S como función de T con los datos dados:

T	S
0	5
10	9
20	19
30	41
40	49
50	47
60	45
80	44
100	43

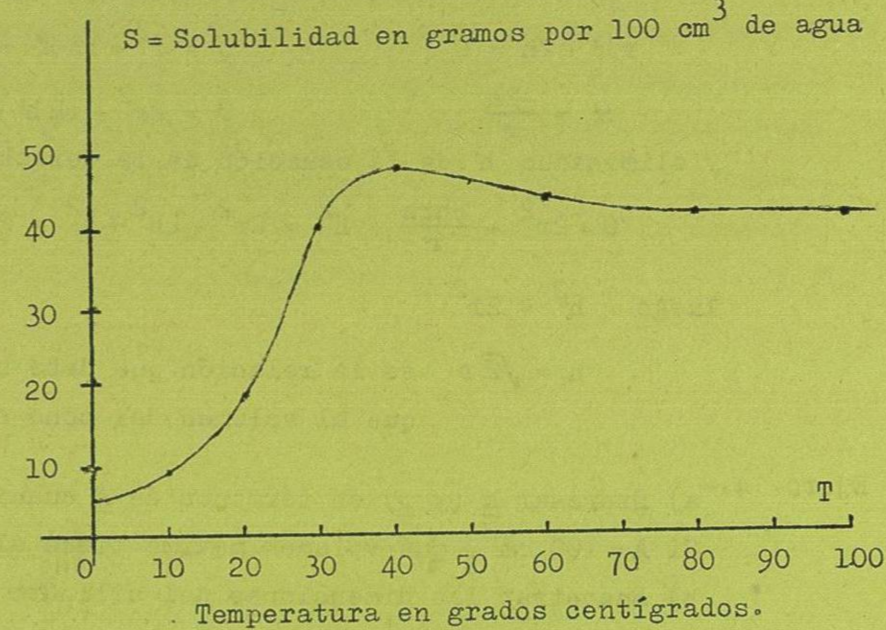


Fig. 4.4.-Solubilidad del sulfato de sodio en agua, en función de temperatura.

Notamos que:

a) Para $T=0$ la solubilidad aumenta lentamente, pues para un cambio $\Delta T = 10$, S cambia de 5 a 9, es decir $\Delta S = 4$, luego la rapidez media de cambio es $\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{4}{10} = .4$

b) Para $T = 20$, $\Delta S = 41-19 = 22$, luego $\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{22}{10} = 2.2$.

c) Para $T = 80$, la solubilidad decrece lentamente.

Como ya hemos visto, mientras mas pequeño se toma ΔT, mas se aproxima $\frac{\Delta S}{\Delta T}$ a la pendiente de la curva en el punto de abscisa T. Por lo que definimos: la rapidez de cambio de S con respecto a T como $\frac{dS}{dT}$. La rapidez de cambio $S'(T)$ varía con la temperatura, pues la curva tiene diferentes pendientes según la temperatura que se tome. En general varía de punto a punto, excepto cuando la curva es una línea recta y todos sus puntos tienen la misma pendiente.

Ejerc. 1.-a) Obtener gráficamente la rapidez de cambio de S con respecto a T, para $T = 10, 20, 80$.

b) Obtener la rapidez de cambio media entre $T = 30$ y 40; 80 y 100

c) Si la longitud L de un cuerpo depende de su temperatura T según la ecuación $L = L_o + 3\times10^{-3}T$, donde L_o longitud inicial. Obtenga la rapidez de cambio de L con respecto a T. ¿Depende de la temperatura?.

En general, dadas dos cantidades cualquiera A y B, considerando A como función de B, definimos la rapidez de cambio de A con respecto a B, como $\frac{dA}{dB}$

Por ejemplo, podemos considerar la rapidez de cambio entre las cantidades:

1) V volumen de un cuerpo, T temperatura: $\frac{dV}{dT}$

2) P presión de un gas, V volumen: $\frac{dP}{dV}$

3) x distancia al origen, t tiempo: $\frac{dx}{dt}$

4) v velocidad, t tiempo: $\frac{dv}{dt}$

5) H calor producido, i corriente eléctrica: $\frac{dH}{di}$

Para obtener la rapidez de cambio para valores de B dados podemos:

a) Si la relación entre A y B está dada por una tabla o gráficamente, calculamos con transportador la pendiente de la curva para los valores de B dados.(hay que tener cuidado de multiplicar por el factor apropiado si las escalas de A y B son diferentes).

b) Obtener una ecuación en A y B. Derivándola nos dá una expresión para $\frac{dA}{dB}$ con la cual podemos calcular los contravalores deseados.

Ejemplos.-1) Obtener la rapidez de cambio del volumen V de una esfera con respecto al radio r. Para $r = 10$ cm. ¿cual es la rapidez de cambio?: La ecuación entre V y r, es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$ es la rapidez de cambio del volumen respecto al radio.

$$\frac{dV(10)}{dr} = 4\pi\times10^2 = 400\pi \text{ cm}^2$$ es la rapidez de cambio para $r = 10$ cm.

2) Si en el problema anterior $r = \frac{5}{t}$ donde t tiempo en segundos. Obtener la rapidez de cambio de V con respecto a t para $t = 5$ seg.

Podemos obtener V en términos de t:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{t}\right)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi\left(\frac{5}{t}\right)^3\left(\frac{-5}{t^2}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-4\pi 5^3}{t^4}$$

$$\frac{dV(5)}{dt} = \frac{-4\pi 5^3}{5^4} = -\frac{4\pi}{5}$$

$$V'(5) = -2.51 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

o Hacer uso de la identidad:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt} \quad ; \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{5}{t^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\left(\frac{-5}{t^2}\right)$$

para $t = 5$, $r = \frac{5}{5} = 1$

$$\frac{dV(5)}{dt} = 4\pi\times1^2\left(\frac{-5}{5^2}\right) = -\frac{4\pi}{5}$$

$$V'(5) = -2.51 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

3) Obtener la rapidez de cambio del área A con respecto a la altura h de un triángulo rectángulo de perímetro dado. ¿Cual es la rapidez de cambio para $h = 4$ cm. y base $b = 3$ cm.?

La ecuación entre las variables es: $A = \frac{1}{2} bh$, donde b depende de h pues el perímetro es constante. La relación entre b y h está dada por

$P = h + b + c = h + b + \sqrt{h^2+b^2}$ donde c hipotenusa.

En lugar de eliminar b en la primera ecuación, preferimos derivar ambas ecuaciones respecto a h obteniendo:

$$1 + b' + \frac{2h + 2bb'}{2\sqrt{h^2+b^2}} = 0 \qquad \frac{dA}{dh} = \frac{1}{2}(b + hb')$$

$$c + b'c + h + bb' = 0$$

$$b' = -\frac{c+h}{c+b} \quad \text{y sustituyendo en } \frac{dA}{dh}$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{2}\left[b - \frac{h(c+h)}{c+b}\right]$$

para $h = 4$, $b = 3$, se tiene $c = \sqrt{16+9} = 5$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{2}\left[3 - \frac{4(5+4)}{5+3}\right] = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{4\times 9}{8}\right) = -.75 \text{ cm.}$$

Ejerc. 2.- a) Obtener la rapidez de cambio del área de una esfera con respecto a su radio, y evaluarla para $r = 15$.

b) Obtener la rapidez de cambio del área de un rectángulo respecto a la base si el perímetro es dado. Evaluarla para base igual a 10 cm. y perímetro igual a 50 cm.

5 Relaciones entre rapideces de cambio.

De la misma manera que tenemos relaciones entre cantidades, podemos considerar relaciones entre rapideces de cambio las cuales expresamos por ecuaciones.

Ejemplos.- 1) Encontrar la relación entre la rapidez de cambio de volumen V y de radio r con respecto al tiempo t, de una esfera. Si para $r = 2$ cm., el radio crece con una rapidez de $5 \frac{\text{cm.}}{\text{seg.}}$, ¿con qué rapidez crece el volumen?.

Conocemos la relación entre el volumen V y el radio r de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Entonces para encontrar la relación entre $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$:

derivamos con respecto a t ó diferenciamos y luego dividimos entre dt

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt} \qquad dV = \frac{4}{3}\pi r^2\, dr$$

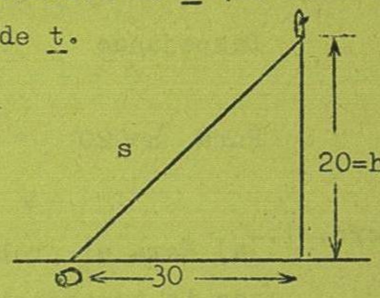
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Para $r = 2$ y $\frac{dr}{dt} = 5$, $\frac{dV}{dt} = 4\pi 2^2 \times 5 = 80\pi$

$$\frac{dV}{dt} = 251 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

En la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ consideramos r como una función de t (la cual no conocemos), por lo que V resulta una función cadena de t.

2) Un barco se aleja perpendicularmente de la costa con una velocidad de $15 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$. ¿Con qué velocidad se aleja de un faro a 30 km del pié de la perpendicular, cuando está a 20 km. de la costa?



Si h distancia a la costa, y s distancia al faro, $\frac{dh}{dt}$ velocidad del barco, y $\frac{ds}{dt}$ velocidad con que se aleja del faro.

Por el teorema de Pitágoras tenemos la ecuación:

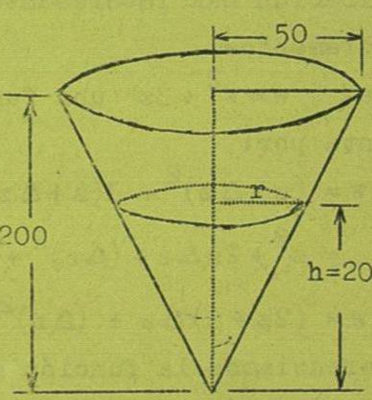
$s^2 = h^2 + 30^2$, que derivando respecto a t, nos dá

$\cancel{2}s \frac{ds}{dt} = \cancel{2}h \frac{dh}{dt}$, de donde $\frac{ds}{dt} = \frac{h}{s}\frac{dh}{dt}$, relación que nos permite calcular $s'(t)$ con los datos dados.

Para $h = 20$, $s = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1300} = 36.1$ km. Entonces

$$\frac{ds}{dt} = \frac{20}{36.1}\times 15 = 8.3 \frac{\text{km}}{\text{seg}}$$

3) Un tanque cónico de 200 cm. de alto y 100 cm. de diámetro, se llena con una rapidez de 500 $\text{cm}^3/\text{seg.}$ Obtener la rapidez con que sube el nivel del agua, cuando está a 20 cm. de altura.



Sea h la altura, V el volumen del agua, y r el radio de la superficie. Entonces:

$\frac{dh}{dt}$ rapidez con que sube el agua.

$\frac{dV}{dt}$ rapidez con que se llena el tanque $= 500 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$

Para calcular $\frac{dh}{dt}$ necesitamos una relación entre $\frac{dh}{dt}$ y $\frac{dV}{dt}$

Para hacer esto, buscamos una relación entre h y V , y ella es volumen de agua en el cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Como no conocemos el valor de r , nos conviene obtenerlo en términos de h , que sí nos dan.

Por triángulos semejantes: $\frac{r}{h} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ de donde $r = \frac{h}{4}$

Sustituyendo $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{3 \times 16}$

Derivando $\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{3 \times 16} \times \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{16} \times \frac{dh}{dt}$

Despejando $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi h^2} \times \frac{dV}{dt}$

Para $h = 20$ $\frac{dh}{dt} = \frac{16 \times 500}{\pi \times 20^2} = \frac{16 \times 500}{\pi \times 400} = \frac{20}{\pi} = 6.38\ \frac{cm}{min}$

Ejerc. 1.- a) Para el problema del ejemplo 1, calcular la rapidez con que crece la superficie, si el volumen aumenta con una rapidez de 200 $\frac{cm^3}{min}$

b) Para el problema del ejemplo 3, calcular la rapidez con que crece el área de la superficie del agua.

c) Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo de base b crece con una rapidez de $5\ \frac{cm}{min}$. Obtener la rapidez con que crece el área.

4.6 Diferenciales e incrementos.

Ya vimos una aplicación de las diferenciales para obtener la derivada de una función, pues el cociente de dos diferenciales nos dá la derivada. Pero la aplicación mas interesante de las diferenciales está en su relación con los incrementos.

Sea $w = z^2 + 3z$ una función de z . Si le damos un incremento a z , w aumenta por:

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 + 3(z + \Delta z) - (z^2 + 3z)$$

$$= z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 + 3z - z^2 - 3z$$

$$\Delta w = (2z + 3)\Delta z + (\Delta z)^2$$

Si diferenciamos la función obtenemos la forma diferencial:

$$dw = (2z + 3)\, dz$$

Esta ecuación se parece mucho a la anterior, y de hecho representa una "buena aproximación", pues si sustituímos las diferenciales por sus incrementos, obtenemos la aproximación:

PROBLEMAS

SECCION 4.1

A.-En cada problema a continuación se dá una función y una abscisa:

a) Dar las coordenadas del punto con la abscisa indicada.

b) Decir si la curva crece o decrece en tal punto.

c) Dar la ecuación de la recta tangente en ese punto.

d) Dar la ecuación de la normal en ese punto (perpendicular a la tangente en el punto de tangencia).

e) Decir para que abscisa se tiene un punto máximo, mínimo, o de inflexión.

f) Decir para que abscisas se tienen tangentes verticales.

1) $a = 2b^3 - 3b + 1$, $b = 1$

2) $m = -2n^4 + n^2 - 1$, $n = -1$

3) $p = -3q^2 + 5q - 1$, $q = 0$

4) $f = g^3 - 2g^2 + 3$, $g = 2$

5) $b = 3w^5 - w$, $w = -2$

6) $h = \frac{3}{k} - k$, $k = 3$

7) $w = 2h^{-2} - 2h^2$, $h = -3$

8) $x = -3b^{-1} + b$, $b = -\pi$

9) $n = \frac{f}{f-1}$, $f = \sqrt{2} + 1$

10) $r = \frac{3s+2}{-s}$, $s = -\frac{1}{3}$

11) $t = (a-3)(2a-5)$, $a = -\frac{1}{2}$

12) $k = b^2(b-5)$, $b = -\frac{5}{2}$

13) $y = \operatorname{sen} h$, $h = \pi$

14) $g = -\tan x$, $x = \frac{3\pi}{4}$

15) $n = x \operatorname{sen} x$, $x = \frac{\pi}{6}$

16) $m = y^2 \cos y$, $y = 1$

17) $f = 3g - \sec g$, $g = -\frac{5\pi}{6}$

18) $h = \cot b - 3b$, $b = -\frac{\pi}{4}$

19) $u = \frac{\cos v}{v+1}$, $v = 0$

20) $w = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, $x = -\frac{\pi}{4}$

21) $a - 3b^4 - 5b^3 = 0$, $b = 1$

22) $y^2 - 2xy + 4 = 0$, $x = 0$

23) $f^2 + 6fg + 36 = 0$, $g = -2$

24) $k = n^2 - \frac{2}{n}$, $n = 1$

25) $y - 3 = 5(x-2)^2$, $x = 0$

26) $y = w^3$, $w = 0$

27) $w = v^4$, $v = 0$

28) $v = x^5$, $x = 0$

29) $g = h^n$, $h = 0$ (n es un entero positivo).

B.-Resolver los siguientes problemas:

1) Para la curva $y = 3x^2 - x + 1$, encontrar:

a) La ecuación de la familia de sus tangentes.

b) La ecuación de su tangente trazada desde (-3,-2).

c) La ecuación de su tangente paralela a $2x - y = 0$

d) La ecuación de la familia de sus normales.

e) La ecuación de la normal que pasa por el punto (-1,-4).

2) Para la curva $a = (b-1)(b^2+b+1)$, encontrar la ecuación de:

a) La familia de sus normales.

b) La normal que pasa por el origen.

c) La familia de sus tangentes.

d) La tangente perpendicular a $9x+y=0$

3) Para la parábola $w = y^2 - 2y - 3$, encontrar la ecuación de:

a) La familia de sus tangentes.

b) La tangente en el vértice.

c) La tangente que forma un ángulo de 45° con su eje de simetría.

4) Para la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, encontrar la ecuación de:

a) La familia de sus tangentes.

b) La tangente trazada desde (5,0).

c) La tangente tal que de ella a la línea $x-y+1=0$ haya un ángulo de 15°

5) Dada la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, encontrar la ecuación de:

a) La familia de sus tangentes.

b) La tangente trazada desde (0,-3).

c) La tangente que pase por el centro de $x^2-2x+y^2=0$.

6) De la familia de círculos $(x-a)^2+y^2 = 5$, determinar la ecuación del que es tangente a $x-3y=0$

7) Encontrar la ecuación de la tangente común a los círculos $x^2+y^2=1$, y $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

8) De la familia de curvas $ay-2x^2+1=0$, ($\underline{a}$ parámetro), encontrar aquella cuya pendiente en el punto de abscisa 3, valga 2.

9) $z=k+xy+wy^2$, en que $\underline{k}$, $\underline{x}$, $\underline{w}$, son parámetros, es una familia de funciones $z(y)$, Determinar la ecuación   de esa familia que tiene un mínimo relativo en $y=3$, y un máximo en $y=-1$.

10) $a=b^{-1}(x-b^3)$, en que $\underline{x}$ es parámetro, es una familia de funciones $a(b)$. Determinar la ecuación   que tiene un máximo en $b=2$.

11) De la familia $t=as^2+bs+c$, donde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, son parámetros,

a) Encontrar la ecuación del miembro que pasa por (-1,4) y que tiene un máximo en $s=2$.

b) Encontrar el elemento con mínimo en $s=-3$ y pasa por (1,5).

12) Encontrar los puntos de intersección de los círculos $a^2-4a+b^2-1=0$ $a^2+b^2-2b-9=0$. Para cada punto de intersección, encontrar las respectivas tangentes, y el ángulo entre ellas (este ángulo es llamado el ángulo de intersección de las dos curvas).

PROBLEMAS

SECCION 4.2

A.-Para las siguientes funciones:

a) Obtener las coordenadas de los puntos máximos, mínimos, de inflexión de tangente vertical y de intersecciones con los ejes.

b) Obtener los intervalos en que la curva crece, decrece, en que es cóncava hacia arriba, hacia abajo, y en que no está definida.

c) A partir de los datos anteriores, graficar la función.

1) $a = w^3 - 3w - 4$ 2) $u = 3y^4 - 4y^3 + 1$

3) $f = \frac{g}{g+1}$ 4) $m = v + \frac{4}{v}$

5) $k = 1 + 2h - 2h^2 - 2h^3$ 6) $x = 2n^3 - 3n^2 - 36n$

7) $z = 2b^5 - 5b^2$ 8) $u = r^5 - 5r^3$

9) $t = s(s-4)^2$ 10) $t = x^2(x-4)$

11) $h = 2j^3 - j^2 - 36j + 25$ 12) $m = (p-2)^3$

13) $c(q+1)^2 = 4$ 14) $(4-z^2)r = 8$

15) $s = f + f^{-2}$ 16) $x = \frac{1}{y} + y^2$

17) $4b = m^3(m-3)$ 18) $16n = 48 + h^4 - 32h$

19) $e = 24w^2 - w^4$ 20) $20f = 5s^4 - 4s^5$

21) $y = \text{sen } x$ 22) $h = \tan k$

23) $p = x \cos x$ 24) $k = \text{sen } j^2$

25) $f = \frac{\text{sen } g}{g}$ 26) $t = x^2 - \sec x$

B.-En los siguientes problemas se dán características de una curva en un intervalo, dibujar la gráfica aproximada de esa curva:

1) $y' > 0$, $y'' > 0$ 2) $y' < 0$, $y'' < 0$

3) $y' < 0$, $y'' > 0$ 4) $y' > 0$, $y'' < 0$

C.-En los siguientes problemas se dan en tal orden, las características de una curva a la izquierda de un punto de abscisa $\underline{a}$, en el punto , y a la derecha del punto. Dibujar la gráfica aproximada alrededor de tal punto:

1) A la izquierda del punto de abscisa $\underline{a}$: $y' < 0$, $y'' > 0$

En el punto de abscisa $\underline{a}$: $y' = 0$, $y'' > 0$

A la derecha del punto de abscisa $\underline{a}$: $y' > 0$, $y'' > 0$.

2) Idem.: $y' > 0$, $y'' < 0$; $y' = 0$, $y'' > 0$; $y' > 0$, $y'' > 0$.

3) Idem.: $y' < 0$, $y'' < 0$; $y' = 0$, $y'' > 0$; $y' > 0$, $y'' > 0$.