viden al segmento (2, 9); (8, 1) en 5 partes i-- guales.

9.- Demostrar que las diagonales del paralelogramo - cuyos vértices son los puntos (0, 0); (3, 4); - (7, 0); (10, 4), se bisectan mutuamente.

9.- INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA.- Al ángulo que forman la dirección positiva del eje de las ab-- scisas y la dirección positiva de una recta, se le - llama inclinación de la -- recta. La dirección positiva de una recta se considera hacia arriba; entonces la inclinación puede va--- riar de 0° a 180°. En la Fig. 11 la inclinación de L_1 es θ_1 y la inclinación de L_2 es θ_2. La línea recta se considera ilimitada en ambas direcciones. Cuando se toma una fracción de ella se - tiene un segmento de recta, el cual tendrá la -- misma inclinación que la línea a que corresponde. La inclinación del segmento AB, Fig. 12, se en-- cuentra prolongándolo hasta cortar el eje de las x o trazando por cualquier punto del segmento - una paralela al eje de las x.

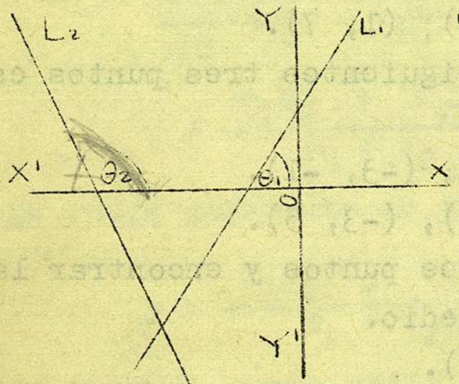

Fig. 11

A la tangente de la inclinación se le llama Pendiente de la recta.

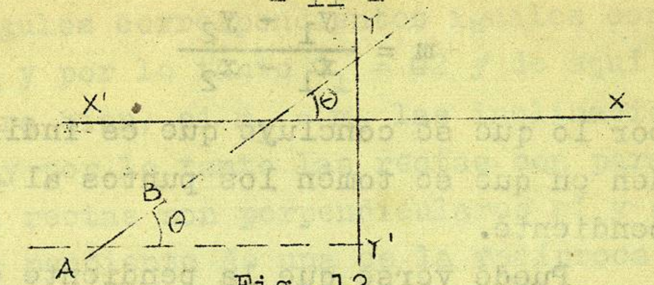

Fig. 12

En la Fig. 11:

Pendiente de L_1 = Tan θ_1

Pendiente de L_2 = Tan θ_2

En Fig. 12, pendiente de AB = Tan θ

Si se tienen dos puntos P_1 (x_1, y_1); P_2 (x_2, y_2) Fig. 13, la pendiente entre ellos, que se designará con la letra "m", estará dada por:

$$m = \tan\theta = \frac{AP_2}{P_1A} \quad ; \text{ pero}$$

$$AP_2 = y_2 - y_1 \quad y$$

$$P_1A = x_2 - x_1$$

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Puede verse que si en la fórmula (3) se cambian - signos a ambos miembros de la fracción, el valor de "m" no se altera; por lo tanto:

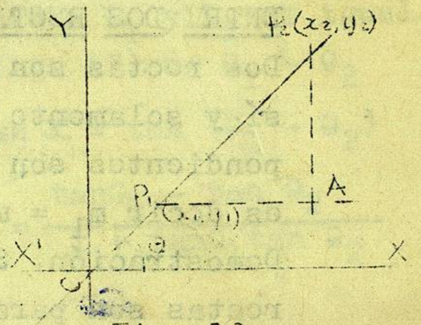

Fig. 13

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

por lo que se concluye que es indiferente el orden en que se tomen los puntos al calcular la -- pendiente.

Puede verse que la pendiente de una recta - L_1 paralela al eje de las abscisas es cero, y la de una recta L_2 paralela al eje de las ordenadas es ∞ , Fig. 14.

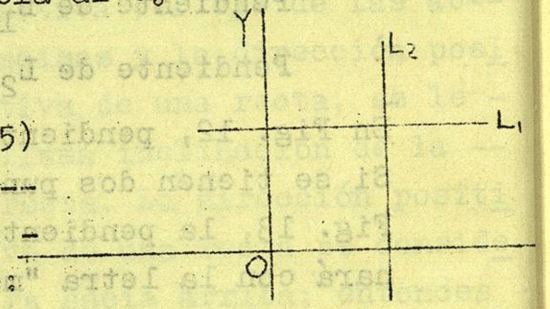

Fig. 14

Ejemplos.

Dados los puntos (1, 5) y (-4, -3) hallar la -- pendiente de la recta - determinada por ellos:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5 - (-3)}{1 - (-4)} = \frac{8}{5} = 1.600$$

Idem para los puntos (-4, 7) y (2, -5)

$$m = \frac{7 - (-5)}{-4 - 2} = \frac{12}{-6} = -2$$

10.- <u>CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS RECTAS</u>.-

Dos rectas son paralelas sí y solamente sí sus - pendientes son iguales, es decir $m_1 = m_2$ (Fig.15)

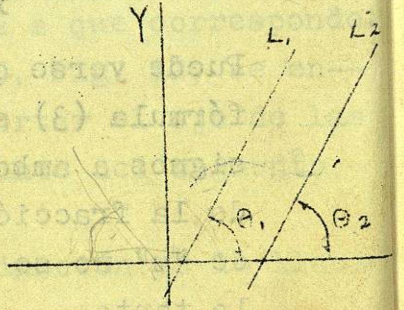

Fig. 15

Demostración. Si las dos rectas son paralelas for-

marán ángulos correspondientes iguales con el eje de las <u>x</u> y por lo tanto $\theta_1 = \theta 2$ y de aquí $m_1 = m_2$

Ahora bien, si $m_1 = m_2$ las inclinaciones son iguales y por lo tanto las rectas son paralelas.

Dos rectas son perpendiculares sí y solamente sí la pendiente de una es la recíproca y de -- signo contrario de la otra; o lo que es lo mismo el producto de sus pendientes es igual a -1

Demostración: En la Fig. 16

$$\theta_1 = 90° + \theta_2$$

$$\therefore \operatorname{Tan}\theta_1 = \tan(90° + \theta_2)$$

$$\therefore \tan\theta_1 = -\cot\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

$$\text{pero } \tan\theta_1 = m_1;$$

$$\tan\theta_2 = m_2$$

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{m_2} \text{ ; o sea}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

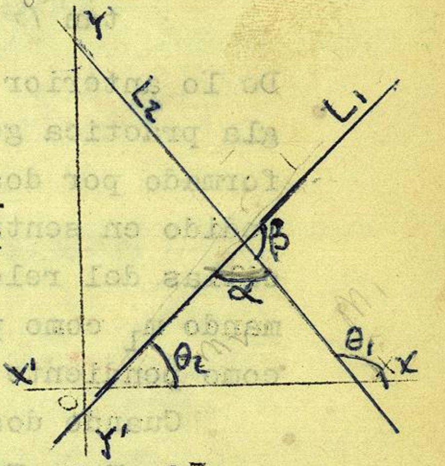

Fig. 17

11.- ANGULO ENTRE DOS RECTAS.- El ángulo α formado entre dos líneas cualesquiera L_1 y L_2 es igual, (fig. 17) a: $\theta_1 - \theta_2$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

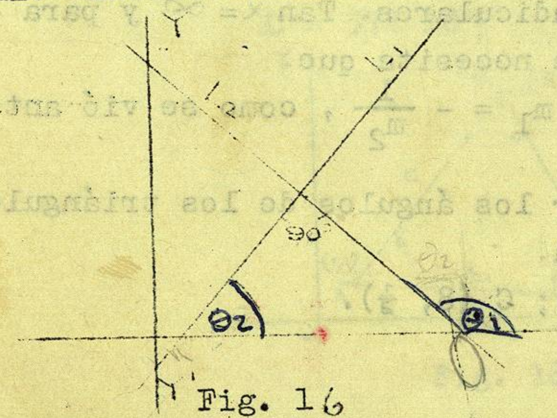

Fig. 16

o sea: $\tan \alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ . . . .(4)

donde m_1 es la pendiente de la recta de mayor inclinación para que α sea el ángulo opuesto al eje de las x. Cuando se desee encontrar β , suplemento de α , la fórmula será:

$$\tan \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

De lo anterior se puede deducir la siguiente regla práctica general para encontrar el ángulo formado por dos rectas: Se considera el ángulo medido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) y se aplica la fórmula (4) tomando m_1 como pendiente de la recta final y m_2 como pendiente de la recta inicial.

Cuando dos rectas son paralelas:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \quad \therefore \; m_1 = m_2 \quad \text{como se vió}$$

Si son perpendiculares: $\tan \alpha = \infty$ y para que esto suceda se necesita que:

$1 + m_1 m_2 = 0 \quad \therefore \; m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, como se vió anteriormente.

Ejemplo: Encontrar los ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

A (1, 1); B (5, 6); C (8, $\frac{1}{2}$).

$$\text{Pendiente AB} = m_c = \frac{6 - 1}{5 - 1} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Pendiente CA} = m_b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 8} = -\frac{1}{14}$$

$$\text{Pendiente BC} = m_a = \frac{\frac{1}{2} - 6}{8 - 5} = -\frac{11}{6}$$

$$\text{Tan A} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{14}}{1 - \frac{5}{56}} = \frac{74}{51} = 1.45098$$

A = 55° 26'

$$\text{Tan B} = \frac{-\frac{11}{6} - \frac{5}{4}}{1 - \frac{55}{24}} = \frac{74}{31} = 2.38709$$

B = 67° 16'

$$\text{Tan C} = \frac{-\frac{1}{14} + \frac{11}{6}}{1 + \frac{11}{84}} = \frac{148}{95} = 1.55789$$

C = 57° 18'

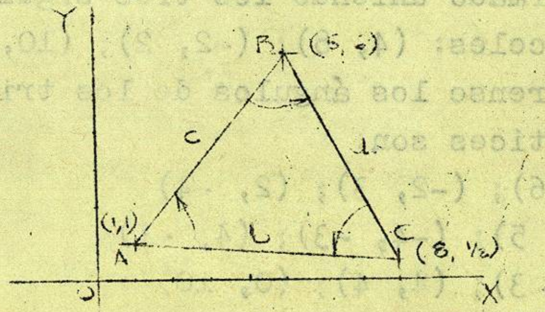

Fig. 18

EJERCICIO III

1.- Encontrar la pendiente y la inclinación de las rectas determinadas por los siguientes pares de puntos:

a) (1, 7); (3, -5). c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

b) (0, 6); (6, 0). d) (0, 0); $\left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right)$

2.- Encontrar el valor de la abscisa u ordenada para que los siguientes puntos tengan la pendiente dada.

a) (3, 4); (5, y). $m = -3$

b) (15, 7); (x, -3) $m = \frac{1}{10}$

c) (-7, 5); (3, y); $m = \frac{9}{10}$

d) (-2, -5); (x, -7); $m = 1$

3.- Demostrar que los siguientes tres puntos están en línea recta: (1, 3); (0, 8); (2, -2).

4.- Demostrar que el cuadrilátero ABCD es un rectángulo: A (-1, 4); B (3, 0); C (7, 4); D (3, 8).

5.- Demostrar por medio de los ángulos que el triángulo formado uniendo los tres siguientes puntos es isósceles: (4, 8); (-2, 2); (10, -4)

6.- Encuéntrense los ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

a) (3, 6); (-2, 3); (2, -4)

b) (-1, 5); (-4, -3); (4, -1)

c) (-3, 3); (4, 4); (0, 10)

d) (1, 1); (-3, -5); (7, 2)

e) (5, 1); (-3, -1); (-6, 2)

7.- Encontrar el tercer vértice que se halla sobre el eje de las ordenadas del triángulo rectángulo cuya hipotenusa está definida por los puntos: (-3, 2) y (4, 3).

8.- Los puntos (1, 3) y (5, 1) determinan una recta. Encontrar las coordenadas de un punto sobre esta recta que, unido con el (3, 7) dé otra línea que forme con la primera un ángulo de 45°.

9.- Demostrar que la recta que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, es paralela al tercer lado e igual a su mitad.