C A P I T U L O VIII

COORDENADAS POLARES.

1.- <u>GENERALIDADES</u>.- Otra forma de localizar puntos en un plano es por medio de las coordenadas polares.

Si se tiene un punto fijo y una recta fija, O y OA respectivamente, en la Fig. 77; para tener localizado un punto cualquiera P del plano es suficiente conocer su distancia OP al punto fijo y el ángulo que OP hace con OA.

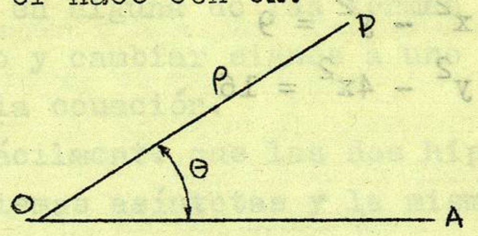

Fig. 77

Al punto fijo O se le llama <u>polo</u> y a la recta fija OA <u>eje polar</u>. Se acostumbra que OA sea horizontal extendiéndose a la derecha de O. El ángulo AOP se considera positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y negativo cuando se mide en el mismo sentido que el de las manecillas.

Se acostumbra designar a dicho ángulo con la letra griega θ y se le llama ángulo polar, argumento o ángulo vectorial.

La distancia OP se considera positiva cuando está medida en el lado móvil del ángulo y negativa cuando está medida sobre la prolongación a través de O de la misma recta del lado móvil. Se le designa con la letra griega ρ y se le llama radio vector.

ρ y θ son entonces las coordenadas polares de P y se escriben en forma semejante a las coordenadas rectangulares: P (ρ, θ) ; indicando primero el radio vector.

Cada pareja de valores determina un punto sobre el plano. Las figuras 78, 79, 80 y 81 representan respectivamente los puntos (5, 30°); (-7, 150°); (3, 190°) y (-8, -15°).

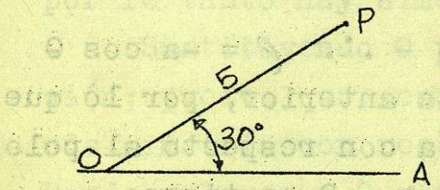

Fig. 78

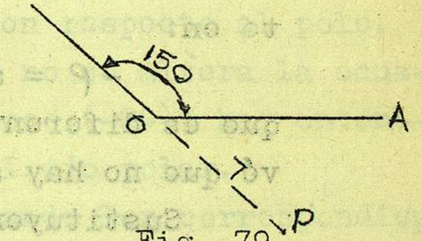

Fig. 79

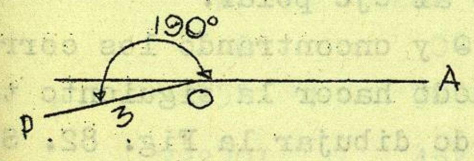

Fig. 80

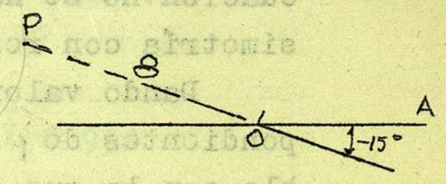

Fig. 81

2.- REPRESENTACION GRAFICA DE ECUACIONES POLARES.-

En una ecuación polar las variables son ρ y θ; el lugar geométrico representado por una ecuación de este tipo se dibujará dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ.

La curva será simétrica con respecto al polo cuando al sustituir en la ecuación ρ por $-\rho$ la ecuación no se altera y habrá puntos simétricos con respecto al eje polar cuando al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación no se altera.

Ejemplos:

1) Dibujar la curva representada por la ecuación

$$\rho = a \cos \theta$$

Sustituyendo ρ por $-\rho$ la ecuación se convierte en:

$$-\rho = a \cos \theta \quad \therefore \quad \rho = -a \cos \theta$$

que es diferente de la anterior, por lo que se vé que no hay simetría con respecto al polo.

Sustituyendo θ por $-\theta$ se tiene:

$\rho = a \cos (-\theta)$ pero como $\cos(-\theta) = \cos \theta$ la ecuación no se ha alterado y por lo tanto habrá simetría con respecto al eje polar.

Dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ se puede hacer la siguiente tabla con la que se puede dibujar la Fig. 82. Se considerarán valores de θ desde 0° hasta 180° puesto que entre 180° y 360° se repiten los mis-

mos puntos ya encontrados. Lo mismo pasaría dando valores de θ entre 0° y -180°. Esta ecuación corresponde a un círculo.

θ	ρ
0°	a
30°	0.866a
45°	0.707a
60°	0.5a
90°	0
120°	-0.5a
150°	-0.866a
180°	-a

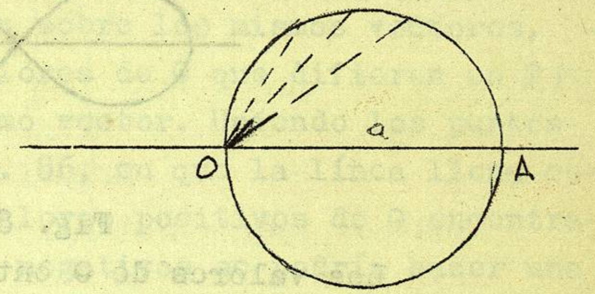

Fig. 82

2) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

Sustituyendo ρ por $-\rho$ la ecuación no cambia, por lo tanto hay simetría con respecto al polo.

Sustituyendo θ por $-\theta$ no se altera la ecuación; puesto que: $\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$; hay entonces simetría con respecto al eje polar.

Dando valores a θ y encontrando los correspondientes de ρ se obtiene la tabla siguiente con la que se construye la curva de la Fig. 83.

θ	2θ	ρ
0°	0°	$\pm$ a
15°	30°	$\pm$ 0.93a
22°30'	45°	$\pm$ 0.84a
30°	60°	$\pm$ 0.71a

θ	2θ	ρ
45°	90°	0

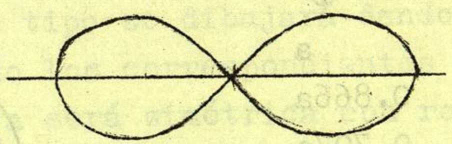

Fig. 83

Los valores de θ entre 45° y 135° dan imaginarios, es decir no hay puntos de la curva entre ellos.

De 135° a 180° la curva da valores simétricos con respecto al eje polar a los de la tabla, y de 180° en adelante se repiten valores. Esta curva se llama Lemniscata de Bernoulli.

3) $\rho = a\,\theta$

No hay simetría ni con respecto al polo ni con respecto al eje polar, puesto que al sustituir ρ por $-\rho$ ó θ por $-\theta$ la ecuación se altera.

Dando valores a θ en radianes se obtiene la tabla siguiente:

Como se ve por la ecuación, el valor de ρ es proporcional al de θ. Si se tiene un valor de θ_1 y su correspondiente $\rho_1 = a\theta_1$ y se da otro valor $\theta_1 + 2\pi$, el valor de ρ sería:

$$\rho_2 = a(\theta_1 + 2\pi) = a\theta_1 + 2\pi a$$

Es decir, que después de situar puntos con los valores dados en la tabla, se pueden localizar más puntos de la curva sobre los mismos vectores, puesto que los valores de θ que difieren en 2π caen sobre el mismo vector. Uniendo los puntos se obtiene la Fig. 86, en que la línea llena corresponde a los valores positivos de θ encontrados. Para valores negativos se podría hacer una tabla similar y dibujar la curva de puntos de la misma figura.

Esta curva se llama espiral de Arquímedes.

θ	ρ	θ	ρ
0	0	$\frac{7\pi}{6}$	3.67a
$\frac{\pi}{6}$	0.52a	$\frac{5\pi}{4}$	3.93a
$\frac{\pi}{4}$	0.79a	$\frac{4\pi}{3}$	4.19a
$\frac{\pi}{3}$	1.05a	$\frac{3\pi}{2}$	4.71a
$\frac{\pi}{2}$	1.57a	$\frac{5\pi}{3}$	5.24a
$\frac{2\pi}{3}$	2.09a	$\frac{7\pi}{4}$	5.50a
$\frac{3\pi}{4}$	2.36a	$\frac{11\pi}{6}$	5.76a
$\frac{5\pi}{6}$	2.62a	2π	6.28a

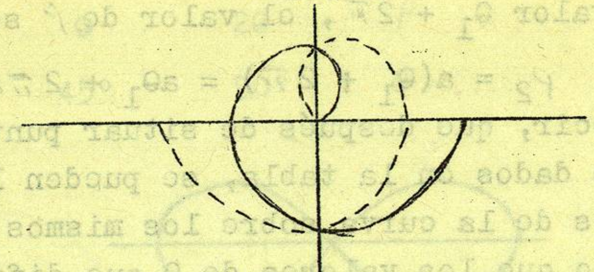

Fig. 84

EJERCICIO I

Dibujar las curvas siguientes:

1.- $\rho = 3 \sec \theta$

2.- $\rho = 2 \csc \theta$

3.- $\rho = 4$

4.- $\rho = 2 \cos \theta$

5.- $\rho = -3 \operatorname{sen} \theta$

6.- $\rho = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$

7.- $\theta = \frac{\pi}{4}$

8.- $\rho = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

9.- $\rho = 2 \cos 3\theta$

10.- $\rho = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$

3.- RELACION ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y PO LARES.- Si se hacen coincidir el origen y la par te positiva del eje de las X de un sistema de co denadas cartesianas con el polo y el eje polar r pectivamente de uno de coordenadas polares, se t dría (Fig. 85) para un punto P cualquiera del pl no:

Coordenadas cartesianas P (x, y)

Coordenadas polares P (, θ)

$$x = \ \cos \theta \ . . . . (24)$$

$$y = \ \operatorname{sen} \theta \ . . . . (25)$$

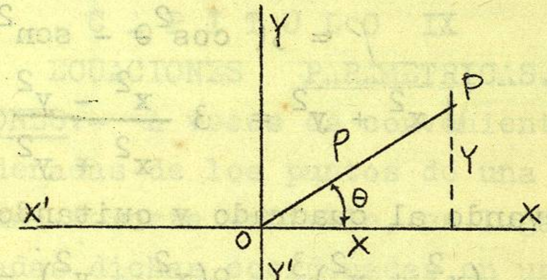

Fig. 85

que son las fórmulas para pasar de coordenadas cartesianas a polares.

Inversamente:

$$^2 = x^2 + y^2 \ . . . . (26)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \ . . . . (27)$$

son las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas.

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación:

$$x^2 - y^2 = 4$$

a coordenadas polares.

Sustituyendo según fórmulas (24) y (25) se tiene:

$$\rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 4 .$$

$$\therefore \rho^2 = 4 \sec 2\theta$$

2) Encontrar la ecuación cartesiana de la curva:

$$\rho = 3 \cos 2\theta$$

Solución:

$$\rho = 3(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y quitando denominadores:

$$(x^2 + y^2)^3 - 9(x^2 - y^2)^2 = 0$$

EJERCICIO II

1.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas polares:

a) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

b) $x^2 + y^2 + ax = a(x^2 + y^2)$

c) $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2axy$

d) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

e) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

f) $-3x + 2y - 5 = 0$

2.- Transformar las ecuaciones siguientes a coordenadas cartesianas:

a) $\rho = \dfrac{7}{5 \cos\theta + 3 \operatorname{sen}\theta}$

b) $\rho = 4$

c) $\rho = \operatorname{sen}\theta$

d) $\rho = a\theta$

e) $\rho = \cos 2\theta + 1$

f) $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

C A P I T U L O IX

ECUACIONES PARAMETRICAS.

1.- DEFINICIONES.- A veces es conveniente expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una tercera variable, en lugar de tener relacionadas dichas coordenadas en una ecuación.

A esa tercera variable se le llama Parámetro y las ecuaciones que expresan la relación entre las coordenadas y el parámetro se llaman ecuaciones paramétricas.

2.- DIBUJO DE CURVAS CON ECUACIONES PARAMETRICAS.- Para encontrar puntos de una curva conociendo sus ecuaciones paramétricas se van dando valores al parámetro y se encuentran los valores de las coordenadas.

Ejemplo: $x = 2t^2$; $y = t + 3$

Dando valores a t se encuentra la tabla siguiente con la que se pueden dibujar los puntos de la Fig. 86, la cual es una parábola.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	18	8	2	0	2	8	18
y	0	1	2	3	4	5	6