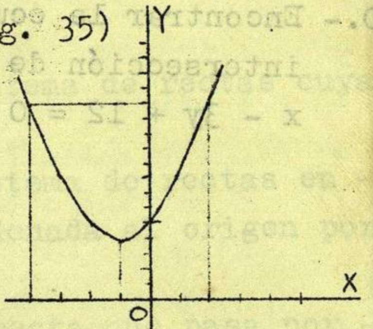
C A P I T U L O   III

ECUACIONES NO LINEALES Y SUS GRAFICAS.

22.- <u>GENERALIDADES</u>.- Como ya quedó dicho en páginas anteriores, cualquier ecuación con dos variables se puede representar gráficamente en un sistema de ejes coordenados. Si $y = f(x)$ y se dan valores a x, se encontrarán valores correspondientes de y, y cada pareja de estos valores dará un punto en el sistema de ejes. Sea por ejemplo:

$$y = x^2 + 2x + 5 \qquad \text{(Fig. 35)}$$



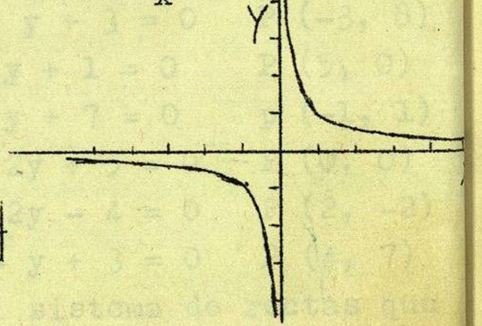
X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	20	13	8	5	4	5	8	13	20	29

Tabla de valores.

Fig. 35

Otro ejemplo: $xy = 1 \quad \therefore \; y = \frac{1}{x}$ (Fig. 36)

dando valores:



X	$-\infty$	-5	-3	-1	0	1	2	3	∞
Y	0	$-1/5$	$-1/3$	-1	$\pm\infty$	1	$1/2$	$1/3$	0

Tabla de valores.

Fig. 36

El valor de $-\infty$ de x, para el que corresponde un valor $y = 0$, significa que cuando se van dando a x valores absolutos sucesivamente más grandes siempre negativos, la y va tomando valores correspondientes cada vez más chicos, tanto como se quiera.

Ahora bien, si los valores de x se van acercando a cero por el lado negativo, los valores absolutos correspondientes de y se van haciendo mayores, siendo siempre negativos y creciendo así indefinidamente.

En la misma forma se puede hablar de los valores positivos de x, y se ve que la gráfica consta de dos ramas, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero. No puede haber puntos en los cuadrantes 2° y 4°, pues siempre las variables son del mismo signo.

Cuando como en este caso, una curva se va acercando siempre a una recta pero nunca llega a tocarla, se dice que la recta es una asíntota de la curva. En este caso los ejes coordenados son asíntotas de esta curva que se llama hipérbola.

Otro ejemplo: $y = \text{sen } x$ (Fig. 37)

X	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\,\pi$	$5/6\,\pi$	π
Y	$1/2$	.86	1	.86	$1/2$	0

Tabla de valores.

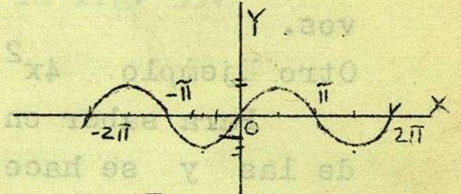


Fig. 37

Se ve que esta curva, llamada <u>senoide</u>, tiene valores de y repetidos periódicamente a cada cambio de 2π en el valor de x.

Otro ejemplo. $y = \log x$ (Fig. 38)

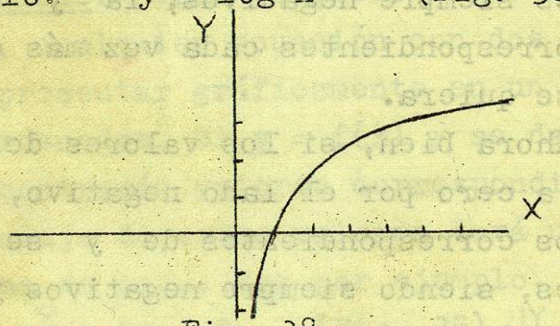


Fig. 38

Se ve que para x = 0 el valor de y es - es decir, que el eje de las y es asintota de la curva en su parte inferior.

Si x = 1 ; y = 0 , o sea que la curva corta al eje de las x en (1, 0) y para valores de x comprendidos entre o y 1 la <u>y</u> es negativa.

Si la x va creciendo a partir de 1, la y también crece, pero cada vez más lentamente, pues la diferencia entre dos logaritmos de números consecutivos va siendo cada vez menor.

No hay puntos de la curva en los cuadrantes 2° y 3° pues no hay logaritmos de números negativos.

Otro Ejemplo. $4x^2 + 9y^2 = 36$

Para saber en donde corta la curva al eje de las y se hace x = 0 $\therefore$ $y = \pm 2$; la curva

cortará al eje de las x cuando y = 0; si y = 0 $x = \pm 3$

Despejando y se tiene: $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

Se ve que para cada valor de x se obtienen dos valores de y iguales y de signo contrario, así pues, la curva es simétrica con respecto al eje de las x.

La gráfica solo tiene puntos entre valores de x comprendidos entre -3 y 3, pues para valores absolutos mayores de 3 la y es imaginaria.

Despejando x se tiene: $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$

Se ve que para cada valor de y se obtienen dos valores de x iguales y de signo contrario, así pues, la curva es también simétrica con respecto al eje de las y.

La gráfica solo tiene puntos entre valores de y comprendidos desde -2 hasta 2, pues para valores absolutos mayores que 2 la x es imaginaria.

Dando valores de <u>x</u> e <u>y</u> comprendidos entre los límites de $-3 < x < 3$ y $-2 < y < 2$ se obtiene la curva llamada elipse de la fig. 39.

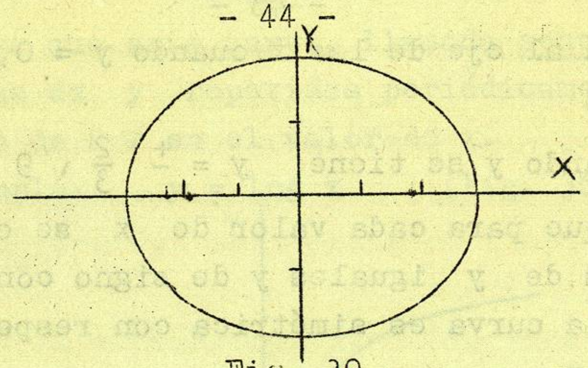


Fig. 39

En general se procede tal como se vió en este ejemplo:

Para buscar los puntos de intersección de una gráfica con el eje de las y se hace $x = 0$ y para la intersección con el eje de las x se hace $y = 0$.

Dos puntos son simétricos con respecto a un eje cuando éste es perpendicular bisectriz del segmento de recta que une los dos puntos; luego habrá simetría con respecto al eje de las x si sustituyendo y por $-y$ la ecuación no se altera. Igualmente habrá simetría con respecto al eje de las y si al sustituir x por $-x$ la ecuación es la misma.

Dos puntos son simétricos con respecto al origen cuando el segmento que los une queda bisectado por el origen. Cuando esto sucede, las coordenadas de uno de los puntos son respectivamente iguales y de signo contrario que las del otro; -

el punto $(a, -b)$ es simétrico con respecto al origen, del punto $(-a, b)$. Habrá entonces simetría con respecto al origen en todo lugar geométrico en cuya ecuación se puede sustituir x por $-x$ e y por $-y$ al mismo tiempo sin alterar la ecuación.

Sea por ejemplo la ecuación anterior que puede escribirse de las siguientes formas sin alterarse:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ c) $4x^2 + 9(-y)^2 = 36$

b) $4(-x)^2 + 9y^2 = 36$ d) $4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36$

El lugar geométrico correspondiente a esta ecuación, de acuerdo con lo explicado, será simétrico con respecto al eje de las x, con respecto al eje de las y y con respecto al origen. La curva será además una curva cerrada, puesto que todos sus puntos quedan comprendidos entre las rectas: $x = \pm 3$ e $y = \pm 2$

Como se ve fácilmente, para que en una ecuación algebraica dada pueda sustituirse y por $-y$ sin alterar dicha ecuación, es necesario que los exponentes de y sean pares. Lo mismo puede decirse de x.

Para que puedan sustituirse al mismo tiempo la x por $-x$ y la y por $-y$ en una ecuación algebráica sin alterarla, se necesita que todos los términos de la ecuación sean de grado par, (o todos de grado impar, (un término independiente cuyo grado es cero, se considera par).

Sea por ejemplo la ecuación $y = x + x^3$

Si se sustituye x por -x e y por -y la ecuación queda: $-y = -x + (-x)^3$ o sea $-y = -x - x^3$ que es la misma ecuación original (ambos miembros multiplicados por -1), lo que indica que el lugar geométrico representado por esta ecuación es simétrico con respecto al origen.

Esta curva pasa por el origen puesto que para $x = 0$, $y = 0$.

Dando valores a x y encontrando los correspondientes de y se obtiene la curva de la Fig. 40.

Si x crece númericamente en forma indefinida, la y sigue aumentando de valor, luego la curva es abierta.

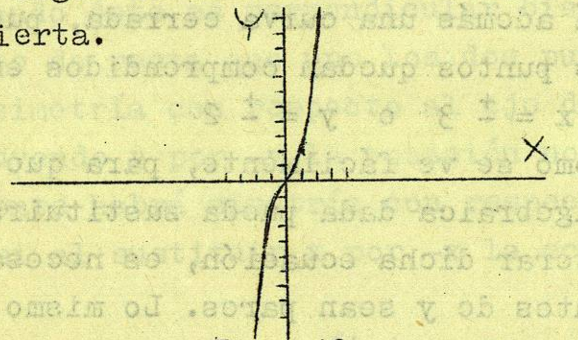


Fig. 40

Resumiendo, siempre que se quiera discutir la ecuación de un lugar geométrico, se hará el análisis en la forma siguiente:

a) Se buscan las intersecciones con el eje de las y, haciendo $x = 0$ y resolviendo la ecuación resultante en y.

b) Se buscan las intersecciones con el eje de las x haciendo $y = 0$ y resolviendo la ecuación resultante en x.

c) Se investiga simetría con respecto al eje de las y viendo si al sustituir x por -x no se altera la ecuación.

d) Se investiga la simetría con respecto al eje de las x viendo si al sustituir y por -y no se altera la ecuación.

e) Se investiga simetría con respecto al origen viendo si al sustituir al mismo tiempo x por -x y y por -y no se altera la ecuación.

NOTA: De estas tres condiciones de simetría basta con que se cumplan dos para que sea cierta la tercera.

f) Se determina la extensión de la curva viendo si hay valores de una de las variables que hagan imaginaria a la otra.

g) Se ve si la curva es cerrada viendo si todos sus puntos (valores reales de x e y) quedan comprendidos entre límites finitos.

Ejemplos:

Sea la ecuación $y = \cos x$ (Fig. 41)

Si $x = 0$ $y = 1$

Si $y = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n puede ser cualquier número entero positivo o negativo. Es decir, que la curva cortará al eje de las x en $\frac{\pi}{2}$ y en todos los puntos que estén a una distancia igual a un múltiplo de π (positivo o negativo) del punto ($\frac{\pi}{2}$, 0).

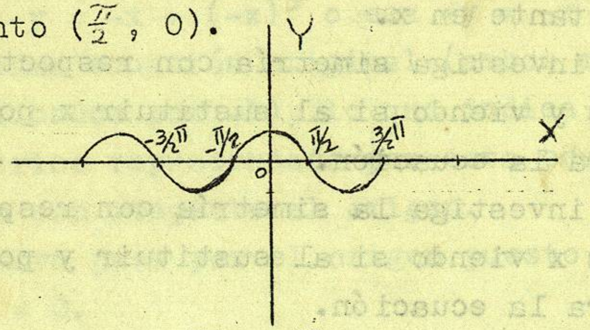


Fig. 41

Si se sustituye x por -x la ecuación no se altera, puesto que cos x = cos (-x); por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje de las y.

Si se sustituye y por -y la ecuación se altera, por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje de las x.

No habrá simetría con respecto al origen puesto que al sustituir x por -x e y por -y la ecuación se altera.

Para cualquier valor de x habrá un valor de y, luego la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda.

La y no puede ser mayor que 1 ni menor que -1, puesto que el coseno de un ángulo no puede pasar de esos límites.

Esta curva es exactamente de la misma forma que la curva y = sen x, pero está localizada con un desfasamiento de $\frac{\pi}{2}$ respecto al origen. Observando la curva y = sen x se ve que no es simétrica con respecto al eje de las y pero es simétrica con respecto al origen. En efecto supliendo al mismo tiempo x por - x e y por -y dicha ecuación no se altera:

$y = \text{sen } x \qquad -y = \text{sen }(-x) = -\text{sen} x$

Sea la ecuación $y^2 = (x - 3)(x - 1)(x + 3)$ (Fig. 42)

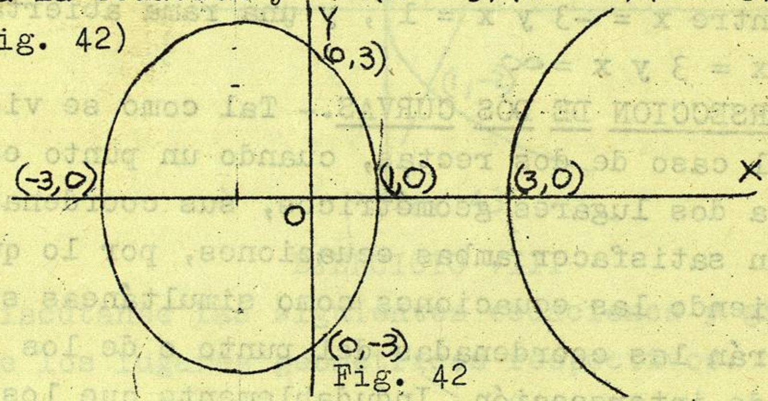


Fig. 42

Haciendo x = 0 se encuentra $y = \pm 3$ o sea que la curva corta al eje de las y en los puntos (0, 3) y (0, -3). Haciendo y = 0 se encuentra x = 3; x = 1 y x = -3; o sea que la curva corta al eje de las x en los puntos (3, 0); (1, 0) y (-3, 0).

Hay simetría con respecto al eje de las x puesto que la ecuación es algebraica y el exponente de y es par. Para valores de x menores que -3