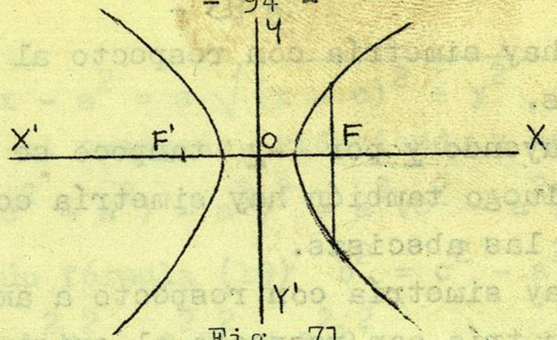

Fig. 71

En la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;;$$

si se le da a x un valor de c (abscisa del foco) se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

Entonces el ancho focal será:

$$L.\ R. = \frac{2b^2}{a} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

55.- EXCENTRICIDAD DE LA HIPERBOLA.- La excentricidad de una hipérbola es la relación de la distancia focal al eje transverso.

$$e = \frac{2c}{2a} \qquad \therefore\; e = \frac{c}{a} \;.\;.\;.\;.\;.\;(22)$$

En la hipérbola siempre $c > a$ y por lo tanto $e > 1$.

En la elipse se vió que su excentricidad es siempre menor que la unidad.

56.- ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA.- Sea la ecuación de la hipérbola con eje transverso horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se va a encontrar la intersección con la recta $y = mx$.

Haciendo simultáneas las dos ecuaciones se encontrará:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \;;\quad y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

Si $b^2 < a^2m^2$ las intersecciones son imaginarias.

Si $b^2 > a^2m^2$ se tienen dos puntos reales de intersección.

Si $b^2 = a^2m^2$ $x = \infty$; $y = \infty$; es decir que la recta encontrará a la curva en el infinito, o sea que es tangente a la curva en el infinito y por lo tanto asíntota (Ver definición de asíntota en Pag. 41). Entonces $m = \pm \frac{b}{a}$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(23)$$

que son las ecuaciones de las asintotas a la hipérbola dada.

Si la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, es decir con eje transverso vertical, en forma semejante se demostraría que las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$y = \pm \frac{a}{b} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23a).$$

Para dibujar las asíntotas se construye el rectángulo con lados 2a y 2b Figs. 72 y 73, con centro coincidiendo con el de la hipérbola y se trazan las diagonales de dicho rectángulo que como es fácil ver, son las asintotas.

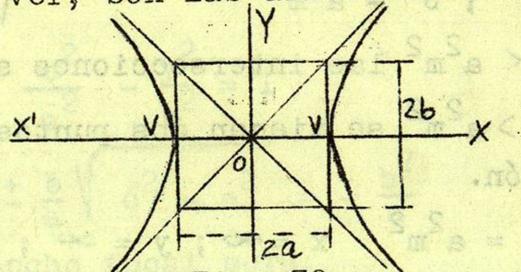

Fig. 72

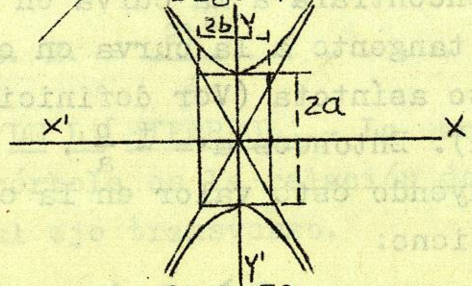

Fig. 73

Ejemplos:

1) Encontrar la ecuación de la hipérbola con

centro en el origen focos en ($\pm$ 5, 0) eje transverso igual a 8. (Fig. 74).

Puesto que la distancia del centro a cualquiera de los focos es igual a c, entonces c = 5 ;

$2a = 8 \quad \therefore a = 4 \; ; \; b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Puesto que la hipérbola tiene su eje transverso horizontal su ecuación es de la forma (20). Sustituyendo valores tenemos:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore 9x^2 - 16y^2 = 144$ es la ecuación de la hipérbola.

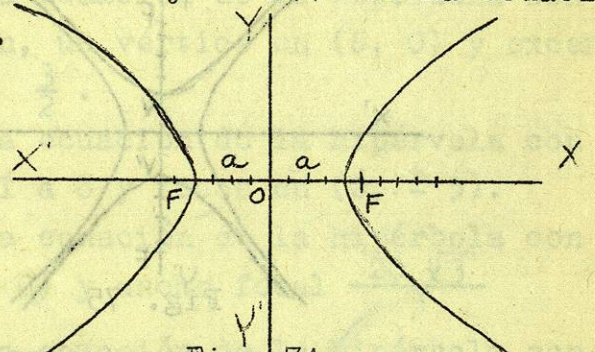

Fig. 74.

2) Encontrar las coordenadas de los focos y vértices, longitudes eje transverso y conjugado, excentricidad, latus rectum y ecuaciones de las asíntotas de la siguiente hipérbola con centro en el origen. $25y^2 - 4x^2 = 100$ (Fig. 75).

Dividiendo entre 100 para igualar el segundo miembro a 1 se tiene:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$$

La ecuación es de la forma (20a) o sea es una hipérbola con eje transverso vertical.

$a^2 = 4$; $a = 2$; $2a = 4$ Eje transverso

$b^2 = 25$; $b = 5$; $2b = 10$ Eje conjugado.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$V\ (0, \pm 2)$; $F\ (0, \pm \sqrt{29})$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{2}$; $L.R. = \frac{50}{2} = 25$

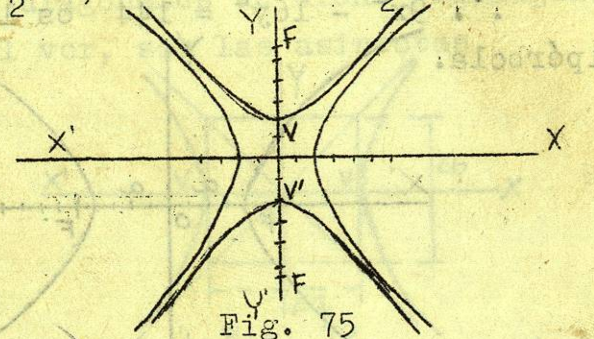

Fig. 75

EJERCICIO XIII

1.- En las siguientes hipérbolas encontrar el valor de a y b, coordenadas de focos, vértices, longitud del latus rectum, las ecuaciones de las asíntotas y dibujarlas.

a) $4x^2 - 25y^2 = 100$

b) $3x^2 - 4y^2 = 12$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

c) $x^2 - 16y^2 + 16 = 0$

d) $16x^2 - 36y^2 - 576 = 0$

e) $y^2 - x^2 = 9$

f) $100x^2 - 16y^2 = 1600$

g) $225x^2 - 196y^2 = 100$

h) $3x^2 - 4y^2 + 10 = 0$

2.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en el eje de las ordenadas, eje transverso igual a 8 y excentricidad igual a 2.

3.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un vértice en (6, 0) y excentricidad igual a $\frac{3}{2}$.

4.- Encontrar la ecuación de la hipérvola con eje conjugado igual a 8 y focos en $(0, \pm 5)$.

5.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con focos en $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y ancho focal $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

6.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en el eje de las x y pasando por:

$$\left(-\frac{10}{3}, 4\right) \text{ y } \left(2, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

7.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las y y pasando por:

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{4}\right) \text{ y } \left(-3, \frac{15}{4}\right).$$

57.- HIPERBOLA EQUILATERA.- Cuando el eje transverso es igual al eje conjugado, la hipérbola se llama equilátera. $a = b$

58.- HIPERBOLAS CONJUGADAS.- Se llaman hipérbolas conjugadas a aquellas en que el eje transverso y el eje conjugado de una son respectivamente el eje conjugado y transverso de otra.

Teniendo la ecuación de una hipérbola para encontrar la de su conjugada basta poner la ecuación dada en alguna de las formas (20) o (20a) según el caso y cambiar signos a uno de los dos miembros de la ecuación.

Se ve fácilmente que las dos hipérbolas tienen las mismas asíntotas y la misma distancia focal.

Las hipérbolas conjugadas aparecerán como en la Fig. 76

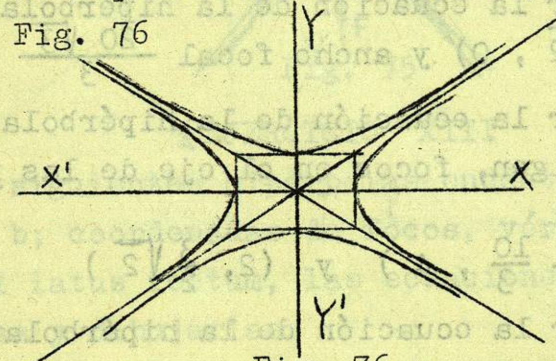

Fig. 76

EJERCICIO XIV

1.- Encontrar las ecuaciones de las siguientes hi-

pérbolas equiláteras con centro en el origen

a) $V(\pm 4, 0)$ c) $V(\pm 5, 0)$

b) $V(0, \pm 7)$ d) $V(0, \pm \frac{3}{4})$

2.- Encontrar la ecuación de las hipérbolas conjugadas y las ecuaciones de las asíntotas. Dibujar las curvas.

a) $x^2 - 8y^2 = -8$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

c) $x^2 - y^2 = 9$

d) $y^2 - 4x^2 = 16$