C A P I T U L O VI

E L I P S E.

40.- <u>DEFINICION</u>.- La elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante y mayor que la distancia entre ellos.

Los puntos fijos se llaman focos de la elipse y la suma constante se le designa 2a.

41.- <u>CONSTRUCCION DE UNA ELIPSE CON REGLA Y COMPAS</u>.- Sean F y F' los dos focos (Fig. 60)

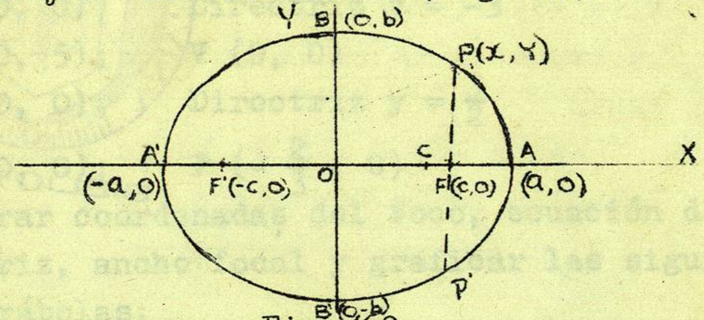

Fig. 60

Se traza la recta que pasa por F y F', se sitúan los puntos A y A' sobre esta recta de modo que A'F' = AF.

Se van a encontrar puntos en que la suma de las distancias a F y F' sea AA', Desde luego A y A' son puntos de la elipse, puesto que: AF + AF' = AA' y A'F' + A'F = AA'. Se sitúa el centro O, punto medio entre F y F' y haciendo centro en F y F' y radio igual a OA se encuentran los puntos B y B'. Para localizar cualquier punto como P, se toma un punto C sobre AA'; con centro en F y radio igual a CA, se traza un arco de círculo y con centro en F' y radio igual a CA' se traza otro arco de círculo que corta al anterior en P_1; con los mismos centros y radios se puede encontrar el punto P' simétrico al anterior.

Tomando más puntos entre F y F' se pueden encontrar más puntos de la elipse; se unen entre sí y se tiene la curva de la Fig. 60.

A la distancia AA' se le llama eje mayor de la elipse y a la distancia BB' eje menor. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama centro de la elipse, a la distancia FF' se le llama distancia focal.

A las intersecciones de A y A' del eje mayor con la curva se les llama vértices de la elipse.

42.- <u>CONSTRUCCION DE LA ELIPSE POR MEDIO DE UN CORDON</u>. Se puede dibujar una elipse en forma contínua como sigue:

Se toma un cordón cuya longitud sea igual a la suma constante 2a.

Los extremos del cordón se fijan en F y F' (Fig. 61) y estirando el cordón por medio de un lápiz se vá trazando la elipse en forma contínua.

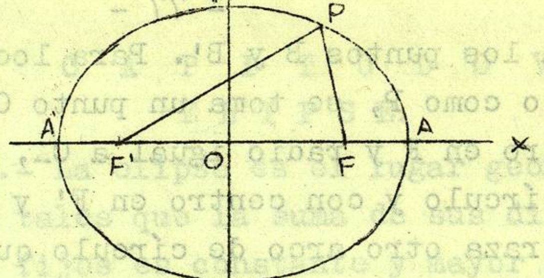

Fig. 61

43.- <u>RELACION ENTRE LOS EJES Y LA DISTANCIA FOCAL</u>.- Sean 2a la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos y 2c la distancia entre los focos (Fig. 62).

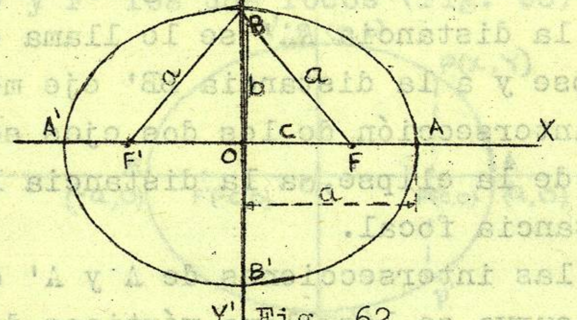

Fig. 62

Entonces: $AF + AF' = 2a$ (1)

$A'F + A'F' = 2a$ (2)

$\therefore\ AF + AF' = A'F + A'F'$ (3)

además: $AF' = 2c + AF$

$A'F = 2c + A'F'$

Sustituyendo en (3)

$AF + 2c + AF = 2c + A'F' + A'F'$

$\therefore\ AF = A'F'$ (4)

Sustituyendo en (1) la igualdad (4) se tiene:

$A'F' + AF' = 2a$

$\therefore\ AA' = 2a$

Si al eje menor se le llama 2b, se tiene: $OB = b$; pero $BF = a$ puesto que B está en la perpendicular bisectriz de FF', entonces en el triángulo BOF tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad . . . . (16)$$

que es la relación que liga a los semiejes de la elipse con la semidistancia focal.

44.- <u>ECUACION DE LA ELIPSE CON EJES COINCIDIENDO CON LOS EJES COORDENADOS</u>.- Sean F (c, 0) y F' (-c, 0) las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación se desea encontrar, (Fig. 63) y sea P - (x, y) un punto cualquiera del lugar geométrico.

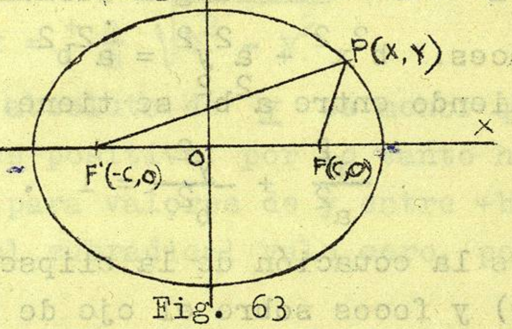

Fig. 63

Por definición:

$$FP + F'P = 2a \qquad (1)$$

pero $FP = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ y

$F'P = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

luego:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando se tiene:

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando se tiene:

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

pero $a^2-c^2=b^2$ según fórmula (16)

entonces: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Dividiendo entre a^2b^2 se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots (17)$$

que es la ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos sobre el eje de las x.

Si los focos están en el eje de las y fácilmente se demuestra que la ecuación toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots (17a)$$

45.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA ELIPSE.- Sea la ecuación (17); si se hace $x = 0$; $y = \pm b$, o sea que la elipse corta al eje de las ordenadas en $+b$ y en $-b$. Si se hace $y = 0$, $x = \pm a$, o sea que la elipse corta el eje de las abscisas en $+a$ y $-a$.

Sustituyendo x por $-x$ no se altera la ecuación, luego hay simetría con respecto al eje de las y. Sustituyendo y por $-y$ tampoco se altera la ecuación, luego hay simetría con respecto al eje de las x. Como hay simetría con respecto a los dos ejes, la hay con respecto al origen.

Despejando x se tiene:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

Si el valor absoluto de y es menor que b, el subradical es positivo, por lo tanto hay puntos de la curva para valores de y entre $+b$ y $-b$.

Si $y = \pm b$ el subradical vale cero, por lo que $x = 0$.

Si el valor absoluto de y es mayor que b, y menor que $-b$, el subradical es negativo, por lo que la curva está limitada por las rectas $y = \pm b$.

Despejando y se tiene:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Con un razonamiento análogo al anterior se llega a la conclusión de que la curva está limitada por las rectas $x = \pm a$. La elipse es por lo tanto una curva cerrada.

46.- <u>ANCHO FOCAL DE LA ELIPSE</u>.- Se llama ancho focal o latus rectum de una elipse a la cuerda a través del foco, perpendicular al eje mayor.

Sea la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 64)

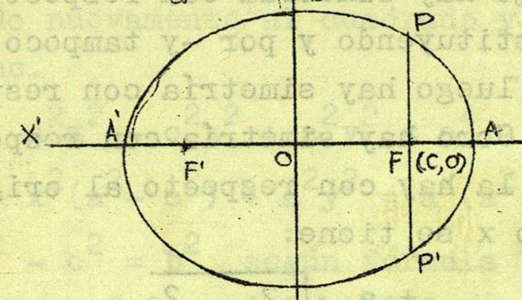

Fig. 64

Para encontrar el ancho focal PP' se sustituye la x del punto que es c en la ecuación y se obtiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

pero $a^2 - c^2 = b^2$ $\therefore$ $y = \pm \frac{b^2}{a}$

el ancho focal será entonces:

$$L.\ R. = \frac{2b^2}{a} \quad . . . .(18)$$

47.- <u>EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE</u>.- Se llama excentricidad de la elipse a la relación de la distancia focal al eje mayor:

$$e = \frac{2c}{2a} \quad \therefore \quad e = \frac{c}{a} \quad . . . . \quad (19)$$

La excentricidad de la elipse varía de 0 a 1 puesto que $a > c$ para toda elipse, y da una idea de su forma. Para valores de e cercanos a 1, la elipse se va haciendo más aplanada, mientras que al ir acercándose a cero la elipse se va asemejando a un círculo. El círculo sería una elipse con excentricidad igual a 0.

48.- <u>CONSTRUCCION DE LA ELIPSE POR MEDIO DE LOS CIRCULOS AUXILIARES</u>.- Al círculo que tiene como diámetro el eje mayor de la elipse y cuyo centro coincide con el de ella se le llama círculo auxiliar mayor de la elipse. Al círculo que tiene como diámetro el eje menor y centro en el de la elipse se le llama círculo auxiliar menor de la elipse.

Conociendo el valor de los dos ejes de la elipse puede ésta dibujarse con la ayuda de los círculos auxiliares, (Fig. 65). Con centro en O se dibujan los círculos con radios OA y OB. Para encontrar puntos de la elipse se traza un radio OR del círculo mayor. De R se baja la perpendicular RM a OA. Por el punto S, intersección de OR con el círculo menor se traza una perpendicular a RM. El punto P donde dicha perpendicular intersecta a RM es un punto de la elipse.

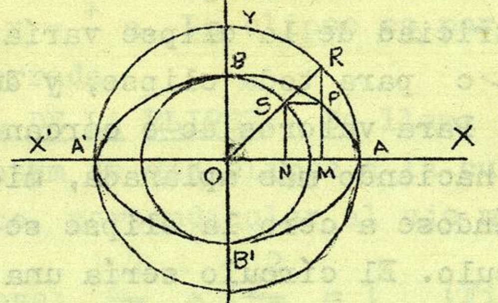

Fig. 65

Así como se encontró este punto se puede - hacer con los puntos que se quiera; uniéndolos se tendrá la elipse.

Demostración: en la Fig. 66

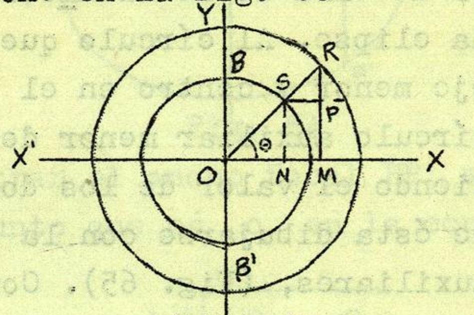

Fig. 66

$$OR = a$$

$$OS = b$$

$$PM = y = SN$$

$$OM = x$$

Si se designa por θ el ángulo que OR hace con OA se tiene:

$$x = a \cos\theta$$

$$y = b \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta \; ; \; \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\theta$$

sumando miembro a miembro las dos últimas igualdades se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

que es la ecuación de la elipse con eje mayor 2a y eje menor 2b.

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, F (4, 0), F' (-4, 0) eje mayor igual 10. (Fig. 67)

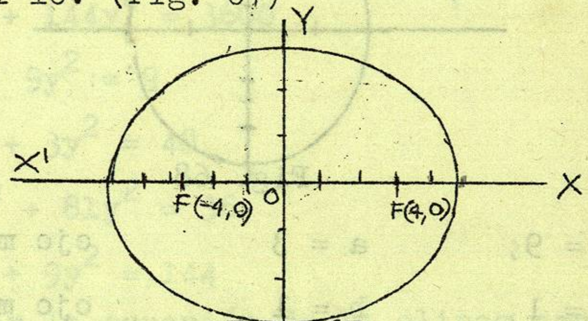

Fig. 67

Puesto que la distancia del centro a cualquiera - de los focos es igual a c, entonces c = 4;

$2a = 10 \quad \therefore a = 5$

luego $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Sustituyendo en (17) se tiene:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{ó}$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

2) Encontrar el valor de los ejes, coordenadas de los vértices y focos, excentricidad, latus rectum y dibujar la siguiente elipse:

$$9x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{(Fig. 68)}$$

Dividiendo entre 9 se tiene:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

como el divisor de y es mayor que el de x, la elipse es de la forma (17a).

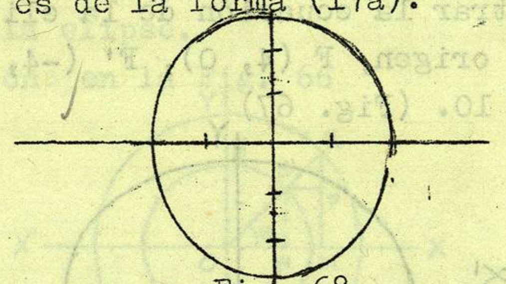

Fig. 68

$a^2 = 9$; $a = 3$ eje mayor = 6

$b^2 = 1$; $b = 1$ eje menor = 2

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

$F\ (0, \pm 2\sqrt{2})$; $V\ (0, \pm 3)$

$e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ L. R. $= \dfrac{2}{3}$

EJERCICIO XII

1.- Encontrar las ecuaciones de las siguientes elipses con centro en (0, 0) y dibujarlas.

a) $F\ (0, \pm 4)$; eje mayor = 10

b) $V\ (\pm 13, 0)$; $F\ (\pm 12, 0)$

c) $V\ (\pm 10, 0)$; $e = \frac{1}{2}$

d) $F\ (0, \pm 8)$; L.R. $= \frac{450}{17}$

e) $V\ (0, \pm 9)$; eje menor = 6

f) $F\ (\pm 6, 0)$; $V\ (\pm 8, 0)$

2.- Encontrar el valor de los ejes, coordenadas de los focos y vértices, ancho focal y excentricidad de las siguientes elipses. Dibujarlas.

a) $9x^2 + y^2 = 9$

b) $25x^2 + 144y^2 = 3600$

c) $3x^2 + 9y^2 = 9$

d) $16x^2 + 3y^2 = 48$

e) $100x^2 + 81y^2 = 36$

f) $16x^2 + 9y^2 = 144$

3.- Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen y focos en el eje de las y ; eje mayor igual 24, $e = \frac{5}{12}$

4.- Encontrar la ecuación de la siguiente elipse: eje mayor = 18 ; coordenadas focos $(\pm 3, 0)$

5.- Igual para: eje menor = 5 ; coordenadas focos $(0, \pm 2\sqrt{6})$

6.- Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, pasando por los puntos: (1, -7) y