# APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA

## CAPITULO PRIMERO

## GENERALIDADES.

1.- DEFINICION.- La geometría Analítica estudia la relación entre las propiedades geométricas y algebráicas, es decir, que ayuda al estudio de aquéllas por medio del análisis algebraico y estudia también propiedades de las ecuaciones por medio de la Geometría.

Se considera como iniciador de la Geometría Analítica a René Descartes (1596 - 1650), ya en épocas anteriores se estudiaban propiedades geométricas por métodos algebraicos e inclusive Arquímedes (287 - 212 A.C.) conocía el método de localizar puntos por medio de coordenadas, sin embargo fué Descartes el primero que escribió un tratado en el que se expuso la Geometría Analítica en conceptos que dieron origen al estudio formal de esta rama de las Matemáticas.

2.- ESCALA NUMERICA.- Si se considera una recta ilimitada en ambos sentidos y se toma un punto sobre dicha recta como cero u origen, para marcar hacia ambos lados otros puntos a distancias iguales entre sí, puede hacerse corresponder cada uno de estos puntos con los números enteros 1, 2, 3, etc., en un sentido; -1, -2, -3, etc., en el otro sentido. Si la recta se toma horizontal, Fig. 1, es costumbre que los números positivos se marquen a la derecha y los negativos a la izquierda.


Fig. 1

Esta correspondencia entre los números enteros y los puntos de la recta se puede extender a todos los números reales, pues fácilmente se ve cómo se puede hacer coincidir cada número real con un punto de la recta y sólo uno, e inversamente como a cada punto de la recta corresponde un número real y sólo uno.

3.- ABSCISA.- Se llama abscisa de un punto, a la distancia entre dicho punto y el origen o sea el cero de la escala, es positivo cuando está a la derecha del cero y negativo a la izquierda.

4.- <u>DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS SOBRE UN EJE</u>.- La distancia entre dos puntos se mide por la diferencia de abscisas, si se llama $x_1$ a la abscisa del punto A y $x_2$ a la del punto B, la distancia $AB = x_2 - x_1$ ; que es positiva cuando va de izquierda a derecha. La distancia $BA = x_1 - x_2$ ó sea que $AB = -BA$ (Fig. 2)

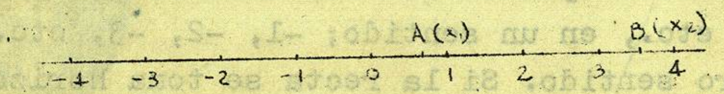


Fig. 2



5.- <u>COORDENADAS CARTESIANAS</u>.- Si se consideran los puntos sobre un plano, se comprende que no se podrían localizar sabiendo solamente el valor de su abscisa, puesto que ésta localiza únicamente los puntos sobre una línea.

Para localizar un punto en un plano, se trazan dos ejes perpendiculares entre sí, como se muestra en la Fig. 3.

Al eje marcado con X X' se le llama eje de las abscisas o eje de las X, al perpendicular a éste se le llama eje de las ordenadas o eje de las Y; estos dos ejes dividen al plano en cuatro partes que se llaman cuadrantes. El primer cuadrante es el que está arriba del eje de las X y a la derecha del eje de las Y; el segundo cuadrante es el que está arriba del eje de las X y a la izquierda del de las Y; el tercer cuadrante el que está abajo del eje de las X y a la izquierda del eje de las Y y el cuarto el que está abajo del eje de las X y a la derecha del eje de las Y.

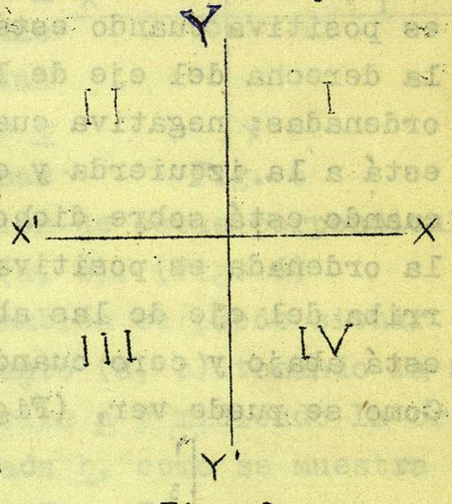


Fig. 3

A la distancia de un punto P, (Fig. 4) al eje de las ordenadas se le llama abscisa del punto y se designa por x. A su distancia al eje de las abscisas se le llama ordenada y se designa por y.

La abscisa X y la ordenada Y del punto P, son sus coordenadas y se escriben entre paréntesis (x, y) anotando primero la abscisa.

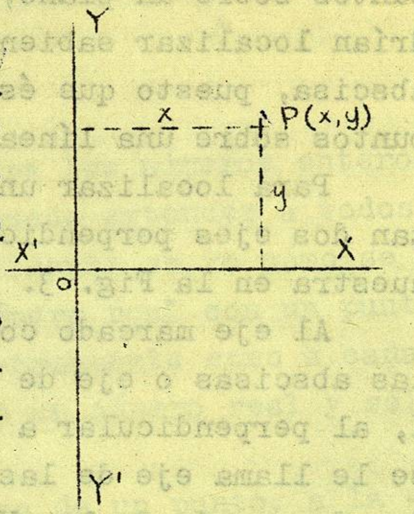

Fig. 4

La abscisa de un punto es positiva cuando está a la derecha del eje de las ordenadas; negativa cuando está a la izquierda y cero cuando está sobre dicho eje la ordenada es positiva cuando el punto está arriba del eje de las abscisas; negativa cuando está abajo y cero cuando está sobre dicho eje. Como se puede ver, (Fig. 5), en el primer cuadrante ambas coordenadas son positivas, en el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva en el tercero tanto la abscisa como la ordenada son negativas; en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y

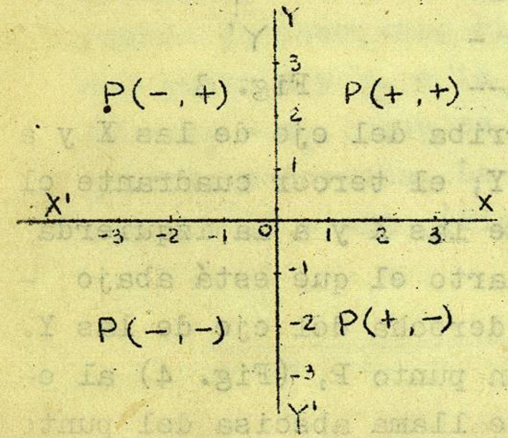

Fig. 5



la ordenada negativa.

En esta forma a cada pareja de números reales les corresponde solamente un punto del plano y cada punto del plano queda definido por una y sólo una pareja de números reales.

Dado un punto (a, b) para situarlo en el plano se toma a partir del origen, sobre el eje de las abscisas, la distancia a y sobre el eje de las ordenadas la distancia b. Se levantan perpendiculares a los dos ejes en los extremos de esas

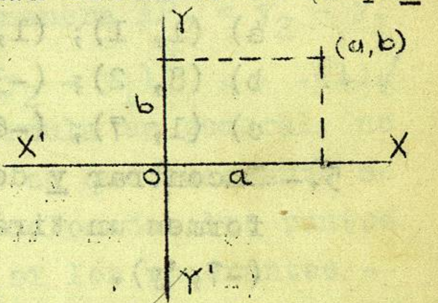

Fig. 6

distancias; la intersección de estas perpendiculares localizará el punto (a, b). (Fig. 6)

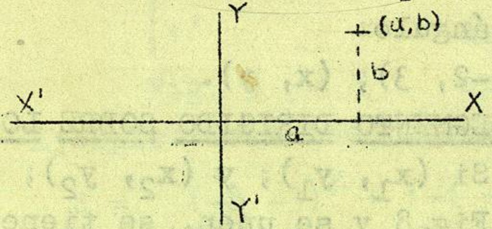

Fig. 7

También se puede situar el punto (a, b) tomando la abscisa a y midiendo la ordenada b, como se muestra en la Fig. 7.

EJERCICIO I

1.- Encontrar la distancia entre los siguientes puntos. (sobre un eje). a) $x_1 = 7$ , $x_2 = 3$

b) $x_1 = 5$ ; $x_2 = 8$ c) $x_1 = -3$ ; $x_2 = -5$

d) $x_1 = -8$ ; $x_2 = 7$ e) $x_1 = 7$ ; $x_2 = -10$

2.- Situar los siguientes puntos: a) (5, 4) ; b) (-3, 8); c) (2, -5); d) (-4, -3); e) (0, -4)

f) (8, 0); g) (0, 0).

3.- Dibujar los triángulos cuyos vértices son:

a) (4, 5); (-3, 4); (2, -6)

b) (-3, -7); (5, 5); (4, 0)

c) (0, 3); (-2, ½); (-4, 3).

4.- Determinar las áreas de los triángulos sig.:

a) (1, 1); (1, 6); (7, 1).

b) (8, 2); (-3, 2); (-3, -7)

c) (1, 7); (-6, -5); (1, -5).

5.- Encontrar y de modo que los siguientes puntos formen un tiríngulo rectángulo: (2, 6); (2, 2); (-7, y).

6.- Encontrar la hipotenusa del siguiente triángulo (1, 1); (4, 1); (1, 5).

7.- Encontrar las coordenadas del cuarto vértice del siguiente rectángulo: (-2, 7); (4, 3); (-2, 3); (x, y).

6.- <u>PROYECCION DE UN SEGMENTO DIRIGIDO SOBRE LOS EJES COORDENADOS</u>.- Si $(x_1, y_1)$; y $(x_2, y_2)$; son los puntos A. y B Fig. 8 y se unen, se tiene el segmento de recta AB. La proyección de este segmento sobre el eje de las abscisas tomado en sentido AB, será $x_2 - x_1$ y la proyección sobre el eje de las ordenadas será $y_2 - y_1$.

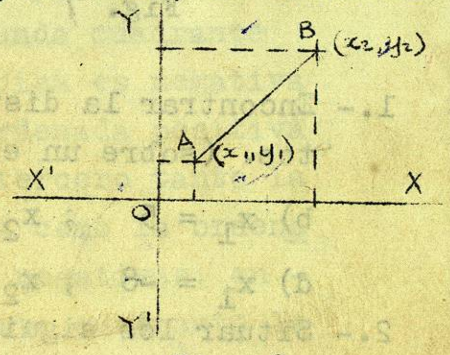

Fig. 8



Si el segmento se toma en la dirección BA, sus proyecciones serán $x_1 - x_2$ y $y_1 - y_2$.

7.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.- La distancia $P_1P_2$ Fig. 9, o sea d es:

$d = \sqrt{P_1A^2 + AP_2^2}$ ; pero $P_1A$ = proyección del segmento sobre el eje de las abscisas igual $x_2 - x_1$ ; y de la misma manera $AP_2 = y_2 - y_1$

$$\therefore\ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad . . . (1)$$

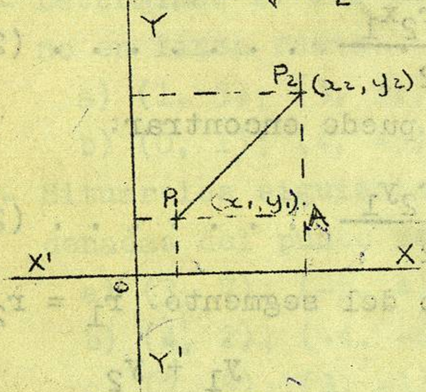

Fig. 9

Esta fórmula es general, no importa en que cuadrante se hallen colocados los puntos ni aún si los cuadrantes son distintos; siempre se tomará la diferencia algebraica entre abscisas y la diferencia algebraica entre ordenadas.

Ejemplo: Sean los puntos (3, -5); (-8, -4)

$d = \sqrt{(-8 -3)^2 + (-4 + 5)^2} = \sqrt{122}$

8.- <u>COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN PARTES PROPORCIONALES A UNA RAZON DADA</u>.- Dados $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ y $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$ (Fig. 10). Encontrar un punto P (x, y) de tal modo que:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

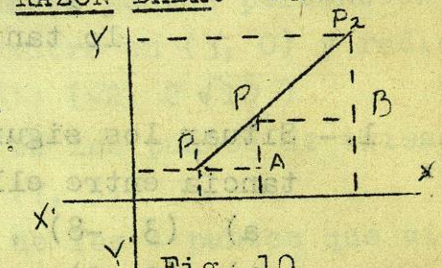

Fig. 10

Por semejanza en los triángulos $P_1AP$ y $PBP_2$ se tiene:

$$\frac{P_1A}{PB} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

pero $P_1A = x - x_1$ ; $PB = x_2 - x$

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{r_1}{r_2} \quad ; \text{ despejando}$$

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En forma semejante se puede encontrar:

$$y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si P es el punto medio del segmento: $r_1 = r_2$

$$\therefore \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

N O T A: Si el punto P sobre la recta que une $P_1$ y $P_2$ queda fuera del segmento, o sea si la división es externa, $P_1P$ y $PP_2$ tienen direcciones opuestas y por lo tanto su relación es negativa.

EJERCICIO II

1.- Situar los siguientes puntos y encontrar la distancia entre ellos:

a) (3, -8) ; (-4, -4)
b) (0, 0) ; (5, -1)

$x_1$ 1 $x_2$ 2



López

c) (0, 7) ; (7, 0).
d) (-6, -3) ; (-7, -9).
e) (5, 4) ; (-3, -2).

2.- Dados los siguientes vértices, dibujar los triángulos y encontrar la longitud de sus lados.

a) (2, 6); (-3, -2); (4, -3)
b) (0, 0); (0, -5); (7, 0).
c) (2, 2); (-3, 4); (1, 7).

3.- Determinar si los siguientes tres puntos están o no en línea recta:

a) (1, 5); (3, 9); (-3, -1).
b) (0, 1); (4, -3); (-3, 5).

4.- Situar los siguientes puntos y encontrar las coordenadas del punto medio.

a) (3, 7); (-5, 4).
b) (4, 2); (-4, -6).
c) (7, 5); (3, -1).
d) (-3, -5); (2, 4).



5.- Encontrar las longitudes de las medianas del triángulo dado por los siguientes vértices:
A (4, 6); B (2, -4); C (-6, 0).

6.- Decir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a una circunferencia con centro en (3, 0) y radio igual a 4; (3, -4); (2, 15); $(-2, 2\sqrt{10})$

7.- Encontrar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento (1, 2); (7, 5).

8.- Encontrar las coordenadas de los 4 puntos que di-