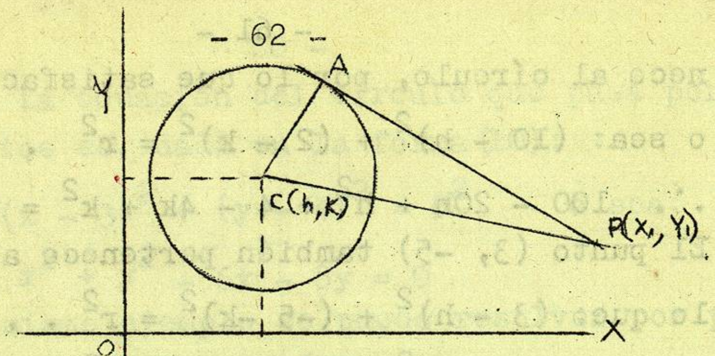

Fig. 48

$\overline{PC}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$; y $\overline{CA}^2 = r^2$

$$\therefore \; PA = t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad . \; . \; .(13)$$

Si el círculo está dado en la forma (11) la longitud de la tangente sería, como se puede ver fácilmente:

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F} \quad . \; . \; . \; . \; .(14)$$

30.- <u>EJE RADICAL</u>.- Se llama eje radical de dos círculos al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las longitudes de las tangentes trazadas a los dos círculos son iguales.

31.- <u>ECUACION DEL EJE RADICAL</u>.-

Sean $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; .(1)$

y $(x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^2 \quad . \; . \; .(2)$

las ecuaciones de los círculos, Fig. 49.

Las longitudes de las tangentes a (1) y (2), desde un punto (x', y'), del eje radical son respectivamente:

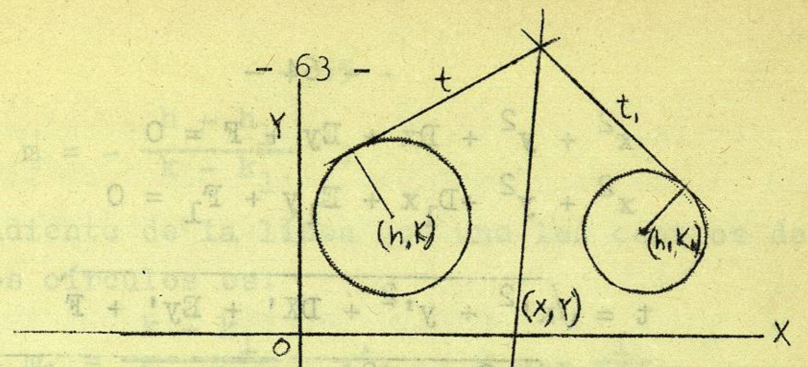

Fig. 49

$$t = \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$t_1 = \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

pero como (x', y') es un punto del eje radical, $t = t_1$

$$\therefore \sqrt{(x' - h)^2 + (y' - k)^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{(x' - h_1)^2 + (y' - k_1)^2 - r_1^2}$$

Elevando al cuadrado, reduciendo y sustituyendo (x', y') por (x, y) puesto que se trata de un punto cualquiera:

$$2x(h - h_1) + 2y(k - k_1) + r^2 - r_1^2 - h^2 + h_1^2$$

$$- k^2 + K_1^2 = 0$$

que es la ecuación del eje radical, la cual como se ve, es de primer grado en <u>x</u> e <u>y</u> y por lo tanto es la ecuación de una línea recta.

Si las ecuaciones de los círculos están dadas en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$t = \sqrt{x'^2 + y'^2 + DX' + Ey' + F}$$

$$t_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + D_1x' + E_1y' + F_1}$$

Igualando lo-s valores de t y t_1, elevando al cuadrado reduciendo y sustituyendo x' e y' por x e y se obtiene:

$$x(D - D_1) + y(E - E_1) + F - F_1 = 0$$

que es la ecuación del eje radical.

Así pues, para encontrar la eucación del eje radical, basta con restar las ecuaciones de los dos círculos dados.

Ejemplo: Encontrar el eje radical de los círculos:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0 \quad y:$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 11 = 0$$

Restando la segunda ecuación de la primera nos queda: $2x - 10y + 11 = 0$ que es la ecuación del eje radical de los dos círculos dados.

32.- EL EJE RADICAL DE DOS CIRCULOS ES PERPENDICULAR A LA LINEA DE LOS CENTROS.- Demostración: De la ecuación delejc radical se deduce que la pendiente es:

$$m = -\frac{h - h_1}{k - k_1};$$

la pendiente de la línea que une los centros de los dos círculos es:

$$m_1 = \frac{k - k_1}{h - h_1} \quad \therefore \quad m = -\frac{1}{m_1}$$

por lo que queda demostrado que el eje radical es perpendicular a la línea de los centros.

33.- CUANDO LOS DOS CIRCULOS SE CORTAN EL EJE RADICAL ES LA SECANTE COMUN, LA CUAL PASA POR LOS PUNTOS DE INTERSECCION DE LOS DOS CIRCULOS.- Sean:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (2)$$

las ecuaciones de los dos círculos. (Fig. 50).

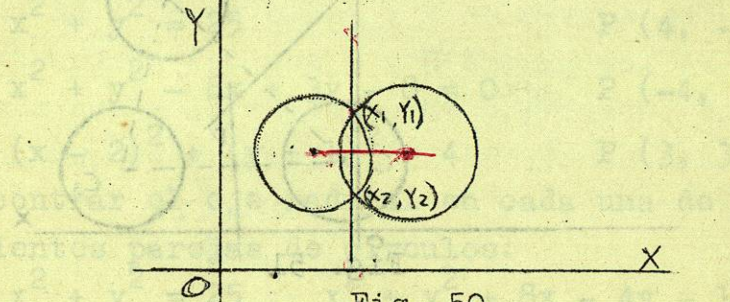

Fig. 50

De acuerdo con lo ya demostrado la ecuación del eje radical se encontrará restando (2) de (1), por lo que: $x(D - D_1) + y(E - E_1) + F - F_1 = 0$ (3)

Las coordenadas de los puntos de intersección

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) que determinan la secante común, satisfacen (1) y (2); por lo tanto deben satisfacer (3) que se encontró restando (2) de (1).

Si los círculos son tangentes, el eje radical es la tangente común.

34.- <u>CENTRO RADICAL</u>.- Sean tres círculos, (Fig. 51) C_1, C_2 y C_3. Los ejes radicales de C_1 y C_2 se en- cuentran en P, entonces $PT_1 = PT_2$ y $PT_1 = PT_3$ $\therefore$ $PT_2 = PT_3$, o sea que el eje radical también pasa por P.

Al punto P donde se cortan los tres ejes ra- dicales se le llama Centro Radical.

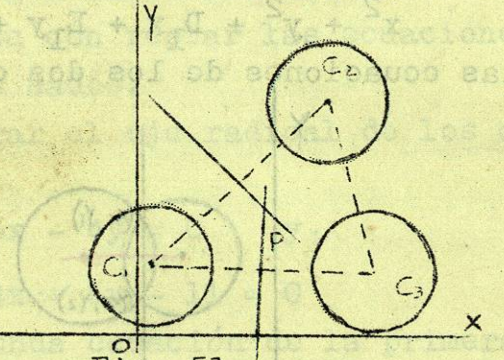

Fig. 51

EJERCICIO X

1.- Encontrar la ecuación del Círculo que pasa por los puntos:

a) (5, 6); (-5, 4); (-1, -4)

b) (1, 2); (-2, 3); (6, -3)

c) (-1, 1); (-4, 2); (4, -4).

2.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en el eje de las abscisas y pasando por los puntos (3, 1) y (-2, 6).

3.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en la recta $7x - 9y + 55 = 0$ y pasando por los puntos (-2, 4) y (-3, 1).

4.- Encontrar la ecuación del círculo con centro en el eje de las ordenadas y pasando por los puntos (1, 2) y (6, -3).

5.- Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos (-9, -10) y (-7, -8) y con centro en la recta $3x + 5y + 65 = 0$.

6.- Encontrar la longitud de la tangente a cada uno de los círculos siguientes desde el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 25$ P (4, -7)

b) $x^2 + y^2 - 6x + 3y - 8 = 0$ P (-4, 2)

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ P (3, 3)

7.- Encontrar el eje radical en cada una de las siguientes parejas de círculos:

a) $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 12 = 0$; $x^2 + y^2 + 6y - 4 = 0$

8.- Encontrar el centro radical de los círculos:

$$x^2 + y^2 = 16 ; \quad x^2 + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 4 = 0$$

CAPITULO V
PARABOLA.

35.- <u>DEFINICION</u>.- La parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto fijo y una recta fija. Al punto fijo se le llama foco a la recta fija directriz.

36.- <u>CONSTRUCCION DE UNA PARABOLA CON REGLA Y COMPAS</u>. Sean F el foco y DD' la directriz, (Fig. 52). P F se traza una perpendicular a la directriz, qu como se verá, es eje de simetría de la parábola. Se toma el punto medio V entre F y la directriz que es ya un punto de la curva, puesto que -- VF = VR. Para encontrar otros puntos de la curv se trazan paralelas a la directriz a la derecha de V, como por ejemplo MN, la cual corta a Rx e A. Con centro en F y radio igual a RA se corta MN en los puntos P y Q que son puntos de la par bola puesto que PS = PF. De la misma manera se pueden construir todos los puntos que se deseen

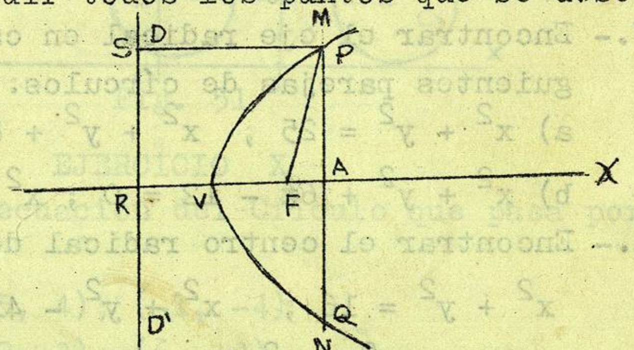

Fig. 52

Al punto V se le llama vértice de la parábola y Rx eje principal o simplemente eje.

37.- <u>ECUACION DE LA PARABOLA</u>.- Sea (Fig. 53) Parábola con vértice en el origen DD' la directriz y F el foco. Si se llama 2p la distancia entre el foco y la directriz OF = p, y las coordenadas del foco serán (p, 0). La directriz se escogió paralela al eje de las ordenadas y su ecuación será $x = -p$.

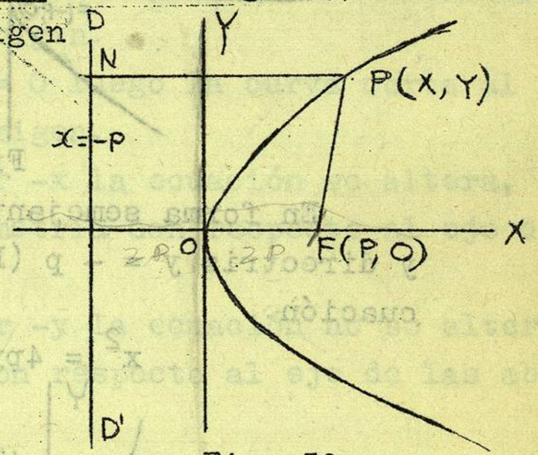

Fig. 53

Sea P (x, y) un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición: PF = NP

pero $PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$; $NP = x + p$

$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$y^2 = 4px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

En la misma forma como se demostró la ecuación (15) puede encontrarse que la ecuación con foco en F (-p, 0) y directriz $x = p$ (Fig. 54) es:

$$y^2 = -4px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15a)$$