UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA, CIENCIAS Y LETRAS

ESCUELA DE MATEMATICAS

apuntes de geometría analìtica

MONTERREY, N. L., SEPTIEMBRE DE 1957

GEOMETRIA ANALITICA

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA, CIENCIAS Y LETRAS.

Escuela de Matemáticas.

APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA PARA LA ESCUELA DE BACHILLERES

Septiembre de 1957.

APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA

CAPITULO PRIMERO

GENERALIDADES.

1.- DEFINICION.- La geometría Analítica estudia la relación entre las propiedades geométricas y algebráicas, es decir, que ayuda al estudio de aquéllas por medio del análisis algebraico y estudia también propiedades de las ecuaciones por medio de la Geometría.

Se considera como iniciador de la Geometría Analítica a René Descartes (1596 - 1650), ya en épocas anteriores se estudiaban propiedades geométricas por métodos algebraicos e inclusive Arquímedes (287 - 212 A.C.) conocía el método de localizar puntos por medio de coordenadas, sin embargo fué Descartes el primero que escribió un tratado en el que se expuso la Geometría Analítica en conceptos que dieron origen al estudio formal de esta rama de las Matemáticas.

2.- ESCALA NUMERICA.- Si se considera una recta ilimitada en ambos sentidos y se toma un punto sobre dicha recta como cero u origen, para marcar hacia ambos lados otros puntos a distancias iguales entre sí, puede hacerse corresponder cada uno de estos puntos con los números enteros 1, 2, 3, etc., en un sentido; -1, -2, -3, etc., en el otro sentido. Si la recta se toma horizontal, Fig. 1, es costumbre que los números positivos se marquen a la derecha y los negativos a

APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA

CAPITULO PRIMERO

GENERALIDADES.

1.- <u>DEFINICION</u>.- La geometría Analítica estudia la relación entre las propiedades geométricas y algebráicas, es decir, que ayuda al estudio de aquéllas por medio del análisis algebraico y estudia también propiedades de las ecuaciones por medio de la Geometría.

Se considera como iniciador de la Geometría Analítica a René Descartes (1596 - 1650), ya en épocas anteriores se estudiaban propiedades geométricas por métodos algebraicos e inclusive Arquímedes (287 - 212 A.C.) conocía el método de localizar puntos por medio de coordenadas, sin embargo fué Descartes el primero que escribió un tratado en el que se expuso la Geometría Analítica en conceptos que dieron origen al estudio formal de esta rama de las Matemáticas.

2.- <u>ESCALA NUMERICA</u>.- Si se considera una recta ilimitada en ambos sentidos y se toma un punto sobre dicha recta como cero u origen, para marcar hacia ambos lados otros puntos a distancias iguales entre sí, puede hacerse corresponder cada uno de estos puntos con los números enteros 1, 2, 3, etc., en un sentido; -1, -2, -3, etc., en el otro sentido. Si la recta se toma horizontal, Fig. 1, es costumbre que los números positivos se marquen a la derecha y los negativos a la izquierda.

Fig. 1

Esta correspondencia entre los números enteros y los puntos de la recta se puede extender a todos los números reales, pues fácilmente se ve cómo se puede hacer coincidir cada número real con un punto de la recta y sólo uno, e inversamente como a cada punto de la recta corresponde un número real y sólo uno.

3.- ABSCISA.- Se llama abscisa de un punto, a la distancia entre dicho punto y el origen o sea el cero de la escala, es positivo cuando está a la derecha del cero y negativo a la izquierda.

4.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS SOBRE UN EJE.- La distancia entre dos puntos se mide por la diferencia de abscisas, si se llama x_1 a la abscisa del punto A y x_2 a la del punto B, la distancia $AB = x_2 - x_1$; qúe es positiva cuando va de izquierda a derecha. La distancia $BA = x_1 - x_2$ ó sea que $AB = -BA$ (Fig. 2)

Fig. 2

5.- COORDENADAS CARTESIANAS.- Si se consideran los puntos sobre un plano, se comprende que no se podrían localizar sabiendo solamente el valor de su abscisa, puesto que ésta localiza únicamente los puntos sobre una línea.

Para localizar un punto en un plano, se trazan dos ejes perpendiculares entre sí, como se muestra en la Fig. 3.

Al eje marcado con X X' se le llama eje de las abscisas o eje de las X, al perpendicular a éste se le llama eje de las ordenadas o eje de las Y; estos dos ejes dividen al plano en cuatro partes que se llaman cuadrantes. El primer cuadrante es el que está arriba del eje de las X y a la derecha del eje de las Y; el segundo cuadrante es el que está arriba del eje de las X y a la izquierda del de las Y; el tercer cuadrante el que está abajo del eje de las X y a la izquierda del eje de las Y y el cuarto el que está abajo del eje de las X y a la derecha del eje de las Y.

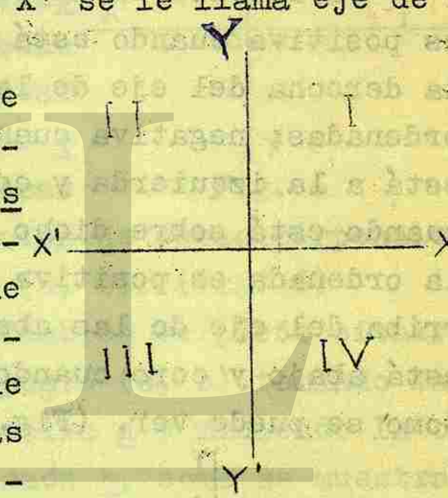

Fig. 3

A la distancia de un punto P, (Fig. 4) al eje de las ordenadas se le llama abscisa del punto y se designa por x. A su distancia al eje de las abscisas se le llama ordenada y se designa por y.

La abscisa X y la ordenada Y del punto P, son sus coordenadas y se escriben entre paréntesis (x, y) anotando primero la abscisa.

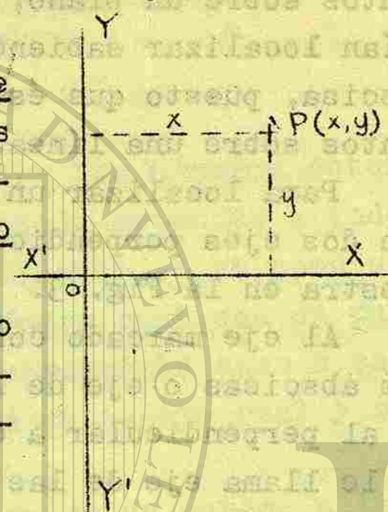

Fig. 4

La abscisa de un punto es positiva cuando está a la derecha del eje de las ordenadas; negativa cuando está a la izquierda y cero cuando está sobre dicho eje la ordenada es positiva cuando el punto está arriba del eje de las abscisas; negativa cuando está abajo y cero cuando está sobre dicho eje. Como se puede ver, (Fig. 5), en el primer cuadrante ambas coordenadas son positivas, en el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva en el tercero tanto la abscisa como la ordenada son negativas; en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y

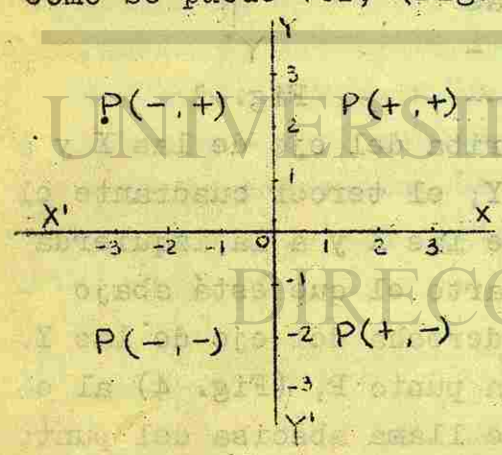

Fig. 5

la ordenada negativa.

En esta forma a cada pareja de números reales corresponde solamente un punto del plano y cada punto del plano queda definido por una y sólo una pareja de números reales.

Dado un punto (a, b) para situarlo en el plano se toma a partir del origen, sobre el eje de las abscisas, la distancia a y sobre el eje de las ordenadas la distancia b. Se levantan perpendiculares a los dos ejes en los extremos de esas distancias; la intersección de estas perpendiculares localizará el punto (a, b). (Fig. 6)

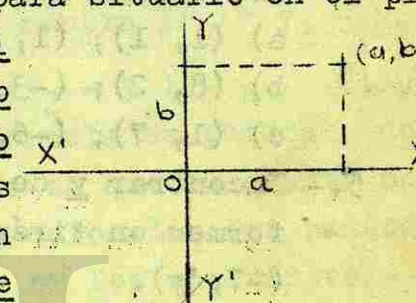

Fig. 6

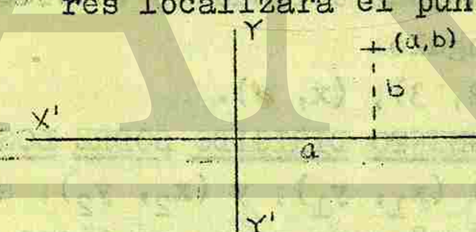

Fig. 7

También se puede situar el punto (a, b) tomando la abscisa a y midiendo la ordenada b, como se muestra en la Fig. 7.

EJERCICIO I

1.- Encontrar la distancia entre los siguientes puntos. (sobre un eje). a) $x_1 = 7$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = 5$; $x_2 = 8$ c) $x_1 = -3$; $x_2 = -5$
d) $x_1 = -8$; $x_2 = 7$ e) $x_1 = 7$; $x_2 = -10$

2.- Situar los siguientes puntos: a) (5, 4) ; b) (-3, 8); c) (2, -5); d) (-4, -3); e) (0, -4)

f) (8, 0); g) (0, 0).

3.- Dibujar los triángulos cuyos vértices son:

a) (4, 5); (-3, 4); (2, -6)

b) (-3, -7); (5, 5); (4, 0)

c) (0, 3); (-2, ½); (-4, 3).

4.- Determinar las áreas de los triángulos sig.:

a) (1, 1); (1, 6); (7, 1).

b) (8, 2); (-3, 2); (-3, -7)

c) (1, 7); (-6, -5); (1, -5).

5.- Encontrar y de modo que los siguientes puntos formen un tiránqulo rectángulo: (2, 6); (2, 2); (-7, y).

6.- Encontrar la hipotenusa del siguiente triángulo (1, 1); (4, 1); (1, 5).

7.- Encontrar las coordenadas del cuarto vértice del siguiente rectángulo:
(-2, 7); (4, 3); (-2, 3); (x, y).

6.- <u>PROYECCION DE UN SEGMENTO DIRIGIDO SOBRE LOS EJES COORDENADOS</u>.- Si (x_1, y_1); y (x_2, y_2); son los puntos A. y B Fig. 8 y se unen, se tiene el segmento de recta AB. La proyección de este segmento sobre el eje de las abscisas tomado en sentido AB, será $x_2 - x_1$ y la proyección sobre el eje de las ordenadas será $y_2 - y_1$.

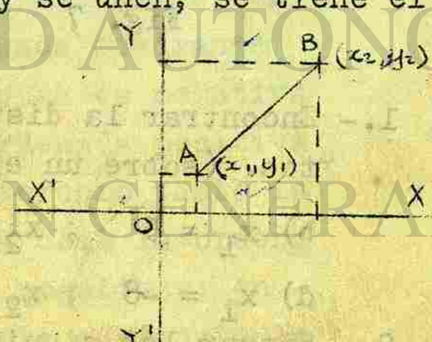

Fig. 8

Si el segmento se toma en la dirección BA, sus proyecciones serán $x_1 - x_2$ y $y_1 - y_2$.

7.- <u>DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS</u>.- La distancia P_1P_2 Fig. 9, o sea <u>d</u> es:

$$d = \sqrt{P_1A^2 + AP_2^2}$$; pero P_1A = proyección del segmento sobre el eje de las abscisas igual $x_2 - x_1$; y de la misma manera $AP_2 = y_2 - y_1$

$$\therefore d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \ldots (1)$$

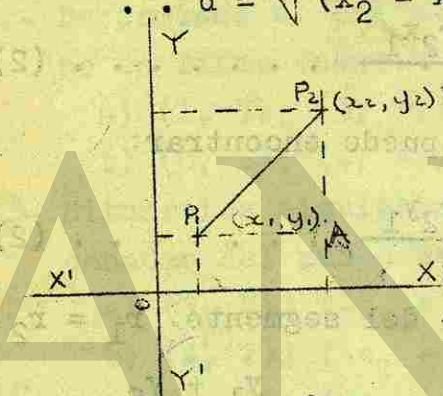

Fig. 9

Esta fórmula es general, no importa en que cuadrante se hallen colocados los puntos ni aún si los cuadrantes son distintos; siempre se tomará la diferencia algebraica entre abscisas y la diferencia algebraica entre ordenadas.

Ejemplo: Sean los puntos (3, -5); (-8, -4)

$$d = \sqrt{(-8 - 3)^2 + (-4 + 5)^2} = \sqrt{122}$$

8.- <u>COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN PARTES PROPORCIONALES A UNA RAZON DADA</u>.- Dados $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ (Fig. 10). Encontrar un punto P (x, y) de tal modo que:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

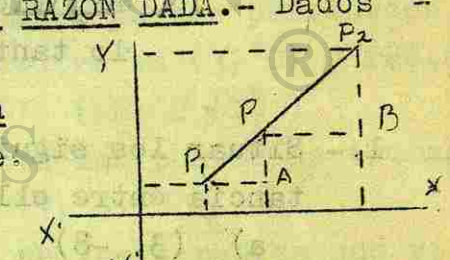

Fig. 10

Por semejanza en los triángulos P_1AP y PBP_2 se - tiene:

$$\frac{P_1A}{PB} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

pero $P_1A = x - x_1$; $PB = x_2 - x$

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{r_1}{r_2} \quad ; \text{ despejando}$$

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \quad . . . . (2)$$

En forma semejante se puede encontrar:

$$y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2} \quad . . . . (2)$$

Si P es el punto medio del segmento: $r_1 = r_2$

$$\therefore \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

N O T A: Si el punto P sobre la recta que une - P_1 y P_2 queda fuera del segmento, o - sea si la división es externa, P_1P y PP_2 tienen direcciones opuestas y por lo tanto su relación es negativa.

EJERCICIO II

1.- Situar los siguientes puntos y encontrar la dis tancia entre ellos:

a) (3, -8) ; (-4, -4)

b) (0, 0) ; (5, -1)

c) (0, 7) ; (7, 0).

d) (-6, -3) ; (-7, -9).

e) (5, 4) ; (-3, -2).

2.- Dados los siguientes vértices, dibujar los trián gulos y encontrar la longitud de sus lados.

a) (2, 6); (-3, -2); (4, -3)

b) (0, 0); (0, -5); (7, 0).

c) (2, 2); (-3, 4); (1, 7).

3.- Determinar si los siguientes tres puntos están o no en línea recta:

a) (1, 5); (3, 9); (-3, -1).

b) (0, 1); (4, -3); (-3, 5).

4.- Situar los siguientes puntos y encontrar las coor denadas del punto medio.

a) (3, 7); (-5, 4).

b) (4, 2); (-4, -6).

c) (7, 5); (3, -1).

d) (-3, -5); (2, 4).

5.- Encontrar las longitudes de las medianas del --- triángulo dado por los siguientes vértices:

A (4, 6); B (2, -4); C (-6, 0).

6.- Decir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a una circunferencia con centro en (3, 0) y radio igual a 4; (3, -4); (2, 15); $(-2, 2\sqrt{10})$

7.- Encontrar las coordenadas de los puntos de trisec ción del segmento (1, 2); (7, 5).

8.- Encontrar las coordenadas de los 4 puntos que dividen al segmento (2, 9); (8, 1) en 5 partes i-- guales.

9.- Demostrar que las diagonales del paralelogramo - cuyos vértices son los puntos (0, 0); (3, 4); - (7, 0); (10, 4), se bisectan mutuamente.

9.- INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA.- Al ángulo que forman la dirección positiva del eje de las ab-- scisas y la dirección positiva de una recta, se le - llama inclinación de la -- recta. La dirección positiva de una recta se considera hacia arriba; entonces la inclinación puede va--- riar de 0° a 180°. En la Fig. 11 la inclinación de L_1 es θ_1 y la inclinación de L_2 es θ_2. La línea recta se considera ilimitada en ambas direcciones. Cuando se toma una fracción de ella se - tiene un segmento de recta, el cual tendrá la -- misma inclinación que la línea a que corresponde. La inclinación del segmento AB, Fig. 12, se en-- cuentra prolongándolo hasta cortar el eje de las x o trazando por cualquier punto del segmento - una paralela al eje de las x.

Fig. 11

A la tangente de la inclinación se le llama Pendiente de la recta.

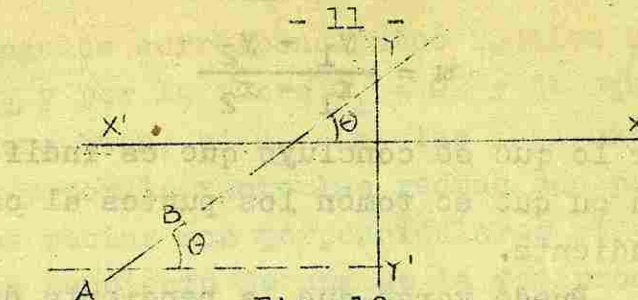

Fig. 12

En la Fig. 11:

Pendiente de L_1 = Tan θ_1

Pendiente de L_2 = Tan θ_2

En Fig. 12, pendiente de AB = Tan θ

Si se tienen dos puntos P_1 (x_1, y_1); P_2 (x_2, y_2) Fig. 13, la pendiente entre ellos, que se designará con la letra "m", estará dada por:

$$m = \tan \theta = \frac{AP_2}{P_1A} \quad ; \text{ pero}$$

$$AP_2 = y_2 - y_1 \quad \text{y}$$

$$P_1A = x_2 - x_1$$

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Puede verse que si en la fórmula (3) se cambian - signos a ambos miembros de la fracción, el valor de "m" no se altera; por lo tanto:

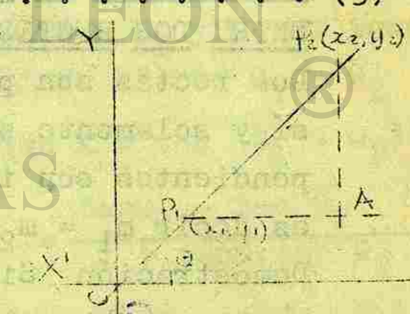

Fig. 13

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

por lo que se concluye que es indiferente el orden en que se tomen los puntos al calcular la pendiente.

Puede verse que la pendiente de una recta L_1 paralela al eje de las abscisas es cero, y la de una recta L_2 paralela al eje de las ordenadas es ∞, Fig. 14.

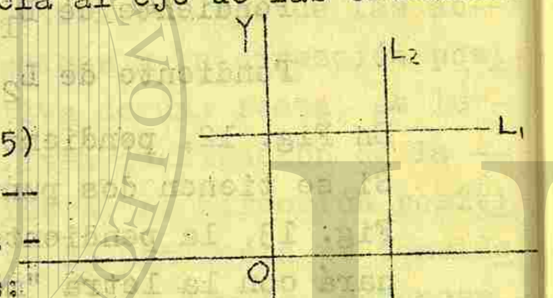

Fig. 14

Ejemplos.

Dados los puntos (1, 5) y (-4, -3) hallar la pendiente de la recta determinada por ellos:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5 - (-3)}{1 - (-4)} = \frac{8}{5} = 1.600$$

Idem para los puntos (-4, 7) y (2, -5)

$$m = \frac{7 - (-5)}{-4 - 2} = \frac{12}{-6} = -2$$

10.- CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS RECTAS.-

Dos rectas son paralelas sí y solamente sí sus pendientes son iguales, es decir $m_1 = m_2$ (Fig.15)

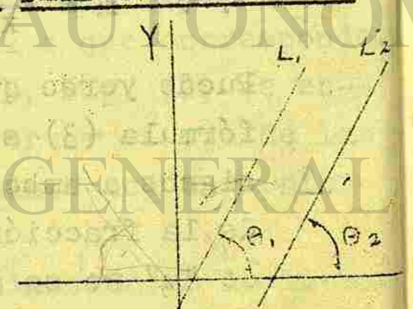

Fig. 15

Demostración. Si las dos rectas son paralelas formarán ángulos correspondientes iguales con el eje

de las $\underline{x}$ y por lo tanto $\theta_1 = \theta_2$ y de aquí $m_1 = m_2$

Ahora bien, si $m_1 = m_2$ las inclinaciones son iguales y por lo tanto las rectas son paralelas.

Dos rectas son perpendiculares sí y solamente sí la pendiente de una es la recíproca y de signo contrario de la otra; o lo que es lo mismo el producto de sus pendientes es igual a -1

Demostración. En la Fig. 16

$\theta_1 = 90° + \theta_2$

$\therefore \tan\theta_1 = \tan(90° + \theta_2)$

$\therefore \tan\theta_1 = -\cot\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$

pero $\tan\theta_1 = m_1$;

$\tan\theta_2 = m_2$

$\therefore m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$; o sea

$m_1 m_2 = -1$

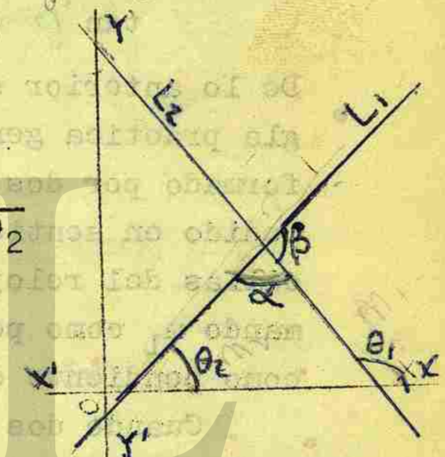

Fig. 17

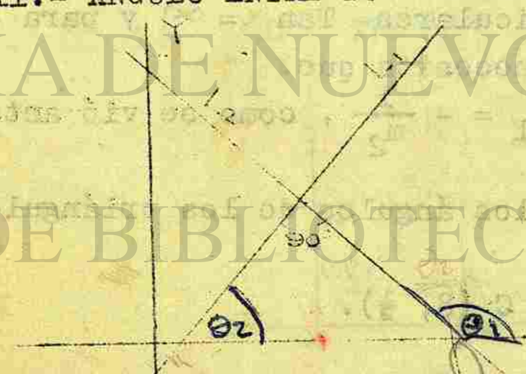

Fig. 16

11.- ANGULO ENTRE DOS RECTAS.-

El ángulo α formado entre dos líneas cualesquiera L_1 y L_2 es igual, (fig. 17) a: $\theta_1 - \theta_2$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

o sea: $\tan \alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ . . . . (4)

donde m_1 es la pendiente de la recta de mayor inclinación para que α sea el ángulo opuesto al eje de las x. Cuando se desee encontrar β, suplemento de α, la fórmula será:

$$\tan \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

De lo anterior se puede deducir la siguiente regla práctica general para encontrar el ángulo formado por dos rectas: Se considera el ángulo medido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) y se aplica la fórmula (4) tomando m_1 como pendiente de la recta final y m_2 como pendiente de la recta inicial.

Cuando dos rectas son paralelas:

$\tan \alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \quad \therefore \quad m_1 = m_2$ como se vió

Si son perpendiculares: $\tan \alpha = \infty$ y para que esto suceda se necesita que:

$1 + m_1 m_2 = 0 \quad \therefore \quad m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, como se vió anteriormente.

Ejemplo. Encontrar los ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

A (1, 1); B (5, 6); C (8, ½).

$-\frac{1/2}{-7/1} = -\frac{1}{14}$

Pendiente AB $= m_c = \dfrac{6 - 1}{5 - 1} = \dfrac{5}{4}$

Pendiente CA $= m_b = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 8} = -\dfrac{1}{14}$

Pendiente BC $= m_a = \dfrac{\frac{1}{2} - 6}{8 - 5} = -\dfrac{11}{6}$

$$\text{Tan A} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{14}}{1 - \frac{5}{56}} = \frac{74}{51} = 1.45098$$

A = 55° 26'

$$\text{Tan B} = \frac{-\frac{11}{6} - \frac{5}{4}}{1 - \frac{55}{24}} = \frac{74}{31} = 2.38709$$

B = 67° 16'

$$\text{Tan C} = \frac{-\frac{1}{14} + \frac{11}{6}}{1 + \frac{11}{84}} = \frac{148}{95} = 1.55789$$

C = 57° 18'

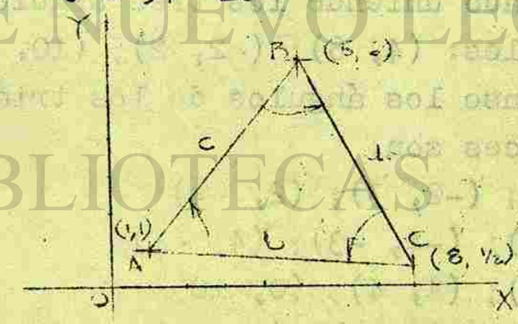

Fig. 18

EJERCICIO III

1.- Encontrar la pendiente y la inclinación de las rectas determinadas por los siguientes pares de puntos:

a) (1, 7); (3, -5). c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

b) (0, 6); (6, 0). d) $(0, 0); \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right)$

2.- Encontrar el valor de la abscisa u ordenada para que los siguientes puntos tengan la pendiente dada.

a) (3, 4); (5, y). $m = -3$

b) (15, 7); (x, -3) $m = \frac{1}{10}$

c) (-7, 5); (3, y); $m = \frac{9}{10}$

d) (-2, -5); (x, -7); $m = 1$

3.- Demostrar que los siguientes tres puntos están en línea recta: (1, 3); (0, 8); (2, -2).

4.- Demostrar que el cuadrilátero ABCD es un rectángulo: A (-1, 4); B (3, 0); C (7, 4); D (3, 8).

5.- Demostrar por medio de los ángulos que el triángulo formado uniendo los tres siguientes puntos es isósceles: (4, 8); (-2, 2); (10, -4)

6.- Encuéntrense los ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

a) (3, 6); (-2, 3); (2, -4)

b) (-1, 5); (-4, -3); (4, -1)

c) (-3, 3); (4, 4); (0, 10)

d) (1, 1); (-3, -5); (7, 2)

e) (5, 1); (-3, -1); (-6, 2)

7.- Encontrar el tercer vértice que se halla sobre el eje de las ordenadas del triángulo rectángulo cuya hipotenusa está definida por los puntos: (-3, 2) y (4, 3).

8.- Los puntos (1, 3) y (5, 1) determinan una recta. Encontrar las coordenadas de un punto sobre esta recta que, unido con el (3, 7) dé otra línea que forme con la primera un ángulo de 45°.

9.- Demostrar que la recta que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, es paralela al tercer lado e igual a su mitad.

C A P I T U L O II

LA LINEA RECTA.

12.- <u>VARIABLES Y CONSTANTES</u>.- En todo problema de Geometría Analítica hay cantidades cuyo valor no cambia a las que se llaman constantes y se representan comúnmente con las primeras letras del alfabeto.

Hay otras cantidades que pueden tomar valores diferentes por lo que reciben el nombre de variables y se representan por las últimas letras del alfabeto.

Ejemplos: En la línea L_1, Fig. 19, la pendiente es una constante, en cambio, las coordenadas de los puntos sobre la recta van cambiando continuamente, por lo tanto son variables.

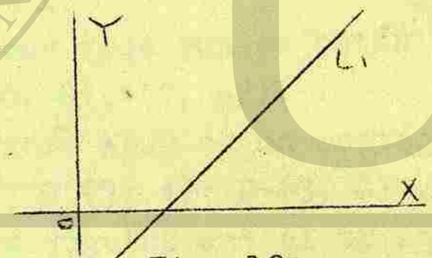

Fig. 19

El volumen de una esfera está dado por la fórmula $V = 4/3\,\pi r^3$. En esta fórmula 4/3 y π son constantes así como el exponente 3, mientras que "r" y "V" pueden tomar valores diferentes y por lo tanto son variables. El valor de V depende del que tenga "r" y se dice que "V" es una función de "r".

13.- <u>ECUACION CON DOS VARIABLES</u>.- Si en una ecuación con dos variables se asignan valores a una de ellas y se encuentran los valores correspondientes de la otra, se obtienen parejas de números que pueden representarse por puntos en un sistema de ejes coordenados. La unión de esos puntos será la gráfica de la ecuación. Se dice también que es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación. Las coordenadas de cualquier punto sobre la gráfica deben satisfacer la ecuación.

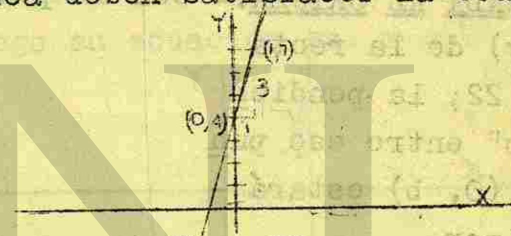

Fig. 20

Ejemplos:

Encontrar las gráficas de las ecuaciones siguientes: 1) $y = 3x + 4$

Dando valores y situando los puntos respectivos se obtiene la gráfica de la Fig. 20.

2) $y^2 = 4x$; a cada valor de "x" corresponden dos valores de "y". Además no puede haber valores negativos de "x", pues darían resultados imaginarios para "y", por lo que la gráfica resulta tal como aparece en la Fig. 21.

VALORES X	0	1	4	9
VALORES Y	0	± 2	± 4	± 6

Tabla de Valores.

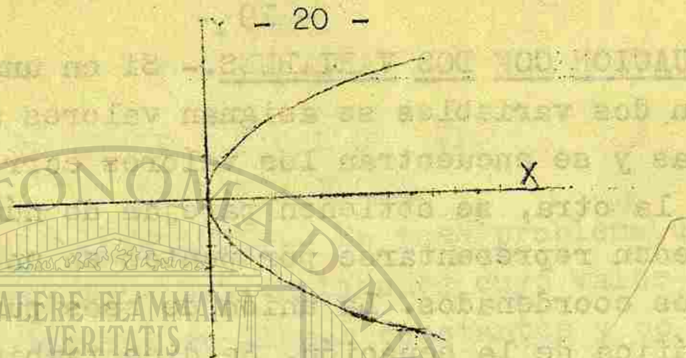

Fig. 21

14.- ECUACION DE UNA RECTA, DADA SU PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN.- Sea un punto cualquiera (x, y) de la recta Fig. 22; la pendiente "m" entre ese punto y (0, b) estará dada por:

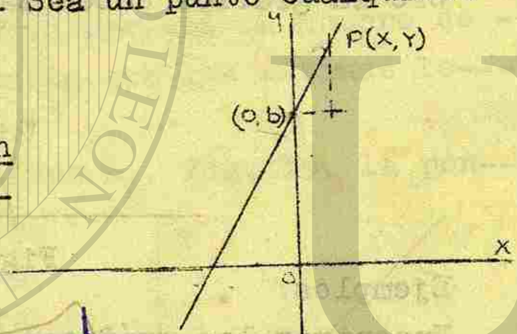

Fig. 22

$$m = \frac{y - b}{x}$$

$$\therefore\ y = mx + b \quad . . . (5)$$

que es la eucación de una recta en función de su pendiente "m" y la ordenada al origen "b".

Como se dedujo esta ecuación se procede para encontrar la de cualquier lugar geométrico, es decir, se toma un punto (x, y) sobre el lugar geométrico y se relacionan sus coordenadas de modo que expresen las condiciones que rigen a dicho lugar geométrico. La ecuación resultante, que contiene a (x, y) y las constantes del problema es la ecuación del lugar geométrico.

Analizando la ecuación (5) se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1.- Si la recta pasa por el origen b = 0 y la ecuación se reduce a $y = mx$.

2.- Si la recta es paralela al eje de las abscisas, la pendiente será igual a cero, m = 0 , y la ecuación será: $y = b$.

3)- Si la recta no corta al eje de las ordenadas tendrá que ser paralela a dicho eje y por lo tanto todos los puntos de la recta tendrán la misma abscisa, luego su ecuación es: $x = k$ (Fig. 23).

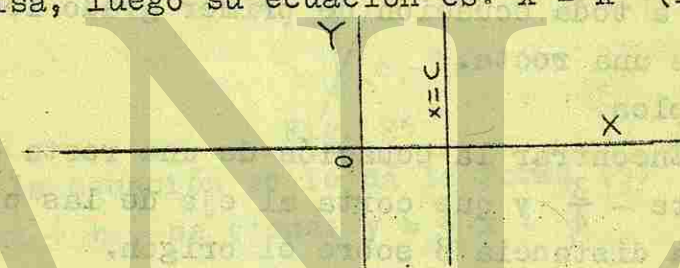

Fig. 23

15.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA RECTA.- La ecuación de cualquier recta es de primer grado, porque cualquiera recta o corta al eje de las "y" y su ecuación es de la forma $y = mx + b$ ó es paralela a él y su ecuación es $x = k$, y ambas ecuaciones son de primer grado.

Ahora bien, siempre es posible reducir una ecuación de primer grado en "x" e "y" a la forma $Ax + By + C = 0$.

Despejando "y" se tiene: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ que -

c) $m = 1$; $b = 0$ e) $m = 5$; $b = 2$

d) $m = \frac{4}{3}$; $b = -\frac{5}{8}$ f) $m = -1$; $b = -2$

2.- Encuéntrense las ecuaciones y dibújense las rectas cuyas inclinaciones (θ) y cuyas ordenadas al origen (b) tienen los siguientes valores:

a) $\theta = 30°$; $b = 3$ d) $\theta = 135°$; $b = -6$

b) $\theta = 45°$; $b = -1$ e) $\theta = 0°$; $b = 2$

c) $\theta = 120°$; $b = 0$ f) $\theta = 150°$; $b = -\frac{4}{5}$

3.- Encontrar la ecuación de cada una de las siguientes líneas:

a) Paralela al eje de las ordenadas y pasando por el punto (-5, 0)

b) Paralela al eje de las abscisas y pasando por el punto (0, 3).

c) Paralela a la línea $2x - 5y + 2 = 0$ y pasando por el punto (0, -4).

d) Perpendicular a la línea $3x - y + 1 = 0$ y pasando por el punto (0, 0).

4.- Encontrar la pendiente, la inclinación y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas:

a) $3x - 7y - 18 = 0$ d) $2x - 11y + 13 = 0$

b) $x - y = 0$ e) $3x - 8 = 0$

c) $3y - 7 = 0$ f) $ax - by - c = 0$

5.- Cuál es la ecuación del eje de las abscisas? y cuál es la ecuación del eje de las ordenadas?.

6.- Determinar el valor de A para que la línea $3Ax - 4y + 5 = 0$ sea:

a) Paralela a $2x + 5y - 2 = 0$

b) Perpendicular a $4x - 6y + 8 = 0$

16.- ECUACION DE LA RECTA DADOS UN PUNTO DE LA MISMA Y LA PENDIENTE.- Sea (x_1, y_1) el punto por el que ha de pasar la recta, m la pendiente y (x, y) un punto cualquiera de la línea, Fig. 26; la pendiente entre este punto y el (x_1, y_1) está dada por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore \quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots\ldots (6)$$

que es la ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

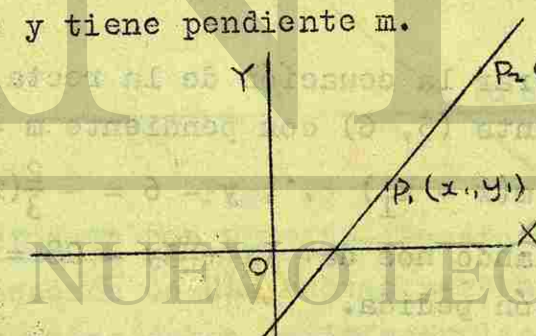

Fig. 26.

17.- ECUACION DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS DE LA MISMA Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) los puntos por donde ha de pasar la recta, (Fig. 27). La pendiente "m" queda determinada por los dos puntos dados, o sea

c) $m = 1$; $b = 0$ e) $m = 5$; $b = 2$

d) $m = \frac{4}{3}$; $b = -\frac{5}{8}$ f) $m = -1$; $b = -2$

2.- Encuéntrense las ecuaciones y dibújense las rectas cuyas inclinaciones (θ) y cuyas ordenadas al origen (b) tienen los siguientes valores:

a) $\theta = 30°$; $b = 3$ d) $\theta = 135°$; $b = -6$

b) $\theta = 45°$; $b = -1$ e) $\theta = 0°$; $b = 2$

c) $\theta = 120°$; $b = 0$ f) $\theta = 150°$; $b = -\frac{4}{5}$

3.- Encontrar la ecuación de cada una de las siguientes líneas:

a) Paralela al eje de las ordenadas y pasando por el punto (-5, 0)

b) Paralela al eje de las abscisas y pasando por el punto (0, 3).

c) Paralela a la línea $2x - 5y + 2 = 0$ y pasando por el punto (0, -4).

d) Perpendicular a la línea $3x - y + 1 = 0$ y pasando por el punto (0, 0).

4.- Encontrar la pendiente, la inclinación y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas:

a) $3x - 7y - 18 = 0$ d) $2x - 11y + 13 = 0$

b) $x - y = 0$ e) $3x - 8 = 0$

c) $3y - 7 = 0$ f) $ax - by - c = 0$

5.- Cuál es la ecuación del eje de las abscisas? y cuál es la ecuación del eje de las ordenadas?.

6.- Determinar el valor de A para que la línea $3Ax - 4y + 5 = 0$ sea:

a) Paralela a $2x + 5y - 2 = 0$

b) Perpendicular a $4x - 6y + 8 = 0$

16.- <u>ECUACION DE LA RECTA DADOS UN PUNTO DE LA MISMA Y LA PENDIENTE</u>.- Sea (x_1, y_1) el punto por el que ha de pasar la recta, m la pendiente y (x, y) un punto cualquiera de la línea, Fig. 26; la pendiente entre este punto y el (x_1, y_1) está dada por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad m = \frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

$$\therefore \quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots\ldots (6)$$

que es la ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

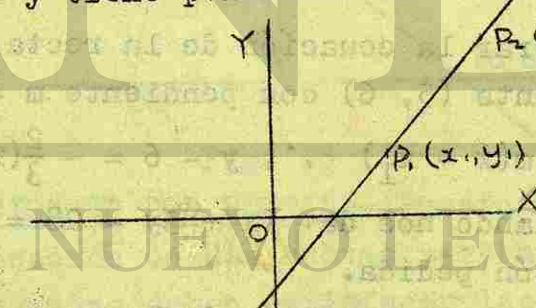

Fig. 26.

17.- <u>ECUACION DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS DE LA MISMA</u> Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) los puntos por donde ha de pasar la recta, (Fig. 27). La pendiente "m" queda determinada por los dos puntos dados, o sea

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

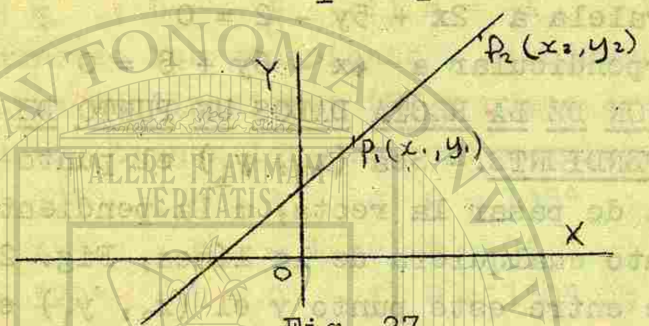

Fig. 27

y la ecuacion de la recta con esta pendiente y - pasando por el punto (x_1, y_1) será de la forma - (6); entonces:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad .....(7)$$

Ejemplos.

1) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 6) con pendiente $m = -\frac{2}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \therefore \; y - 6 = -\frac{2}{3}(x - 5)$

desarrollando nos da: $2x + 3y - 28 = 0$; que es la ecuación pedida.

2) Encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos (-3, 5) y (4, -7).

$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ Sustituyendo tenemos.

$$y - 5 = \frac{5 + 7}{-3 - 4}(x + 3)$$

$y - 5 = \frac{12}{-7}(x + 3)$

$\therefore \; 12x + 7y + 1 = 0$ que es la ecuación pedida.

18.- <u>FORMA SIMETRICA DE LA ECUACION DE LA RECTA</u>.- La recta determinada por los puntos (a, 0) y (0, b); intersecciones con los ejes coordenados, tendrá una ecuación según (7) (Fig. 28).:

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a) \quad \text{ó sea} \quad y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$\therefore \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad ....(8)$$

que es la forma simétrica de la ecuación de la recta, en que <u>a</u> y <u>b</u> son respectivamente la abscisa y la ordenada al origen.

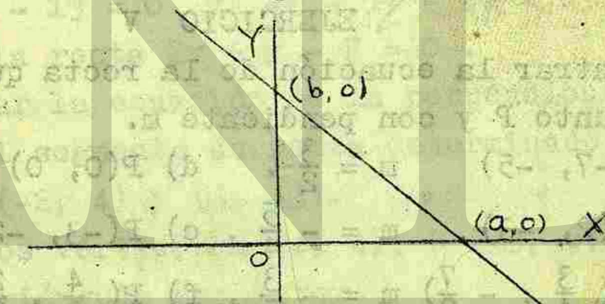

Fig. 28

19.- <u>INTERSECCION DE DOS RECTAS</u>.- Puesto que el punto de intersección de dos rectas partenece a ambas, sus coordenadas deben satisfacer las dos ecuaciones, es decir que la solución de las ecuaciones como simultáneas dará las coordenadas del punto de intersección.

Ejemplo. Sean las ecuaciones: (Fig. 29)

a) $2x - 3y + 9 = 0$ b) $5x + 4y - 24 = 0$

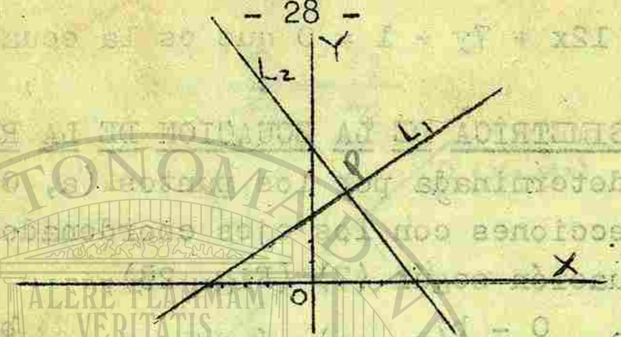

Fig. 29

Resolviéndose como simultáneas se obtiene:

$$x = \frac{36}{23} \quad ; \qquad y = \frac{93}{23}$$

que son las coordenadas del punto de intersec-- ción P.

EJERCICIO V

1.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P y con pendiente m.

a) $(-7, -5)$ $m = \frac{3}{2}$. d) $P(0, 0)$ $m = -1$

b) $P(2, -3)$ $m = -\frac{5}{4}$. e) $P(-3, -2)$ $m = 0$

c) $P(\frac{3}{4}, -\frac{7}{2})$ $m = -\frac{3}{5}$. f) $P(\frac{4}{3}, \frac{2}{5})$ $m = \frac{4}{5}$

2.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $(-3, 4)$; $(2, -1)$. c) $(0, 6)$; $(6, 0)$

b) $(\frac{1}{2}, 2)$; $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3})$. d) $(\frac{2}{5}, \frac{5}{8})$; $(1, 1)$

e) $(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{3})$; $(-3, -7)$. f) $(\frac{4}{5}, 3)$; $(0, -\frac{7}{4})$

3.- Dibujar las siguientes parejas de rectas y encontrar en cada caso las coordenadas de sus --

puntos de intersección:

a) $5x - y + 13 = 0$; $x - 2y + 4 = 0$

b) $3x + 2y - 4 = 0$; $3x - 4y - 12 = 0$

c) $3x - 4y + 3 = 0$; $7x + 4y + 47 = 0$

d) $3x - 5y - 27 = 0$; $2x - 3y - 17 = 0$

4.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de:

$2x - 5y + 13 = 0$ y $3x + 4y - 15 = 0$ y con pendiente de -5.

5.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de:

$5x + 4y - 13 = 0$ y $4x - 5y - 57 = 0$ y es paralela a la recta $2x + y - 7 = 0$.

6.- Encontrar la ecuación de la perpendicular bisec-- triz del segmento de recta determinado por los -- puntos $(-2, 4)$ y $(3, -3)$.

7.- Dados los vértices A $(4, 4)$; B $(-3, 6)$; c $(-1, -2)$ de un triángulo encontrar:

a) Las ecuaciones de los lados.

b) Las ecuaciones de las medianas.

c) Las ecuaciones de las alturas.

d) Las ecuaciones de las perpendiculares bisectrices de los lados.

e) Las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices, paralelas a los lados opuestos.

8.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-7, 3)$ y es paralela a la línea:

$2x + 3y - 7 = 0$

9.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5, -3) y es perpendicular a la línea $4x + y - 4 = 0$.

10.- Dado el triángulo A (0, 0); B (a, 0); C (b, c), demostrar analíticamente.

a) Que las perpendiculares bisectrices de sus lados se encuentran en un punto equidistante de los tres vértices (Centro del circulo circunscrito).

b) Que las alturas se encunetran en un punto. (Ortocentro).

c) Que las medianas se encuentran en un punto. (Centro de gravedad del triángulo, también llamado centroide).

d) Que los tres puntos encontrados en a, b y c están en línea recta.

20.- <u>DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PUNTO</u>.- Dado un punto P (x, y) y la recta $Ax + By + C = 0$, para encontrar la distancia de la recta al punto consideremos la Fig. 30.

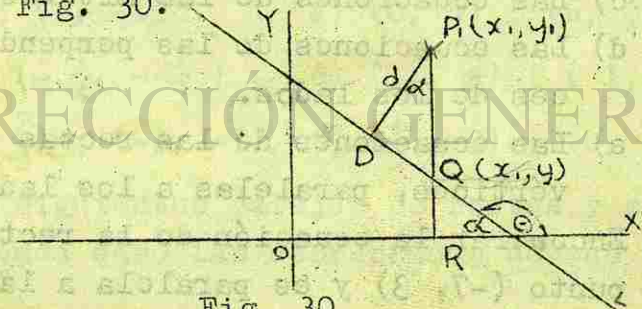

Fig. 30

Sea $DP_1 = d$ la distancia perpendicular de la línea L al punto P_1.

Trácese P_1R paralela al eje de las ordenadas la cual intersecta a la recta L en el punto Q.

Entonces:

$$d = P_1Q \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

La abscisa del punto Q es x_1. Para encontrar la ordenada, como este punto está sobre la recta debe satisfacer su ecuación por lo tanto:

$Ax_1 + By + C = 0$

$$\therefore \; y = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

luego las coordenadas de Q son:

$$\left(x_1 \, , -\frac{Ax_1 + C}{B}\right)$$

$$P_1Q = y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \quad . \; . \; (b)$$

El ángulo α es suplementario de θ (inclinación de la recta) y se tiene:

$$\cos\alpha = -\cos\theta$$

Según la ecuación de la recta, $m = \tan\theta = -\frac{A}{B}$

$$\therefore \; \cos\theta = -\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad y$$

$$\cos\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a) tenemos:

5x + 6y - 11 = 0
A = 5 B = 6 C = 11

$$d = \left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}\right)\left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Como se ve, para encontrar la distancia entre el punto y la recta, basta sustituir en la ecuación de ésta última las coordenadas del punto (x_1, y_1) y dividir entre $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Si para encontrar la distancia se considera el signo del radical contrario al del término independiente (C), la distancia será positiva si el punto y el origen están en lados contrarios de la recta (Fig. 31) y negativa si el origen y el punto se encuentran del mismo lado de la recta (Fig. 32)

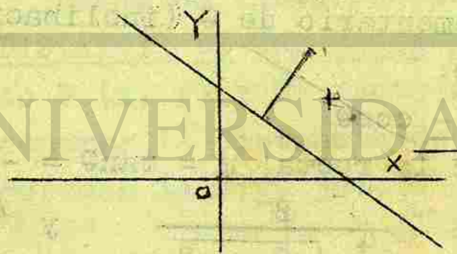

Fig. 31

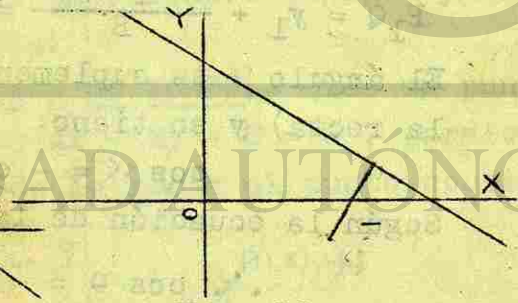

Fig. 32

N O T A.- La demostración de lo anterior se basa en la forma normal de la línea -- recta la cual no se trata en estos apuntes.

Ejemplos:

a) Encontras la distancia de la recta $4x - 3y + 6 = 0$ al punto P (3, 1)

Sustituyendo las coordenadas del punto en la e-- cuación de la recta según fórmula (9) se tiene:

$$d = \frac{4.3 - 3.1 + 6}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} = -3$$

b) Encontrar la distancia de la recta $12x - 5y - 3 = 0$ al punto (5, -2)

Procediendo como en el ejemplo anterior se tiene:

$$d = \frac{12.5 - 5.(-2) - 3}{+\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{47}{13}$$

c) Encontrar las ecuaciones de las bisectrices - de los ángulos formados por las líneas:

$x - 3y + 3 = 0$; $7x + 4y - 28 = 0$ (Fig. 33)

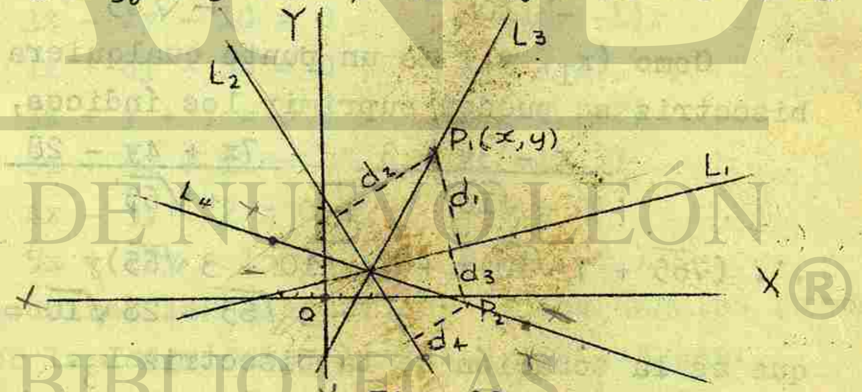

Fig. 33

Sean (x_1, y_1) un punto cualquiera sobre la bisectriz L_3 .

Como se ve, tanto L_1 como L_2 quedan entre el origen y el punto (x_1, y_1) por lo que d_1 y d_2 son positivas.

Si el punto sobre L_3 se toma abajo de la intersección de las rectas, el origen y el punto están del mismo lado con respecto a ambas rectas, o sea d_1 y d_2 son negativas, por lo que se concluye que siempre $d_1 = d_2$

pero $d_1 = \dfrac{x_1 - 3y_1 + 3}{\sqrt{10}}$ y $d_2 = \dfrac{7x_1 + 4y_1 - 28}{\sqrt{65}}$

El signo del radical para d_1 es negativo por ser C positivo y para d_2 es positivo por ser C negativo, entonces:

$$\frac{x_1 - 3y_1 + 3}{-\sqrt{10}} = \frac{7x_1 + 4y_1 - 28}{+\sqrt{65}}$$

Como (x_1, y_1) es un punto cualquiera de la bisectriz se pueden suprimir los índices, o sea:

$$\frac{x - 3y + 3}{-\sqrt{10}} = \frac{7x + 4y - 28}{+\sqrt{65}}$$

$$\therefore (\sqrt{65} + 7\sqrt{10})x + (4\sqrt{10} - 3\sqrt{65})y + 3\sqrt{65} - 28\sqrt{10} = 0$$

que es la ecuación de la bisectriz L_3.

Para la bisectriz L_4, un punto P_2 sobre ella queda del mismo lado que el origen para la recta L_1 y del lado contrario para L_2 por lo que las distancias a las rectas serán de signos contrarios.

También serían de signo contrario si el punto queda a la izquierda de la intersección, como puede verse fácilmente en la figura, es decir que $d_3 = -d_4$

Entonces: $\dfrac{x - 3y + 3}{-\sqrt{10}} = -\dfrac{7x + 4y - 28}{+\sqrt{65}}$

$$\therefore (7\sqrt{10} - \sqrt{65})x + (4\sqrt{10} + 3\sqrt{65})y - 3\sqrt{65} - 28\sqrt{10} = 0$$

que es la ecuación de la bisectriz L_4.

EJERCICIO VI

1.- Encontrar en cada uno de los siguientes ejercicios la distancia entre la recta y el punto dado.

a) $x + y - 1 = 0$; $P(-5, 4)$
b) $3x - 2y - 10 = 0$; $P(-1, -1)$
c) $7x + 8y - 56 = 0$; $P(2, 3)$
d) $3x + y + 7 = 0$; $P(-1, -2)$
e) $8x + 6y + 11 = 0$; $P(-4, 7)$
f) $4x - 3y + 2 = 0$; $P(1, 2)$
g) $5x + 12y - 15 = 0$; $P(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

2.- Encontrar las bisectrices de los ángulos formados por las siguientes líneas y graficarlas.

$5x - 6y - 7 = 0$; $x + 2y + 1 = 0$.

3.- Encontrar las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son:

A (2, 3); B (-4, 6); C (1, -1).

21. SISTEMAS DE RECTAS.- Como se ha visto en todo lo tratado sobre línea recta, se necesitan dos condiciones para que la recta quede definida (dos puntos sobre ella, un punto y la pendiente, etc.)

Cuando se tiene dada una sola condición hay siempre un número ilimitado de rectas que la satisfacen. A este conjunto se le llama sistema de rectas.

El sistema de rectas con pendiente igual a 2 estará dado por la ecuación $y = 2x + b$; dando valores a b se obtendrán rectas paralelas entre sí, todas ellas con la inclinación $\tan^{-1}\theta = 2$. La Fig. 34 muestra algunas de las líneas de este sistema.

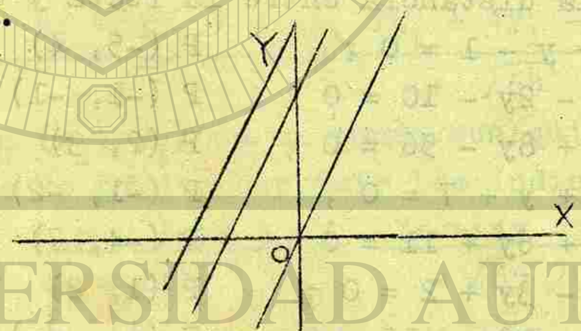

Fig. 34

El sistema de rectas que pasa por la intersección de dos rectas conocidas puede encontrarse en la forma siguiente:

Sean las ecuaciones generales de dos rectas.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad ; \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Multiplicando la segunda ecuación por K se obtiene $K(A_2x + B_2y + C_2) = 0$; sumando esta con la primera ecuación miembro a miembro resulta:

$A_1x + B_1y + C_1 + K(A_2x + B_2y + C_2) = 0$; que es la ecuación del sistema de rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas dadas.

En efecto; si se llama (x_1, y_1) a las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas se tiene: $K(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$; cierto para cualquier valor de K ; y $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$

$$\therefore A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + K(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$$

contiene el punto (x_1, y_1) puesto que sus coordenadas satisfacen la ecuación. Para cada valor de K hay una recta en el sistema.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de:

$12x - 5y - 20 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$ y pasando además por el punto (3, 1).

La ecuación del sistema de rectas que pasa por la intersección de las dos rectas dadas es:

$$(12x - 5y - 20) + K(2x + y - 2) = 0$$

Como la recta pasa además por el punto (3,1) estas coordenadas satisfarán la ecuación del sistema, obligando así a un valor de K. Sustituyendo se tiene:

$$12.3 - 5.1 - 20 + K(2.3 + 1.1 - 2) = 0$$

$\therefore K = -\frac{11}{5}$ y la ecuación de la recta será:

$$12x - 5y - 20 - \frac{11}{5}(2x + y - 2) = 0$$

$\therefore 19x - 18y - 39 = 0$; que es la ecuación buscada.

EJERCICIO VII

1.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas cuya ordenada al origen vale 4.

2.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas con pendiente $-\frac{3}{8}$.

3.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas cuya abscisa al origen vale -3.

4.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas en las que el producto de su ordenada al origen por su abscisa al origen vale 12.

5.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y por la intersección de las rectas dadas:

a) $3x + 2y - 5 = 0$; $4x + y + 3 = 0$ P (-3, 8)
b) $x - 4y + 12 = 0$; $x - y + 1 = 0$ P (5, 0)
c) $x + y - 2 = 0$; $x - y + 7 = 0$ p (-1, 1)
d) $x - 3y + 15 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$ P (0, 0)
e) $3x + 5y - 4 = 0$; $x + 2y - 4 = 0$ P (2, -2)
f) $2x + y - 11 = 0$; $4x - y + 3 = 0$ P (4, 7)

6.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas que pasan por el punto (-3, 2)

7.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas paralelas a la línea:

a) $3x + 5y - 7 = 0$ c) $2x + 3y - 15 = 0$
b) $x - 2y + 9 = 0$ d) $15x - 11y + 6 = 0$

8.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas perpendiculares a las líneas del problema # 7

9.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $x + 2y - 4 = 0$ y $y - 5x = 0$ y que tenga la ordenada al origen igual a la abscisa al origen.

10.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $3x + 4y + 5 = 0$ y $x - 3y + 12 = 0$ y con pendiente igual a 1

CAPITULO III

ECUACIONES NO LINEALES Y SUS GRAFICAS.

22.- <u>GENERALIDADES</u>.- Como ya quedó dicho en páginas anteriores, cualquier ecuación con dos variables se puede representar gráficamente en un sistema de ejes coordenados. Si $y = f(x)$ y se dan valores a x, se encontrarán valores correspondientes de y, y cada pareja de estos valores dará un punto en el sistema de ejes. Sea por ejemplo:

$y = x^2 + 2x + 5$ (Fig. 35)

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	20	13	8	5	4	5	8	13	20	29

Tabla de valores.

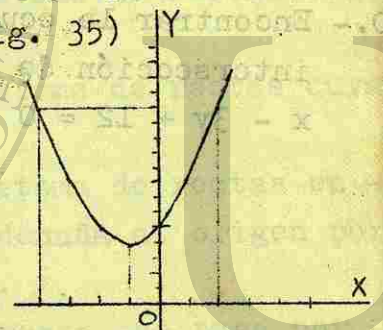

Fig. 35

Otro ejemplo: $xy = 1 \quad \therefore \; y = \frac{1}{x}$ (Fig. 36)

dando valores.

X	$-\infty$	-5	-3	-1	0	1	2	3	∞
Y	0	$-1/5$	$-1/3$	-1	$\pm\infty$	1	$1/2$	$1/3$	0

Tabla de valores.

Fig. 36

El valor de $-\infty$ de x, para el que corresponde un valor $y = 0$, significa que cuando se van dando a x valores absolutos sucesivamente más grandes siempre negativos, la y va tomando valores correspondientes cada vez más chicos, tanto como se quiera.

Ahora bien, si los valores de x se van acercando a cero por el lado negativo, los valores absolutos correspondientes de y se van haciendo mayores, siendo siempre negativos y creciendo así indefinidamente.

En la misma forma se puede hablar de los valores positivos de x, y se ve que la gráfica consta de dos ramas, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero. No puede haber puntos en los cuadrantes 2° y 4°, pues siempre las variables son del mismo signo.

Cuando como en este caso, una curva se va acercando siempre a una recta pero nunca llega a tocarla, se dice que la recta es una asíntota de la curva. En este caso los ejes coordenados son asíntotas de esta curva que se llama hipérbola.

Otro ejemplo. $y = \operatorname{sen} x$ (Fig. 37)

X	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\,\pi$	$5/6\,\pi$	π
Y	$1/2$	.86	1	.86	$1/2$	0

Tabla de valores.

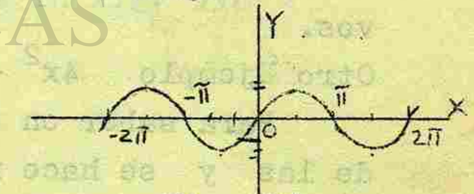

Fig. 37

Se ve que esta curva, llamada senoide, tiene valores de y repetidos periódicamente a cada cambio de 2π en el valor de x.

Otro ejemplo: $y = \log x$ (Fig. 38)

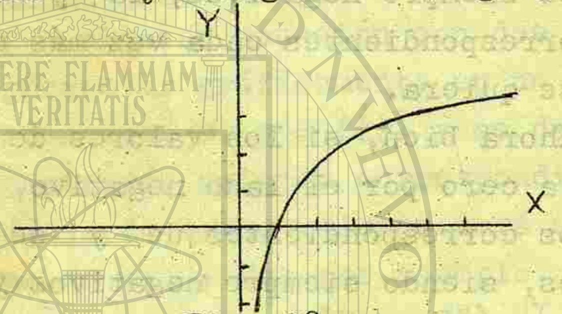

Fig. 38

Se ve que para $x = 0$ el valor de y es $-\infty$ es decir, que el eje de las y es asintota de la curva en su parte inferior.

Si $x = 1$; $y = 0$, o sea que la curva corta al eje de las x en $(1, 0)$ y para valores de x comprendidos entre o y 1 la y es negativa.

Si la x va creciendo a partir de 1, la y también crece, pero cada vez más lentamente, pues la diferencia entre dos logaritmos de números consecutivos va siendo cada vez menor.

No hay puntos de la curva en los cuadrantes 2° y 3° pues no hay logaritmos de números negativos.

Otro Ejemplo: $4x^2 + 9y^2 = 36$

Para saber en donde corta la curva al eje de las y se hace $x = 0$ $\therefore$ $y = \pm 2$; la curva

cortará al eje de las x cuando $y = 0$; si $y = 0$
$x = \pm 3$

Despejando y se tiene: $y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$

Se ve que para cada valor de x se obtienen dos valores de y iguales y de signo contrario, así pues, la curva es simétrica con respecto al eje de las x.

La gráfica solo tiene puntos entre valores de x comprendidos entre -3 y 3, pues para valores absolutos mayores de 3 la y es imaginaria.

Despejando x se tiene: $x = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2}$

Se ve que para cada valor de y se obtienen dos valores de x iguales y de signo contrario, así pues, la curva es también simétrica con respecto al eje de las y.

La gráfica solo tiene puntos entre valores de y comprendidos desde -2 hasta 2, pues para valores absolutos mayores que 2 la x es imaginaria.

Dando valores de x e y comprendidos entre los límites de $-3 < x < 3$ y $-2 < y < 2$ se obtiene la curva llamada elipse de la fig. 39.

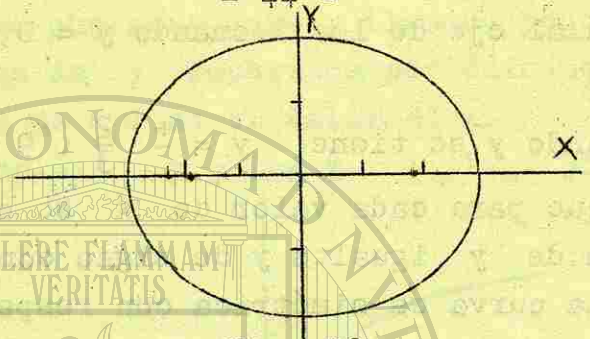

Fig. 39

En general se procede tal como se vió en este ejemplo.

Para buscar los puntos de intersección de una gráfica con el eje de las y se hace x = 0 y para la intersección con el eje de las x se hace y = 0.

Dos puntos son simétricos con respecto a un eje cuando éste es perpendicular bisectriz del segmento de recta que une los dos puntos; luego habrá simetría con respecto al eje de las x si sustituyendo y por -y la ecuación no se altera. Igualmente habrá simetría con respecto al eje de las y si al sustituir x por -x la ecuación es la misma.

Dos puntos son simétricos con respecto al origen cuando el segmento que los une queda bisectado por el origen. Cuando esto sucede, las coordenadas de uno de los puntos son respectivamente iguales y de signo contrario que las del otro;

el punto (a, -b) es simétrico con respecto al origen, del punto (-a, b). Habrá entonces simetría con respecto al origen en todo lugar geométrico en cuya ecuación se puede sustituir x por -x e y por -y al mismo tiempo sin alterar la ecuación.

Sea por ejemplo la ecuación anterior que puede escribirse de las siguientes formas sin alterarse:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ c) $4x^2 + 9(-y)^2 = 36$

b) $4(-x)^2 + 9y^2 = 36$ d) $4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36$

El lugar geométrico correspondiente a esta ecuación, de acuerdo con lo explicado, será simétrico con respecto al eje de las x, con respecto al eje de las y y con respecto al origen. La curva será además una curva cerrada, puesto que todos sus puntos quedan comprendidos entre las rectas: $x = \pm 3$ e $y = \pm 2$

Como se ve fácilmente, para que en una ecuación algebraica dada pueda sustituirse y por -y sin alterar dicha ecuación, es necesario que los exponentes de y sean pares. Lo mismo puede decirse de x.

Para que puedan sustituirse al mismo tiempo la x por -x y la y por -y en una ecuación algebráica sin alterarla, se necesita que todos los términos de la ecuación sean de grado par, o todos de grado impar, (un término independiente cuyo grado es cero, se considera par).

Sea por ejemplo la ecuación $y = x + x^3$

Si se sustituye x por -x e y por -y la ecuación queda: $-y = -x + (-x)^3$ o sea $-y = -x - x^3$ que es la misma ecuación original (ambos miembros multiplicados por -1), lo que indica que el lugar geométrico representado por esta ecuación es simétrico con respecto al origen.

Esta curva pasa por el origen puesto que para $x = 0$, $y = 0$.

Dando valores a x y encontrando los correspondientes de y se obtiene la curva de la Fig. 40.

Si x crece númericamente en forma indefinida, la y sigue aumentando de valor, luego la curva es abierta.

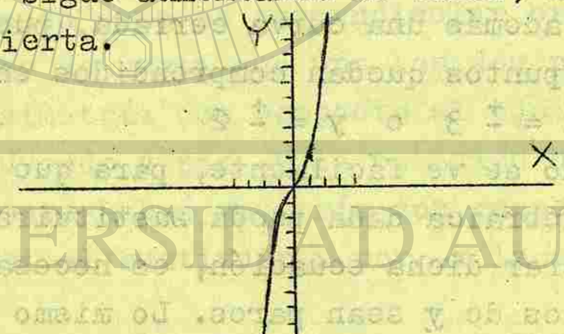

Fig. 40

Resumiendo, siempre que se quiera discutir la ecuación de un lugar geométrico, se hará el análisis en la forma siguiente:

a) Se buscan las intersecciones con el eje de las y, haciendo $x = 0$ y resolviendo la ecuación resultante en y.

b) Se buscan las intersecciones con el eje de las x haciendo $y = 0$ y resolviendo la ecuación resultante en x.

c) Se investiga simetría con respecto al eje de las y viendo si al sustituir x por -x no se altera la ecuación.

d) Se investiga la simetría con respecto al eje de las x viendo si al sustituir y por -y no se altera la ecuación.

e) Se investiga simetría con respecto al origen viendo si al sustituir al mismo tiempo x por -x y y por -y no se altera la ecuación.

NOTA: De estas tres condiciones de simetría basta con que se cumplan dos para que sea cierta la tercera.

f) Se determina la extensión de la curva viendo si hay valores de una de las variables que hagan imaginaria a la otra.

g) Se ve si la curva es cerrada viendo si todos sus puntos (valores reales de x e y) quedan comprendidos entre límites finitos.

Ejemplos:

Sea la ecuación $y = \cos x$ (Fig. 41)

Si $x = 0$ $y = 1$

Si $y = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n puede ser cualquier número entero positivo o negativo. Es decir, que la curva cortará al eje de las x en $-\frac{\pi}{2}$ y en todos los puntos que estén a una distancia igual a un múltiplo de π (positivo o negativo) del punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

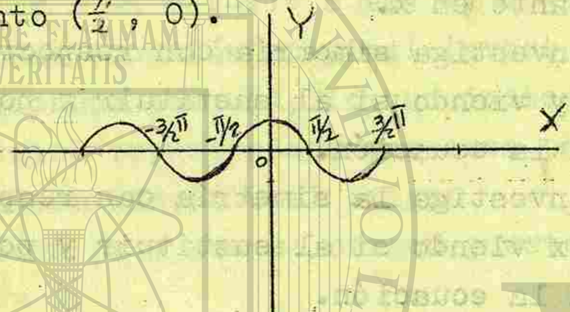

Fig. 41

Si se sustituye x por -x la ecuación no se altera, puesto que cos x = cos (-x); por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje de las y.

Si se sustituye y por -y la ecuación se altera, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje de las x.

No habrá simetría con respecto al origen -- puesto que al sustituir x por -x e y por -y la ecuación se altera.

Para cualquier valor de x habrá un valor de y, luego la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda.

La y no puede ser mayor que 1 ni menor que -1, puesto que el coseno de un ángulo no puede pasar de esos límites.

Esta curva es exactamente de la misma forma que la curva y = sen x, pero está localizada con un desfasamiento de $\frac{\pi}{2}$ respecto al origen. Observando la curva y = sen x se ve que no es simétrica con respecto al eje de las y pero es simétrica con respecto al origen. En efecto supliendo - al mismo tiempo x por - x e y por -y dicha ecuación no se altera:

$$y = \text{sen } x \qquad -y = \text{sen }(-x) = -\text{sen} x$$

Sea la ecuación $y^2 = (x - 3)(x - 1)(x + 3)$ (Fig. 42)

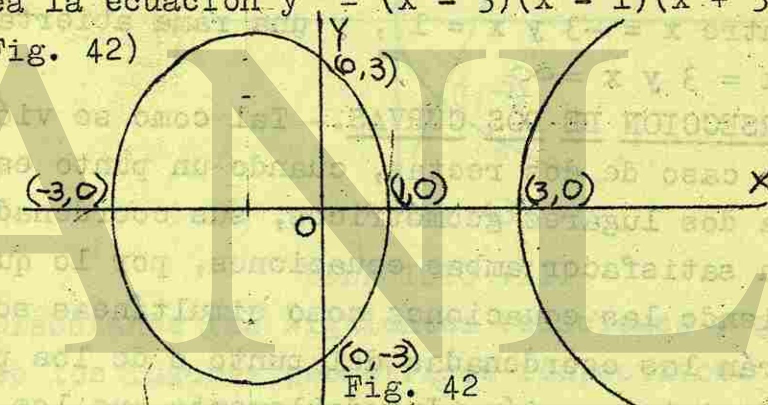

Fig. 42

Haciendo x = 0 se encuentra $y = \pm 3$ o sea que la curva corta al eje de las y en los puntos (0, 3) y (0, -3). Haciendo y = 0 se encuentra -- x = 3; x = 1 y x = -3; o sea que la curva corta al eje de las x en los puntos (3, 0); (1, 0) y -- (-3, 0).

Hay simetría con respecto al eje de las x - puesto que la ecuación es algebraica y el exponente de y es par. Para valores de x menores que -3 la y es imaginaria. También es imaginaria la y para valores de x mayores que 1 y menores que 3. Entonces la curva no tiene puntos cuando $x < -3$ ni cuando $1 < x < 3$.

Para valores de x mayores que 3, los valores de y van aumentando indefinidamente.

Para valores de x comprendidos entre -3 y 1 se tendrán siempre valores finitos de y.

Por lo tanto la curva tiene una parte cerrada entre $x = -3$ y $x = 1$, y una rama abierta entre $x = 3$ y $x = \infty$

23.- INTERSECCION DE DOS CURVAS.- Tal como se vió para el caso de dos rectas, cuando un punto es común a dos lugares geométricos, sus coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones, por lo que resolviendo las ecuaciones como simultáneas se deducirán las coordenadas del punto o de los puntos de intersección. Indudablemente que los resultados imaginarios deben ser desechados, pues las coordenadas son números reales.

Ejemplo: Encuéntrense las coordenadas de los puntos de intersección de los lugares geométricos representados por las dos ecuaciones siguientes:

$y^2 = 4x$ (1) $\qquad 2x - y + 4 = 0$ (2)

Despejando y en (2) $\qquad y = 2x - 4$ (3)

Sustituyendo este valor en (1)

$$(2x - 4)^2 = 4x$$

$\therefore\ 4x^2 - 16x + 16 - 4x = 0$ Simplificando tenemos: $\quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$\therefore\ x_1 = 4 \quad y \quad x_2 = 1$

Sustituyendo en (3) $\quad y_1 = 4 \quad ; \quad y_2 = -2$

Entonces los puntos de intersección son: (4, 4) y (1, -2) (Fig. 43.).

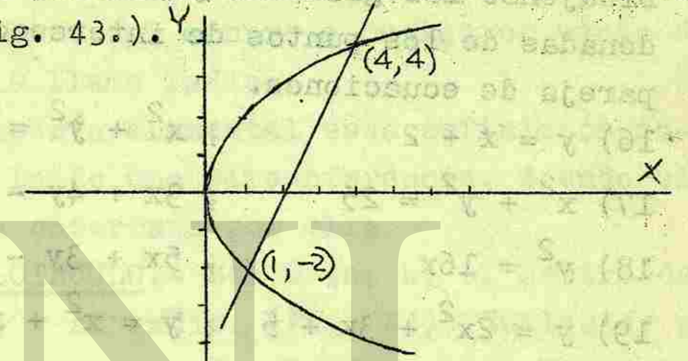

Fig. 43

EJERCICIO VIII

Discútanse las siguientes ecuaciones y grafíquense los lugares geométricos respectivos.

1) $y = 5x^3 - 4x$ $\qquad$ 6) $y^2 = 8x^3$

2) $x^2 + 4y^2 = 8$ $\qquad$ 7) $y = \dfrac{8}{1 + x^2}$

3) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ $\qquad$ 8) $y = \dfrac{5x + 3}{7x - 6}$

4) $x^2 + y^2 = 49$ $\qquad$ 9) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

5) $9x - y^2 = - 36$ $\qquad$ 10) $y = 2 \sec x$

Qué lugar geométrico representan las ecuaciones siguientes?

11) $xy = 0$ 14) $y^2 = x^2$

12) $x^2 + y^2 = -1$ 15) $x^2 + y^2 = 0$

13) $x^2 = 1$

Dibújense las gráficas y encuéntrense las coordenadas de los puntos de intersección en cada pareja de ecuaciones.

16) $y = x + 2$; $x^2 + y^2 = 9$

17) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y - 25 = 0$

18) $y^2 = 16x$; $5x + 3y - 9 = 9$

19) $y = 2x^2 + 3x + 5$; $y = x^2 + x + 4$

CAPITULO IV

CIRCULO.

24.- DEFINICION.- El círculo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. A este punto se le llama centro del círculo y a la distancia constante del centro a cualquier punto del círculo se le llama radio.

En geometría elemental esta definición corresponde a la de una circunferencia, siendo círculo el área encerrada por ella.

25.- ECUACION DELCIRCULO.- Sea C (h, k) el centro de un círculo y r su radio, (Fig. 44). Cualquier punto P (x, y) sobre el círculo debe satisfacer la condición de encontrarse a una distancia r del centro, entonces, según fórmula (1):

$$r = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$\therefore \ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

que es la ecuación de un círculo cuando se conocen las coordenadas del centro y el radio.

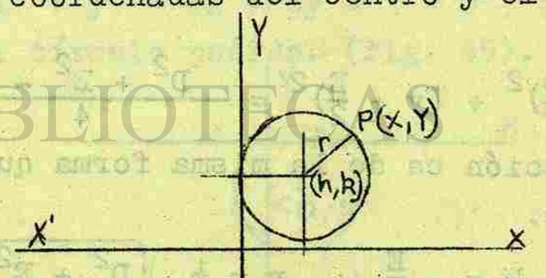

Fig. 44

siguientes?

11) $xy = 0$ 14) $y^2 = x^2$

12) $x^2 + y^2 = -1$ 15) $x^2 + y^2 = 0$

13) $x^2 = 1$

Dibújense las gráficas y encuéntrense las coordenadas de los puntos de intersección en cada pareja de ecuaciones.

16) $y = x + 2$; $x^2 + y^2 = 9$

17) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y - 25 = 0$

18) $y^2 = 16x$; $5x + 3y - 9 = 9$

19) $y = 2x^2 + 3x + 5$; $y = x^2 + x + 4$

C A P I T U L O IV

CIRCULO.

24.- DEFINICION.- El círculo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. A este punto se le llama centro del círculo y a la distancia constante del centro a cualquier punto del círculo se le llama radio.

En geometría elemental esta definición corresponde a la de una circunferencia, siendo círculo el área encerrada por ella.

25.- ECUACION DELCIRCULO.- Sea C (h, k) el centro de un círculo y r su radio, (Fig. 44). Cualquier punto P (x, y) sobre el círculo debe satisfacer la condición de encontrarse a una distancia r del centro, entonces, según fórmula (1):

$$r = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$\therefore \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

que es la ecuación de un círculo cuando se conocen las coordenadas del centro y el radio.

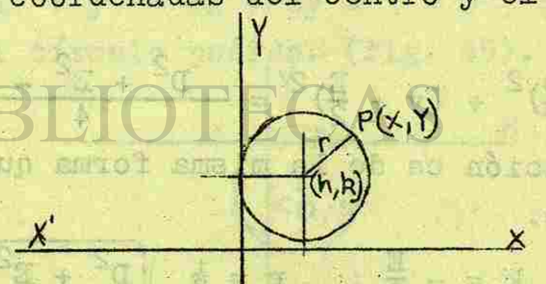

Fig. 44

26.- <u>OTRA FORMA DE LA ECUACION DELCIRCULO</u>.- Desarrollando la fórmula (10) se tiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

o sea: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

entonces la ecuación de un círculo será de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \; . \; . (11)$$

en la que $D = -2h$; $E = -2k$; $F = h^2 + k^2 - r^2$

NOTA: Cuando los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales pero diferentes de 1, bastará con dividir todos los términos de la ecuación entre el valor de esos coeficientes para que se obtenga la forma (11).

Inversamente, cualquiera ecuación de la forma (11) será la ecuación de un círculo real, nulo (radio = 0) ó imaginario, como se verá a continuación:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, completando cuadrados; $x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$

o sea:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Esta ecuación es de la misma forma que la (10) en la que:

$$h = -\frac{D}{2} \; ; \; k = -\frac{E}{2} \; ; \quad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

El círculo será <u>real</u> cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$

El círculo será <u>nulo</u>, es decir se convierte en un punto cuando $D^2 + E^2 - 4F = 0$.

El círculo será imaginario cuando:

$D^2 + E^2 - 4F < 0$

27.- <u>ECUACION DEL CIRCULO CON CENTRO EN EL ORIGEN</u>.-

Si el círculo tiene su centro en el origen entonces: $h = 0$; $k = 0$; y la ecuación (10) queda reducida a la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (12)$$

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de un círculo con centro en (2, -3) y radio igual a 4

La ecuación del círculo conociendo las coordenadas del centro y el radio, fórmula (10) es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$\therefore (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ Desarrollando:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; que es la ecuación del círculo pedido. (Fig. 45).

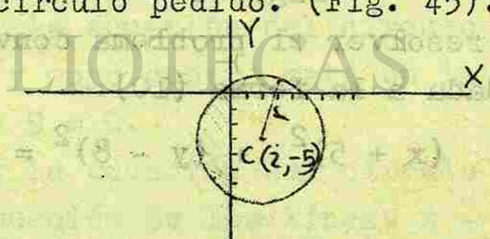

Fig. 45

2) Dada la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 10x - 16y + 53 = 0 \;;$$

encontrar las coordenadas del centro del círculo y el radio.

Según quedó demostrado en la ecuación (11) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; las coordenadas del centro son:

$$h = -\frac{D}{2} \;;\quad k = -\frac{E}{2} \quad y \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \;;$$

entonces:

$$h = -\frac{10}{2} \;;\qquad k = \frac{16}{2} = 8$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 256 - 212} = 6$$

o sea que la ecuación corresponde a un círculo con centro en (-5, 8) y radio 6 . (Fig. 46).

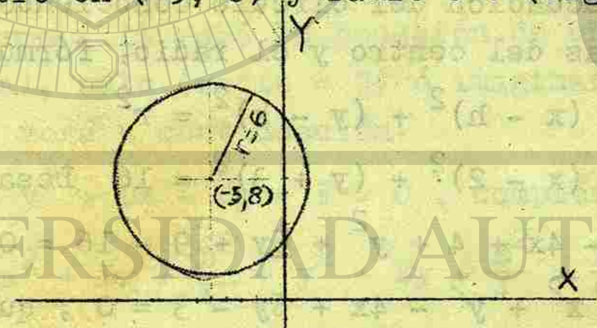

Fig. 46

Se podría resolver el problema convirtiendo la ecuación dada a la forma (10):

$$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$$

EJERCICIO IX

1.- Encontrar la ecuación de los siguientes círculos dados el radio y el centro:

a) $r = 2$; C (4, 5) e) $r = 11$; C (-1, 0)
b) $r = 3$; C (-7, 2) f) $r = 7$; C (0, 0)
c) $r = \frac{3}{2}$; C $(\frac{5}{4}, -3)$ g) $r = 51$; C $(\frac{7}{3}, 0)$
d) $r = 7$; C (-7, -5) h) $r = 0$; C $(4, \frac{3}{2})$

2.- Encontrar el radio y las coordenadas del centro en cada uno de los siguientes círculos:

a) $x^2 + y^2 = 25$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 49 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 27 = 0$

3.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en (-2, -3) y pasando por el punto (1, 1).

4.- Encontrar la ecuación del círculo que tiene como diámetro el segmento que une los puntos (2, 3) y (-5, 7).

5.- Encontrar la ecuación del círculo tangente a los dos ejes y cuyo centro está en la línea : $2x - 3y + 9 = 0$.

6.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en la intersección de las líneas $x - 4y + 8 = 0$; $x - y - 1 = 0$ y tangente a la recta:

$4x + 3y + 21 = 0$.

7.- Encontrar la ecuación del círculo que tiene por diámetro el segmento de recta determinado por -- las intersecciones de los siguientes pares de -- ecuaciones: $y = 4x$; $5y - 3x = 0$.
$x - 4y + 16 = 0$; $5x + 8y - 88 = 0$.

8.- El punto P (x, y) se mueve en tal forma que si - se trazan las líneas PA y PB a los puntos A (1, 4) B (-5, -3) el ángulo APB = 90°. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de P.

28.- CONDICIONES QUE DETERMINAN UN CIRCULO.- Tanto en la forma (10) como en la forma (11) de la ecuación del círculo hay tres constantes arbitrarias; coordenadas del centro (h, k) y radio r en la ecuación (10) y D, E y F en la ecuación (11). Esto indica que se necesitan y son suficientes - tres condiciones para que un círculo quede definido. Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación del círculo que pasa -- por los tres puntos siguientes: A (-1, 7); B (0, 0); C (3, -1).
El problema puede resolverse por procedimiento geométrico como sigue:
El centro del círculo deberá estar en la in-- tersección de las perpendiculares bisectrices de los segmentos AC y BC Fig. 47.

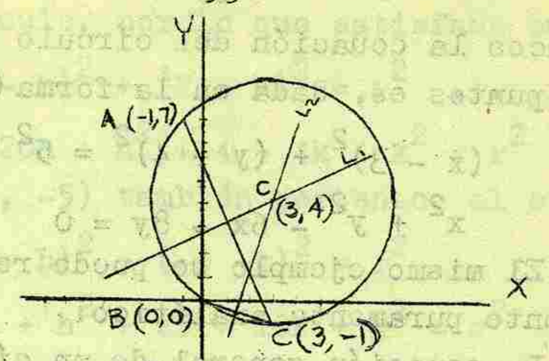

Fig. 47

El punto medio entre A y C tiene como coordenadas

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad ; \quad y_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

la pendiente entre A y C es:

$$m_1 = \frac{7 + 1}{-1 -3} = -2$$

entonces la pendiente de L_1 será $\frac{1}{2}$ y la ecuación de L_1 será $(y - 3) = \frac{1}{2}(x - 1)$ o sea :

$x - 2y + 5 = 0$

Procediendo en la misma forma para L_2 se encuen-- tra que su ecuación es: $3x - y - 5 = 0$.

El punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 centro del círculo (resolviendo las ecuacio-- nes como simultáneas) será C (3, 4). La distancia de este centro a uno cualquiera de los vértices por ejemplo al (0, 0) será el radio del círculo:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Entonces la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos es, dada en la forma (10):

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \quad \text{o sea:}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

El mismo ejemplo se puede resolver por procedimiento puramente analítico:

La ecuación general de un círculo es:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; en donde se tiene que determinar el valor de las constantes D, E y F. Como los tres puntos dados están en el círculo, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, entonces: para (0, 0) se tiene:

$$0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \quad \therefore F = 0$$

para (-1, 7); $1 + 49 - D + 7E + 0 = 0$

$$\therefore \quad D - 7E = 50$$

para (3, -1) ; $9 + 1 + 3D - E + 0 = 0$

$$\therefore \quad 3D - E = -10$$

Resolviendo estas ecuaciones se encuentra: $D = -6$; $E = -8$; por lo que la ecuación del círculo será:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

2) Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos (10, 2) y (3, -5) y que tiene su centro en la recta $x - 3y + 3 = 0$.

Resolviendo el problema por el procedimiento puramente analítico, el punto (10, 2) perte-

nece al círculo, por lo que satisface su ecuación o sea: $(10 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2$ . . . .(1)

$\therefore$ $100 - 20h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2$

El punto (3, -5) también pertenece al círculo por lo que: $(3 - h)^2 + (-5 - k)^2 = r^2$ . . . . .(2)

$\therefore$ $9 - 6h + h^2 + 25 + 10k + k^2 = r^2$

El centro (h, k) pertenece a la recta, por lo que $h - 3k + 3 = 0$; $\therefore$ $h - 3k = -3$ . . . .(3)

De (1) y (2) se deduce:

$$104 - 20h + h^2 - 4k + k^2 = 6h + h^2 + 10k + k^2$$

Reduciendo nos queda: $-14h - 14k + 70 = 0$

$\therefore$ $h + k = 5$ . . . .(4)

de (3) y (4) se deduce: $h = 3$; $k = 2$

Sustituyendo en (2) resulta: $r^2 = 49$; por lo que la ecuación del círculo es:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 49 \ ; \quad \text{o sea.}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 36 = 0.$$

29.- <u>LONGITUD DE LA TANGENTE AL CIRCULO DESDE UN PUNTO DADO</u>.- Sean el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y el punto P (x_1, y_1); y PA la tangente al círculo con punto de tangencia A. Se une C con A y con P (Fig. 48).

La longitud de la tangente será:

$$PA = \sqrt{PC^2 - CA^2} = t \quad ; \quad \text{pero}$$

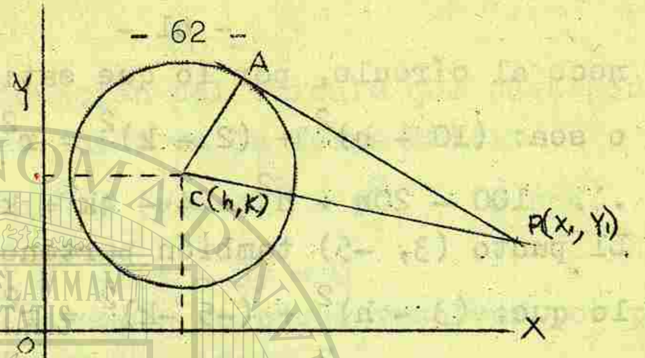

Fig. 48

$$\overline{PC}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 \; ; \; y \; \overline{CA}^2 = r^2$$

$$\therefore PA = t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad . . .(13)$$

Si el círculo está dado en la forma (11) la longitud de la tangente sería, como se puede ver fácilmente:

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F} \quad . . . .(14)$$

30.- <u>EJE RADICAL</u>.- Se llama eje radical de dos círculos al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las longitudes de las tangentes trazadas a los dos círculos son iguales.

31.- <u>ECUACION DEL EJE RADICAL</u>.-

Sean $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . . . .(1)$

y $(x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^2 \quad . . .(2)$

las ecuaciones de los círculos, Fig. 49.

Las longitudes de las tangentes a (1) y (2), desde un punto (x', y'), del eje radical son respectivamente:

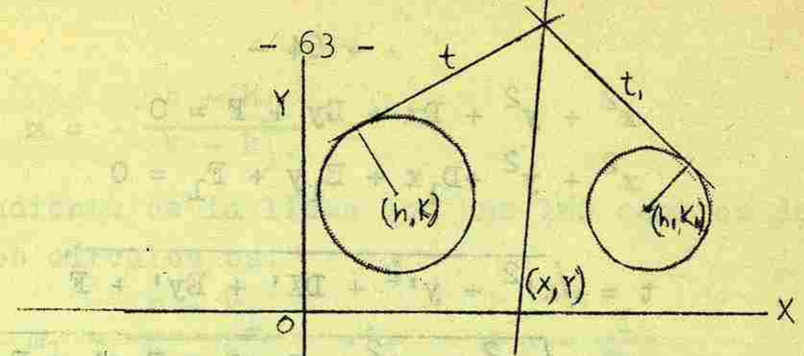

Fig. 49

$$t = \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$t_1 = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

pero como (x', y') es un punto del eje radical, $t = t_1$

$$\therefore \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2} = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

Elevando al cuadrado, reduciendo y sustituyendo (x', y') por (x, y) puesto que se trata de un punto cualquiera:

$$2x(h - h_1) + 2y(k - k_1) + r^2 - r_1^2 - h^2 + h_1^2 - k^2 + K_1^2 = 0$$

que es la ecuación del eje radical, la cual como se ve, es de primer grado en <u>x</u> e <u>y</u> y por lo tanto es la ecuación de una línea recta.

Si las ecuaciones de los círculos están dadas en la forma:

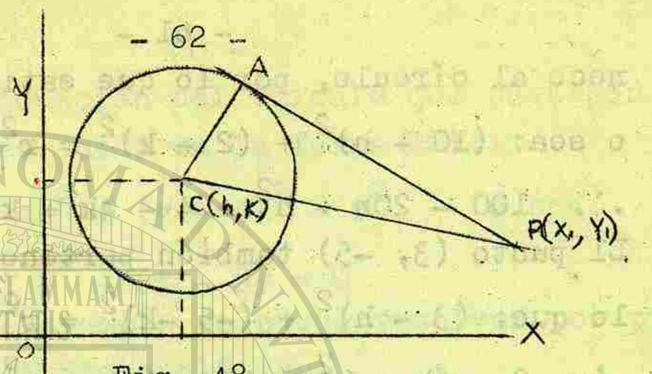

Fig. 48

$$\overline{PC}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 \quad ; \text{ y } \quad \overline{CA}^2 = r^2$$

$$\therefore \; PA = t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad . \; . \; (13)$$

Si el círculo está dado en la forma (11) la longitud de la tangente sería, como se puede ver fácilmente:

$$t = \sqrt{x_1^{\;2} + y_1^{\;2} + Dx_1 + Ey_1 + F} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

30.- <u>EJE RADICAL</u>.- Se llama eje radical de dos círculos al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las longitudes de las tangentes trazadas a los dos círculos son iguales.

31.- <u>ECUACION DEL EJE RADICAL</u>.-

Sean $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$

y $\quad (x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^{\;2} \quad . \; . \; . \; (2)$

las ecuaciones de los círculos, Fig. 49.

Las longitudes de las tangentes a (1) y (2), desde un punto (x', y'), del eje radical son respectivamente:

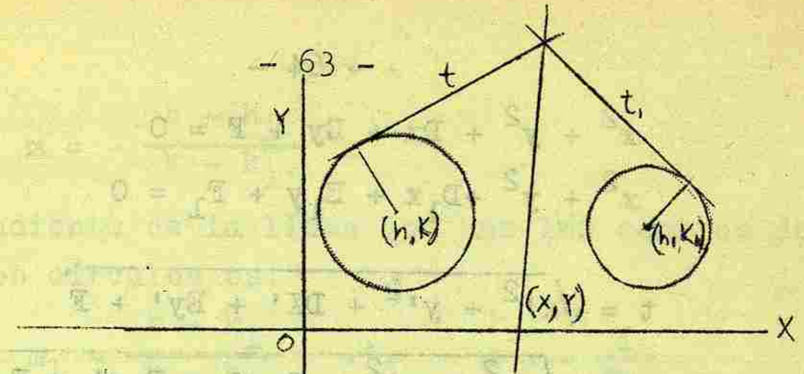

Fig. 49

$$t = \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$t_1 = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^{\;2}}$$

pero como (x', y') es un punto del eje radical, $t = t_1$

$$\therefore \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^{\;2}}$$

Elevando al cuadrado, reduciendo y sustituyendo (x', y') por (x, y) puesto que se trata de un punto cualquiera:

$$2x(h - h_1) + 2y(k - k_1) + r^2 - r_1^{\;2} - h^2 + h_1^{\;2} - k^2 + K_1^{\;2} = 0$$

que es la ecuación del eje radical, la cual como se ve, es de primer grado en <u>x</u> e <u>y</u> y por lo tanto es la ecuación de una línea recta.

Si las ecuaciones de los círculos están dadas en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$t = \sqrt{x'^2 + y'^2 + DX' + Ey' + F}$$

$$t_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + D_1x' + E_1y' + F_1}$$

Igualando lo-s valores de t y t_1, elevando al cuadrado reduciendo y sustituyendo x' e y' por x e y se obtiene:

$$x(D - D_1) + y(E - E_1) + F - F_1 = 0$$

que es la ecuación del eje radical.

Así pues, para encontrar la eucación del eje radical, basta con restar las ecuaciones de los dos círculos dados.

Ejemplo: Encontrar el eje radical de los círculos:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0 \quad y:$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 11 = 0$$

Restando la segunda ecuación de la primera nos queda: $2x - 10y + 11 = 0$ que es la ecuación del eje radical de los dos círculos dados.

32.- EL EJE RADICAL DE DOS CIRCULOS ES PERPENDICULAR A LA LINEA DE LOS CENTROS.- Demostración:

De la ecuación delejo radical se deduce que la pendiente es:

$$m = -\frac{h - h_1}{k - k_1};$$

la pendiente de la línea que une los centros de los dos círculos es:

$$m_1 = \frac{k - k_1}{h - h_1} \quad \therefore \quad m = -\frac{1}{m_1}$$

por lo que queda demostrado que el eje radical es perpendicular a la línea de los centros.

33.- CUANDO LOS DOS CIRCULOS SE CORTAN EL EJE RADICAL ES LA SECANTE COMUN, LA CUAL PASA POR LOS PUNTOS DE INTERSECCION DE LOS DOS CIRCULOS.- Sean:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (2)$$

las ecuaciones de los dos círculos. (Fig. 50).

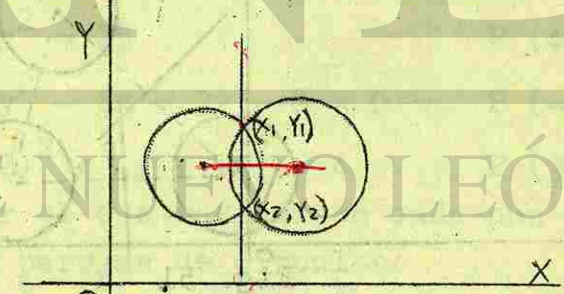

Fig. 50

De acuerdo con lo ya demostrado la ecuación del eje radical se encontrará restando (2) de (1), por lo que: $x(D - D_1) + y(E - E_1) + F - F_1 = 0 \quad (3)$

Las coordenadas de los puntos de intersección -

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) que determinan la secante común, satisfacen (1) y (2); por lo tanto deben satisfacer (3) que se encontró restando (2) de (1).

Si los círculos son tangentes, el eje radical es la tangente común.

34.- CENTRO RADICAL.- Sean tres círculos, (Fig. 51) C_1, C_2 y C_3. Los ejes radicales de C_1 y C_2 se en cuentran en P, entonces $PT_1 = PT_2$ y $PT_1 = PT_3$ $\therefore$ $PT_2 = PT_3$, o sea que el eje radical tambié pasa por P.

Al punto P donde se cortan los tres ejes ra dicales se le llama Centro Radical.

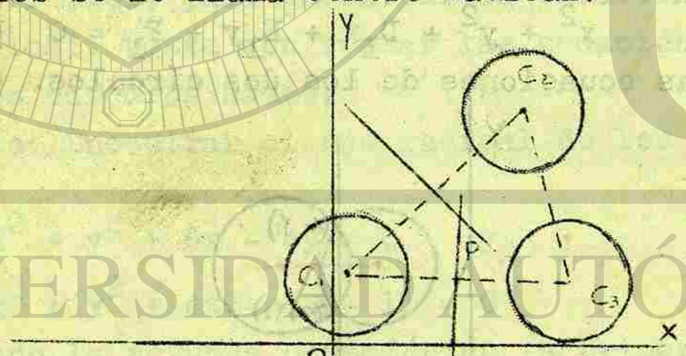

Fig. 51

EJERCICIO X

1.- Encontrar la ecuación del Círculo que pasa por los puntos:

a) (5, 6); (-5, 4); (-1, -4)

b) (1, 2); (-2, 3); (6, -3)

c) (-1, 1); (-4, 2); (4, -4).

2.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en el eje de las abscisas y pasando por los puntos (3, 1) y (-2, 6).

3.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en la recta $7x - 9y + 55 = 0$ y pasando por los puntos (-2, 4) y (-3, 1).

4.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en el eje de las ordenadas y pasando por los puntos (1, 2) y (6, -3).

5.- Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos (-9, -10) y (-7, -8) y con centro en la recta $3x + 5y + 65 = 0$.

6.- Encontrar la longitud de la tangente a cada uno de los círculos siguientes desde el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 25$ P (4, -7)

b) $x^2 + y^2 - 6x + 3y - 8 = 0$ P (-4, 2)

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ P (3, 3)

7.- Encontrar el eje radical en cada una de las siguientes parejas de círculos:

a) $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 12 = 0$; $x^2 + y^2 + 6y - 4 = 0$

8.- Encontrar el centro radical de los círculos:

$$x^2 + y^2 = 16 \;;\quad x^2 + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0 \;;$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 4 = 0$$

C A P I T U L O V
PARABOLA.

35.- DEFINICION.- La parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto fijo y d una recta fija. Al punto fijo se le llama foco a la recta fija directriz.

36.- CONSTRUCCION DE UNA PARABOLA CON REGLA Y COMPAS. Sean F el foco y DD' la directriz, (Fig. 52). P F se traza una perpendicular a la directriz, qu como se verá, es eje de simetría de la parábola Se toma el punto medio V entre F y la directriz que es ya un punto de la curva, puesto que -- VF = VR. Para encontrar otros puntos de la curv se trazan paralelas a la directriz a la derecha de V, como por ejemplo MN, la cual corta a Rx e A. Con centro en F y radio igual a RA se corta MN en los puntos P y Q que son puntos de la par bola puesto que PS = PF. De la misma manera se pueden construir todos los puntos que se deseen

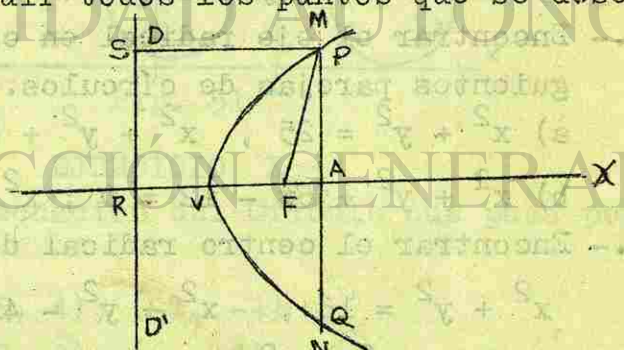

Fig. 52

Al punto V se le llama vértice de la parábola y Rx eje principal o simplemente eje.

37.- ECUACION DE LA PARABOLA.- Sea (Fig. 53) Parábola con vértice en el origen DD' la directriz y F el foco. Si se llama 2p la distancia en-- tre el foco y la di- rectriz OF = p, y - las coordenadas del foco serán (p, 0). - La directriz se escogió paralela al eje de las ordenadas y su ecuación será x = - p.

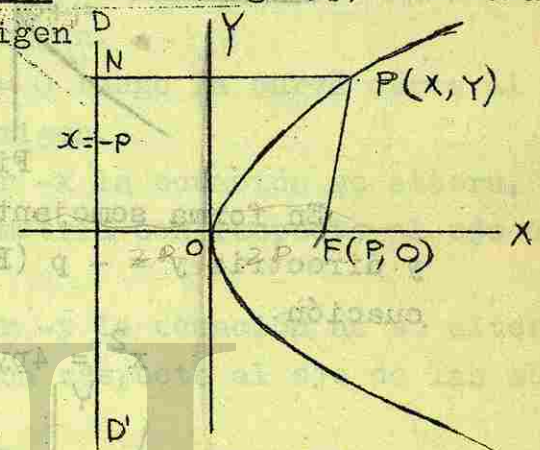

Fig. 53

Sea P (x, y) un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición: PF = NP

pero $PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$; $NP = x + p$

$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$y^2 = 4px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (15)$$

En la misma forma como se demostró la ecuación - (15) puede encontrarse que la ecuación con foco en F (-p, 0) y directriz x = p (Fig. 54) es:

$$y^2 = -4px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (15a)$$

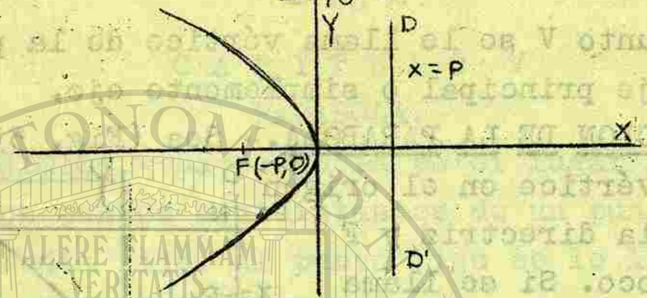

Fig. 54

En forma semejante si el foco está en (0, p
y directriz $y = -p$ (Fig. 55), se obtiene la e--
cuación:

$$x^2 = 4py \quad . . . . (15b)$$

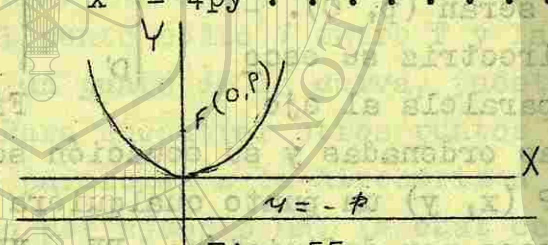

Fig. 55

Si F (0, -p) y directriz $y = p$ (Fig. 56),
la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -4py \quad . . . . (15c)$$

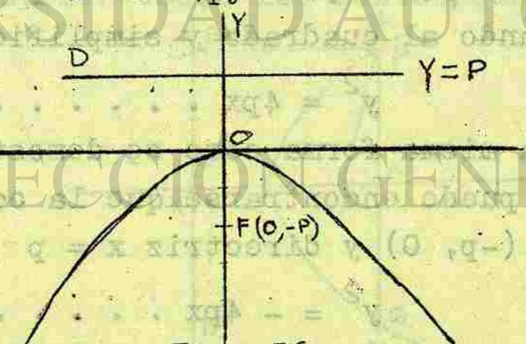

Fig. 56

38.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA PARABOLA.- Sea la ecuación $y^2 = 4px$.

Si se hace $x = 0$; $y = 0$, luego la curva corta al eje de las y en el origen.

Si se hace $y = 0$; $x = 0$ luego la curva corta al eje de las x en el origen.

Si se sustituye x por -x la ecuación se altera, por lo que no hay simetría con respecto al eje de las ordenadas.

Si se sustituye y por -y la ecuación no se altera luego hay simetría con respecto al eje de las abscisas.

Si se sustituye al mismo tiempo x por -x e y por -y, la ecuación se altera, por lo tanto no es simétrica con respecto al origen.

Despejando y:

$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

Si $x < 0$ el subradical es negativo, y la y es imaginaria, por lo que no hay puntos de la curva a la izquierda del eje de las ordenadas.

Si $x > 0$ el subradical es positivo y los valores de y serán reales, por lo que hay puntos de la curva a la derecha del eje de las y.

Despejando x:

$$x = \frac{y^2}{4p} \; .$$

para cualquier valor real de y hay valores de x.

39.- ANCHO FOCAL DE LA PARABOLA.- Se llama ancho focal o latus rectum a la longitud de la cuerda focal perpendicular al eje de la parábola. Para encontrar su longitud se sustituye $x = p$ en la ecuación: $y^2 = 4px$ $\therefore$ $y^2 = 4p^2$ e $y = \pm 2p$ luego L.R. $= 2p - (-2p) = 4p$. Obsérvese que el latus rectum es igual al coeficiente del término de primer grado en la ecuación $y^2 = 4px$. (Fig.57

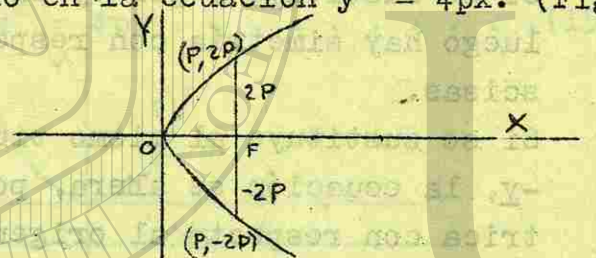

Fig. 57

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y F (3, 0) Fig. 58.
   Puesto que la distancia del vértice al foco es igual a p, se tiene $p = 3$.
   Sustituyendo en la fórmula $y^2 = 4px$ se tiene
   $$y^2 = 12x$$
   que es la ecuación pedida.

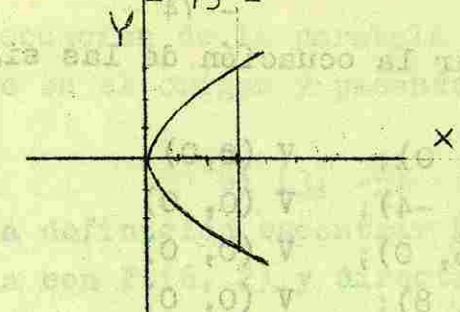

Fig. 58

2) Encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, el ancho focal y dibujar la siguiente parábola con vértice en el origen $x^2 = -8y$ (Fig. 59).
   La ecuación es de la forma $x^2 = -4py$, por lo tanto:
   $-4p = -8$, $p = 2$ luego F $(0, -2)$
   Ecuación de la directriz $y = 2$; L.R. $= 8$

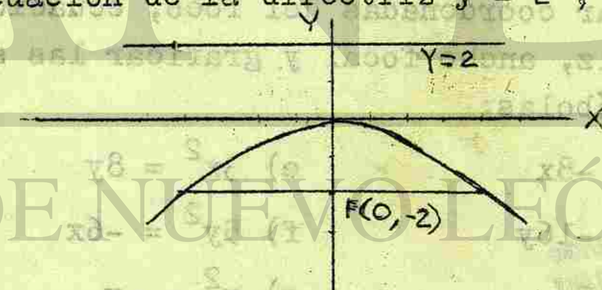

Fig. 59

EJERCICIO XI

1.- Dibujar con regla y compás las siguientes parábolas:
   a) Foco a 3 unidades de la directriz.
   b) Foco a 10 unidades de la directriz.

2.- Encontrar la ecuación de las siguientes parábolas:

a) F (3, 0); V (0,0)
b) F (o, -4); V (0, 0)
c) F (-6, 0); V (0, 0)
d) F (0, 8); V (0, 0)
e) V (0, 0); Directriz x = 2
f) F (0, -4); Directriz y = 4
g) V (0, 0); F (5, 0)
h) V (0, 0); Directriz x = -2
i) V (0, 0); Directriz y = -3
j) F (0, 5); V (0, 0)
k) V (0, 0); Directriz $y = \frac{3}{2}$
l) V (0, 0); F $(-\frac{2}{3}, 0)$

3.- Encontrar coordenadas del foco, ecuación de la directriz, ancho focal y graficar las siguientes parábolas:

a) $y^2 = -8x$ e) $3x^2 = 8y$
b) $x^2 = -16y$ f) $5y^2 = -6x$
c) $x^2 = 5y$ g) $x^2 = -y$
d) $y^2 = 7x$ h) $y^2 = x$

4.- Encontrar la ecuación de la parábola con eje horizontal, vértice en (0, 0) y pasando por el punto:

a) (4, 8) b) (-3, 6)

5.- Encontrar la ecuacion de la parábola con eje vertical, vértice en el origen y pasando por el punto):

a) (-2, 1) b) (3, -5)

6.- A partir de la definición encontrar la ecuación de la parábola con F (6, 2) y directriz x = 2

C A P I T U L O VI
E L I P S E.

40.- DEFINICION.- La elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante y mayor que la distancia entre ellos.

Los puntos fijos se llaman focos de la elipse y la suma constante se le designa 2a.

41.- CONSTRUCCION DE UNA ELIPSE CON REGLA Y COMPAS.- Sean F y F' los dos focos (Fig. 60)

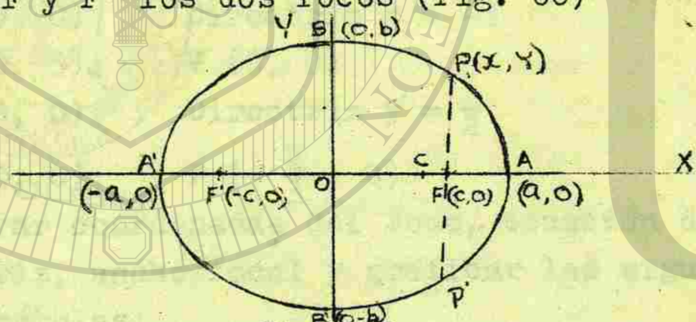

Fig. 60

Se traza la recta que pasa por F y F', se sitúan los puntos A y A' sobre esta recta de modo que A'F' = AF.

Se van a encontrar puntos en que la suma de las distancias a F y F' sea AA', Desde luego A y A' son puntos de la elipse, puesto que: AF + AF' = AA' y A'F' + A'F = AA'. Se sitúa el centro O, punto medio entre F y F' y haciendo centro en F y F' y radio igual a OA se encuen-

tran los puntos B y B'. Para localizar cualquier punto como P, se toma un punto C sobre AA'; con centro en F y radio igual a CA, se traza un arco de círculo y con centro en F' y radio igual a CA' se traza otro arco de círculo que corta al anterior en P_1; con los mismos centros y radios se puede encontrar el punto P' simétrico al anterior.

Tomando más puntos entre F y F' se pueden encontrar más puntos de la elipse; se unen entre sí y se tiene la curva de la Fig. 60.

A la distancia AA' se le llama eje mayor de la elipse y a la distancia BB' eje menor. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama centro de la elipse, a la distancia FF' se le llama distancia focal.

A las intersecciones de A y A' del eje mayor con la curva se les llama vértices de la elipse.

42.- CONSTRUCCION DE LA ELIPSE POR MEDIO DE UN CORDON. Se puede dibujar una elipse en forma contínua como sigue:

Se toma un cordón cuya longitud sea igual a la suma constante 2a.

Los extremos del cordón se fijan en F y F' (Fig. 61) y estirando el cordón por medio de un lápiz se va trazando la elipse en forma contínua.

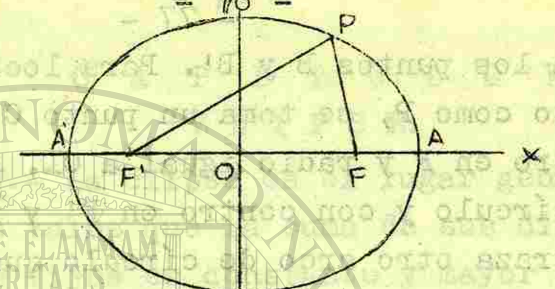

Fig. 61

43.- RELACION ENTRE LOS EJES Y LA DISTANCIA FOCAL.- Sean 2a la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos y 2c la distancia entre los focos (Fig. 62).

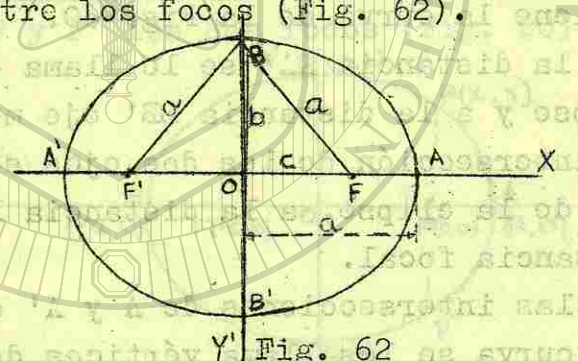

Fig. 62

Entonces: $AF + AF' = 2a$ (1)

$A'F + A'F' = 2a$ (2)

$\therefore AF + AF' = A'F + A'F'$ (3)

además: $AF' = 2c + AF$

$A'F = 2c + A'F'$

Sustituyendo en (3)

$AF + 2c + AF = 2c + A'F' + A'F'$

$\therefore AF = A'F'$ (4)

Sustituyendo en (1) la igualdad (4) se tiene:

$A'F' + AF' = 2a$

$\therefore AA' = 2a$

Si al eje menor se le llama 2b, se tiene: $OB = b$; pero $BF = a$ puesto que B está en la perpendicular bisectriz de FF', entonces en el triángulo BOF tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

que es la relación que liga a los semiejes de la elipse con la semidistancia focal.

44.- ECUACION DE LA ELIPSE CON EJES COINCIDIENDO CON LOS EJES COORDENADOS.- Sean F (c, 0) y F' (-c, 0) las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación se desea encontrar, (Fig. 63) y sea P - (x, y) un punto cualquiera del lugar geométrico.

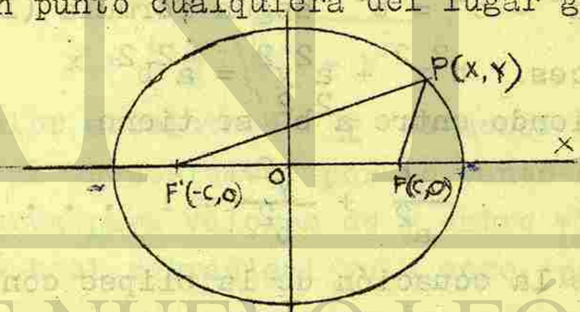

Fig. 63

Por definición:

$$FP + F'P = 2a \quad (1)$$

pero $FP = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ y

$$F'P = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

luego:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene:

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando se tiene:

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

pero $a^2-c^2=b^2$ según fórmula (16)

entonces: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Dividiendo entre a^2b^2 se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots(17)$$

que es la ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos sobre el eje de las x.

Si los focos están en el eje de las y fácilmente se demuestra que la ecuación toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots(17a)$$

45.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA ELIPSE.- Sea la ecuación (17); si se hace $x = 0$; $y = \pm b$, o sea que la elipse corta al eje de las ordenadas en $+b$ y en $-b$. Si se hace $y = 0$, $x = \pm a$, o sea que la elipse corta el eje de las abscisas en $+a$ y $-a$.

Sustituyendo x por $-x$ no se altera la ecuación, luego hay simetría con respecto al eje de las y. Sustituyendo y por $-y$ tampoco se altera la ecuación, luego hay simetría con respecto al eje de las x. Como hay simetría con respecto a los dos ejes, la hay con respecto al origen.

Despejando x se tiene:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

Si el valor absoluto de y es menor que b, el subradical es positivo, por lo tanto hay puntos de la curva para valores de y entre $+b$ y $-b$.

Si $y = \pm b$ el subradical vale cero, por lo que $x = 0$.

Si el valor absoluto de y es mayor que b, y menor que $-b$, el subradical es negativo, por lo que la curva está limitada por las rectas $y = \pm b$.

Despejando y se tiene:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Con un razonamiento análogo al anterior se llega a la conclusión de que la curva está limitada por las rectas $x = \pm a$. La elipse es por lo tanto una curva cerrada.

46.- <u>ANCHO FOCAL DE LA ELIPSE</u>.- Se llama ancho focal o latus rectum de una elipse a la cuerda a través del foco, perpendicular al eje mayor.

Sea la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 64)

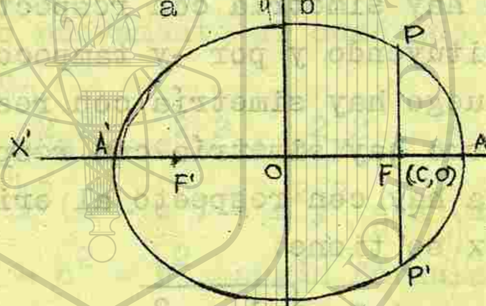

Fig. 64

Para encontrar el ancho focal PP' se sustituye la x del punto que es c en la ecuación y se obtiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

pero $a^2 - c^2 = b^2$ $\therefore$ $y = \pm \frac{b^2}{a}$

el ancho focal será entonces:

$$L. R. = \frac{2b^2}{a} \ldots\ldots (18)$$

47.- <u>EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE</u>.- Se llama excentricidad de la elipse a la relación de la distancia focal al eje mayor:

$$e = \frac{2c}{2a} \quad \therefore \quad e = \frac{c}{a} \quad \ldots\ldots (19)$$

La excentricidad de la elipse varía de 0 a 1 puesto que $a > c$ para toda elipse, y da una idea de su forma. Para valores de e cercanos a 1, la elipse se va haciendo más aplanada, mientras que al ir acercándose a cero la elipse se va asemejando a un círculo. El círculo sería una elipse con excentricidad igual a 0.

48.- <u>CONSTRUCCION DE LA ELIPSE POR MEDIO DE LOS CIRCULOS AUXILIARES</u>.- Al círculo que tiene como diámetro el eje mayor de la elipse y cuyo centro coincide con el de ella se le llama círculo auxiliar mayor de la elipse. Al círculo que tiene como diámetro el eje menor y centro en el de la elipse se le llama círculo auxiliar menor de la elipse.

Conociendo el valor de los dos ejes de la elipse puede ésta dibujarse con la ayuda de los círculos auxiliares, (Fig. 65). Con centro en O se dibujan los círculos con radios OA y OB. Para encontrar puntos de la elipse se traza un radio OR del círculo mayor. De R se baja la perpendicular RM a OA. Por el punto S, intersección de OR con el círculo menor se traza una perpendicular a RM. El punto P donde dicha perpendicular intersecta a RM es un punto de la elipse.

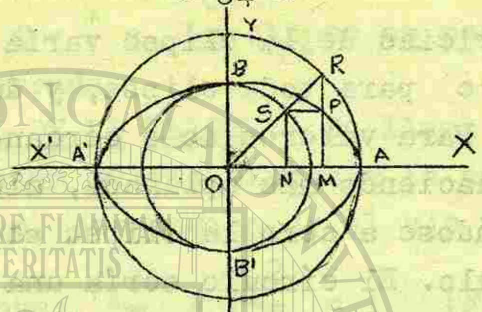

Fig. 65

Así como se encontró este punto se puede - hacer con los puntos que se quiera; uniéndolos se tendrá la elipse.

Demostración: en la Fig. 66

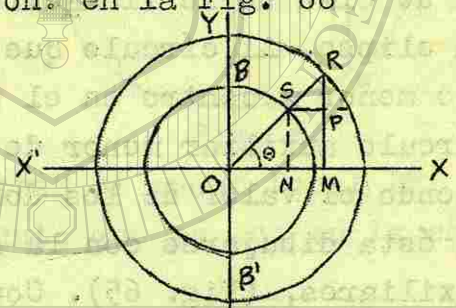

Fig. 66

$$OR = a$$
$$OS = b$$
$$PM = y = SN$$
$$OM = x$$

Si se designa por θ el ángulo que OR hace con OA se tiene:

$$x = a \cos\theta$$
$$y = b \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta \; ; \quad \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\theta$$

sumando miembro a miembro las dos últimas igualdades se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

que es la ecuación de la elipse con eje mayor 2a y eje menor 2b.

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, F (4, 0), F' (-4, 0) eje mayor igual 10. (Fig. 67)

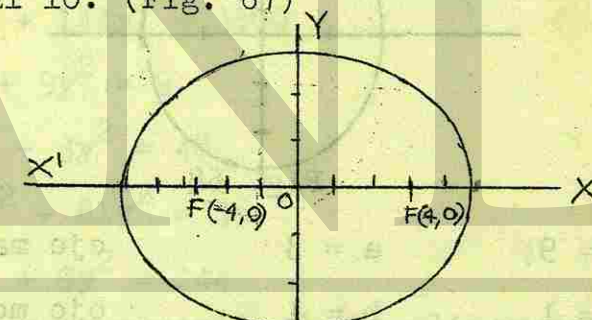

Fig. 67

Puesto que la distancia del centro a cualquiera - de los focos es igual a c, entonces c = 4;

$2a = 10 \quad \therefore \; a = 5$

luego $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Sustituyendo en (17) se tiene:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad ó$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

2) Encontrar el valor de los ejes, coordenadas de los vértices y focos, excentricidad, latus rectum y dibujar la siguiente elipse:

$$9x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{(Fig. 68)}$$

Dividiendo entre 9 se tiene:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

como el divisor de y es mayor que el de x, la elipse es de la forma (17a).

Fig. 68

$a^2 = 9$; $\quad a = 3 \quad$ eje mayor = 6

$b^2 = 1$; $\quad b = 1 \quad$ eje menor = 2

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

$F\ (0, \pm 2\sqrt{2})$; $\quad V\ (0, \pm 3)$

$e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \quad$ L. R. $= \dfrac{2}{3}$

EJERCICIO XII

1.- Encontrar las ecuaciones de las siguientes elipses con centro en (0, 0) y dibujarlas.

a) $F\ (0, \pm 4)$; eje mayor = 10

b) $V\ (\pm 13, 0)$; $\quad F\ (\pm 12, 0)$

c) $V\ (\pm 10, 0)$; $\quad e = \frac{1}{2}$

d) $F\ (0, \pm 8)$; $\quad$ L.R. $= \frac{450}{17}$

e) $V\ (0, \pm 9)$; $\quad$ eje menor = 6

f) $F\ (\pm 6, 0)$; $\quad V\ (\pm 8, 0)$

2.- Encontrar el valor de los ejes, coordenadas de los focos y vértices, ancho focal y excentricidad de las siguientes elipses. Dibujarlas.

a) $9x^2 + y^2 = 9$

b) $25x^2 + 144y^2 = 3600$

c) $3x^2 + 9y^2 = 9$

d) $16x^2 + 3y^2 = 48$

e) $100x^2 + 81y^2 = 36$

f) $16x^2 + 9y^2 = 144$

3.- Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen y focos en el eje de las y ; eje mayor igual 24, $e = \frac{5}{12}$

4.- Encontrar la ecuación de la siguiente elipse: eje mayor = 18 ; coordenadas focos $(\pm 3, 0)$

5.- Igual para:
eje menor = 5 ; coordenadas focos $(0, \pm 2\sqrt{6})$

6.- Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, pasando por los puntos: (1, -7) y y (-5, 26).

7.- A partir de la definición encontrar la ecuación de la elipse con focos en (-3, 3) y (5, 3) y eje mayor = 12.

C A P I T U L O VII

HIPERBOLA.

49.- <u>DEFINICION</u>.- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante e igual a 2a, y menor que la distancia entre ellos.

Los puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

50.- <u>DIBUJO DE LA HIPERBOLA CON REGLA Y COMPAS</u>.- Fig. 69.

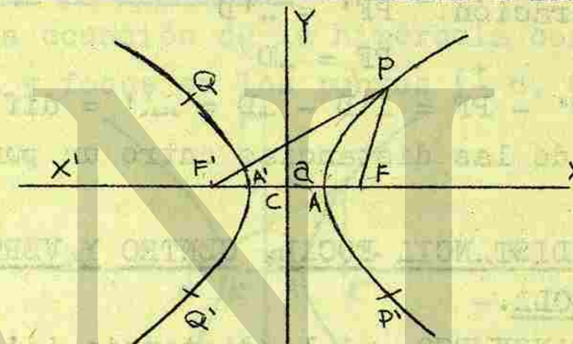

Fig. 69

Sean F y F' los focos, se traza la línea FF'. Sea C el punto medio entre F y F'. Se encuentran los puntos A y A' de modo que CA = A'C = a (mitad de la diferencia constante). Se toman puntos a la derecha de F, como D, por ejemplo; con centro en F y radio igual a AD se traza un arco de círculo, con centro en F' y radio igual a A'D se traza otro arco que corta al anterior en P, este punto es un punto de la hipérbola.

Al mismo tiempo se puede encontrar P' simétrico al anterior; tomando los mismos centros y radios.

Los puntos Q y Q' se pueden encontrar con los mismos radios anteriores pero cambiando los centros, es decir con radio AD se hace centro en F' y con radio A'D centro en F.

De la misma manera se pueden encontrar más puntos de la hipérbola, uniéndolos se tiene la curva de la fig. 69.

Demostración: $PF' = A'D$

$PF = AD$

$\therefore PF' - PF = A'D - AD = AA'$ = diferencia constante de las distancias entre un punto y los dos focos.

51.- EJES, DISTANCIA FOCAL, CENTRO Y VERTICES DE LA HIPERBOLA.-

EJE TRANSVERSO.- A la distancia AA' (Fig. 69) se le llama eje transverso de la hipérbola y se le asigna el valor 2a.

EJE CONJUGADO.- Si por el punto C, punto medio entre A y A' se traza la perpendicular a AA' y se toma sobre ella los puntos B y B', simétricos con respecto a C, de modo que:

$$BC = \sqrt{c^2 - a^2}$$

a la distancia BB' se le llama eje conjugado de la hipérbola y se designa por 2b.

Entonces: $b^2 = c^2 - a^2$ . . . .(19)

CENTRO.- Al punto medio entre AA' (Fig. 69) se le llama centro de la hipérbola.

DISTANCIA FOCAL.- A la distancia FF' se le llama distancia focal de la hipérbola y se le designa por 2c.

VERTICES.- Los puntos A y A' son los vértices de la hipérbola.

52.- ECUACION DE LA HIPERBOLA.- (Fig. 70) Se desea encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y focos en los puntos ($\pm$ c, 0).

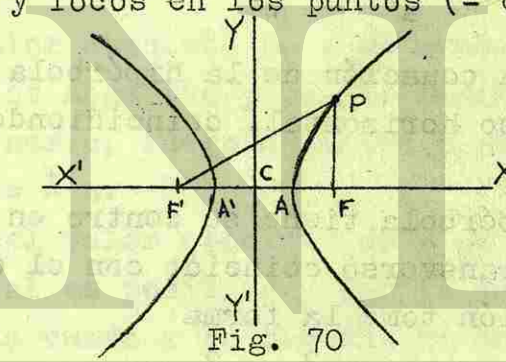

Fig. 70

Sea P (x, y) un punto cualquiera de la hipérbola. De la definición se tiene:

$$PF' - PF = 2a$$

pero $PF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

y $PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$$\therefore \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

pasando el segundo radical al otro miembro, elevando al cuadrado y reduciendo se tiene:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado, reduciendo y agrupando:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

pero según fórmula (19) $b^2 = c^2 - a^2$

$$\therefore \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo entre a^2b^2 se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (20)$$

que es la ecuación de la hipérbola con eje -- transverso horizontal, coincidiendo con el eje de las x.

Si la hipérbola tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje de las y la ecuación toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (20a)$$

53.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA HIPERBOLA.- Sea la ecuación (20). Se hace $x = 0$, $y = \pm\sqrt{-b^2}$, lo que indica que los valores de y serán imaginarios, luego no corta la curva al eje de las ordenadas.

Si se hace $y = 0$, $x = \pm a$, luego la curva corta al eje de las abscisas en $\pm a$.

Sustituyendo x por -x la ecuación no se altera,

luego hay simetría con respecto al eje de las ordenadas.

Sustituyendo y por -y tampoco se altera la ecuación, luego también hay simetría con respecto al eje de las abscisas.

Como hay simetría con respecto a ambos ejes, habrá simetría con respecto al origen.

Despejando y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

si el valor absoluto de x es menor que a, el subradical es negativo y por lo tanto el valor de y es imaginario, luego no habrá puntos de la curva entre $x = \pm a$.

Si el valor absoluto de x es mayor que a el subradical es positivo y por lo tanto habrá puntos de la curva a la derecha de la recta $x = a$ y a la izquierda de $x = -a$.

Despejando x:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

Para cualquier valor de y los valores de x son reales y por lo tanto existen puntos de la -- curva.

54.- ANCHO FOCAL.- Se le llama ancho focal o Latus Rectum en una hipérbola al valor de la cuerda focal perpendicular al eje transverso. (Fig. 71)

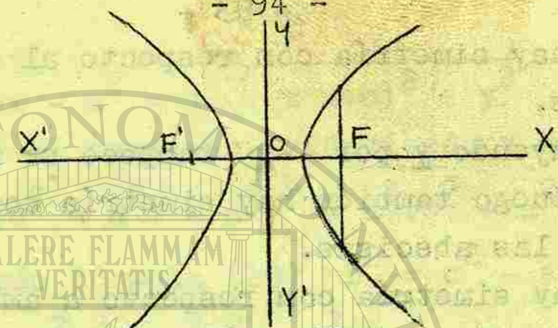

Fig. 71

En la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ;$$

si se le da a x un valor de c (abscisa del foco) se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \; y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

Entonces el ancho focal será:

$$L. R. = \frac{2b^2}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .(21)$$

55.- <u>EXCENTRICIDAD DE LA HIPERBOLA</u>.- La excentricidad de una hipérbola es la relación de la distancia focal al eje transverso.

$$e = \frac{2c}{2a} \qquad \therefore \; e = \frac{c}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; .(22)$$

En la hipérbola siempre $c > a$ y por lo tanto $e > 1$.

En la elipse se vió que su excentricidad es siempre menor que la unidad.

56.- <u>ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA</u>.- Sea la ecuación de la hipérbola con eje transverso horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se va a encontrar la intersección con la recta $y = mx$.

Haciendo simultáneas las dos ecuaciones se encontrará:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad ; \quad y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

Si $b^2 < a^2m^2$ las intersecciones son imaginarias.

Si $b^2 > a^2m^2$ se tienen dos puntos reales de intersección.

Si $b^2 = a^2m^2$ $x = \infty$; $y = \infty$; es decir que la recta encontrará a la curva en el infinito, o sea que es tangente a la curva en el infinito y por lo tanto asíntota (Ver definición de asíntota en Pag. 41). Entonces $m = \pm \frac{b}{a}$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .(23)$$

que son las ecuaciones de las asintotas a la hipérbola dada.

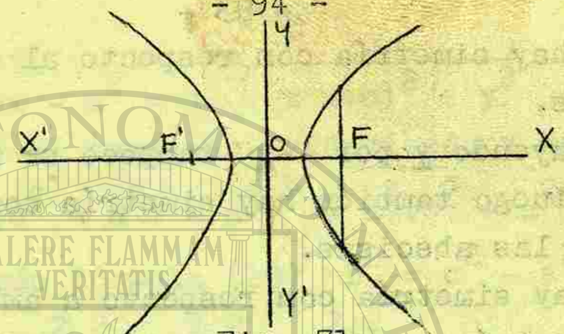

Fig. 71

En la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ;$$

si se le da a x un valor de c (abscisa del foco) se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \ y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

Entonces el ancho focal será:

$$L.\ R. = \frac{2b^2}{a} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

55.- <u>EXCENTRICIDAD DE LA HIPERBOLA</u>.- La excentricidad de una hipérbola es la relación de la distancia focal al eje transverso.

$$e = \frac{2c}{2a} \qquad \therefore \ e = \frac{c}{a} \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

En la hipérbola siempre $c > a$ y por lo tanto $e > 1$.

En la elipse se vió que su excentricidad es siempre menor que la unidad.

56.- <u>ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA</u>.- Sea la ecuación de la hipérbola con eje transverso horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se va a encontrar la intersección con la recta $y = mx$.

Haciendo simultáneas las dos ecuaciones se encontrará:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \ ; \quad y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

Si $b^2 < a^2m^2$ las intersecciones son imaginarias.

Si $b^2 > a^2m^2$ se tienen dos puntos reales de intersección.

Si $b^2 = a^2m^2$ $x = \infty$; $y = \infty$; es decir que la recta encontrará a la curva en el infinito, o sea que es tangente a la curva en el infinito y por lo tanto asíntota (Ver definición de asíntota en Pag. 41). Entonces $m = \pm \frac{b}{a}$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (23)$$

que son las ecuaciones de las asintotas a la hipérbola dada.

Si la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, es decir con eje transverso vertical, en forma semejante se demostraría que las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$y = \pm \frac{a}{b} x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (23a).$$

Para dibujar las asíntotas se construye el rectángulo con lados 2a y 2b Figs. 72 y 73, con centro coincidiendo con el de la hipérbola y se trazan las diagonales de dicho rectángulo que como es fácil ver, son las asíntotas.

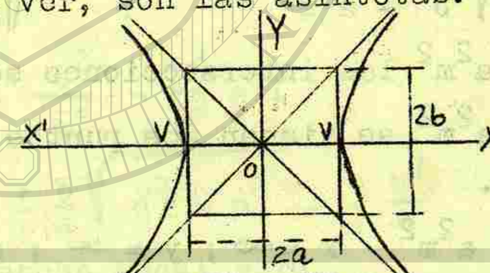

Fig. 72

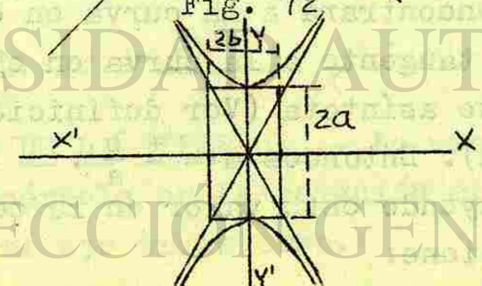

Fig. 73

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de la hipérbola con

centro en el origen focos en $(\pm 5, 0)$ eje transverso igual a 8. (Fig. 74).

Puesto que la distancia del centro a cualquiera de los focos es igual a c, entonces $c = 5$;

$2a = 8 \ \therefore a = 4$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Puesto que la hipérbola tiene su eje transverso horizontal su ecuación es de la forma (20). Sustituyendo valores tenemos:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore 9x^2 - 16y^2 = 144$ es la ecuación de la hipérbola.

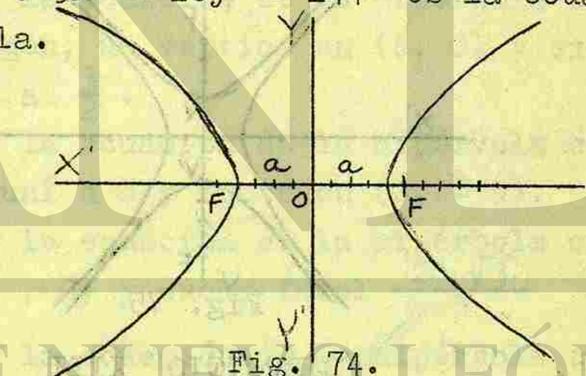

Fig. 74.

2) Encontrar las coordenadas de los focos y vértices, longitudes eje transverso y conjugado, excentricidad, latus rectum y ecuaciones de las asíntotas de la siguiente hipérbola con centro en el origen. $25y^2 - 4x^2 = 100$ (Fig. 75).

Dividiendo entre 100 para igualar el segundo miembro a 1 se tiene:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$$

La ecuación es de la forma (20a) o sea es una hipérbola con eje transverso vertical.

$a^2 = 4$; $a = 2$; $2a = 4$ Eje transverso

$b^2 = 25$; $b = 5$; $2b = 10$ Eje conjugado.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$V\ (0, \pm 2)$; $F\ (0, \pm \sqrt{29})$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{2}$; $L.R. = \frac{50}{2} = 25$

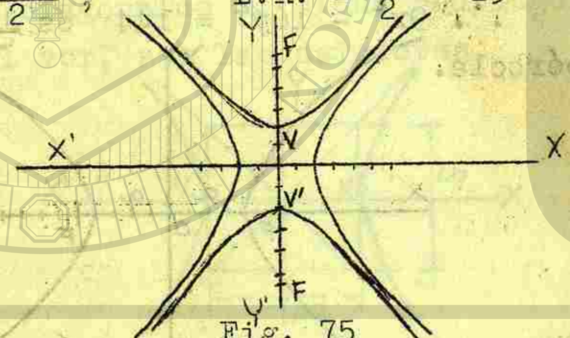

Fig. 75

EJERCICIO XIII

1.- En las siguientes hipérbolas encontrar el valor de a y b; coordenadas de focos, vértices, longitud del latus rectum, las ecuaciones de las asíntotas y dibujarlas.

a) $4x^2 - 25y^2 = 100$

b) $3x^2 - 4y^2 = 12$

c) $x^2 - 16y^2 + 16 = 0$

d) $16x^2 - 36y^2 - 576 = 0$

e) $y^2 - x^2 = 9$

f) $100x^2 - 16y^2 = 1600$

g) $225x^2 - 196y^2 = 100$

h) $3x^2 - 4y^2 + 10 = 0$

2.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen; focos en el eje de las ordenadas, eje transverso igual a 8 y excentricidad igual a 2.

3.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un vértice en (6, 0) y excentricidad igual a $\frac{3}{2}$.

4.- Encontrar la ecuación de la hipérvola con eje conjugado igual a 8 y focos en $(0, \pm 5)$.

5.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con focos en $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y ancho focal $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

6.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en el eje de las x y pasando por:

$$\left(-\frac{10}{3}, 4\right) \text{ y } \left(2, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

7.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las y y pasando por:

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{4}\right) \text{ y } \left(-3, \frac{15}{4}\right).$$

57.- HIPERBOLA EQUILATERA.- Cuando el eje transverso es igual al eje conjugado, la hipérbola se llama equilátera. $a = b$

58.- HIPERBOLAS CONJUGADAS.- Se llaman hipérbolas conjugadas a aquellas en que el eje transverso y el eje conjugado de una son respectivamente el eje conjugado y transverso de otra.

Teniendo la ecuación de una hipérbola para encontrar la de su conjugada basta poner la ecuación dada en alguna de las formas (20) o (20a) según el caso y cambiar signos a uno de los dos miembros de la ecuación.

Se ve fácilmente que las dos hipérbolas tienen las mismas asíntotas y la misma distancia focal.

Las hipérbolas conjugadas aparecerán como en la Fig. 76

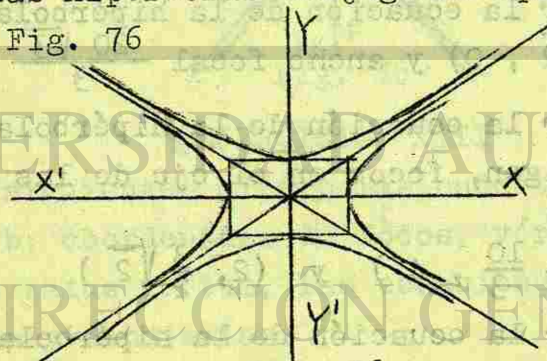

Fig. 76

EJERCICIO XIV

1.- Encontrar las ecuaciones de las siguientes hi-

pérbolas equiláteras con centro en el origen

a) $V(\pm 4, 0)$ c) $V(\pm 5, 0)$

b) $V(0, \pm 7)$ d) $V(0, \pm \frac{3}{4})$

2.- Encontrar la ecuación de las hipérbolas conjugadas y las ecuaciones de las asíntotas. Dibujar las curvas.

a) $x^2 - 8y^2 = -8$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

c) $x^2 - y^2 = 9$

d) $y^2 - 4x^2 = 16$

C A P I T U L O   VIII

COORDENADAS POLARES.

1.- <u>GENERALIDADES</u>.- Otra forma de localizar puntos en un plano es por medio de las coordenadas polares.

Si se tiene un punto fijo y una recta fija, O y OA respectivamente, en la Fig. 77; para tener localizado un punto cualquiera P del plano es suficiente conocer su distancia OP al punto fijo y el ángulo que OP hace con OA.

Fig. 77

Al punto fijo O se le llama <u>polo</u> y a la recta fija OA <u>eje polar</u>. Se acostumbra que OA sea horizontal extendiéndose a la derecha de O. El ángulo AOP se considera positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y negativo cuando se mide en el mismo sentido que el de las manecillas.

Se acostumbra designar a dicho ángulo con la letra griega θ y se le llama ángulo polar, argumento o ángulo vectorial.

La distancia OP se considera positiva cuando está medida en el lado móvil del ángulo y negativa cuando está medida sobre la prolongación a través de O de la misma recta del lado móvil. Se le designa con la letra griega ρ y se le llama radio vector.

ρ y θ son entonces las coordenadas polares de P y se escriben en forma semejante a las coordenadas rectangulares: P (ρ, θ) ; indicando primero el radio vector.

Cada pareja de valores determina un punto sobre el plano. Las figuras 78, 79, 80 y 81 representan respectivamente los puntos (5, 30°); (-7, 150°); (3, 190°) y (-8, -15°).

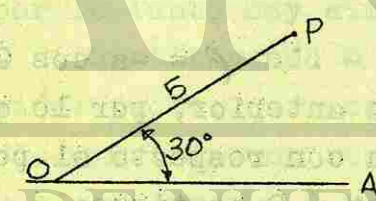

Fig. 78

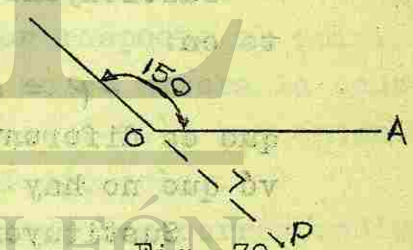

Fig. 79

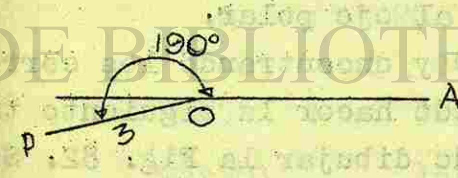

Fig. 80

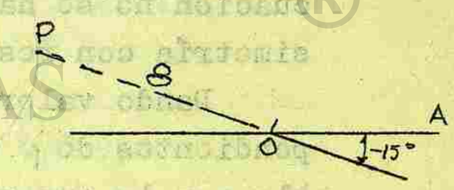

Fig. 81

2.- REPRESENTACION GRAFICA DE ECUACIONES POLARES.- En una ecuación polar las variables son ρ y θ; el lugar geométrico representado por una ecuación de este tipo se dibujará dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ.

La curva será simétrica con respecto al polo cuando al sustituir en la ecuación ρ por $-\rho$ la ecuación no se altera y habrá puntos simétricos con respecto al eje polar cuando al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación no se altera.

Ejemplos:

1) Dibujar la curva representada por la ecuación

$$\rho = a \cos \theta$$

Sustituyendo ρ por $-\rho$ la ecuación se convierte en:

$$-\rho = a \cos \theta \quad \therefore \quad \rho = -a \cos \theta$$

que es diferente de la anterior, por lo que se vé que no hay simetría con respecto al polo.

Sustituyendo θ por $-\theta$ se tiene:

$\rho = a \cos (-\theta)$ pero como $\cos(-\theta) = \cos \theta$ la ecuación no se ha alterado y por lo tanto habrá simetría con respecto al eje polar.

Dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ se puede hacer la siguiente tabla con la que se puede dibujar la Fig. 82. Se considerarán valores de θ desde 0° hasta 180° puesto que entre 180° y 360° se repiten los mis-

mos puntos ya encontrados. Lo mismo pasaría dando valores de θ entre 0° y -180°. Esta ecuación corresponde a un círculo.

θ	ρ
0°	a
30°	0.866a
45°	0.707a
60°	0.5a
90°	0
120°	-0.5a
150°	-0.866a
180°	-a

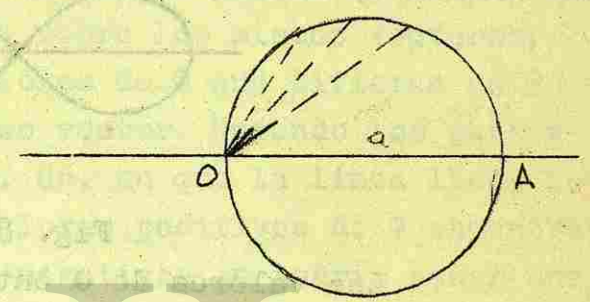

Fig. 82

2) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

Sustituyendo ρ por $-\rho$ la ecuación no cambia, por lo tanto hay simetría con respecto al polo.

Sustituyendo θ por $-\theta$ no se altera la ecuación; puesto que: $\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$; hay entonces simetría con respecto al eje polar.

Dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ se obtiene la tabla siguiente con la que se construye la curva de la Fig. 83.

θ	2θ	ρ
0°	0°	$\pm$ a
15°	30°	$\pm$ 0.93a
22°30'	45°	$\pm$ 0.84a
30°	60°	$\pm$ 0.71a

θ	2θ	ρ
45°	90°	0

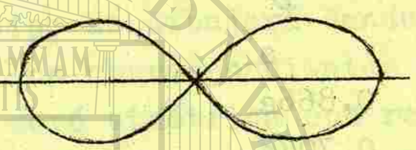

Fig. 83

Los valores de θ entre 45° y 135° dan imaginarios, es decir no hay puntos de la curva entre ellos.

De 135° a 180° la curva da valores simétricos con respecto al eje polar a los de la tabla, y de 180° en adelante se repiten valores. Esta curva se llama Lemniscato de Bernoulli.

3) $\rho = a\,\theta$

No hay simetría ni con respecto al polo ni con respecto al eje polar, puesto que al sustituir ρ por $-\rho$ ó θ por $-\theta$ la ecuación se altera.

Dando valores a θ en radianes se obtiene la tabla siguiente.

Como se ve por la ecuación, el valor de ρ es proporcional al de θ. Si se tiene un valor de θ_1 y su correspondiente $\rho_1 = a\theta_1$ y se da o-

tro valor $\theta_1 + 2\pi$, el valor de ρ sería:

$$\rho_2 = a(\theta_1 + 2\pi) = a\theta_1 + 2\pi a$$

Es decir, que después de situar puntos con los valores dados en la tabla, se pueden localizar más puntos de la curva sobre los mismos vectores, -- puesto que los valores de θ que difieren en 2π caen sobre el mismo vector. Uniendo los puntos se obtiene la Fig. 86, en que la línea llena corresponde a los valores positivos de θ encontrados. Para valores negativos se podría hacer una tabla similar y dibujar la curva de puntos de la misma figura.

Esta curva se llama espiral de Arquímedes.

θ	ρ	θ	ρ
0	0	$\frac{7\pi}{6}$	3.67a
$\frac{\pi}{6}$	0.52a	$\frac{5\pi}{4}$	3.93a
$\frac{\pi}{4}$	0.79a	$\frac{4\pi}{3}$	4.19a
$\frac{\pi}{3}$	1.05a	$\frac{3\pi}{2}$	4.71a
$\frac{\pi}{2}$	1.57a	$\frac{5\pi}{3}$	5.24a
$\frac{2\pi}{3}$	2.09a	$\frac{7\pi}{4}$	5.50a
$\frac{3\pi}{4}$	2.36a	$\frac{11\pi}{6}$	5.76a
$\frac{5\pi}{6}$	2.62a	2π	6.28a

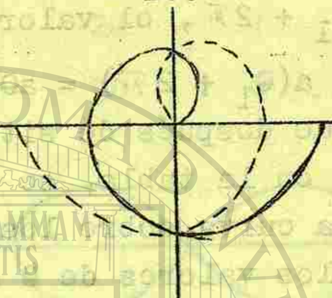

Fig. 84

EJERCICIO I

Dibujar las curvas siguientes:

1.- $\rho = 3 \sec \theta$

2.- $\rho = 2 \csc \theta$

3.- $\rho = 4$

4.- $\rho = 2 \cos \theta$

5.- $\rho = -3 \operatorname{sen} \theta$

6.- $\rho = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$

7.- $\theta = \frac{\pi}{4}$

8.- $\rho = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

9.- $\rho = 2 \cos 3\theta$

10.- $\rho = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$

3.- RELACION ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y PO LARES.- Si se hacen coincidir el origen y la par te positiva del eje de las X de un sistema de co denadas cartesianas con el polo y el eje polar r pectivamente de uno de coordenadas polares, se t dría (Fig. 85) para un punto P cualquiera del pl no.

Coordenadas cartesianas P (x, y)

Coordenadas polares P (, θ)

$x = \ \cos \theta$ . . . . (24)

$y = \ \operatorname{sen} \theta$ . . . . (25)

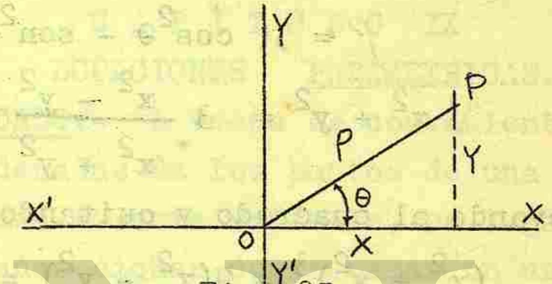

Fig. 85

que son las fórmulas para pasar de coordenadas cartesianas a polares.

Inversamente:

$$^2 = x^2 + y^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (26)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (27)$$

son las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas.

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación:

$$x^2 - y^2 = 4$$

a coordenadas polares.

Sustituyendo según fórmulas (24) y (25) se tiene:

$$\rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 4$$

$$\therefore \rho^2 = 4 \sec 2\theta$$

2) Encontrar la ecuación cartesiana de la curva:

$$\rho = 3 \cos 2\theta$$

Solución.

$$\rho = 3(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y quitando denominadores:

$$(x^2 + y^2)^3 - 9(x^2 - y^2)^2 = 0$$

EJERCICIO II

1.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas polares:

a) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

b) $x^2 + y^2 + ax = a(x^2 + y^2)$

c) $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2axy$

d) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

e) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

f) $-3x + 2y - 5 = 0$

2.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas cartesianas:

a) $\rho = \dfrac{7}{5 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta}$

b) $\rho = 4$

c) $\rho = \operatorname{sen} \theta$

d) $\rho = a\theta$

e) $\rho = \cos 2\theta + 1$

f) $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

CAPITULO IX

ECUACIONES PARAMETRICAS.

1.- DEFINICIONES.- A veces es conveniente expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una tercera variable, en lugar de tener relacionadas dichas coordenadas en una ecuación.

A esa tercera variable se le llama Parámetro y las ecuaciones que expresan la relación entre las coordenadas y el parámetro se llaman ecuaciones paramétricas.

2.- DIBUJO DE CURVAS CON ECUACIONES PARAMETRICAS.- Para encontrar puntos de una curva conociendo sus ecuaciones paramétricas se van dando valores al parámetro y se encuentran los valores de las coordenadas.

Ejemplo: $x = 2t^2$; $y = t + 3$

Dando valores a t se encuentra la tabla siguiente con la que se pueden dibujar los puntos de la Fig. 86, la cual es una parábola.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	18	8	2	0	2	8	18
y	0	1	2	3	4	5	6

$\therefore \; \rho^2 = 4 \sec 2\theta$

2) Encontrar la ecuación cartesiana de la curva:

$$\rho = 3 \cos 2\theta$$

Solución.

$$\rho = 3(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y quitando denominadores:

$$(x^2 + y^2)^3 - 9(x^2 - y^2)^2 = 0$$

EJERCICIO II

1.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas polares:

a) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

b) $x^2 + y^2 + ax = a(x^2 + y^2)$

c) $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2axy$

d) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

e) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

f) $-3x + 2y - 5 = 0$

2.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas cartesianas:

a) $\rho = \dfrac{7}{5\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}$

b) $\rho = 4$

c) $\rho = \operatorname{sen}\theta$

d) $\rho = a\theta$

e) $\rho = \cos 2\theta + 1$

f) $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

CAPITULO IX

ECUACIONES PARAMETRICAS.

1.- DEFINICIONES.- A veces es conveniente expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una tercera variable, en lugar de tener relacionadas dichas coordenadas en una ecuación.

A esa tercera variable se le llama Parámetro y las ecuaciones que expresan la relación entre las coordenadas y el parámetro se llaman ecuaciones paramétricas.

2.- DIBUJO DE CURVAS CON ECUACIONES PARAMETRICAS.- Para encontrar puntos de una curva conociendo sus ecuaciones paramétricas se van dando valores al parámetro y se encuentran los valores de las coordenadas.

Ejemplo: $x = 2t^2$; $y = t + 3$

Dando valores a t se encuentra la tabla siguiente con la que se pueden dibujar los puntos de la Fig. 86, la cual es una parábola.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	18	8	2	0	2	8	18
y	0	1	2	3	4	5	6

3.- ELIMINACION DEL PARAMETRO.-

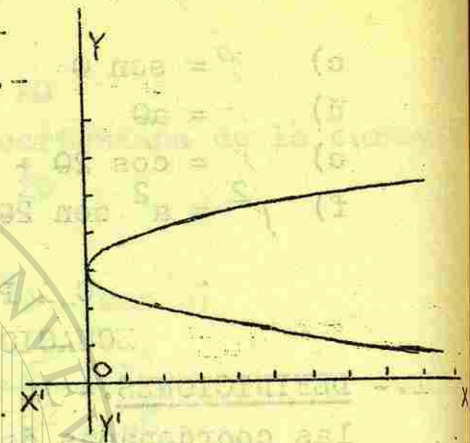

Fig. 86

A veces es conveniente, teniendo las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico, eliminar el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva.

En el caso anterior: $x = 2t^2$ (1) $y = t + 3$ (2)

Si se despeja t en (2) y se sustituye en (1) se encuentra. $x = 2(y - 3)^2 \therefore (y - 3)^2 = \frac{1}{2}x$

Ecuación de una parábola con vértice en (0, 3)

EJERCICIO I

Graficar las siguientes ecuaciones paramétricas, tomando t y θ como parámetro. Encontrar la ecuación rectangular en cada caso.

1) $x = t - 1$; $y = t^3$
2) $x = 7 + t$; $y = t^2 - 5t + 8$
3) $x^2 = t$; $4y^2 = 9t + 36$
4) $x = t - 3$; $y = 4 + 2t$
5) $x = \cos\theta$; $y = \operatorname{sen}\theta$
6) $x = \tan\theta$; $y = \sec^2\theta$
7) $x = \csc\theta$; $y = \cot\theta$