$2x + 3y - 7 = 0$

9.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5, -3) y es perpendicular a la línea $4x + y - 4 = 0$.

10.- Dado el triángulo A (0, 0); B (a, 0); C (b, c), demostrar analíticamente:

a) Que las perpendiculares bisectrices de sus lados se encuentran en un punto equidistante de los tres vértices (Centro del circulo circunscrito).

b) Que las alturas se encunetran en un punto. (Ortocentro).

c) Que las medianas se encuentran en un punto. (Centro de gravedad del triángulo, también llamado centroide).

d) Que los tres puntos encontrados en a, b y c están en línea recta.

20.- <u>DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PUNTO</u>.- Dado un punto P (x, y) y la recta $Ax + By + C = 0$, para encontrar la distancia de la recta al punto consideremos la Fig. 30.

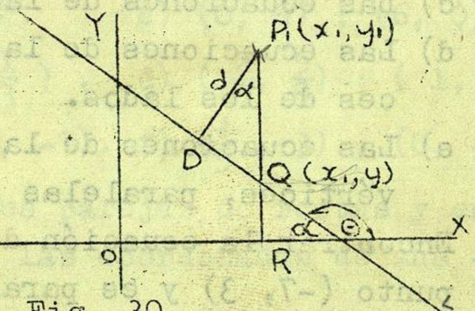

Fig. 30

Sea $DP_1 = d$ la distancia perpendicular de la línea L al punto P_1.

Trácese P_1R paralelá al eje de las ordenadas la cual intersecta a la recta L en el punto Q.

Entonces:

$$d = P_1Q \cos\alpha \quad . . . . (a)$$

La abscisa del punto Q es x_1. Para encontrar la ordenada, como este punto está sobre la recta debe satisfacer su ecuación por lo tanto:

$$Ax_1 + By + C = 0$$

$$\therefore \; y = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

luego las coordenadas de Q son:

$$\left(x_1 \, , -\frac{Ax_1 + C}{B}\right)$$

$$P_1Q = y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \quad . . (b)$$

El ángulo α es suplementario de θ (inclinación de la recta) y se tiene:

$$\cos\alpha = -\cos\theta$$

Según la ecuación de la recta, $m = \tan\theta = -\frac{A}{B}$

$$\therefore \; \cos\theta = -\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad y$$

$$\cos\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad . . . . . (c)$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a) tenemos:

5x+6y-16=0
A=5 B=6 C=4

$$d = \left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}\right)\left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Como se ve, para encontrar la distancia entre el punto y la recta, basta sustituir en la ecuación de ésta última las coordenadas del punto (x_1, y_1) y dividir entre $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Si para encontrar la distancia se considera el signo del radical contrario al del término independiente (C), la distancia será positiva si el punto y el origen están en lados contrarios de la recta (Fig. 31) y negativa si el origen y el punto se encuentran del mismo lado de la recta (Fig. 32)

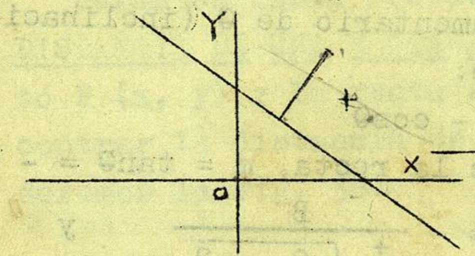

Fig. 31

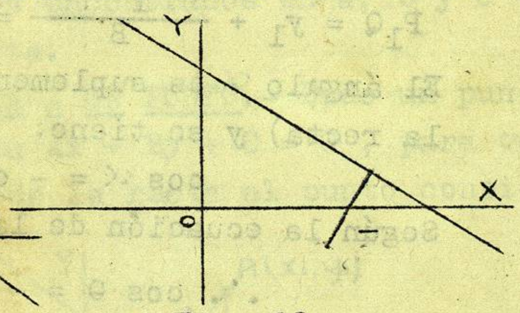

Fig. 32

N O T A.- La demostración de lo anterior se basa en la forma normal de la línea -- recta la cual no se trata en estos apuntes.

Ejemplos:

a) Encontras la distancia de la recta
$4x - 3y + 6 = 0$ al punto P (3, 1)

Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la recta según fórmula (9) se tiene:

$$d = \frac{4.3 - 3.1 + 6}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} = -3$$

b) Encontrar la distancia de la recta
$12x - 5y - 3 = 0$ al punto (5, -2)

Procediendo como en el ejemplo anterior se tiene:

$$d = \frac{12.5 - 5.(-2) - 3}{+\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{47}{13}$$

c) Encontrar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las líneas:
$x - 3y + 3 = 0$; $7x + 4y - 28 = 0$ (Fig. 33)

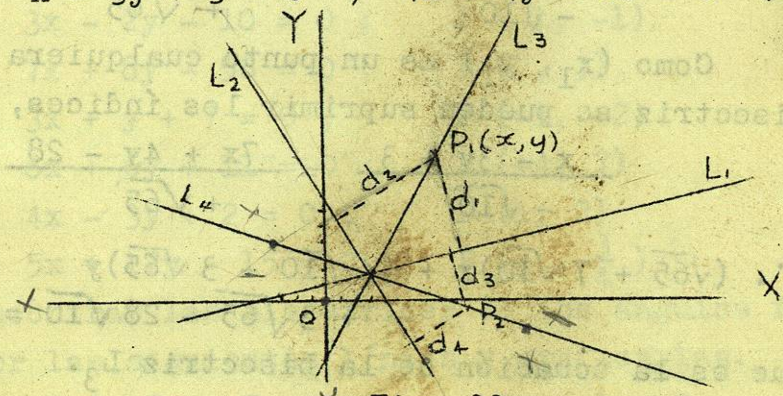

Fig. 33

Sean (x_1, y_1) un punto cualquiera sobre la bisectriz L_3.

Como se ve, tanto L_1 como L_2 quedan entre el origen y el punto (x_1, y_1) por lo que d_1 y d_2 son positivas.

Si el punto sobre L_3 se toma abajo de la intersección de las rectas, el origen y el punto estarán del mismo lado con respecto a ambas rectas, o sea d_1 y d_2 son negativas, por lo que se concluye que siempre $d_1 = d_2$

$$\text{pero } d_1 = \frac{x_1 - 3y_1 + 3}{\sqrt{10}} \quad \text{y } d_2 = \frac{7x_1 + 4y_1 - 28}{\sqrt{65}}$$

El signo del radical para d_1 es negativo por ser C positivo y para d_2 es positivo por ser C negativo, entonces:

$$\frac{x_1 - 3y_1 + 3}{-\sqrt{10}} = \frac{7x_1 + 4y_1 - 28}{+\sqrt{65}}$$

Como (x_1, y_1) es un punto cualquiera de la bisectriz se pueden suprimir los índices, o sea:

$$\frac{x - 3y + 3}{-\sqrt{10}} = \frac{7x + 4y - 28}{+\sqrt{65}}$$

$$\therefore\ (\sqrt{65} + 7\sqrt{10})x + (4\sqrt{10} - 3\sqrt{65})y + 3\sqrt{65} - 28\sqrt{10} = 0$$

que es la ecuación de la bisectriz L_3.

Para la bisectriz L_4, un punto P_2 sobre ella queda del mismo lado que el origen para la recta L_1 y del lado contrario para L_2 por lo que las distancias a las rectas serán de signos contrarios.

También serían de signo contrario si el punto queda a la izquierda de la intersección, como puede verse fácilmente en la figura, es decir que $d_3 = - d_4$

$$\text{Entonces: } \frac{x - 3y + 3}{-\sqrt{10}} = -\frac{7x + 4y - 28}{+\sqrt{65}}$$

$$\therefore\ (7\sqrt{10} - \sqrt{65})x + (4\sqrt{10} + 3\sqrt{65})y - 3\sqrt{65} - 28\sqrt{10} = 0$$

que es la ecuación de la bisectriz L_4.

EJERCICIO VI

1.- Encontrar en cada uno de los siguientes ejercicios la distancia entre la recta y el punto dado.

a) $x + y - 1 = 0$; P $(-5, 4)$
b) $3x - 2y - 10 = 0$; P $(-1, -1)$
c) $7x + 8y - 56 = 0$; P $(2, 3)$
d) $3x + y + 7 = 0$; P $(-1, -2)$
e) $8x + 6y + 11 = 0$; P $(-4, 7)$
f) $4x - 3y + 2 = 0$; P $(1, 2)$
g) $5x + 12y - 15 = 0$; P $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

2.- Encontrar las bisectrices de los ángulos formados por las siguientes líneas y graficarlas.

$$5x - 6y - 7 = 0 \ ; \quad x + 2y + 1 = 0 .$$

3.- Encontrar las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son:
A $(2, 3)$; B $(-4, 6)$; C $(1, -1)$.

21. SISTEMAS DE RECTAS.- Como se ha visto en todo lo tratado sobre línea recta, se necesitan dos condiciones para que la recta quede definida (dos puntos sobre ella, un punto y la pendiente, etc.)

Cuando se tiene dada una sola condición hay siempre un número ilimitado de rectas que la satisfacen. A este conjunto se le llama sistema de rectas.

El sistema de rectas con pendiente igual a 2 estará dado por la ecuación $y = 2x + b$; dando valores a b se obtendrán rectas paralelas entre sí, todas ellas con la inclinación $\tan^{-1}\theta = 2$. La Fig. 34 muestra algunas de las líneas de este sistema.

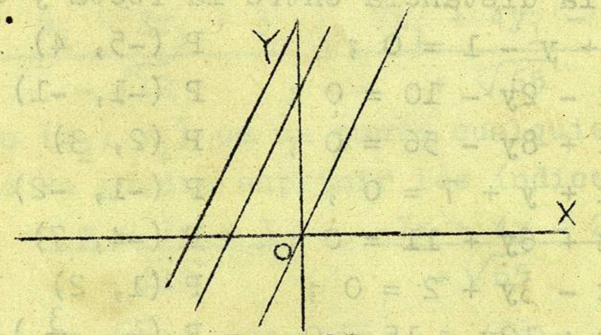

Fig. 34

El sistema de rectas que pasa por la intersección de dos rectas conocidas puede encontrarse en la forma siguiente:

Sean las ecuaciones generales de dos rectas.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad ; \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Multiplicando la segunda ecuación por K se obtiene $K(A_2x + B_2y + C_2) = 0$; sumando esta con la primera ecuación miembro a miembro resulta:

$A_1x + B_1y + C_1 + K(A_2x + B_2y + C_2) = 0$; que es la ecuación del sistema de rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas dadas.

En efecto; si se llama (x_1, y_1) a las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas se tiene: $K(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$; cierto para cualquier valor de K ; y $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$

$$\therefore A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + K(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$$

contiene el punto (x_1, y_1) puesto que sus coordenadas satisfacen la ecuación. Para cada valor de K hay una recta en el sistema.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de:

$12x - 5y - 20 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$ y pasando además por el punto (3, 1).

La ecuación del sistema de rectas que pasa por la intersección de las dos rectas dadas es:

$$(12x - 5y - 20) + K(2x + y - 2) = 0$$

Como la recta pasa además por el punto (3,1) estas coordenadas satisfarán la ecuación del sistema, obligando así a un valor de K. Sustituyendo se tiene:

$$12.3 - 5.1 - 20 + K(2.3 + 1.1 - 2) = 0$$

$\therefore K = -\frac{11}{5}$ y la ecuación de la recta será:

$$12x - 5y - 20 - \frac{11}{5}(2x + y - 2) = 0$$

$\therefore 19x - 18y - 39 = 0$; que es la ecuación buscada.

EJERCICIO VII

1.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas cuya ordenada al origen vale 4.

2.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas con pendiente $-\frac{3}{8}$.

3.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas cuya abscisa al origen vale -3.

4.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas en las que el producto de su ordenada al origen por su abscisa al origen vale 12.

5.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y por la intersección de las rectas dadas:

a) $3x + 2y - 5 = 0$; $4x + y + 3 = 0$ P (-3, 8)
b) $x - 4y + 12 = 0$; $x - y + 1 = 0$ P (5, 0)
c) $x + y - 2 = 0$; $x - y + 7 = 0$ p (-1, 1)
d) $x - 3y + 15 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$ P (0, 0)
e) $3x + 5y - 4 = 0$; $x + 2y - 4 = 0$ P (2, -2)
f) $2x + y - 11 = 0$; $4x - y + 3 = 0$ P (4, 7)

6.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas que pasan por el punto (-3, 2)

7.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas paralelas a la línea:

a) $3x + 5y - 7 = 0$ c) $2x + 3y - 15 = 0$
b) $x - 2y + 9 = 0$ d) $15x - 11y + 6 = 0$

8.- Encontrar la ecuación del sistema de rectas perpendiculares a las líneas del problema # 7

9.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $x + 2y - 4 = 0$ y $y - 5x = 0$ y que tenga la ordenada al origen igual a la abscisa al origen.

10.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $3x + 4y + 5 = 0$ y $x - 3y + 12 = 0$ y con pendiente igual a 1

36 / 1/0