siguientes?

11) $xy = 0$

12) $x^2 + y^2 = -1$

13) $x^2 = 1$

14) $y^2 = x^2$

15) $x^2 + y^2 = 0$

Dibújense las gráficas y encuéntrense las coordenadas de los puntos de intersección en cada pareja de ecuaciones.

16) $y = x + 2$; $x^2 + y^2 = 9$

17) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + 4y - 25 = 0$

18) $y^2 = 16x$; $5x + 3y - 9 = 9$

19) $y = 2x^2 + 3x + 5$; $y = x^2 + x + 4$

C A P I T U L O IV

CIRCULO.

24.- DEFINICION.- El círculo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. A este punto se le llama centro del círculo y a la distancia constante del centro a cualquier punto del círculo se le llama radio.

En geometría elemental esta definición corresponde a la de una circunferencia, siendo círculo el área encerrada por ella.

25.- ECUACION DELCIRCULO.- Sea C (h, k) el centro de un círculo y r su radio, (Fig. 44). Cualquier punto P (x, y) sobre el círculo debe satisfacer la condición de encontrarse a una distancia r del centro, entonces, según fórmula (1):

$$r = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$\therefore \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . . . . . \quad (10)$$

que es la ecuación de un círculo cuando se conocen las coordenadas del centro y el radio.

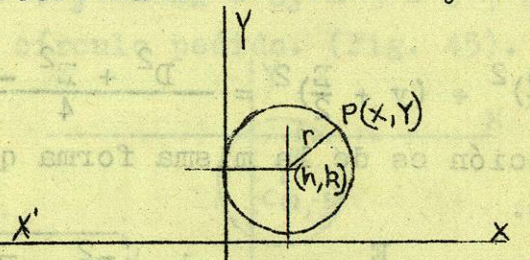

Fig. 44

26.- <u>OTRA FORMA DE LA ECUACION DELCIRCULO</u>.- Desarrollando la fórmula (10) se tiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

o sea: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

entonces la ecuación de un círculo será de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . . . (11)$

en la que $D = -2h$; $E = -2k$; $F = h^2 + k^2 - r^2$

NOTA: Cuando los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales pero diferentes de 1, bastará con dividir todos los términos de la ecuación entre el valor de esos coeficientes para que se obtenga la forma (11).

Inversamente, cualquiera ecuación de la forma (11) será la ecuación de un círculo real, nulo (radio = 0) ó imaginario, como se verá a continuación:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, completando cuadrados; $x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$

o sea:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Esta ecuación es de la misma forma que la (10) en la que:

$$h = -\frac{D}{2} \;;\; k = -\frac{E}{2} \;; \quad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

El círculo será <u>real</u> cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$

El círculo será <u>nulo</u>, es decir se convierte en un punto cuando $D^2 + E^2 - 4F = 0$.

El círculo será imaginario cuando:

$D^2 + E^2 - 4F < 0$

27.- <u>ECUACION DEL CIRCULO CON CENTRO EN EL ORIGEN</u>.-

Si el círculo tiene su centro en el origen entonces: $h = 0$; $k = 0$; y la ecuación (10) queda reducida a la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . . . . (12)$$

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de un círculo con centro en (2, -3) y radio igual a 4

La ecuación del círculo conociendo las coordenadas del centro y el radio, fórmula (10) es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$\therefore\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ Desarrollando:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; que es la ecuación del círculo pedido. (Fig. 45).

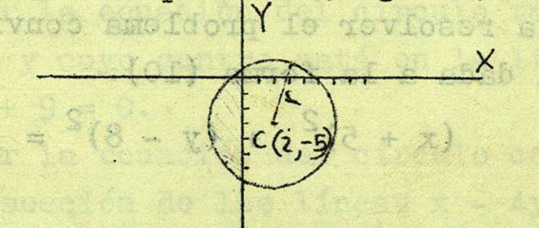

Fig. 45

2) Dada la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 10x - 16y + 53 = 0 ;$$

encontrar las coordenadas del centro del círculo y el radio.

Según quedó demostrado en la ecuación (11)

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; las coordenadas del centro son:

$$h = -\frac{D}{2} ; \quad k = -\frac{E}{2} \quad y \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} ;$$

entonces:

$$h = -\frac{10}{2} ; \quad k = \frac{16}{2} = 8$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 256 - 212} = 6$$

o sea que la ecuación corresponde a un círculo con centro en (-5, 8) y radio 6 . (Fig. 46).

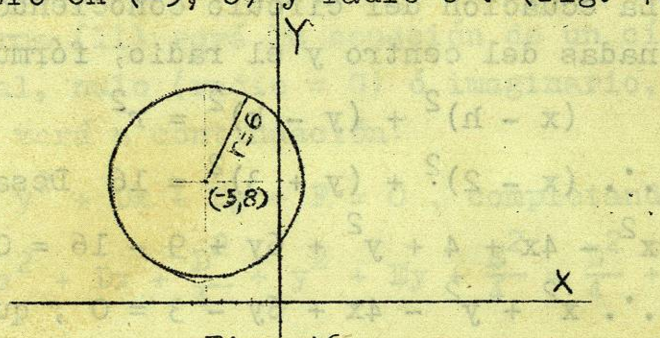

Fig. 46

Se podría resolver el problema convirtiendo la ecuación dada a la forma (10):

$$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$$

EJERCICIO IX

1.- Encontrar la ecuación de los siguientes círculos dados el radio y el centro:

a) $r = 2$; $C\ (4, 5)$ e) $r = 11$; $C\ (-1, 0)$

b) $r = 3$; $C\ (-7, 2)$ f) $r = 7$; $C\ (0, 0)$

c) $r = \frac{3}{2}$; $C\ (\frac{5}{4}, -3)$ g) $r = 51$; $C\ (\frac{7}{3}, 0)$

d) $r = 7$; $C\ (-7, -5)$ h) $r = 0$; $C\ (4, \frac{3}{2})$

2.- Encontrar el radio y las coordenadas del centro en cada uno de los siguientes círculos:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 49 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$

e) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 27 = 0$

3.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en (-2, -3) y pasando por el punto (1, 1).

4.- Encontrar la ecuación del círculo que tiene como diámetro el segmento que une los puntos (2, 3) y (-5, 7).

5.- Encontrar la ecuación del círculo tangente a los dos ejes y cuyo centro está en la línea : $2x - 3y + 9 = 0$.

6.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en la intersección de las líneas $x - 4y + 8 = 0$; $x - y - 1 = 0$ y tangente a la recta:

$4x + 3y + 21 = 0$.

7.- Encontrar la ecuación del círculo que tiene por diámetro el segmento de recta determinado por -- las intersecciones de los siguientes pares de -- ecuaciones: $y = 4x$; $5y - 3x = 0$.

$x - 4y + 16 = 0$; $5x + 8y - 88 = 0$.

8.- El punto P (x, y) se mueve en tal forma que si - se trazan las líneas PA y PB a los puntos A (1, 4) B (-5, -3) el ángulo APB = 90º. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de P.

28.- CONDICIONES QUE DETERMINAN UN CIRCULO.- Tanto en la forma (10) como en la forma (11) de la ecuación del círculo hay tres constantes arbitrarias; coordenadas del centro (h, k) y radio r en la ecuación (10) y D, E y F en la ecuación (11). Esto indica que se necesitan y son suficientes - tres condiciones para que un círculo quede definido. Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación del círculo que pasa -- por los tres puntos siguientes: A (-1, 7); B (0, 0); C (3, -1).

El problema puede resolverse por procedimiento geométrico como sigue:

El centro del círculo deberá estar en la intersección de las perpendiculares bisectrices de los segmentos AC y BC Fig. 47.

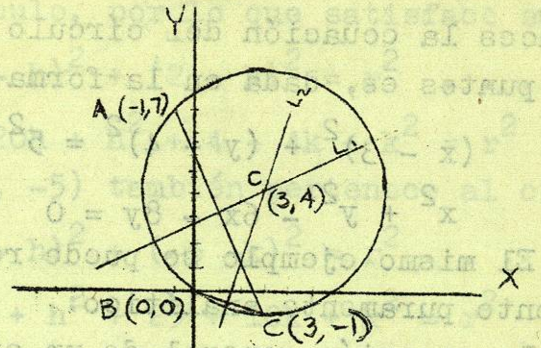

Fig. 47

El punto medio entre A y C tiene como coordenadas

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad ; \quad y_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

la pendiente entre A y C es:

$$m_1 = \frac{7 + 1}{-1 - 3} = -2$$

entonces la pendiente de L_1 será $\frac{1}{2}$ y la ecuación de L_1 será $(y - 3) = \frac{1}{2}(x - 1)$ o sea :

$x - 2y + 5 = 0$

Procediendo en la misma forma para L_2 se encuentra que su ecuación es: $3x - y - 5 = 0$.

El punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 centro del círculo (resolviendo las ecuaciones como simultáneas) será C (3, 4). La distancia de este centro a uno cualquiera de los vértices por ejemplo al (0, 0) será el radio del círculo:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Entonces la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos es, dada en la forma (10):

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \quad \text{o sea:}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

El mismo ejemplo se puede resolver por procedimiento puramente analítico:

La ecuación general de un círculo es:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; en donde se tiene que determinar el valor de las constantes D, E y F.

Como los tres puntos dados están en el círculo, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, entonces: para (0, 0) se tiene:

$$0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \quad \therefore F = 0$$

para (-1, 7); $1 + 49 - D + 7E + 0 = 0$

$$\therefore \quad D - 7E = 50$$

para (3, -1) ; $9 + 1 + 3D - E + 0 = 0$

$$\therefore \quad 3D - E = -10$$

Resolviendo estas ecuaciones se encuentra:

D = -6; E = -8; por lo que la ecuación del círculo será:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

2) Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos (10, 2) y (3, -5) y que tiene su centro en la recta $x - 3y + 3 = 0$.

Resolviendo el problema por el procedimiento puramente analítico, el punto (10, 2) pertenece al círculo, por lo que satisface su ecuación

o sea: $(10 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2 \quad \ldots . (1)$

$\therefore \quad 100 - 20h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2$

El punto (3, -5) también pertenece al círculo por lo que: $(3 - h)^2 + (-5 - k)^2 = r^2 \quad \ldots . . (2)$

$\therefore \quad 9 - 6h + h^2 + 25 + 10k + k^2 = r^2$

El centro (h, k) pertenece a la recta, por lo que $h - 3k + 3 = 0$; $\therefore h - 3k = -3 \quad \ldots . (3)$

De (1) y (2) se deduce:

$$104 - 20h + h^2 - 4k + k^2 = 6h + h^2 + 10k + k^2$$

Reduciendo nos queda: $- 14h - 14k + 70 = 0$

$\therefore \quad h + k = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots . (4)$

de (3) y (4) se deduce: $h = 3$; $k = 2$

Sustituyendo en (2) resulta: $r^2 = 49$; por lo que la ecuación del círculo es:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 49 \; ; \quad \text{o sea.}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 36 = 0.$$

29.- <u>LONGITUD DE LA TANGENTE AL CIRCULO DESDE UN PUNTO DADO</u>.- Sean el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y el punto P (x_1, y_1); y PA la tangente al círculo con punto de tangencia A. Se une C con A y con P (Fig. 48).

La longitud de la tangente será:

$$PA = \sqrt{PC^2 - CA^2} = t \quad ; \quad \text{pero}$$

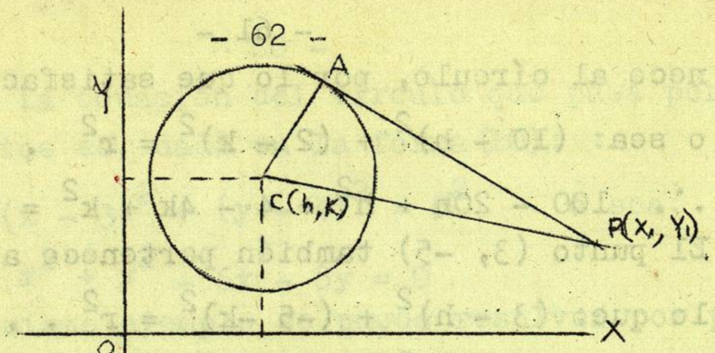

Fig. 48

$\overline{PC}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$; y $\overline{CA}^2 = r^2$

$$\therefore \ PA = t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad . . .(13)$$

Si el círculo está dado en la forma (11) la longitud de la tangente sería, como se puede ver fácilmente:

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F} \quad . . . . .(14)$$

30.- <u>EJE RADICAL</u>.- Se llama eje radical de dos círculos al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las longitudes de las tangentes trazadas a los dos círculos son iguales.

31.- <u>ECUACION DEL EJE RADICAL</u>.-

Sean $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . . . .(1)$

y $(x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^2 \quad . . .(2)$

las ecuaciones de los círculos, Fig. 49.

Las longitudes de las tangentes a (1) y (2), desde un punto (x', y'), del eje radical son respectivamente:

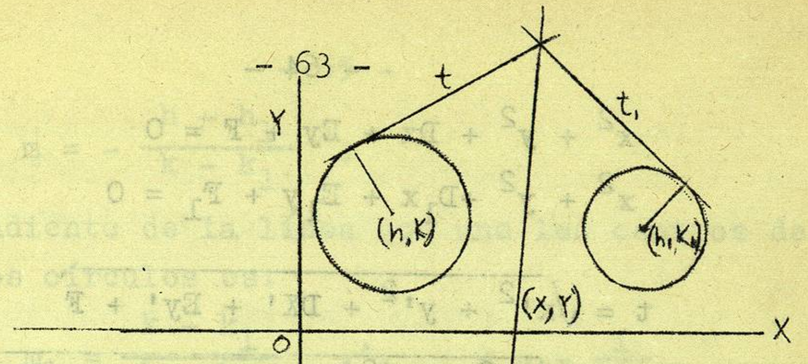

Fig. 49

$$t = \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$t_1 = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

pero como (x', y') es un punto del eje radical, $t = t_1$

$$\therefore \ \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2} = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

Elevando al cuadrado, reduciendo y sustituyendo (x', y') por (x, y) puesto que se trata de un punto cualquiera:

$$2x(h - h_1) + 2y(k - k_1) + r^2 - r_1^2 - h^2 + h_1^2 - k^2 + K_1^2 = 0$$

que es la ecuación del eje radical, la cual como se ve, es de primer grado en <u>x</u> e <u>y</u> y por lo tanto es la ecuación de una línea recta.

Si las ecuaciones de los círculos están dadas en la forma: