Capítulo V
INTEGRAL Y AREA

5.1 Area.

En geometría se vé como calcular el área de varias superficies planas, como rectángulos, triángulos, polígonos. El método es como sigue: se corta la figura en partes cuyas áreas ya sabemos calcular, y se suman las áreas de las partes. Este es el método clásico que se aplica al polígono, al triangularlo y calcular el área de cada triángulo.

También se vé como calcular el área de un círculo, pero entonces el método es radicalmente distinto. Aquel método que sirve tan bien para calcular áreas de figuras con lados rectos, no trabaja para figuras con lados curvos. La intuición nos dice que para estas últimas figuras, debe poder medirse su área. Y es por ello que se hace necesaria una extensión de la definición de medida del área, para que incluya figuras con lados curvos, como círculos, elipses, cicloides, etc.

El método que dá la Geometría para medir el área del círculo consiste en considerar el área de polígonos inscritos en el círculo. Tomamos una sucesión infinita de polígonos regulares inscritos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ tales que sus lados se hagan cada vez mas numerosos, por ejemplo, que el polígono P_n tenga $4n$ lados para cualquier valor de n. Entonces los polígonos se acercan cada vez más al círculo. Si A_n es el área del polígono P_n, se forma la sucesión infinita de números $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$

Definimos el área del círculo como: $\lim_{n \to \infty} A_n$.

Luego el área de un círculo es el límite del área de polígonos que se acercan cada vez más a él.

Un método similar se usa para definir el área de cualquier figura. Por ejemplo, dada la ecuación $x = y^2$, graficándola en el plano cartesiano podemos considerar el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 5$ (Fig 5.1) Para definir su área, cortamos el segmento de 1 a 5 en partes iguales, y sobre cada di-

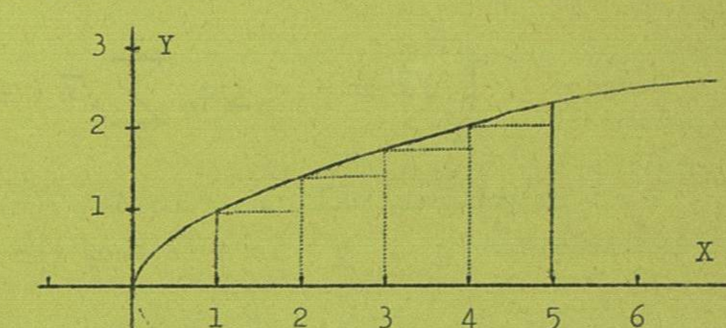

Fig. 5.1.-Definición de área bajo curva.

visión levantamos un rectángulo hasta la curva. En la fig. 5.1 mostramos ésto para cuatro rectángulos.

El área de cada rectángulo es: base × altura. La base es $\underline{1}$, y la altura está dada por $y(x) = \sqrt{x}$, donde $\underline{x}$ toma los valores de cada división. Luego su área es $y(x) \times 1$, y la suma de las áreas es:

$$\sum_{1}^{5} y(x) \times 1 = \sum_{1}^{5} \sqrt{x} \quad \text{que nos dá}$$

$$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 1 + 1.41 + 1.72 + 2$$

$$= 6.13\ldots$$

Repitiendo este proceso con mas divisiones, obtenemos otra suma. En general, si la base de cada rectángulo es Δx, la suma de sus áreas es

$$\sum_{1}^{5} y(x)\,\Delta x = \sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,\Delta x \,.$$

Mientras mas pequeño tomemos Δx, los rectángulos inscritos se pegan mas a la curva. Entonces, tomando una sucesión de incrementos $(\Delta x)_1$, $(\Delta x)_2$, $(\Delta x)_3$, ..., $(\Delta x)_n$, ... tal que $(\Delta x)_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, obtenemos una sucesión de sumas:

$$\sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_1 \,,\quad \sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_2 \,,\quad \sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_3 \,,\ \ldots ,\ \sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_n, \ldots$$

Cada suma representa el área total de los rectángulos inscritos en la curva tomándolos cada vez mas delgados. Finalmente:

Definimos el área bajo la curva como: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_n$

Denotamos esta área con el símbolo $\int_1^5 \sqrt{x}\,dx$ (léase: $\underline{\text{integral}}$ de $\underline{1}$ a $\underline{5}$ de $\sqrt{x}\,dx$).

Luego: $$\int_1^5 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{5} \sqrt{x}\,(\Delta x)_n$$

En general, dada una función $z(x)$, al área bajo su curva entre las abscisas $\underline{a}$ y $\underline{b}$, la denotamos por:

$$\int_a^b z(x)\,dx \,.$$

Cuando sabemos qué función de $\underline{x}$ es $z(x)$, por ejemplo, que sea $z = x^3 + 1$, la sustituímos en la integral, obteniendo:

$$\int_a^b (x^3 + 1)\,dx \,.$$

El símbolo $\int_a^b z(x)\,dx$ nos sugiere la definición del área bajo la curva. El signo de $\underline{\text{integrar}}$ $\int$ es una Σ enderezada. Los $\underline{\text{límites de integración}}$ $\underline{a}$ y $\underline{b}$ se ponen para indicar de dónde a dónde se toma el área. $\underline{a}$ se llama $\underline{\text{límite inferior}}$ y $\underline{b}$ $\underline{\text{límite superior}}$.

$\underline{z(x)\,dx}$ representa el área de un rectángulo (altura × base), siendo $z(x)$ su altura y $\underline{dx}$ su base. Usamos $\underline{dx}$ en lugar de $\underline{\Delta x}$ para indicar que se tomó el límite cuando $\Delta x \longrightarrow 0$.

Entonces $\int_a^b z(x)\,dx$ sugiere la suma de áreas de rectángulos tomados de $\underline{a}$ hasta $\underline{b}$, mas la idea de tomar el límite.

Si tratamos de calcular $\int_a^b z(x)\,dx$ a partir de su definición, notamos que es un método impráctico por lo largo y engorroso. Entonces, uno de los objetivos del Cálculo es dar métodos para hacer este cómputo mas corto y sencillo. Con este fin introducimos el concepto de integral en la siguiente sección.

Ejerc. 1.- a) Exprese en la forma de integral el área bajo la curva $z = x^2 - 2$, entre -1 y 3; entre 2 y $\sqrt{8}$.

b) Dada la curva $y = \frac{1}{w}$, obtener el área total de rectángulos de 1 a 2, cortando el segmento en 10 partes iguales.

5.2 Integral indefinida.

Dada una función, como $y = x^3 - 3x + 1$, su derivada es otra función: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$. Conversamente, si nos dán la función $3x^2 - 3$, nos podemos preguntar qué función $F(x)$ al derivarla, nos daría $3x^2 - 3$. Naturalmente se nos ocurre $x^3 - 3x + 1$. Entonces llamamos a $x^3 - 3x + 1$ la $\underline{\text{antiderivada}}$ de $3x^2 - 3$.

Pero también $x^3 - 3x + 4$ tiene por derivada $3x^2 - 3$, y en general $x^3 - 3x + C$, donde C constante, tiene por derivada $3x^2 - 3$. Luego la función tiene muchas antiderivadas. A la familia de antiderivadas la llamamos integral indefinida ó integral y la denotamos con el símbolo $\int (3x^2 - 3)\, dx$. Nó es pura coincidencia que usemos el mismo símbolo, pero sin límites que para el área bajo la curva $\int_a^b (3x^2 - 3)dx$. Los escribimos así por la estrecha relación que existe entre los dos, como pronto veremos, y que nos permite calcular el área bajo una curva.

La familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ es $x^3 - 3x + C$, luego

$$\int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C .$$

Y en general, dada cualquier función $y(x)$, si $F(x)$ denota una de sus antiderivadas entonces :

$$\int y(x)\, dx = F(x) + C$$

Nótese que no introducimos una notación especial para la antiderivada, sino que en el momento oportuno le damos tal notación a un símbolo de función como lo es $F(x)$.

Así, la integral de las siguientes funciones es :

1) $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$ ya que $\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) = \frac{3x^2}{3} = x^2$.

2) $\int \text{sen } z\, dz = -\cos z + C$ ya que $\frac{d}{dz}(-\cos z) = -(-\text{sen } z) = \text{sen } z$

3) $\int 3\, dw = 3w + C$ ya que $\frac{d}{dw}(3w) = 3$

4) $\int \sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$ ya que $\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right] =$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}(x+1)^{1/2} = \sqrt{x+1}$$

Entonces, para obtener la integral de una función, basta con ingeniarse en buscar otra función cuya derivada dé lo que estamos integrando y sumarle C (o cualquier otra letra conveniente) para denotar la familia. En la siguiente sección damos reglas de integración que ayudan al ingenio.

5.3 Fórmulas de Integración.

a) Integral de funciones de potencia : x^n .

Al integrar $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

$$\int x^{-5}\, dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$$

notamos que obtenemos otra función de potencia con el exponente aumentado por 1 , y todo dividido entre el nuevo exponente. Luego pensamos que en general :

$$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \qquad n \neq -1 .$$

Para demostrarlo derivamos : $\frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}}{n+1}) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$. Luego la identidad es verdadera. Excepto que cuando $n = -1$, nos dá

$$\int x^{-1}\, dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0}$$

con denominador cero, por lo que la identidad no sirve en este caso. Mas tarde se verá a qué es igual esta última integral, una función estrechamente ligada con la función logaritmo.

Aplicando la identidad a :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\, dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y} + C .$$

Una generalización de la identidad dada es :

$$\int (x+a)^n\, dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \text{ y } a \text{ constante.}$$

Ejerc. 1.- Integrar x^4 , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[3]{w}$, $(x+1)^5$, $\frac{1}{(x-3)^2}$.

b) Integral de Suma de Funciones.

Al integrar $\int (x^3 + x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$, notamos que obtenemos el mismo resultado integrando separadamente $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}$, $\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$, y luego sumando los resultados, es decir :

$$\boxed{\int (u+v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx}$$

es decir, al integrar una suma de términos, podemos separarlos e integrar-- los independientemente.

Para más términos, el resultado es similar: la integral de una suma de términos, es igual a la suma de las integrales de los términos.

$$\int (u+v+w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx .$$

Así,
$$\int (z^3 - 3z^2 + z + 1)\,dz = \int z^3\,dz - \int 3z^2\,dz + \int z\,dz + \int dz$$
$$= \frac{z^4}{4} - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + C .$$

Ejerc. 2.- Integrar $\int (3z^2 - z + 1)\,dz$, $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^3}\,dx$

c) Sacar constante fuera del signo de integrar.

Al integrar $\int 5x^2\,dx = \frac{5x^3}{3} + C$ notamos que dá lo mismo sacar el 5 pri-- mero y luego integrar: $\int 5x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = \frac{5x^3}{3} + C$.

Luego en general, para cualquier número $\underline{C}$ y función $u(x)$:

$$\boxed{\int C u\,dx = C\int u\,dx}$$

Así, para integrar $\int \frac{3w}{\sqrt{5}}\,dw = \frac{3}{\sqrt{5}}\int w\,dw = \frac{3w^2}{2\sqrt{5}} + C$.

Hay que fijarse de no sacar fuera de la integral una letra que de penda de la <u>variable de integración</u>. Por ejemplo, al integrar $x \cos x$, hay la tentación de escribir:

$$\int x \cos x\,dx = x\int \cos x\,dx = x(\operatorname{sen} x + C)$$

pero al derivar $x(\operatorname{sen} x + C)$ no se obtiene $x \cos x$ como fácilmente - puede comprobarse. Luego <u>nó</u> se puede sacar del signo de integrar una letra que dependa de la variable de integración.

Ejerc. 3.- Integrar: $\int \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\,dx$, $\int (\sqrt{2}\,b + 3.5\,b^2)\,db$,

$\int \operatorname{sen} 35^\circ\,df$, $\int \sec^2 a\,da$.

5.4 <u>Integral Definida</u>.

Usamos el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ para denotar el área bajo la cur va $f(x)$, desde $x = a$, hasta $x = b$, y usamos $\int f(x)\,dx$ para denotar la familia de antiderivadas de $f(x)$. Ahora establecemos la estrecha re- lación que existe entre uno y otro. La relación es:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

donde $F(x)$ es una cualquiera de las antiderivadas denotadas por $\int f(x)\,dx$.

Ejemplos: 1) $\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

2) $\int_0^1 (2x+1)\,dx = \Big[x^2 + x\Big]_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$

Luego, el área bajo la curva $y = x^2$ de 1 a 3, es $\frac{26}{3}$ (vea Fig. 5.2). Sin gran trabajo hemos obte- nido la medida de un área cu yo cálculo a primera vista parece muy complicado. Con este poderoso resultado, lla mado con justicia el "Teorema Fundamental del Cálculo", obtener el área de figuras curvas es relativamente sen- cillo: consiste en inte--- grar y tomar la diferencia - de los contravalores de los límites de integración.

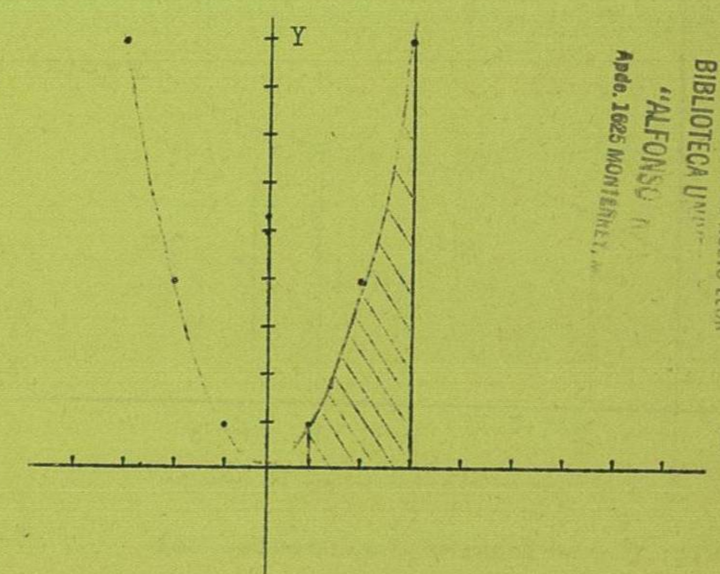

Fig. 5.2.- Area bajo $y = x^2$

Ejerc. 1.- Evaluar: $\int_2^{10} \frac{dx}{x^2}$, $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} z\,dz$, $\int_{-1}^{4} (x^4 - 3x^2)\,dx$.

Para demostrar el teorema fundamental del Cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$,

formamos la siguiente función : para cada abscisa b , se obtiene un número que dá el área bajo la curva $f(x)$ entre a y b . Luego, si a b le asignamos este número, es decir :

$$b \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

obtenemos una función. Denotamos con A la variable dependiente de esta función, por lo que $A = A(b)$. Ahora demostramos gráficamente que esta función $A(b)$ es una antiderivada de $f(x)$, es decir $\frac{dA}{db} = f(b)$. Para hacer ésto, recordamos la definición de derivada como límite del cociente del incremento del contravalor, entre el incremento del valor.

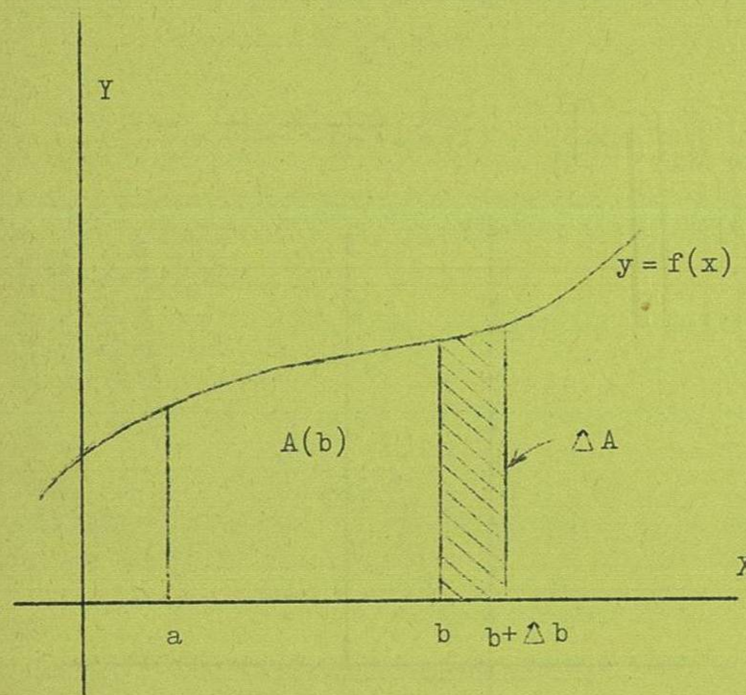

Fig. 5.3.- Teorema Fundamental del Cálculo.

Como se vé en la Fig. 5.3 , $A(b)$ es el área bajo la curva $f(x)$ desde a hasta b. Dándole un incremento Δb al valor b, el contravalor ΔA aumenta por el área sombreada. Esta área la podemos aproximar por un rectángulo de altura $f(b)$ y base Δb . Luego $\Delta A \simeq f(b)\Delta b$ o sea $\frac{\Delta A}{\Delta b} \simeq f(b)$.

Cuando Δb tiende a cero, esta aproximación mejora, pues el rectángulo se aproxima a la curva. Luego en el límite tenemos la igualdad:

$$\frac{dA}{db} = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta A}{\Delta b} = f(b) \quad \text{LCDD.}$$

Entonces $A(b)$ es una de las antiderivadas de $f(x)$ y solo falta averiguar cuál de ellas es. Si $F(b)$ es una antiderivada, la familia está dada por $F(b) + C$, donde C constante, por lo que solo falta determinar C. Queremos C tal que $A(b) = F(b) + C$. Para $b = a$ sabemos que

$A(a) = 0$ (por definición $A(a)$ es el área desde a hasta a). Luego $A(a) = 0 = F(a) + C$, de donde $C = - F(a)$, y entonces :

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) . \qquad \text{LCDD.}$$

5.5 Cálculo de Areas .

En esta sección damos varios ejemplos de como calcular áreas de figuras dadas :

a) Obtener el área bajo un arco de la curva $z = \operatorname{sen} x$.

Graficando la función $\operatorname{sen} x$, en la fig. 5.4 vemos que hay un arco comprendido entre las abscisas 0 y π .

Para calcular su área, cortamos el arco en rectángulos verticales de base Δx y que tienen por altura $\operatorname{sen} x$. Luego su área es $(\operatorname{sen} x)(\Delta x)$.

Sumándolos todos de 0 hasta π y tomando el límite, nos dá

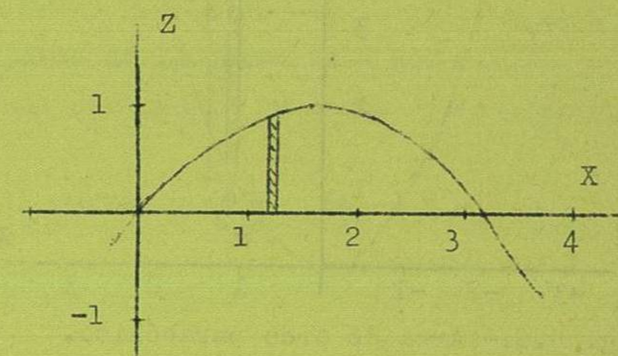

Fig. 5.4.- Area de un arco de sen x

$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \Big[- \cos x\Big]_0^\pi = (- \cos \pi) - (- \cos 0) = 1+1 = 2 .$$

b) Obtener área bajo la curva $z = w^3$ de -2 a 0 .

En la fig. 5.5 mostramos el área entre dicha curva y el eje de abscisas, entre -2 y 0 , cortada en rectángulos de base Δw , y altura w^3. Luego el área descrita en este párrafo es :

$$\int_{-2}^0 w^3\,dw = \left[\frac{w^4}{4}\right]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}$$

$$= -4 .$$

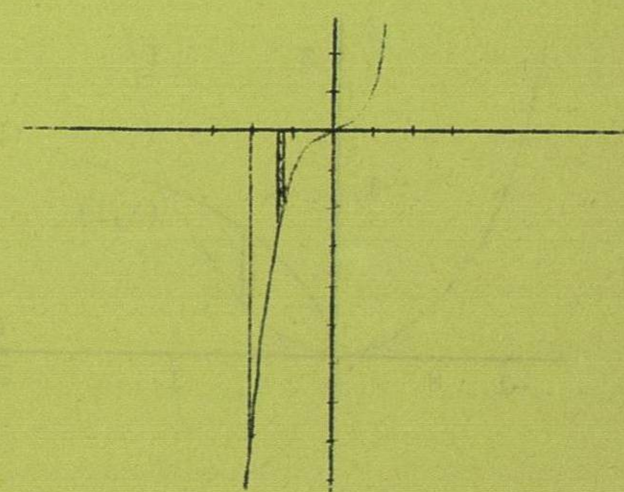

Fig. 5.5.- Areas negativas.

Nos dió un resultado negativo. La razón de ésto es que el área queda bajo el eje W , luego al tomar w^3 como altura, resulta un número negativo y resulta por tanto una suma negativa. Pero el área de la figura es simplemente <u>4</u> .

c) Obtener el área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

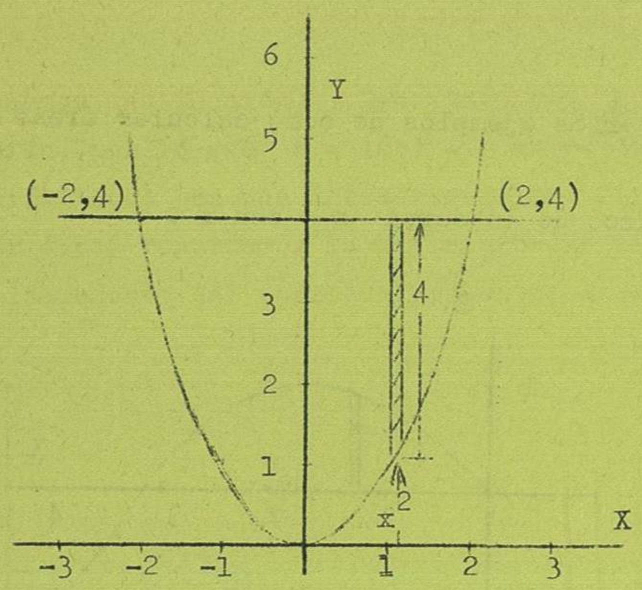

Fig. 5.6.- Area de arco parabólico.

Graficando las dos curvas como en la fig. 5.6 , podemos cortar la figura en rectángulos de base Δx y altura $4 - x^2$. Obtenemos $4 - x^2$ en lugar de 4, ya que los rectángulos no se extienden hasta el eje X, sino solo hasta la parábola. Para saber de qué abscisa a qué abscisa se extienden los rectángulos, tenemos que encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de $y = 4$ y $y = x^2$. Resolviéndolas simultáneamente tenemos $4 = x^2$ de donde $x = \pm 2$. Luego (2,4) , (-2,4) son los puntos de intersección, y los rectángulos se extienden del -2 al 2. Entonces el área es:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right] = \left(4 \times 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} .$$

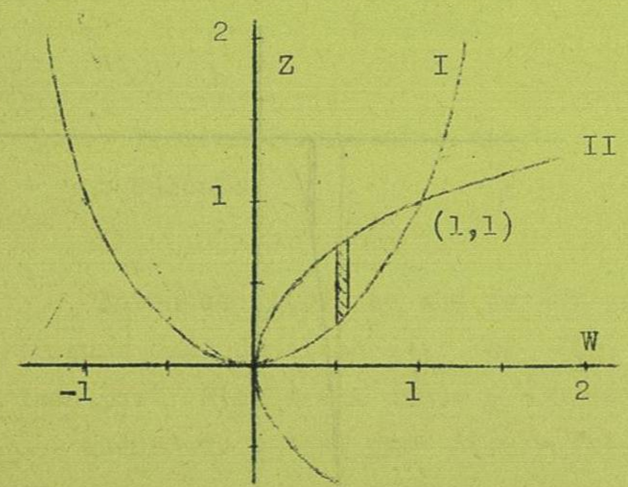

Fig. 5.7.- Area entre dos curvas.

d) Obtener el área limitada por las curvas $z=w^2$, $w=z^2$. Graficándolas como en la fig. 5.7 , podemos cortar el área en rectángulos verticales de base Δw y altura igual a la altura de la curva II menos la altura de la curva I .

La altura de la curva I es <u>z</u> donde $z = w^2$

y la de la curva I es <u>z</u> donde $w = z^2$. Luego, en términos de w obtenemos w^2 y $\sqrt{w}$ respectivamente. Entonces la altura del rectángulo es $\sqrt{w} - w^2$. Los rectángulos empiezan en (0,0) hasta la siguiente intersección dada por las soluciones del sistema :

$$\begin{array}{l} z = w^2 \\ w = z^2 \end{array} \quad \text{luego,} \quad \begin{array}{c} z = z^2 \\ \text{de donde} \end{array} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ w = 1 \end{array} , \text{ ó } \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ w = 0 \end{array} .$$

Luego el área deseada es :

$$A = \int_0^1 (\sqrt{w} - w^2)\,dx = \left[\frac{2}{3} w^{3/2} - \frac{w^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}\,1^{3/2} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} .$$

$$A = \frac{1}{3} .$$

Ejerc..- a) Obtener el área de un arco de la curva $x = \cos z$.

b) Obtener el área limitada por $y = x^2$ y recta $y = a$, en que <u>a</u> es parámetro .

c) Obtener el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ de -3 a -1 .