wt)}{2wzt\cos wt}$$

Ejerc. 2.-a) Obtener $\dfrac{du}{dv}$ y $\dfrac{dv}{du}$ para $u^3 + v^3 + uv = 0$

b) Obtener $\dfrac{du}{dv}$ para la función cadena $u^2 = \tan ut$, $t^5 = v^2 + 6$

3.II Derivadas de orden superior.

Dada la función $y = x^4 + 3x^2 + 1$ al derivarla obtenemos otra función de x: $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x$. Si también derivamos esta función, obtenemos la función $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 12x^2 + 6$, que llamamos segunda derivada de y con respecto a x. Denotamos la segunda derivada con:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ó} \quad D_x^2 y \quad \text{ó} \quad y'' .$$

Igualmente podemos derivar la segunda derivada, para obtener la tercera derivada de y : $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 24x$. Y así, podemos seguir derivando las funciones resultantes, obteniendo:

la derivada de primer orden $\dfrac{dy}{dx}$ ó $D_x y$ ó y'

la derivada de segundo orden $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ó $D_x^2 y$ ó y'' ó $y^{(2)}$

....

....

la derivada de n-ésimo orden $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ó D_x^n ó $y^{(n)}$

Para denotar el contravalor correspondiente a 5 de la tercera derivada, usamos la notación $\dfrac{d^3y(5)}{dx^3}$ y análogamente para las otras derivadas.

Ejerc. 1.-a) Obtenga las 4 primeras derivadas de $(2x+1)^2$, $\dfrac{1}{u}$, $\operatorname{sen} 2v$.

Luego, dada cualquier función $z(x)$, su primera derivada $\dfrac{dz}{dx}$ es una función de x. Derivando esta función, obtenemos otra funcióm $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ llamada segunda derivada, y así sucesivamente podemos seguir derivando, para obtener la derivada de cualquier orden de la función $z(x)$. El símbolo $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ya no representa un cociente de d^2z entre dx^2, como sucede en el caso de $\dfrac{dy}{dx}$, sino representa una abreviación de $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$ juntando las dos letras d y las dos dx . Análogamente para $\dfrac{d^3z}{dx^3}$, es una abreviación de $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)$.

Por esta razón no se consideran segundas (o terceras) diferenciales d^2z como podríamos esperar por analogía con $\dfrac{dz}{dx}$.

Ya vimos que la relación que existe entre la primera derivada de una -- función y la pendiente de su curva; en el siguiente capítulo veremos la relación que existe entre entre la segunda derivada y la convexidad de la curva.

Ejerc. 2.-Obtenga $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $y = x^2$, $y = x^3$ y grafique las dos curvas

Encuentre alguna relación entre la concavidad y los contravalores de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Para obtener la segunda derivada de una función $z(y)$ dada implícitamente, como $z^3 + z = 2y$, tenemos derivando:

$$3z^2\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dy} = 2 \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{3z^2+1} .$$ Y derivando de nuevo:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{0 - 2(6z\,z')}{(3z^2+1)^2} = \frac{-12z\,z'}{(3z^2+1)^2}$$, donde podemos sustituír z' por su expresión, obteniendo:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{-12z}{(3z^2+1)^2} \times \frac{2}{3z^2+1} = \frac{-24z}{(3z^2+1)^3}$$

Ejerc. 3.-Obtener $\dfrac{d^2w}{dv^2}$ para $w^3 y = w + y$.

SECCION 3.1

PROBLEMAS

En las siguientes funciones

a) Exprese la función, denotando la signación con una flecha.

b) Dé el dominio.

c) Dé el contradominio.

d) Dé tres valores y sus correspondientes contravalores:

1) A cada futbolista le asigna el número de su camiseta.
2) A cada futbolista le asigna los colores de su equipo.
3) A cada futbolista le asigna la mascota de su equipo.
4) A cada futbolista le asigna su apodo.
5) A cada futbolista le asigna el número de huesos que le han roto.
6) A cada futbolista le asigna el número de pies que tiene.
7) A cada futbolista le asigna el peso en miligramos de su cerebro.
8) A cada futbolista le asigna el nombre de su "coach".
9) A cada alumno le asigna la carrera que estudia.
10) A cada alumno le asigna la compañera de clase mas próxima.
11) A cada ciudad le asigna el país a que pertenece.
12) A cada país le asigna el continente al que pertenece.
13) A cada continente le asigna el país de mayor superficie que contiene.
14) A cada alumno de la clase le asigna la artista que mas le complace.
15) A cada país le asigna su libertador.
16) A cada año le asigna el Presidente de la República de ese año.
17) A cada nación le asigna su dirigente actual.
18) A cada alumno le asigna su profesor de inglés o de francés.
19) A cada número le asigna el triple de ese número.
20) A cada número le asigna el triple de su recíproco.
21) A cada número le asigna su cuadrado menos dos.
22) A cada número le asigna su cuadrado mas siete, entre cinco.
23) A cada número le asigna su cubo mas el cuadrado de su mitad.
24) A cada número le asigna π veces el número.
25) A cada número le asigna $\sqrt{2}$ veces el número, menos cuatro.
26) A cada número le asigna $\sqrt{5}-1$ veces la cuarta potencia del número.
27) A cada número le asigna el número a la potencia $3+\sqrt{2}$.
28) A cada número le asigna $\sqrt{5}-\pi$ veces el número.
29) A cada número le asigna x veces el número.
30) A cada número le asigna el cubo del número, entre $\underline{x}$.
31) A cada número g le asigna $\ln g$.