y (-5, 26).

7.- A partir de la definición encontrar la ecuación de la elipse con focos en (-3, 3) y (5, 3) y eje mayor = 12.

CAPITULO VII

HIPERBOLA.

49.- <u>DEFINICION</u>.- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante e igual a 2a, y menor que la distancia entre ellos.

Los puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

50.- <u>DIBUJO DE LA HIPERBOLA CON REGLA Y COMPAS</u>.- Fig. 69.

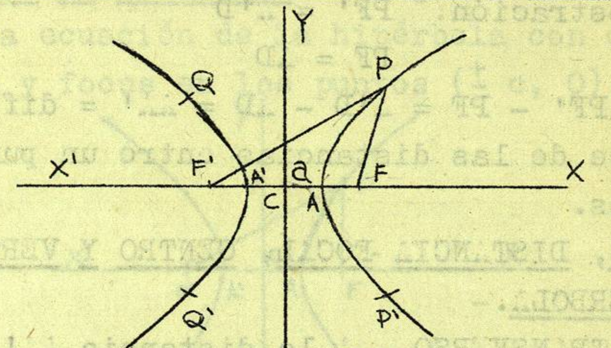

Fig. 69

Sean F y F' los focos, se traza la línea FF'. Sea C el punto medio entre F y F'. Se encuentran los puntos A y A' de modo que CA = A'C = a (mitad de la diferencia constante). Se toman puntos a la derecha de F, como D, por ejemplo; con centro en F y radio igual a AD se traza un arco de círculo, con centro en F' y radio igual a A'D se traza otro arco que corta al anterior en P, este punto es un punto de la hipérbola.

Al mismo tiempo se puede encontrar P' simétrico al anterior; tomando los mismos centros y radios.

Los puntos Q y Q' se pueden encontrar con los mismos radios anteriores pero cambiando los centros, es decir con radio AD se hace centro en F' y con radio A'D centro en F.

De la misma manera se pueden encontrar más puntos de la hipérbola, uniéndolos se tiene la curva de la fig. 69.

Demostración: $PF' = A'D$

$PF = AD$

$\therefore PF' - PF = A'D - AD = AA'$ = diferencia constante de las distancias entre un punto y los dos focos.

51.- EJES, DISTANCIA FOCAL, CENTRO Y VERTICES DE LA HIPERBOLA.-

EJE TRANSVERSO.- A la distancia AA' (Fig. 69) se le llama eje transverso de la hipérbola y se le asigna el valor 2a.

EJE CONJUGADO.- Si por el punto C, punto medio entre A y A' se traza la perpendicular a AA' y se toma sobre ella los puntos B y B', simétricos con respecto a C, de modo que:

$$BC = \sqrt{c^2 - a^2}$$

a la distancia BB' se le llama eje conjugado de la hipérbola y se designa por 2b.

Entonces: $b^2 = c^2 - a^2$ . . . .(19)

CENTRO.- Al punto medio entre AA' (Fig. 69) se le llama centro de la hipérbola.

DISTANCIA FOCAL.- A la distancia FF' se le llama distancia focal de la hipérbola y se le designa por 2c.

VERTICES.- Los puntos A y A' son los vértices de la hipérbola.

52.- ECUACION DE LA HIPERBOLA.- (Fig. 70) Se desea encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y focos en los puntos ($\pm$ c, 0).

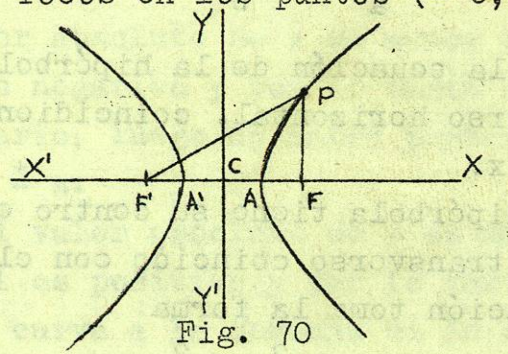

Fig. 70

Sea P (x, y) un punto cualquiera de la hipérbola.

De la definición se tiene:

$$PF' - PF = 2a$$

pero $PF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

y $PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

$$\therefore \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

pasando el segundo radical al otro miembro, elevando al cuadrado y reduciendo se tiene:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado, reduciendo y agrupando:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

pero según fórmula (19) $b^2 = c^2 - a^2$

$$\therefore \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo entre a^2b^2 se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (20)$$

que es la ecuación de la hipérbola con eje transverso horizontal, coincidiendo con el eje de las x.

Si la hipérbola tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje de las y la ecuación toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (20a)$$

53.- DISCUSION DE LA ECUACION DE LA HIPERBOLA.- Sea la ecuación (20). Se hace $x = 0$, $y = \pm\sqrt{-b^2}$, lo que indica que los valores de y serán imaginarios, luego no corta la curva al eje de las ordenadas.

Si se hace $y = 0$, $x = \pm a$, luego la curva corta al eje de las abscisas en $\pm a$.

Sustituyendo x por -x la ecuación no se altera,

luego hay simetría con respecto al eje de las ordenadas.

Sustituyendo y por -y tampoco se altera la ecuación, luego también hay simetría con respecto al eje de las abscisas.

Como hay simetría con respecto a ambos ejes, habrá simetría con respecto al origen.

Despejando y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

si el valor absoluto de x es menor que a, el subradical es negativo y por lo tanto el valor de y es imaginario, luego no habrá puntos de la curva entre $x = \pm a$.

Si el valor absoluto de x es mayor que a el subradical es positivo y por lo tanto habrá puntos de la curva a la derecha de la recta $x = a$ y a la izquierda de $x = -a$.

Despejando x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

Para cualquier valor de y los valores de x son reales y por lo tanto existen puntos de la curva.

54.- ANCHO FOCAL.- Se le llama ancho focal o Latus Rectum en una hipérbola al valor de la cuerda focal perpendicular al eje transverso. (Fig. 71)

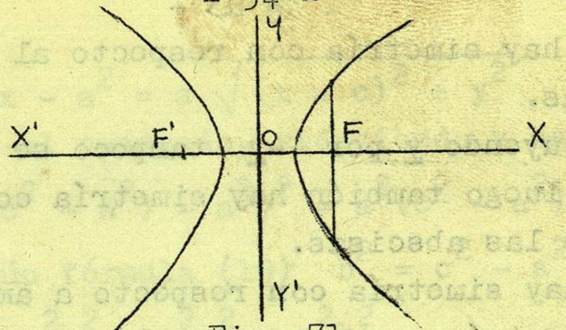

Fig. 71

En la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ;$$

si se le da a x un valor de c (abscisa del foco) se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \ y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

Entonces el ancho focal será:

$$L.\ R. = \frac{2b^2}{a} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

55.- EXCENTRICIDAD DE LA HIPERBOLA.- La excentricidad de una hipérbola es la relación de la distancia focal al eje transverso.

$$e = \frac{2c}{2a} \qquad \therefore \ e = \frac{c}{a} \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

En la hipérbola siempre $c > a$ y por lo tanto $e > 1$.

En la elipse se vió que su excentricidad es siempre menor que la unidad.

56.- ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA.- Sea la ecuación de la hipérbola con eje transverso horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se va a encontrar la intersección con la recta $y = mx$.

Haciendo simultáneas las dos ecuaciones se encontrará:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \ ; \quad y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

Si $b^2 < a^2m^2$ las intersecciones son imaginarias.

Si $b^2 > a^2m^2$ se tienen dos puntos reales de intersección.

Si $b^2 = a^2m^2$ $x = \infty$; $y = \infty$; es decir que la recta encontrará a la curva en el infinito, o sea que es tangente a la curva en el infinito y por lo tanto asíntota (Ver definición de asíntota en Pag. 41). Entonces $m = \pm \frac{b}{a}$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (23)$$

que son las ecuaciones de las asintotas a la hipérbola dada.