

F II

U A N

DAD AUTÓNOMA DE NUEVA

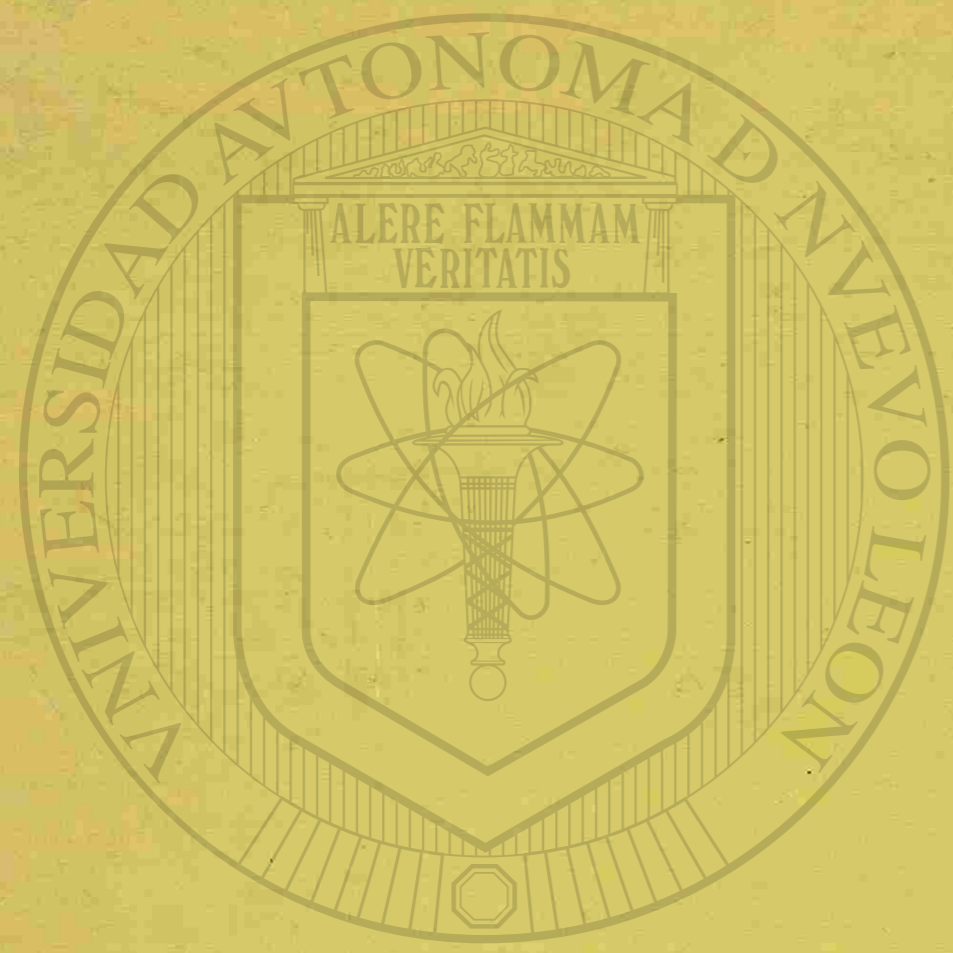
CIÓN GENERAL DE BIBLIOTE



QC20  
.82  
U5

L. 2015/10

N  
CA



# UANI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

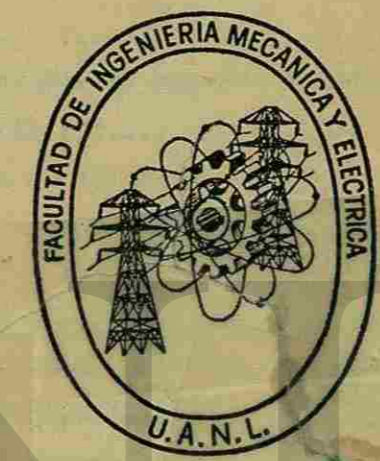
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CA

*Rosa...*

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



U A N L

TEORIA Y PROBLEMAS  
DE FISICA 2



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

QC20

.82

U5



1020082299

ALERE FLAMMAM  
VERITATIS

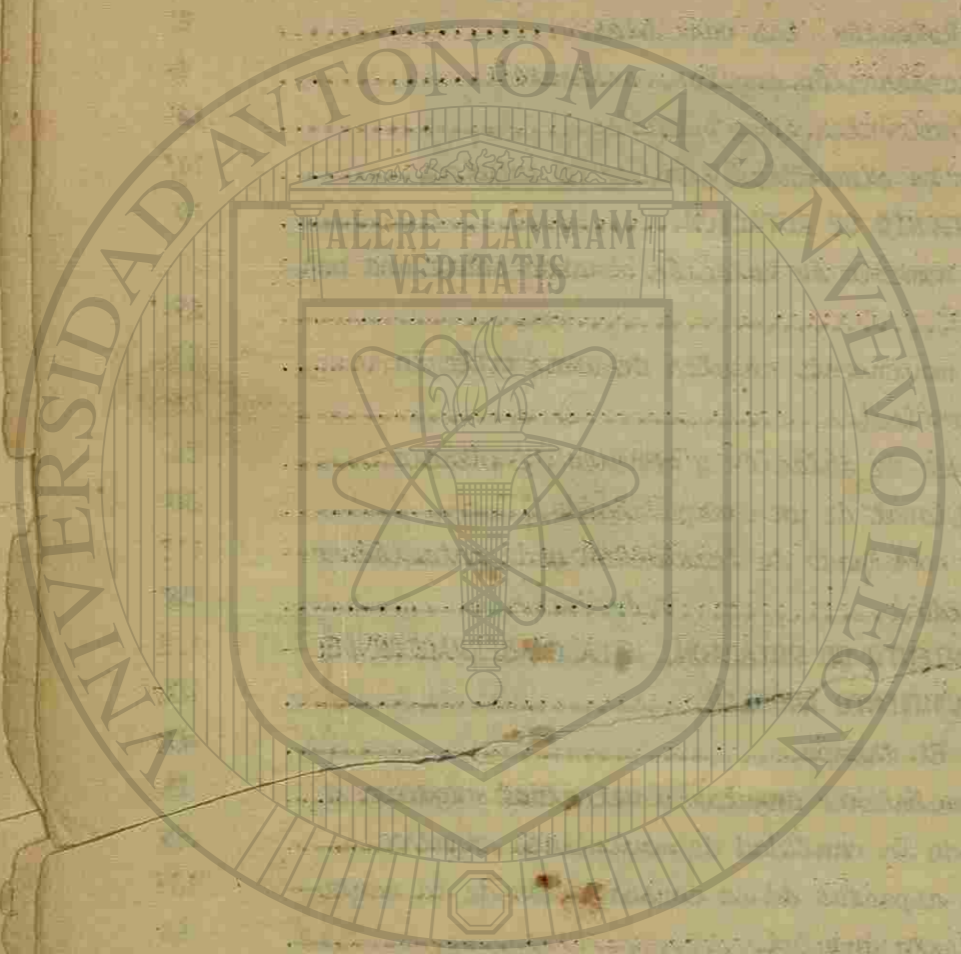


FONDO UNIVERSITARIO

130279

INDICE

CAPITULO	Páginas
I CINEMATICA DE ROTACION.....	1
1.- Introducción. Movimiento de Rotación.....	1
2.- Cinemática de Rotación. Las variables.....	2
3.- Rotación con aceleración angular constante.....	8
4.- Cantidades rotacionales como vectores.....	10
5.- Relación entre la cinemática final y la angular.....	12
II DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION.....	19
1.- Introducción. Momento de Rotación obrando sobre una partícula.....	19
2.- Cantidades de movimiento angular de una partícula.....	23
3.- Sistemas de partículas.....	25
4.- Energía cinética de rotación y momento de inercia.....	26
5.- Dinámica rotacional de un cuerpo rígido.....	30
6.- El movimiento combinado de traslación y de rotación de un cuerpo rígido.....	38
III DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION. Y LA CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.....	47
1.- Introducción. El trompo.....	47
2.- Cantidad de movimiento angular y velocidad angular.....	49
3.- Conservación de la cantidad de movimiento angular.....	53
4.- Algunos otros aspectos de la conservación de la cantidad de movimiento angular.....	56
5.- Resumen.....	57
IV OSCILACIONES.....	61
1.- Introducción. Oscilaciones.....	61
2.- El oscilador armónico simple.....	63
3.- Movimiento armónico simple.....	65
4.- Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple.....	70
5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.....	71
6.- Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme.....	77
7.- Combinaciones de movimientos armónicos.....	80
8.- Oscilaciones de un cuerpo doble.....	82
9.- Movimiento armónico amortiguado.....	85
V ESTATICA DE LOS FLUIDOS.....	90



CAPITULO	Páginas
1.- Fluidos. Presión y Densidad.....	90
2.- Variaciones de presión en un fluido en reposo.....	91
3.- Principio de Pascal y Principio Arquímedes.....	95
4.- Medida de la presión.....	98
VI DINAMICA DE LOS FLUIDOS.....	105
1.- Conceptos generales del flujo de los fluidos.....	105
2.- Líneas de corrientes.....	107
3.- La ecuación de continuidad.....	108
4.- Ecuación de Bernoulli.....	109
5.- Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad.....	112
VII ✓ EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.....	117
1.- El calor, una forma de la energía.....	117
2.- Cantidad de calor y calor específico.....	118
3.- Capacidad calorífica molar de los sólidos.....	121
4.- Conducción del calor.....	123
5.- Equivalente mecánico del calor.....	127
6.- Calor y trabajo.....	128
7.- La primera Ley de la Termodinámica. Algunas aplicaciones.....	131
VIII ✓ TEMPERATURA.....	139
1.- Descripción macroscópica y microscópica.....	139
2.- Equilibrio térmico.....	139
3.- Medición de la temperatura.....	140
4.- Termómetro de gas a volumen constante.....	143
5.- Escala de temperaturas del gas ideal.....	144
6.- Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de temperaturas práctica internacional.....	145

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$v = v_0 + at$



## CAPITULO I

### CINEMATICA DE ROTACION

#### 1.- Introducción. Movimiento de Rotación.

En este capítulo se hará un estudio de los cuerpos o partículas que se mueven en una trayectoria circular. Se dará principio a esta primera parte considerando el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo; esto es, movimiento de rotación sin traslación.

El movimiento de rotación se produce cuando actúa una fuerza sobre un cuerpo en ángulo recto con su movimiento, como nunca existe una componente de la fuerza en dirección del movimiento, no habrá aceleración a lo largo de la trayectoria, cambiando la dirección del movimiento mientras permanece constante la celeridad del cuerpo. Si la magnitud de la fuerza es constante, la dirección de la trayectoria cambia en igual proporción en cada intervalo de tiempo y la trayectoria es circular.

La fuerza y la aceleración del cuerpo, están dirigidas hacia el centro del círculo, mientras que la velocidad es tangente al círculo en cada punto.

Para determinar la posición de un cuerpo que se desplaza a lo largo del arco de un círculo, es necesario conocer el ángulo que se forma entre el centro del círculo al cuerpo y el radio fijo del círculo. Como se muestra en la figura 1-1.

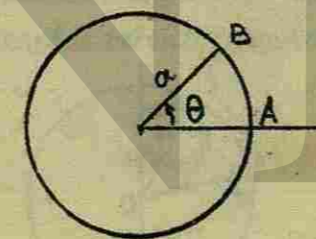


FIGURA 1-1

Para expresar  $\theta$  se utilizarán tres unidades: grados, revoluciones y radianes.

Como las dos primeras unidades son más conocidas se dará una explicación de los radianes. Un ángulo expresado en radianes es la longitud del arco girado dividido entre el radio del arco.

Para que  $\theta$  esté expresada en radianes, basta hacer la relación de;  $\frac{AB}{a}$ , a partir de la figura 1-1.

Observando con esto que el radian, no es más que la relación entre dos longitudes y no una unidad propiamente dicha.

Así que las mediciones angulares por los términos  $\theta$  en radianes, o  $\theta$  en grados, son con el objeto de expresar la forma en que se mide el ángulo, sin es

perar que estas definiciones se comporten como unidades en las ecuaciones.

Cuando  $\theta$  es grande hasta llenar el círculo o sea  $360^\circ$ , gira un arco igual a la circunferencia  $2\pi a$ . De donde  $360^\circ$  equivale a  $\frac{2\pi a}{a}$ , o bien  $2\pi$  radianes.

Además sabiendo que una revolución es igual a  $360^\circ$ , se encuentra que también una revolución es igual a  $2\pi$  radianes.

## 2.- Cinemática de la Rotación. Las variables.

La cinemática de la rotación, es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de un cuerpo que se desplaza a través de un círculo, sin tomar en cuenta las causas que provocan este movimiento.

### VELOCIDAD ANGULAR.-

Las dimensiones de la velocidad angular, es la relación de los desplazamiento angular y el tiempo; donde  $d\theta$  deberá estar en radianes,  $dt$  en segundos y  $w$  en rad/seg. Otra forma común de unidad para la velocidad angular son rev/min. De donde:

$$1 \frac{\text{rev.}}{\text{min.}} = 1 \frac{\text{rev.}}{\text{MIN.}} \times 2\pi \frac{\text{rad.}}{\text{rev.}} \times \frac{1}{60} \frac{1}{\text{seg./min.}} = 0.105 \frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}$$

En la figura 1-2, se considerará un cuerpo que gira alrededor de un eje -- que pasa por  $O$ , perpendicular al plano del dibujo.  $Oa$  es la posición de cierto radio del cuerpo en el instante  $t_0$ , y  $Ob$  la posición del mismo radio en el instante  $t$ ; siendo  $\theta_0$  y  $\theta$ , las abscisas angulares del radio medidas respecto a la vertical de referencia. El desplazamiento angular del radio es  $\Delta\theta$ , o bien  $\theta - \theta_0$ .

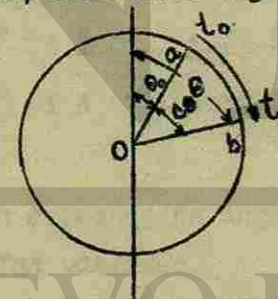


FIGURA-1-2

La velocidad angular media  $\bar{w}$ , se define como:

$$\text{velocidad angular media} = \frac{\text{desplazamiento angular}}{\text{tiempo transcurrido.}}$$

$$\bar{w} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{de donde:}$$

La derivada del desplazamiento angular respecto al tiempo, dará la velocidad angular instantánea, esto es:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Ecuación 1-1}$$

Cuando un cuerpo gira con velocidad angular constante, su velocidad angular instantánea es igual a su velocidad angular media, cualquiera que sea el in-



tervalo de tiempo. Siendo la velocidad angular constante se puede escribir:

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega (t - t_0)$$

considerando que  $t_0$  y  $\theta_0$  son infinitamente pequeños, se obtiene:

$$\theta = \omega t \quad \text{Ecuación 1-1a.}$$

Ejemplo 1-1.

Se realizan las siguientes lecturas en el tacómetro de un automóvil en los intervalos de tiempo siguientes.

tiempo (seg).	0	2	5	6
velocidad angular (rpm)	20	40	60	80

a).- Cálculense la velocidad angular en  $\frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$  para cada lectura. Así como:

b).- Los desplazamientos angulares para cada lectura.

a)

$$20 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 0.105 \frac{\text{rad./seg.}}{\text{rev/min.}} = 2.1 \frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}$$

$$40 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 4.2 \text{ "}$$

$$60 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 6.3 \text{ "}$$

$$80 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 8.4 \text{ "}$$

b)

$$\theta_1 = \omega t = 0. \quad \text{No hay desplazamiento en la primer lectura.}$$

$$\theta_2 = 4.2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \times 2 \text{ seg.} = 8.4 \text{ rad.}$$

$$\theta_3 = 6.3 \text{ " } \times 5 \text{ " } = 31.5 \text{ "}$$

$$\theta_4 = 8.4 \text{ " } \times 6 \text{ " } = 50.4 \text{ "}$$

ACELERACIÓN ANGULAR.-

Para que un cuerpo tenga aceleración angular, la velocidad angular del cuerpo en rotación deberá estar variando.

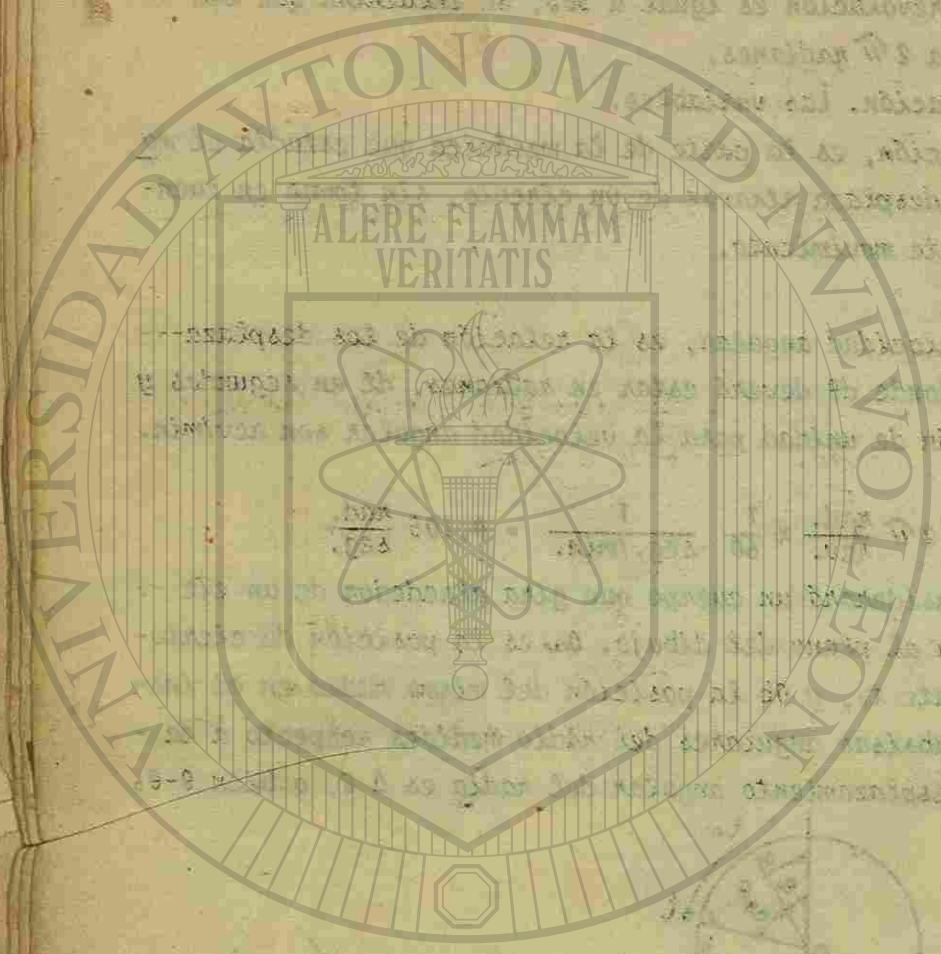
Siendo  $\omega_0$  su velocidad angular instantánea en el instante  $t_0$ , y  $\omega$  su velocidad angular en el instante  $t$ , se obtiene la aceleración angular media  $\bar{\alpha}$ . La cual se define como la razón de la variación de la velocidad angular al tiempo transcurrido:

$$\text{aceleración angular media} = \frac{\text{variación de la velocidad angular}}{\text{tiempo transcurrido.}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Sabiendo que la velocidad angular  $\omega$  esta en rad/seg. y el tiempo en segundos, se obtiene que la aceleración angular estará en  $\frac{\text{rad.}}{\text{seg.}^2}$ .

La aceleración angular instantánea  $\bar{\alpha}$  es la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo esto es:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TOLUCA  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ecuación 1-2.

sabiendo que  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  se puede escribir.

$$\alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ejemplo 1-2.

Un motor que gira a  $1800 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  sigue haciéndolo libremente hasta el reposo en forma uniforme en un tiempo de 20 seg. Encontrar su desaceleración angular  $\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$  y  $\frac{\text{rev}}{\text{seg}^2}$ .

$$1800 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 0.105 \frac{\text{rad/seg.}}{\text{rev/min.}} = 189 \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$$

$$1800 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{1}{\text{seg}} = 30 \frac{\text{rev}}{\text{seg.}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{189 \text{ rad/seg.}}{20 \text{ seg.}} = 9.45 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{30 \frac{\text{rev}}{\text{seg}}}{20 \text{ seg}} = 1.5 \frac{\text{rev}}{\text{seg}^2}$$

Cantidades tangenciales.

VELOCIDAD TANGENCIAL.-

A medida que una partícula viaja a una velocidad uniforme  $v$ , no solo describe un ángulo  $\theta$ , sino que también cubre una distancia  $ds$ . Como se ilustra en la figura 1-3.

La distancia que se desplaza la partícula en el tiempo  $dt$ , está dada por la ecuación  $ds = v dt$ .

Y el ángulo átravez del cual la partícula se mueve en este tiempo es:

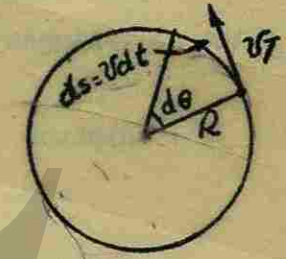


FIGURA 1-3

$$d\theta = \frac{ds}{R} \quad \text{de donde:}$$

$$ds = R d\theta$$

Ecuación 1-3

Si la partícula se mueve sobre el arco del círculo tiene una velocidad lineal  $v$ , que siempre es tangencial al círculo. Esta velocidad recibe el nombre de velocidad tangencial de la partícula.

Para encontrarla unicamente se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ecuación 1-3. Recordando que R es constante.

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

de donde:

$$v = R \omega$$

Ecuación 1-4

Aquí también la medida en radianes debe usarse para  $\omega$ .

DE la ecuación 1-4, se encuentra que entre mas lejana este una partícula del eje de rotación mayor será la línea de velocidad  $v$ . Aunque todas las partí

culas de un cuerpo en rotación tienen la misma velocidad angular (excepto las que están sobre el eje).

Ejemplo 1-3.

Un fonógrafo con un disco de 18cm. de diámetro, rota a 45  $\frac{rev.}{min.}$ : a) Encontrar la línea de velocidad de un punto que se encuentra a 4 cm. del eje y b) -- Uno que se encuentra sobre la orilla del disco.

$$45 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg}{rev/min} = 4.725 \frac{rad}{seg}.$$

$$a) v_T = R w = 4 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 18.9 \frac{cm}{seg}.$$

$$b) v_T = 9 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 42.525 \frac{cm}{seg}.$$

ACELERACION TANGENCIAL.

Para encontrar la aceleración tangencial  $a_T$  de la partícula de la figura 1-3. Se toma la derivada respecto al tiempo de la ecuación 1-4, manteniendo R constante. Esto da:

$$\frac{dv_T}{dt} = R \frac{dw}{dt}$$

Siendo  $\frac{dv_T}{dt}$  la aceleración tangencial y  $\frac{dw}{dt}$  la aceleración angular, se obtiene:

$$a_T = R \alpha$$

Ecuación 1-5

Debiendo estar  $\alpha$  en  $\frac{rad.}{seg^2}$ .

Ejemplo 1-4.

Suponiendo que en el motor del ejemplo 1-2, se cambia su velocidad de 1800 a 1200  $\frac{rev.}{min.}$  por medio de un reostato y se deja girar libremente hasta el reposo en un tiempo de 15 seg.

a) Determinar la aceleración tangencial para un punto que se encuentra sobre la orilla del rotor (parte móvil del motor), sabiendo que el diámetro de este es 15 cm.

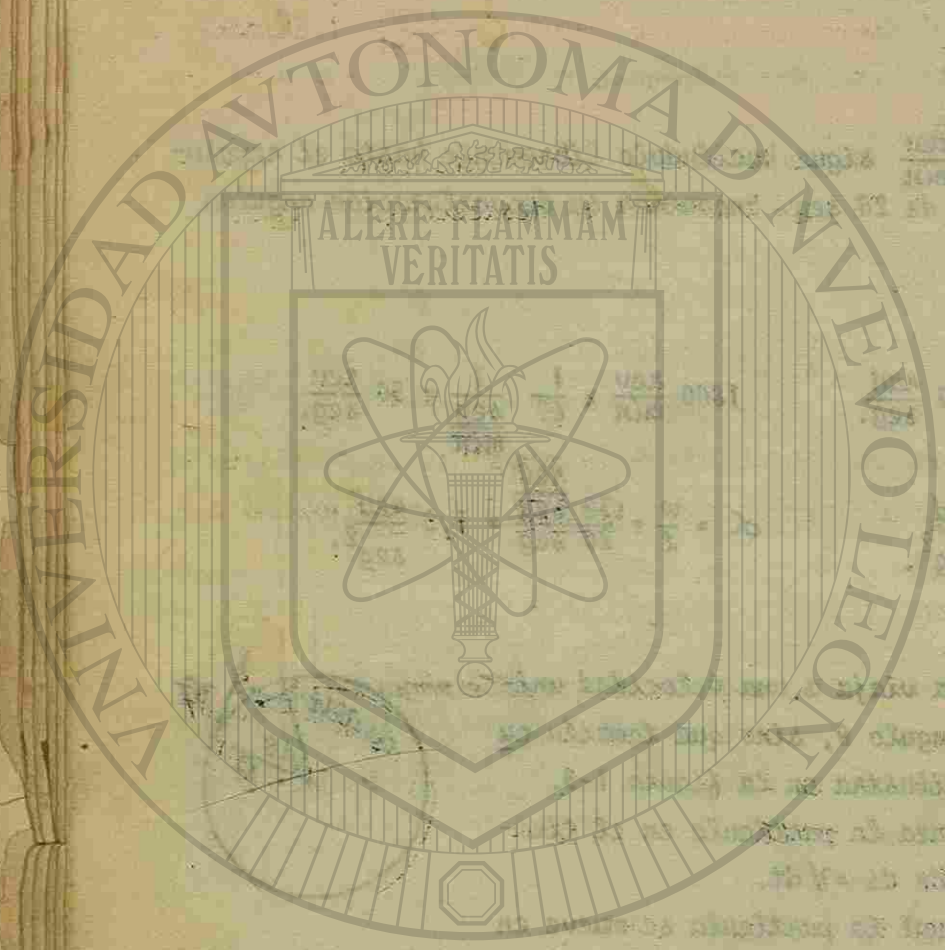
$$1200 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 126 \frac{rad.}{seg.}$$

$$\alpha = \frac{w}{t} = \frac{126 \text{ rad/seg.}}{15 \text{ seg.}} = 8.4 \frac{rad.}{seg^2}.$$

$$a_T = R \alpha = 7.5 \text{ cm} \times 8.4 \frac{rad}{seg^2} = 63 \frac{cm}{seg^2}.$$

ACELERACION RADIAL.

Para encontrar la aceleración radial de una partícula que se desplaza sobre un círculo, es conveniente analizar el origen de coordenadas X y Y, en el



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

culas de un cuerpo en rotación tienen la misma velocidad angular (excepto las que están sobre el eje).

Ejemplo 1-3.

Un fonógrafo con un disco de 18cm. de diámetro, rota a 45  $\frac{rev.}{min.}$ : a) Encontrar la línea de velocidad de un punto que se encuentra a 4 cm. del eje y b) -- Uno que se encuentra sobre la orilla del disco.

$$45 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg}{rev/min} = 4.725 \frac{rad}{seg}.$$

$$a) v_T = R w = 4 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 18.9 \frac{cm}{seg}.$$

$$b) v_T = 9 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 42.525 \frac{cm}{seg}.$$

ACELERACION TANGENCIAL.

Para encontrar la aceleración tangencial  $a_T$  de la partícula de la figura 1-3. Se toma la derivada respecto al tiempo de la ecuación 1-4, manteniendo R constante. Esto da:

$$\frac{dv_T}{dt} = R \frac{dw}{dt}$$

Siendo  $\frac{dv_T}{dt}$  la aceleración tangencial y  $\frac{dw}{dt}$  la aceleración angular, se obtiene:

$$a_T = R \alpha$$

Ecuación 1-5

Debiendo estar  $\alpha$  en  $\frac{rad.}{seg^2}$ .

Ejemplo 1-4.

Suponiendo que en el motor del ejemplo 1-2, se cambia su velocidad de 1800 a 1200  $\frac{rev.}{min.}$  por medio de un reostato y se deja girar libremente hasta el reposo en un tiempo de 15 seg.

a) Determinar la aceleración tangencial para un punto que se encuentra sobre la orilla del rotor (parte móvil del motor), sabiendo que el diámetro de este es 15 cm.

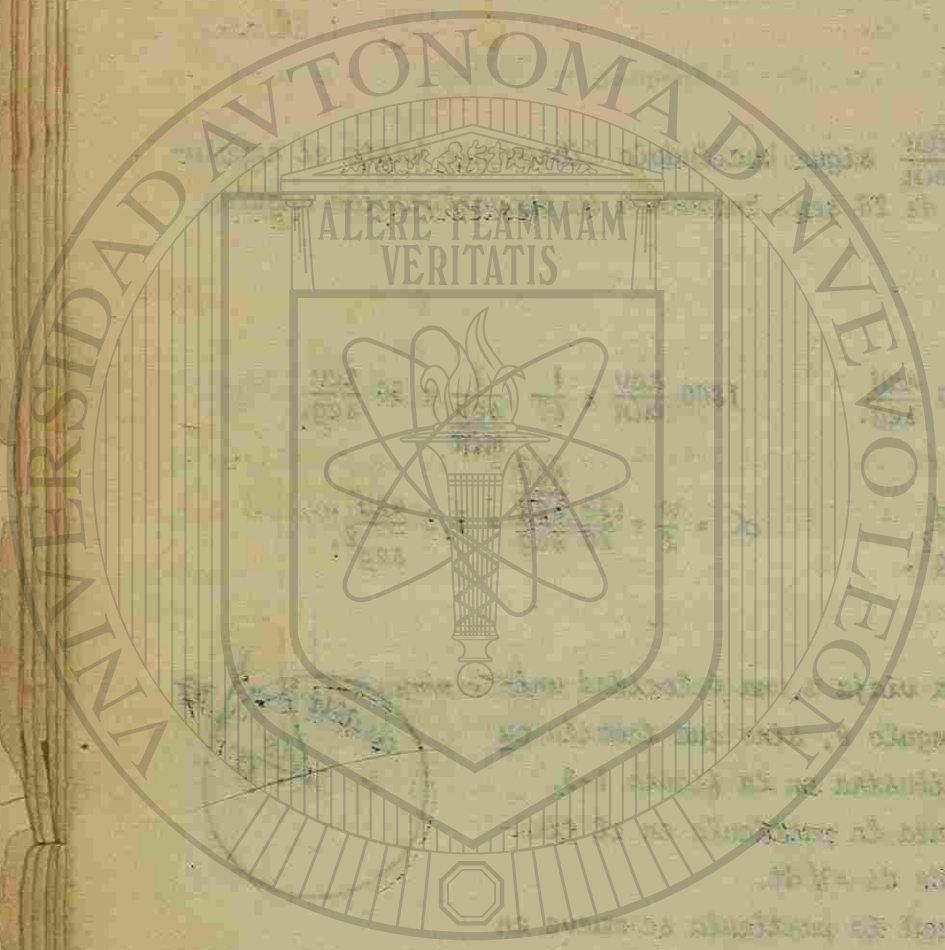
$$1200 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 126 \frac{rad.}{seg.}$$

$$\alpha = \frac{w}{t} = \frac{126 \text{ rad/seg.}}{15 \text{ seg.}} = 8.4 \frac{rad.}{seg^2}.$$

$$a_T = R \alpha = 7.5 \text{ cm} \times 8.4 \frac{rad}{seg^2} = 63 \frac{cm}{seg^2}.$$

ACELERACION RADIAL.

Para encontrar la aceleración radial de una partícula que se desplaza sobre un círculo, es conveniente analizar el origen de coordenadas X y Y, en el



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

centro del círculo como lo muestra la figura 1-4

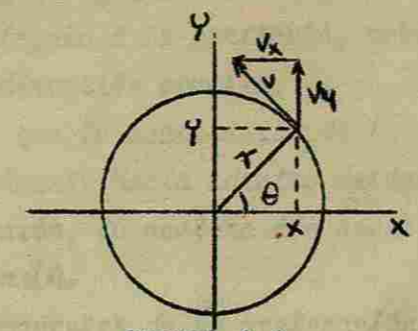


FIGURA 1-4

Obteniendo que las coordenadas de la partícula son:

$$X = r \cos \theta \qquad Y = r \sin \theta$$

donde  $\theta$  es función del tiempo y  $r$  se mantiene constante.

Suponiendo que la partícula desplaza alrededor del círculo con una velocidad angular constante  $w$ , y haciendo uso de la ecuación 1-1a que dice  $\theta = wt$ , ya que para este caso  $\bar{w} = w$ .

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de X y Y, se encuentra que:

$$X = r \cos wt \qquad Y = r \sin wt \qquad \text{Ecuación 1-6}$$

Sabiendo que la componente en el eje X de la velocidad de la partícula es  $V_x = \frac{dx}{dt}$  y en el eje Y es  $V_y = \frac{dy}{dt}$  y derivando la ecuación 1-6, con respecto al tiempo, se encuentra que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(r \cos wt)}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d(r \sin wt)}{dt}$$

$$V_x = -r w \sin wt \qquad V_y = r w \cos wt \qquad \text{Ecuación 1-7}$$

En general claro esta  $w$  no sería constante. Sin embargo es conveniente restringirnos al caso en que la partícula se desplaza en torno del círculo a velocidad constante, de tal manera que  $\alpha = \frac{dw}{dt} = 0$

Obsérvese que tanto  $V_x$  como  $V_y$  son función del tiempo. Por lo tanto, en virtud de que las velocidades cambian con el tiempo la partícula debe irse acelerando aunque su rapidez en el círculo sea constante.

Para encontrar las componentes X y Y de la aceleración, se hace uso del hecho que:

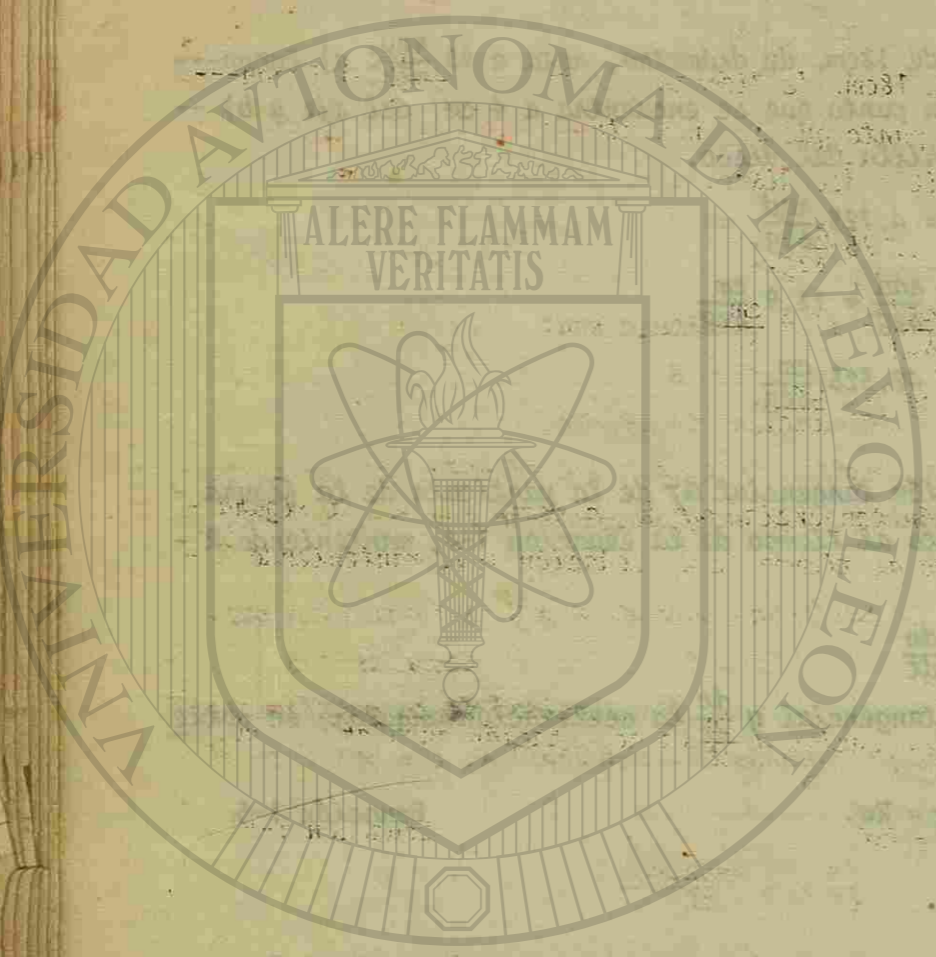
$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

y derivando con respecto al tiempo la ecuación 1-7, se encuentra que:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{-r w d(\sin wt)}{dt} \qquad \frac{dV_y}{dt} = \frac{r w d(\cos wt)}{dt}$$

$$a_x = -r w^2 \cos wt \qquad a_y = -r w^2 \sin wt \qquad \text{Ecuación 1-8.}$$

Las componentes de aceleración son proporcionales al negativo de los desp-



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

lazamientos, esto significa; que el vector de desplazamiento que es el radio -- vector del centro del círculo a la partícula, debe ser proporcional al vector - de aceleración pero de dirección opuesta.

De donde se deduce que la aceleración de la partícula en el círculo es un vector que apunta radialmente hacia adentro desde la partícula hacia el centro del círculo. Por esta razón, la aceleración recibe el nombre de aceleración radial y se representa por  $a_r$ .

Conociendo las componentes de la aceleración y sabiendo que la resultante- R de dos vectores componentes  $R_x$  y  $R_y$  esta dada por:

$R^2 = R_x^2 + R_y^2$  se obtiene que:

$a_r^2 = a_x^2 + a_y^2$   
 $a_r^2 = r^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + r^2 \omega^4 \sin^2(\omega t)$   
 $a_r^2 = r^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)$

Sabiendo que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  se encuentra que:

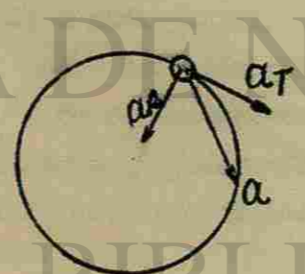
$a_r = r \omega^2$  Ecuación 1-9.

Aunque la partícula se desplaza en torno del círculo con velocidad constante, su velocidad cambia de dirección. La razón de cambio de este vector de velocidad es la aceleración radial de la partícula.

La partícula esta acelerada a lo largo de un radio hacia el centro del círculo.

Ejemplo 1-5.

Calcular la magnitud de la aceleración total de una partícula moviéndose - en un círculo de radio 0.4 mts. En el instante que esta partícula tiene una velocidad angular de  $2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$  y una aceleración angular de  $5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ .



$a_T = \alpha r = 5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \times 0.4 \text{ mt} = 2 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$   
 $a_r = \omega^2 r = (2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}})^2 \times 0.4 \text{ mt} = 1.6 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_r^2}$   
 $a = \sqrt{(2)^2 + (1.6)^2} \frac{\text{mt}^2}{\text{seg}^2}$   
 $a = 2.6 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$

FUERZAS CENTRÍPETA Y CENTRÍFUGA.

Todos alguna vez hemos experimentado estas fuerzas al atar una piedra o -- un peso a una cuerda y dar vueltas haciendo que la piedra describa una circunferencia. De esta manera al dar vueltas notamos que la mano esta sometida a una fuerza hacia afuera, e inversamente la mano tiene que ejercer una fuerza hacia-



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

lazamientos, esto significa; que el vector de desplazamiento que es el radio -- vector del centro del círculo a la partícula, debe ser proporcional al vector - de aceleración pero de dirección opuesta.

De donde se deduce que la aceleración de la partícula en el círculo es un vector que apunta radialmente hacia adentro desde la partícula hacia el centro del círculo. Por esta razón, la aceleración recibe el nombre de aceleración radial y se representa por  $a_r$ .

Conociendo las componentes de la aceleración y sabiendo que la resultante- R de dos vectores componentes  $R_x$  y  $R_y$  esta dada por:

$R^2 = R_x^2 + R_y^2$  se obtiene que:

$a_r^2 = a_x^2 + a_y^2$   
 $a_r^2 = r^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + r^2 \omega^4 \sin^2(\omega t)$   
 $a_r^2 = r^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)$

Sabiendo que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  se encuentra que:

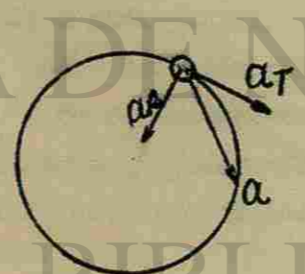
$a_r = r \omega^2$  Ecuación 1-9.

Aunque la partícula se desplaza en torno del círculo con velocidad constante, su velocidad cambia de dirección. La razón de cambio de este vector de velocidad es la aceleración radial de la partícula.

La partícula esta acelerada a lo largo de un radio hacia el centro del círculo.

Ejemplo 1-5.

Calcular la magnitud de la aceleración total de una partícula moviéndose - en un círculo de radio 0.4 mts. En el instante que esta partícula tiene una velocidad angular de  $2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$  y una aceleración angular de  $5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ .



$a_T = \alpha r = 5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \times 0.4 \text{ mt} = 2 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$   
 $a_r = \omega^2 r = (2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}})^2 \times 0.4 \text{ mt} = 1.6 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_r^2}$   
 $a = \sqrt{(2)^2 + (1.6)^2} \frac{\text{mt}^2}{\text{seg}^2}$   
 $a = 2.6 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$

FUERZAS CENTRÍPETA Y CENTRÍFUGA.

Todos alguna vez hemos experimentado estas fuerzas al atar una piedra o -- un peso a una cuerda y dar vueltas haciendo que la piedra describa una circunferencia. De esta manera al dar vueltas notamos que la mano esta sometida a una fuerza hacia afuera, e inversamente la mano tiene que ejercer una fuerza hacia-

adentro sobre la piedra.

Para tener una mejor idea suponer un punto O, clavado en una superficie horizontal sin rozamiento como se muestra en la figura 1-5. En donde un pequeño

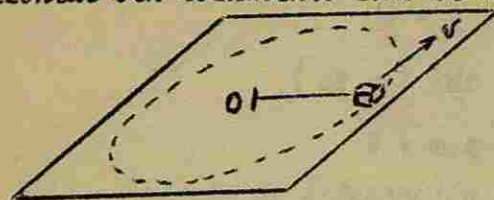


FIGURA 1-5

cuerpo de masa m. esta unido a la punta por intermedio de una cuerda de radio R, y se pone en rotación alrededor de ella con una velocidad angular w, una velocidad tangencial y una aceleración normal  $a_n = \frac{v^2}{R} = w^2 R$ .

A partir de la segunda Ley de Newton es necesario ejercer una fuerza sobre el cuerpo para producir esta aceleración normal y la dirección de esta fuerza tiene que ser la misma que la dirección de la aceleración, es decir, según el radio y hacia el centro de la circunferencia. Por esto recibe el nombre de Fuerza Centralo Centrípeta.

Sabiendo que  $F = ma$  y  $a = \frac{v^2}{R} = w^2 R$ , entonces la fuerza centrípeta será:

$$F = \frac{m v^2}{R} = m w^2 R \quad \text{Ecuación 1-10}$$

Esta fuerza esta dirigida hacia el centro y la produce la cuerda, lo cual esta en tensión y por lo tanto ejerce sobre la punta del centro una fuerza hacia afuera, igual y opuesta a la centrípeta, llamada fuerza Centrífuga.

Un diagrama de estas fuerzas se puede observar en la figura 1-6, donde la fuerza F es la centrípeta y la fuerza F' es la centrífuga.

Las fuerzas centrípeta y centrífuga como se puede observar son una pareja de fuerzas de acción y reacción siendo la primera una fuerza resultante hacia adentro ejercida sobre el cuerpo que gira, y la segunda la reacción a esta fuerza.

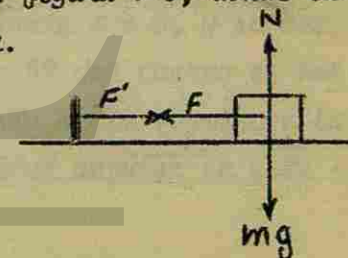


FIGURA 1-6

3.- Rotación con Aceleración Angular Constante.

En el movimiento de rotación con aceleración angular constante, se puede determinar fácilmente las ecuaciones para este caso, integrando las expresiones de la velocidad y las abscisas angulares, teniendo que:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \text{constante.}$$

$$dw = \alpha dt$$

$$\int dw = \int \alpha dt$$

$$w = \alpha t + c_1$$

Si  $w_0$  es la velocidad angular para  $t = 0$ , la constante de integración es  $c_1 = w_0$  y

$$w = w_0 + \alpha t$$

Ecuación 1-11



Puesto que,  $w = d\theta/dt$ :

$$d\theta = w dt$$

sustituyendo la ecuación 1-11, se tiene que:

$$d\theta = (w_0 + \alpha t) dt$$

$$\int d\theta = \int w dt + \int \alpha t dt$$

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + c_2$$

La constante de integración  $c_2$  es el valor de  $\theta$  para  $t = 0$ , o sea  $\theta_0$ , si  $\theta_0 = 0$ , entonces,

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Ecuación 1-12

Escribiendo la aceleración angular en la forma,  $\alpha = w \frac{dw}{d\theta}$  se obtiene que:

$$\int \alpha d\theta = \int w dw$$

$$\alpha \theta = \frac{1}{2} w^2 + c_3$$

Si el ángulo  $\theta$  es cero para  $t = 0$ , y si la velocidad angular inicial es  $w_0$ , se tiene que  $c_3 = -\frac{1}{2} w_0^2$ , por lo tanto:

$$\alpha \theta = \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} w_0^2$$

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha \theta$$

Ecuación 1-13

Ejemplo 1-6.

La velocidad angular de un cuerpo es  $6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$  en el instante  $t = 0$ , y su aceleración angular es constante e igual a  $3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ . Una recta OP del cuerpo es horizontal en el instante  $t = 0$ , a) ¿Cuál es el ángulo que esta recta forma con la horizontal en el instante  $t = 3 \text{ seg}$ ? b) ¿Cuál es la velocidad angular en este instante?

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$= 6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \times 3 \text{ seg} + \frac{1}{2} \times 3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \times (3 \text{ seg})$$

$$\theta = 31.5 \text{ radianes.}$$

$$\theta = 5 \text{ revoluciones.}$$

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$= 6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} + 3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \times 3 \text{ seg.}$$

$$w = 15 \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$$

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha \theta$$

$$= \left( 6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)^2 + 2 \left( 3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \right) 31.5 \text{ rad.}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$= 225 \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2}$$

$$\omega = 15 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Cuando la aceleración angular es constante, la velocidad angular media se puede relacionar con las velocidades inicial y final, por medio de:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\theta = \bar{\omega}t$$

4.-Cantidades rotacionales como vectores.

Como primer punto, se dirá que los ángulos de rotación no pueden ser vectores. Sin embargo, como un vector es una cantidad que tiene magnitud y dirección y obedece las leyes de la suma vectorial, si se prefiere, se puede dar dirección a las cantidades angulares y por lo tanto hacerlas vectores.

El vector que representa una velocidad o aceleración angular se dibuja a lo largo del eje de rotación; su longitud, representa la magnitud de la velocidad o aceleración angular y esta hecha con cierta escala elegida. En la figura 1-7, imagínese que el eje sea un tornillo de rosca derecha, el sentido del vector es el correspondiente al avance del tornillo cuando se le hace girar en el sentido de la velocidad o aceleración angular.

En la figura 1-8, se muestran también las direcciones de la velocidad o aceleración angular, de dependiendo el sentido de la rotación.

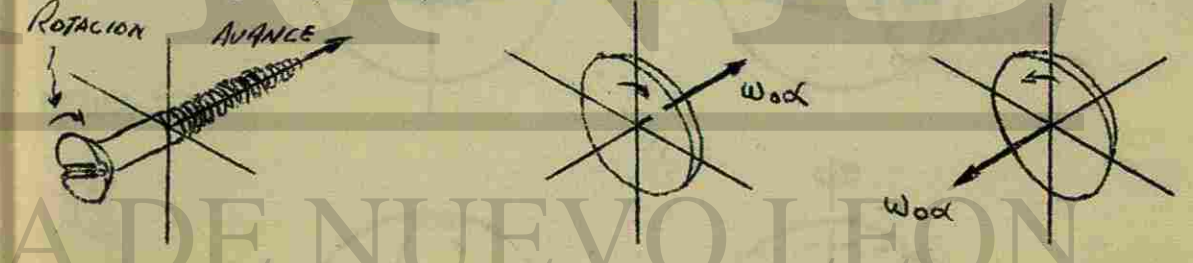


FIGURA 1-7

figura 1-8

La suma de dos vectores que representan dos rotaciones sucesivas  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , deben dar el mismo resultado, independientemente del orden en que se tomen, es;  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ .

Esta ley no se sigue en caso de rotaciones finitas, excepto en casos especiales. Este hecho se demuestra fácilmente en la figura 1-9, en que se consideran dos rotaciones sucesivas a  $90^\circ$  del bloque, siendo evidente que el orden en que se llevan a cabo las rotaciones es importante, pues los resultados son diferentes en los dos casos. Por lo tanto,  $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$ . Sin embargo, si se restringe a rotaciones pequeñas, el orden en que se tomen las rotaciones no tiene

importancia, como se muestra en la figura 1-10, en donde al efectuar dos rotaciones sucesivas los resultados son los mismos para ambos casos.

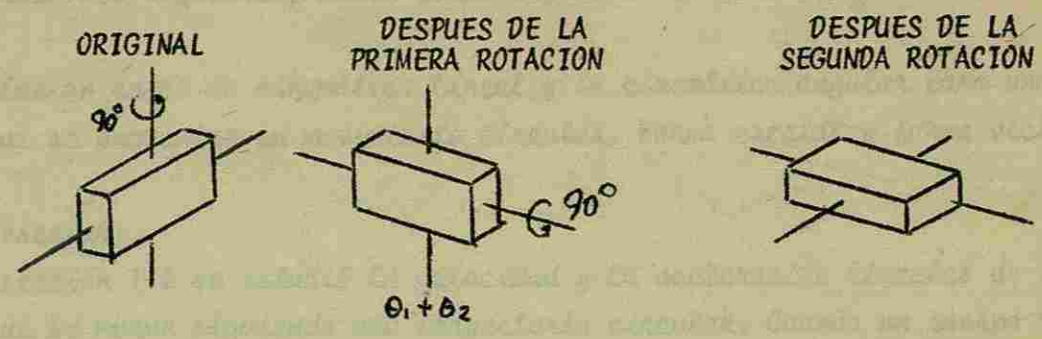


FIGURA 1-9

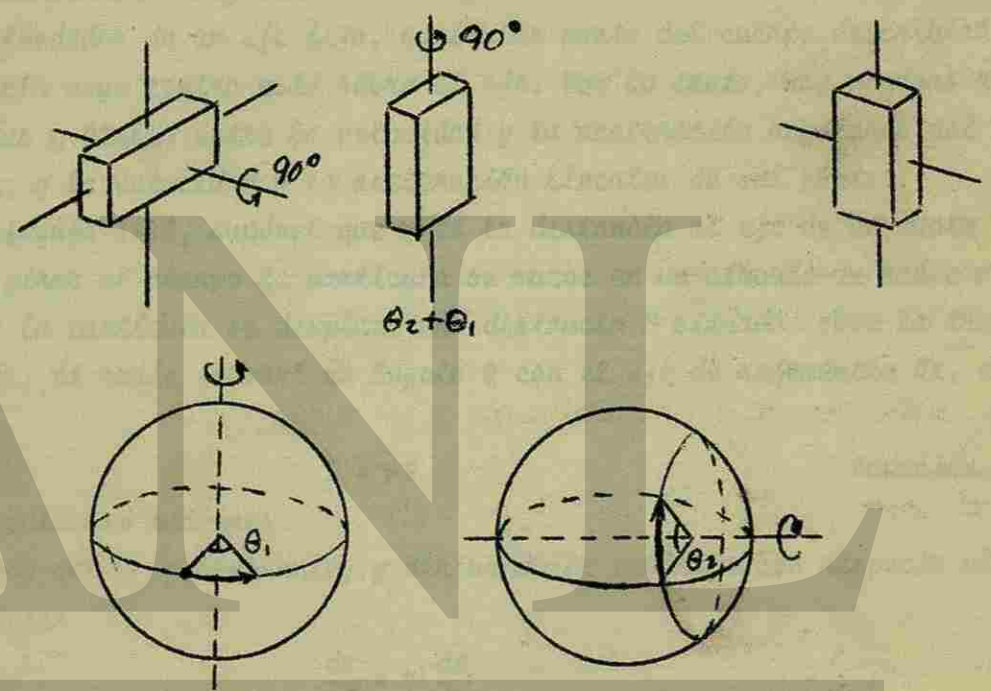
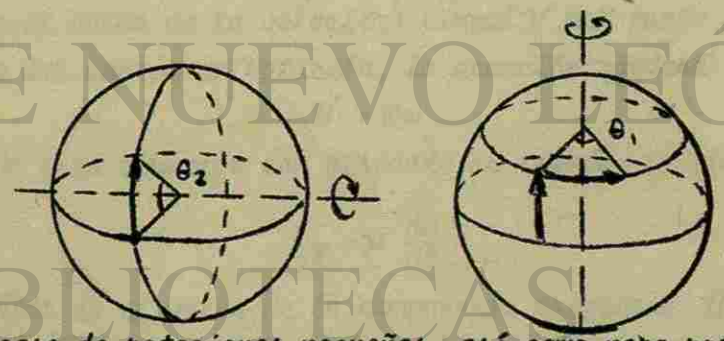


FIGURA 1-10



En este caso de rotaciones pequeñas, así como para rotaciones finitas, es válida y útil la definición de vector ya que para el primer caso obedece las leyes de la suma vectorial, mientras que en el segundo caso todos los vectores son perpendiculares a un plano dado, es decir, tienen magnitud y dirección.

Por lo tanto, se restringirán las rotaciones vectoriales a ángulos infinitesimales, a menos que las rotaciones se encuentren todas en el mismo plano.

En conclusión, se obtiene que para considerar como vectores las velocidades y aceleraciones angulares, deben estar definidas en función de rotaciones pequeñas.

5.- Relación entre la cinemática lineal y la cinemática angular para una partícula que se encuentre en movimiento circular. Forma escalar y forma vectorial.

Forma escalar:

En la sección 1-2 se estudió la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria circular. Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto del cuerpo describirá una circunferencia cuyo centro está sobre el eje. Por lo tanto, hay algunas relaciones sencillas y útiles entre la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo en rotación, y la velocidad y la aceleración lineales de sus puntos.

En la figura 1-11, suponer que  $r$  es la distancia al eje de un punto P del cuerpo, al girar el cuerpo la partícula se mueve en un círculo de radio  $r$ .

Cuando la partícula se desplaza una distancia  $s$  situada sobre la trayectoria circular, el radio formará un ángulo  $\theta$  con el eje de referencia  $Ox$ , encontrando que:

$$s = r\theta \quad \text{Ecuación 1-14}$$

si  $\theta$  está medida en radianes.

Sabiendo que  $r$  es constante, y derivando la ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Si  $\frac{ds}{dt}$  es el valor de la velocidad lineal  $v$  del punto P, y  $\frac{d\theta}{dt}$  es la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo en rotación, la ecuación quedará:

$$v = r\omega \quad \text{Ecuación 1-15}$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

Donde  $\frac{dv}{dt}$  es el valor de la componente tangencial  $a_T$  de la aceleración del punto P, y  $\frac{d\omega}{dt}$  es la aceleración angular  $\alpha$  del cuerpo que gira, de modo que

$$a_T = r\alpha \quad \text{Ecuación 1-16}$$

La componente normal de la aceleración en el punto P, se expresa como: ---

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

En la figura 1-12, se representan las componentes de la aceleración de un-

punto P cualquiera del cuerpo en rotación.

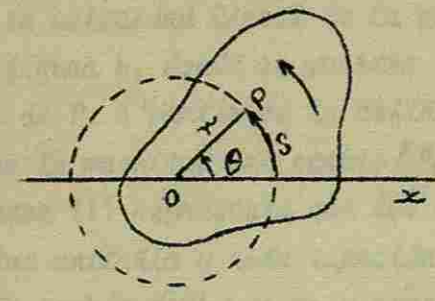


FIGURA 1-11

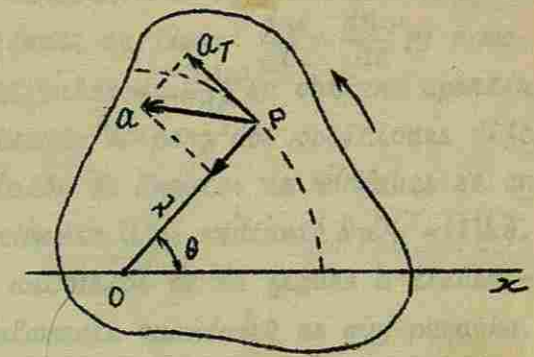


FIGURA 1-12

Conclusión:

La descripción angular ofrece una ventaja clara sobre la descripción lineal cuando hay que considerar varios puntos del mismo cuerpo en rotación.

Va que diferentes puntos del mismo cuerpo en rotación no tienen desplazamiento, velocidad, o aceleración lineal, y en cambio, todos los puntos de un cuerpo rígido que gira en torno de un eje fijo tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración angulares en un instante cualquiera.

Forma vectorial:

Para encontrar la relación que hay entre las variables lineales y angulares en su forma vectorial se hace uso de la figura 1-13, en donde se muestra una partícula P que gira en forma de un eje fijo que pasa por O, en los tiempos t y t + Δt. En la figura 1-13a, la partícula gira un ángulo Δθ en el tiempo Δt, mostrándose los vectores unitarios en coordenadas polares para cada punto.

En los cambios que presentan los vectores unitarios u<sub>r</sub> y u<sub>θ</sub> en el tiempo Δt, se nota que Δu<sub>r</sub> tiene la misma dirección de u<sub>θ</sub> cuando Δθ tiende a cero y que Δu<sub>θ</sub> tiene la dirección de u<sub>r</sub> cuando Δθ tiende a cero, como se muestra en las figuras 1-13b y c.

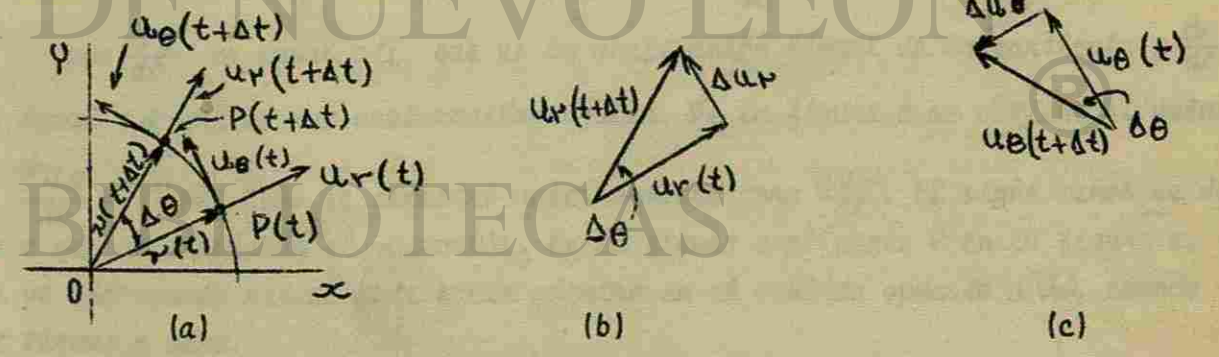
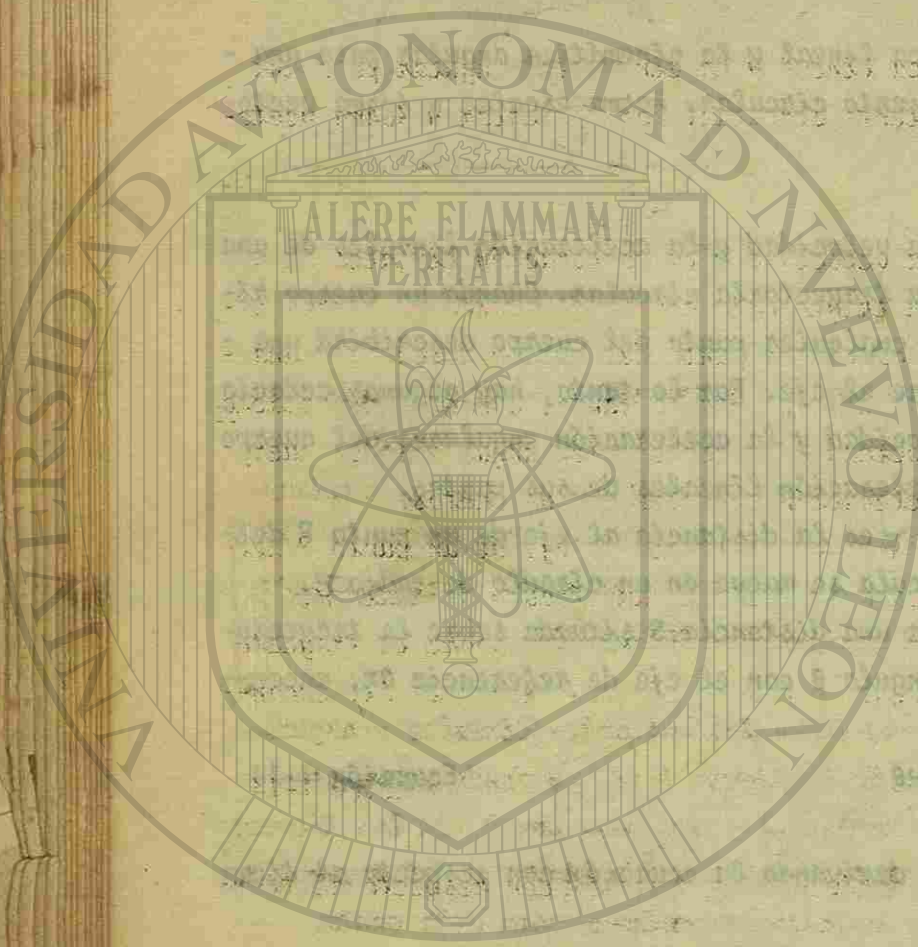


FIGURA 1-13

Sabiendo que el radio es constante, se obtiene la expresión:

$$r = u_r \gamma$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

donde  $U_r$  es un vector unitario que esta en la dirección de  $r$ . Derivando esta -- ecuación con respecto al tiempo y siendo  $r$  constante se tiene:  $\frac{dr}{dt} = \frac{dU_r}{dt} r$ ; como  $\frac{dr}{dt}$  es la velocidad lineal de la partícula  $V$ , el valor de  $\frac{dU_r}{dt}$  se obtiene a partir de la figura b, donde se muestra el vector unitario  $U_r$  para dos posiciones diferentes de P. A partir de la definición de medición de ángulos en radianes se encuentra la magnitud del cambio  $\Delta U_r$ , que experimenta  $U_r$ , mediante  $\Delta U_r = (1)\Delta\theta$ . El factor (1) representa que los dos vectores unitarios de la figura b tienen longitud unitaria y esta ecuación se cumple solamente cuando  $\Delta\theta$  es muy pequeña.

El cambio de  $U_r$  es un vector,  $\Delta U_r$ , cuya magnitud está dada por la ecuación anterior, su dirección se da por el vector unitario  $U_\theta$  siempre y cuando  $\Delta\theta$  sea muy pequeña. Esto es, si  $\Delta U_r$  en la figura b se traslada al punto P de la figura a se ve que apunta en la dirección de  $U_\theta$ , cuando  $\Delta\theta \rightarrow 0$ .

Encontrando que:

$$\Delta U_r \cong U_\theta \Delta\theta$$

Dividiendo entre  $\Delta t$  y haciendo que  $\Delta t$  tienda a cero, se obtiene:

$$\frac{dU_r}{dt} = U_\theta \frac{d\theta}{dt} = U_\theta \omega$$

sustituyendo este valor en la ecuación  $\frac{dr}{dt} = \frac{dU_r}{dt} r$ , se encuentra que:

$$V = U_\theta \omega r \tag{Ecuación 1-17}$$

Encontrando que la relación escalar correspondiente a esta ecuación es:

$$V = \omega r \tag{Ecuación 1-17a}$$

Para encontrar la relación entre las aceleraciones angular y lineal, se deriva la ecuación 1-17 con respecto al tiempo, recordando que  $r$  es constante -- aún cuando varíen  $U_\theta$  y  $\omega$ ; se encuentra:

$$\frac{dV}{dt} = U_\theta \frac{d\omega}{dt} r + \omega \frac{dU_\theta}{dt} r \tag{Ecuación 1-18}$$

Como  $\frac{dV}{dt}$  es igual a  $A$ , que es la aceleración lineal de la partícula y  $\frac{d\omega}{dt}$  es igual a  $\alpha$  que es una aceleración angular. De la figura c se obtiene el valor de  $\frac{dU_\theta}{dt} = -U_r \omega$ . Como se demostró anteriormente para  $\frac{dU_r}{dt}$ . El signo menos se debe a que al trasladar el vector  $\Delta U_\theta$  en la figura c al punto P en la figura a, se ve que apunta radialmente hacia adentro en el sentido opuesto a  $U_r$ , cuando  $\Delta t$  tiende a cero.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1-18, se encuentra que:

$$A = U_\theta \alpha r - U_r \omega^2 r. \tag{Ecuación 1-19}$$



Pero sabiendo que  $a$  tiene una componente radial  $a_R$  y una componente tangencial  $a_T$ , la relación escalar correspondiente a esta ecuación será:

$$a_T = \alpha r \quad \text{y} \quad a_R = w^2 r$$

Las ecuaciones 1-17 y 1-19 son relaciones entre las variables cinemáticas lineales en forma vectorial y las angulares en forma escalar.

Para obtener relaciones en las cuales cada grupo de variables queden expresadas en forma vectorial se hará a continuación y quedará limitado para los casos en que el eje de rotación este fijo.

En la figura 1-14, se muestran las direcciones de los vectores  $r, v, a_T, a_R, w$  y  $\alpha$  para una partícula que gira en un círculo en torno del eje  $z$ . Las cantidades angulares se encuentran sobre el eje de rotación apuntando en la dirección del eje.

Se demostrará que las relaciones que buscamos son:

$$v = w \times r \quad \text{y} \quad a = a_T + a_R \quad \text{Ecuación 1-20}$$

en la cual,

$$a_T = \alpha \times r \quad \text{y} \quad a_R = w \times v \quad \text{Ecuación 1-20a}$$

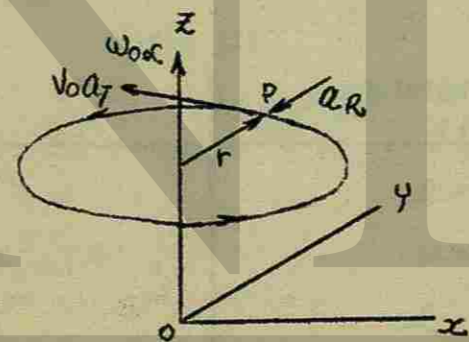


FIGURA 1-14

El producto vectorial de dos vectores  $a$  y  $b$  se escribe así,  $a \times b$  y es otro vector  $c$ , siendo  $c = a \times b$ . La magnitud de  $c$  se define como:  $c = ab \text{Sen } \phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo entre  $a$  y  $b$ .

Aplicando esta definición a las ecuaciones 1-20 y 1-20a, y observando que  $w$  y  $r$ ,  $w$  y  $v$ ,  $\alpha$  y  $r$  en la figura 1-14 son mutuamente perpendiculares, se encuentra que el ángulo  $\phi$  para cada uno de estos tres pares de vectores es de  $90^\circ$ . Por lo tanto, las magnitudes serán:

$$v = wr \text{Sen } 90^\circ = wr$$

$$a_R = wv \text{Sen } 90^\circ = w(wr) = w^2 r$$

$$a_T = \alpha r \text{Sen } 90^\circ = \alpha r$$

Para saber si las direcciones de las ecuaciones 1-20 y 1-20a están correctas, se hará uso de la regla de la mano derecha que se muestra en la figura 1-15.

El producto vectorial  $c = a \times b$ , muestra que la dirección de  $c$  se encuentra moviendo a hacia  $b$  haciéndole describir el ángulo entre ellos con los dedos de la mano derecha; encontrando que el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de  $c$ .

Comprobando de esta manera que las direcciones de los vectores  $V, \alpha_T$  y  $\alpha_n$  en la figura 1-14, están correctas.

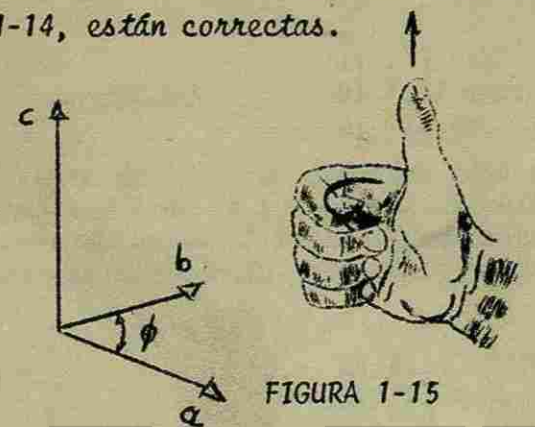


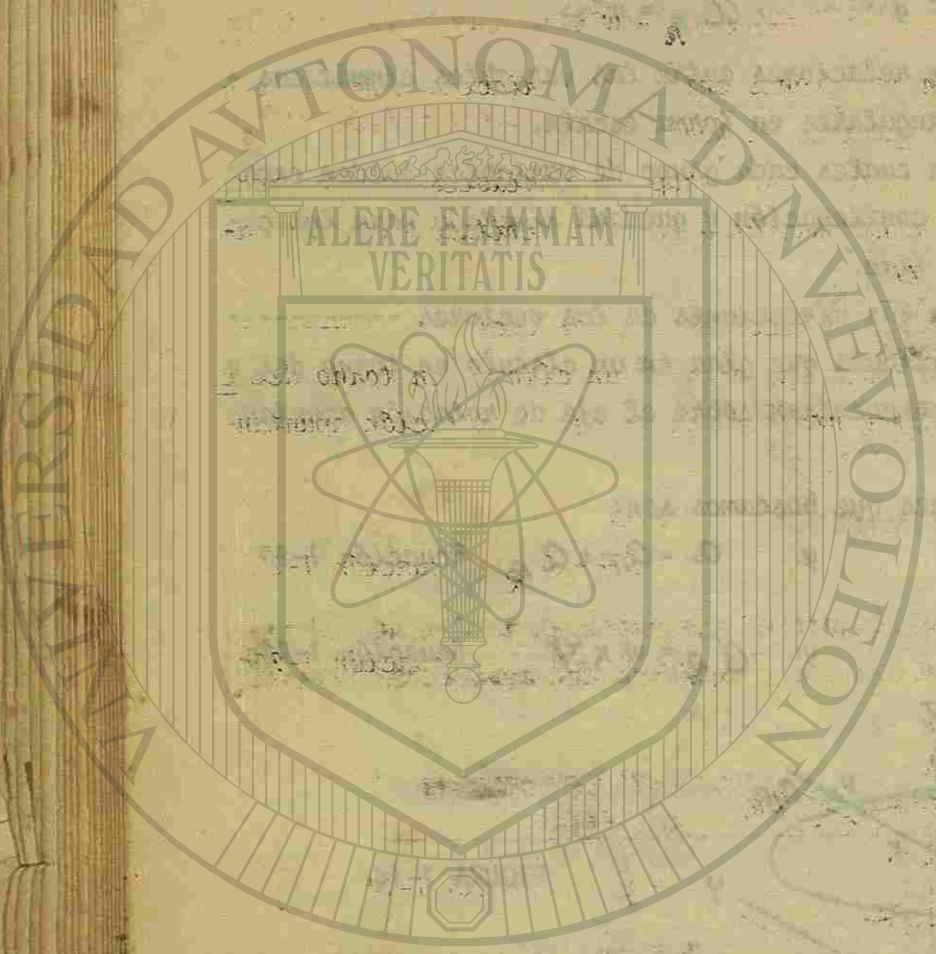
FIGURA 1-15

Resumen.

En la tabla 1-1 se muestran las ecuaciones que rigen el movimiento circular, así como la relación que tienen con las ecuaciones del movimiento lineal.

TABLA 1-1

MOVIMIENTO LINEAL (dirección fija)	MOVIMIENTO DE ROTACION (eje fijo)
$x = vt$	$\theta = \frac{s}{R}$
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Movimiento con aceleración lineal o angular constantes	
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = \frac{v_0 + v}{2} t$	$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$
$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \theta$



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## PROBLEMAS

1.- a) ¿Qué ángulo en radianes corresponde a un arco de 90 cm. de longitud situado sobre una circunferencia cuyo radio es 60 cm? b) ¿Qué ángulo en radianes corresponde a un arco de longitud 78.54 cm, situado sobre una circunferencia de diámetro 100 cm?. ¿Cuál es el valor de este ángulo en grado? c) El ángulo comprendido entre dos radios de una circunferencia es 0.60 rad. ¿Cuál es la longitud del arco correspondiente en una circunferencia de radio 200 cm?.

R:

- a) 1.5 rad  
b) 1.57 rad; 90°  
c) 120 cm.

2.- Un cilindro de 15 cm de diámetro gira en un torno a 750 rpm. a) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la superficie del cilindro? b) La velocidad tangencial adecuada para trabajar el hierro fundido es 60 cm/seg, aproximadamente. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe girar en un torno, una pieza de 5 cm. de diámetro?

R:

- a) 5.89 m/seg;  
b) 230 rpm.

3.- Una rueda de 90 cm de diámetro parte del reposo y va aumentando uniformemente su velocidad hasta alcanzar una velocidad angular de 100 rad/seg. en 20 seg. Calcular: a) la aceleración angular; b) el ángulo girado en ese tiempo.

R:

- a) 5 rad/seg<sup>2</sup>;  
b) 1000 rad.

4.- La velocidad angular del motor de un automóvil se aumenta de 1200 a 3000 rpm en 12 seg. a) ¿Cuál es su aceleración angular, suponiéndola uniforme? b) ¿Cuántas revoluciones efectúa el motor durante este tiempo?

R:

- a) 15.7 rad/seg<sup>2</sup>;  
b) 420 rev.

5.- Un plano giratorio de fonógrafo que se está moviendo a razón de 78 rev/min reduce su velocidad y se detiene a los 30 seg después de desconectar el motor. a) Encontrar su aceleración angular (uniforme). b) ¿Cuántas revoluciones hizo en ese tiempo?.

R:

- a) -0.272 rad/seg<sup>2</sup>;  
b) 20 rev.

6.- Una rueda tiene una aceleración angular constante de 3 rad/seg<sup>2</sup>. En un intervalo de 4 seg describe un ángulo de 120 radianes. Suponiendo que la rueda comenzó a partir del reposo, ¿Cuánto tiempo había estado en movimiento al comenzar ese intervalo de 4 seg?.

R:

- a) 8 seg.

7.- Un volante pesado que gira alrededor de su eje va disminuyendo su velocidad debido al rozamiento sobre sus chumascas. Al terminar el primer minuto, su velocidad angular es 0.90 de la velocidad angular  $w_0$  que tenía al principio. Suponiendo que las fuerzas de rozamiento son constantes, encontrar su velocidad angular al terminar el segundo minuto.

R:

- a) 0.80  $w_0$

8.- El ángulo que gira el volante de un generador durante un intervalo de tiempo  $t$  está dado por la ecuación  $\theta = at + bt^3 - ct^4$ ,

R:

$$a) 6bt - 12ct^3.$$

9.- La órbita de la tierra en torno del sol, aunque elíptica, es casi un círculo. a) Calcular la velocidad angular de la tierra (considerada como partícula) en torno del sol y su velocidad lineal media en su órbita. b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la tierra con respecto al sol?

R:

$$a) 2 \times 10^{-7} \text{ rad/seg};$$

$$3 \times 10^4 \text{ m/seg};$$

$$b) 6 \text{ m/seg}^2.$$

10.- ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un punto de la periferia de un disco de 30 cm que gira a  $33 \frac{1}{3}$  rev/min.?

R:

$$a) 1.84 \text{ m/s}^2.$$

11.- ¿DE qué magnitud deberá ser una fuerza para mantener un automóvil de 1,450 kg en un arco de 6 mt de radio cuando el automóvil de la vuelta en una esquina a 50 KM/HR? ¿Se dispondrá de una fuerza de esta magnitud en la mayor parte de casos?

R:

$$a) 4750 \text{ kg}; \text{ no}$$

12.- ¿Qué aceleración angular promedio se requiere para obtener una velocidad de 1 rev cada 20 seg para que una rueda de la fortuna o noria arranque del reposo y alcance esta velocidad en  $\frac{1}{2}$  min? ¿Cuál tendría que ser el radio de la rueda para que la fuerza centrípeta que actúa sobre una persona en la rueda sea un décimo del peso de la persona cuando la rueda haya alcanzado la velocidad indicada?

R:

$$a) 1.65 \times 10^{-3} \text{ rev/seg}^2;$$

$$10 \text{ mt.}$$

13.- Un automóvil que va a 96.6 km/hr tiene ruedas de 0.762 mt de diámetro. a) ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas alrededor del eje? b) Si las ruedas se detienen uniformemente en 30 vueltas, ¿Cuál es la aceleración angular? c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este período de frenado?

R:

$$a) 70 \text{ rad/seg};$$

$$b) -13 \text{ rad/seg}$$

$$c) 73.2 \text{ mt.}$$

14.- a) Si la hélice de un avión de radio 1.52 mt gira a 2000 rpm y el avión vuela a 161 km/hr con respecto al suelo, ¿Cuál es la velocidad de un punto de la punta de la hélice? b) ¿Qué clase de trayectoria describe ese punto?

R:

$$a) 319.4 \text{ m/seg}; \text{ espiral.}$$

15.- ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que en una carretera da una vuelta de 110 mt de radio con una velocidad de 48.3 km/hr?

R:

$$a) 0.12 \text{ rad/seg.}$$

CAPITULO II  
DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION

1.- Introducción. Momento de rotación obrando sobre una partícula.

En este capítulo se estudiarán las causas que provocan la rotación de partículas y cuerpos rígidos, aplicando las leyes de la mecánica para este movimiento.

De igual forma, que en el capítulo anterior no se tomaron en cuenta situaciones fundamentalmente nuevas, ya que los parámetros de rotación  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  se relacionaban con los parámetros de translación  $x$ ,  $v$  y  $a$  para las partículas en rotación; en este capítulo también se omitirá todo fundamento nuevo. Sin embargo; es muy útil refundir los conceptos del movimiento de translación en una nueva forma, escogida especialmente por ser conveniente para describir sistemas en rotación.

Para estudiar la dinámica del movimiento de rotación se partirá desde el punto de vista fundamental, de una sola partícula vista desde un marco de referencia inercial y posteriormente se analizarán sistemas de muchas partículas, incluyendo el caso especial de un cuerpo rígido que gira en torno de un eje fijo.

Momento de rotación obrando sobre una partícula.

Supóngase una partícula de masa  $m$  sobre la cual actúa una fuerza  $F$  como se indica en la figura 2-1. En virtud de que se trata de rotación, es conveniente utilizar coordenadas polares para situar la partícula.

Si se restringen el movimiento y las fuerzas a un plano, la posición de la partícula se puede describir en forma completa por el vector de radio  $r$  y el ángulo  $\phi$  como se muestra en la figura 2-2 resultando conveniente definir un vector unitario  $\hat{r}$  en la dirección de  $r$ , y un vector unitario  $\hat{\phi}$  perpendicular a  $\hat{r}$  y en la dirección de  $\phi$ .

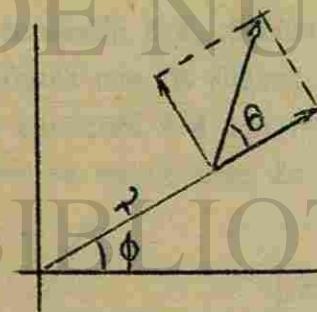


FIGURA 2-1

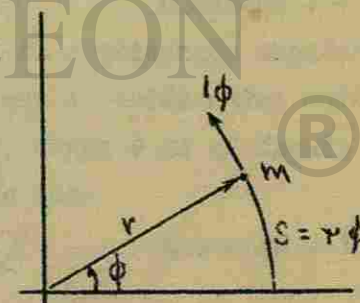


FIGURA 2-2

Las componentes de la velocidad de la partícula se pueden tomar como  $v_r/\hat{r}$  y  $v_\phi/\hat{\phi}$  de manera:

$$v = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}$$

sabiendo que  $V_r$  es la relación de tiempo de cambio de  $r$ , o  $\frac{dr}{dt}$ , y  $V_\phi$  la velocidad tangencial de la partícula que es igual a  $V_\phi = r\omega = r\dot{\phi}$ , por lo tanto la velocidad de la partícula se escribe:

$$V = \left(\frac{dr}{dt}\right) \hat{r} + r\omega \hat{\phi} \tag{Ecuación 2-1}$$

En este punto se restringirá esta descripción a el caso especial en que  $\dot{r} = 0$ , siendo  $r$  constante. Por lo tanto,

$$V = r\omega \hat{\phi} \tag{Ecuación 2-2}$$

Encontrando que la situación se reduce ahora al movimiento de una partícula en un círculo, movimiento que ya se estudió en el capítulo anterior.

Como ya antes se vió cuando una partícula se mueve sobre una trayectoria circular con velocidad constante experimenta una aceleración radial  $-a_r$ . El signo (-) representa que la aceleración radial es hacia adentro. Además la partícula puede aumentar su velocidad como resultado de una aceleración tangencial que es  $r\alpha$ . Para encontrar el vector aceleración de una partícula que se mueve en un círculo, basta sumar vectorialmente estas dos componentes de aceleración:

$$a = -a_r \hat{r} + r\alpha \hat{\phi} \tag{Ecuación 2-3}$$

Esta aceleración es resultado de una fuerza que actúa sobre la partícula, y según la ley de Newton se debe tener,

$$F = ma$$

descomponiendo la fuerza en sus componentes radial y angular como se muestra en la figura 2-1 y utilizando la ecuación 2-3 se obtiene:

$$F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} = m(-a_r \hat{r} + r\alpha \hat{\phi})$$

Con objeto de que esta ecuación sea cierta, las dos ecuaciones componentes deben ser válidas y por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_r &= -ma_r \\ F_\phi &= m r \alpha \end{aligned} \tag{Ecuación 2-4}$$

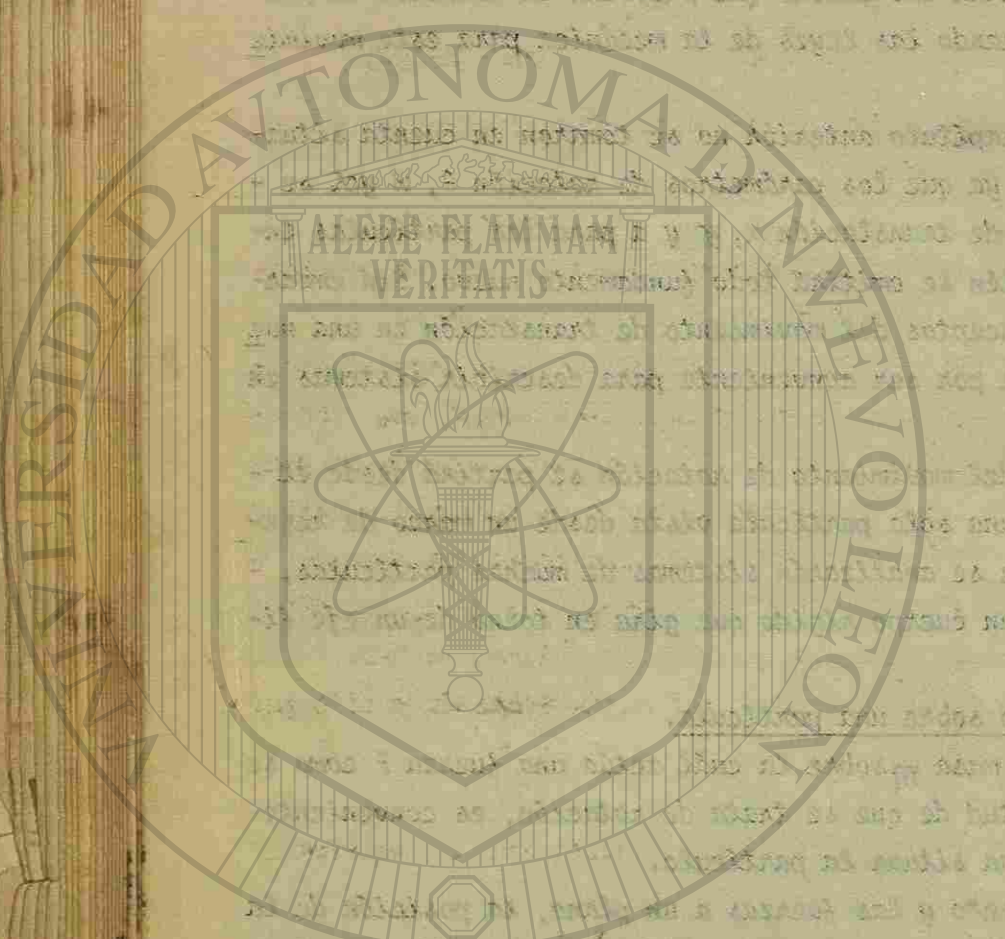
La ecuación 2-4, indica como esta relacionada la aceleración angular de una partícula con la fuerza aplicada, por razones que se acelerarán; multiplíquese la ecuación 2-4 por  $r$  y hágase  $F_\phi$  como  $F \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $F$  y  $r$  como se muestra en la figura 2-1, encontrando que:

$$r F \sin \theta = m r^2 \alpha \tag{Ecuación 2-5}$$

de donde,

$$\tau = m r^2 \alpha \tag{Ecuación 2-6}$$

Siendo  $\tau$  el momento de rotación que obra sobre la partícula con respecto a el origen  $O$ , donde las unidades del momento de rotación son:  $NT - MT$ , dina-cm o lb-ft.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Haciendo una comparación entre la ecuación 2-6 y  $F = ma$  se observa que son similares ya que la aceleración lineal  $a$  ha sido reemplazada por la aceleración angular  $\alpha$ . En el movimiento de rotación el momento de rotación sustituye a las fuerzas, en virtud de que  $F$  es reemplazada por  $\tau$ . Además, el efecto de inercia de la masa en la rotación no es solo  $m$ , sino  $mr^2$  significando esto, que entre mas alejada se encuentre la partícula de su eje de rotación será mas difícil -- darle una aceleración angular específica.

Conviene representar la ecuación 2-6 como una cantidad angular en forma -- vectorial, en virtud de que no se ha designado dirección al momento de torsión  $\tau$ . Las relaciones entre los vectores de la ecuación 2-6 y el eje de rotación -- se muestran en la figura 2-3a, donde la dirección de  $\alpha$  esta dada por la regla -- de la mano derecha. (La aceleración de rotación es provocada por  $F\phi$  y por lo -- tanto se debe tomar el eje con los dedos circundándolo en la dirección de  $F\phi$ ).

Para asignar un vector al momento de rotación, este debe ser de acuerdo -- con la definición previa que se obtuvo en la ecuación 2-5, es decir,  $\tau = Fsen\theta$ . Esto significa que se debe asignar una dirección a  $Fsen\theta$ . Mostrando estos vec-- tores en la figura 2-3b, así como la dirección de  $\tau$ .

La dirección de  $\tau$  es un vector perpendicular al plano que forma el produc-- to de los vectores  $r$  y  $F$  con el seno del ángulo entre ellos, comprobándose esto con el producto vectorial de la figura 2-3c y a que este dice que si giramos el vector  $A$  un ángulo pequeño que señale la dirección de  $B$ ; el vector resultante --  $C$  señalará en la dirección dada por la regla de la mano derecha. La magnitud de  $A \times B$  es  $ABsen\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $A$  y  $B$ .

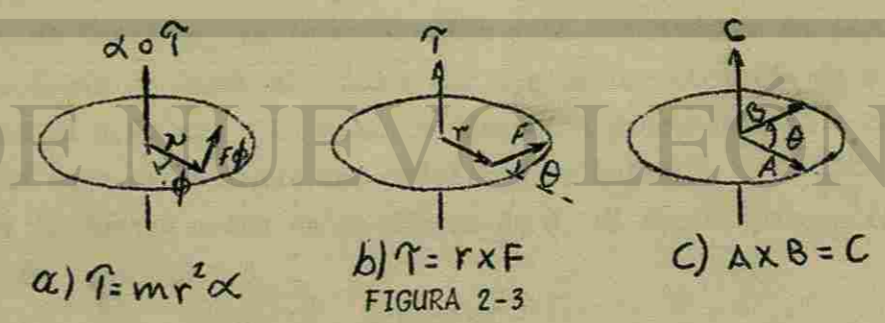


FIGURA 2-3

En la figura 2-4 se muestra el plano que forma  $r$  y  $F$ . Así como la direc-- ción que deberá tener  $\tau$ , al invertir la dirección de  $F$ ,  $r$  o ambas. Las direc-- ciones de  $\tau$  se representan mediante  $\odot$  ( si es perpendicular al plano de la fi-- gura y saliendo de ella) y mediante  $\otimes$  ( si es perpendicular al plano de la figu-- ra y entrando a ella).

Resumiendo los resultados obtenidos, se puede expresar el momento de rota--



DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

ción debido a una fuerza  $F$  que actúa sobre una partícula que se encuentra a una distancia radial  $r$  del eje, por medio de:

$$\tau = r \times F \quad \text{Ecuación 2-7}$$

donde la magnitud esta dada por:

$$\tau = r F \sin \theta$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre  $r$  y  $F$  e indicando la dirección de  $\tau$  como perpendicular al plano de  $r$  y  $F$ .

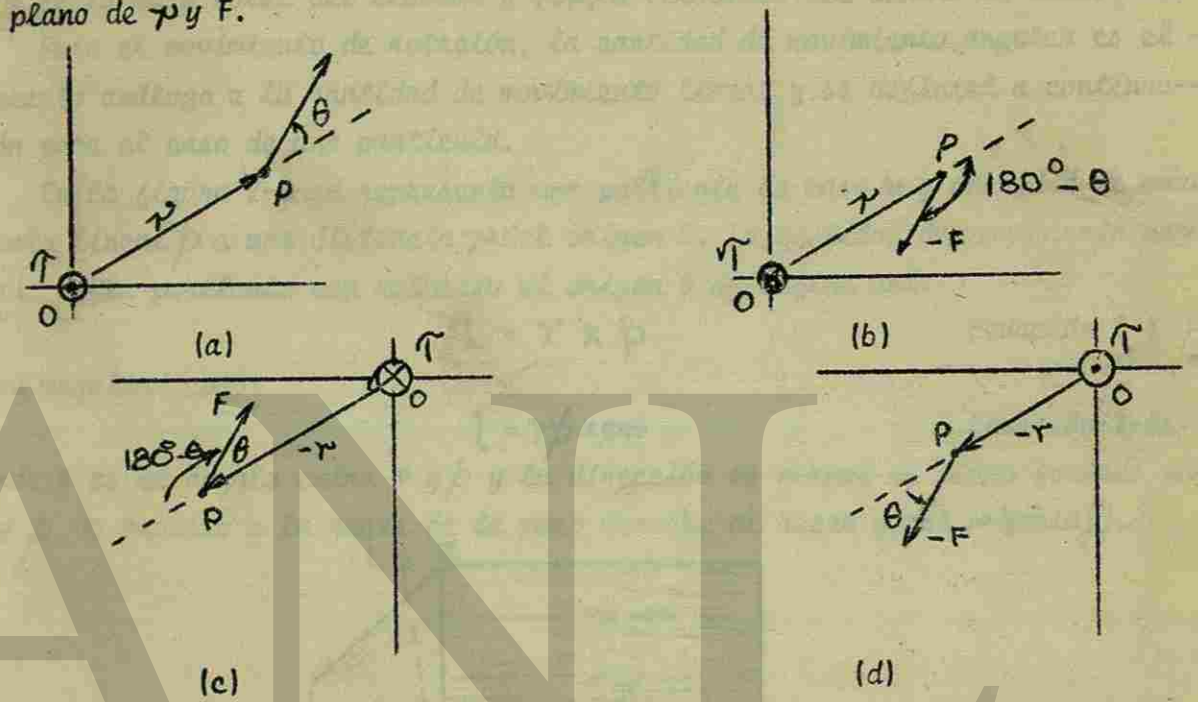


FIGURA 2-4

Ejemplo 2-1.

Una partícula de masa 40grs. está unida a un eje por una barra muy ligera de 70 cm. de longitud, en forma similar a la mostrada en la figura 2-1. La partícula es libre de girar alrededor del eje en la dirección de  $\phi$ . Si se aplica una fuerza de 0.20 nt. a la masa en dirección perpendicular a la barra. ¿Cuánto tardará la masa en alcanzar una velocidad de rotación de  $4 \frac{\text{rev.}}{\text{seg.}}$ ?

Como la fuerza actúa en la dirección  $\phi$ , es decir, perpendicular a la barra se usará la ecuación 2-4.

$$F_{\phi} = m r \alpha$$

$$0.20 \text{ nt} = (0.040 \text{ kg}) (0.70 \text{ mt}) \alpha$$

$$\alpha = 7.14 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$$

Para encontrar el tiempo que se requiere en alcanzar una velocidad de ----  $4 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ , se utiliza la ecuación de movimiento.

$$w = w_0 + \alpha t$$

$m = 40 \text{ gr}$   
 $r = 70 \text{ cm}$   
 $F = 20 \text{ mt}$



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$t = \frac{8\pi - 0}{7.14} = 3.52 \text{ seg.}$$

2.- Cantidades de movimiento angular de una partícula.

Como se recordará la cantidad de movimiento se presenta cuando una partícula de masa  $m$  se mueve con una velocidad  $v$ . Para una sola partícula, la cantidad de movimiento lineal es  $p = mv$ , y para un sistema de partículas es  $P = MV$  donde  $M$  es la masa total del sistema y  $V$  es la velocidad del centro de masa.

Para el movimiento de rotación, la cantidad de movimiento angular es el concepto análogo a la cantidad de movimiento lineal y se definirá a continuación para el caso de una partícula.

En la figura 2-5 se representa una partícula de masa  $m$  y cantidad de movimiento lineal  $p$  a una distancia  $r$  del origen  $O$ . La cantidad de movimiento angular  $L$  de la partícula con respecto al origen  $O$  se define así:

$$L = r \times p \quad \text{Ecuación 2-8}$$

y su magnitud como:

$$l = rp \sin \theta \quad \text{Ecuación 2-8a}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $r$  y  $p$  y la dirección es normal al plano formado por  $r$  y  $p$  de acuerdo a la regla de la mano derecha al hacer girar  $r$  hacia  $p$ .

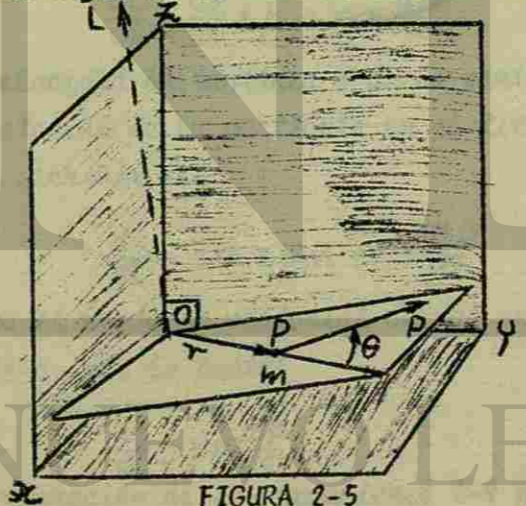
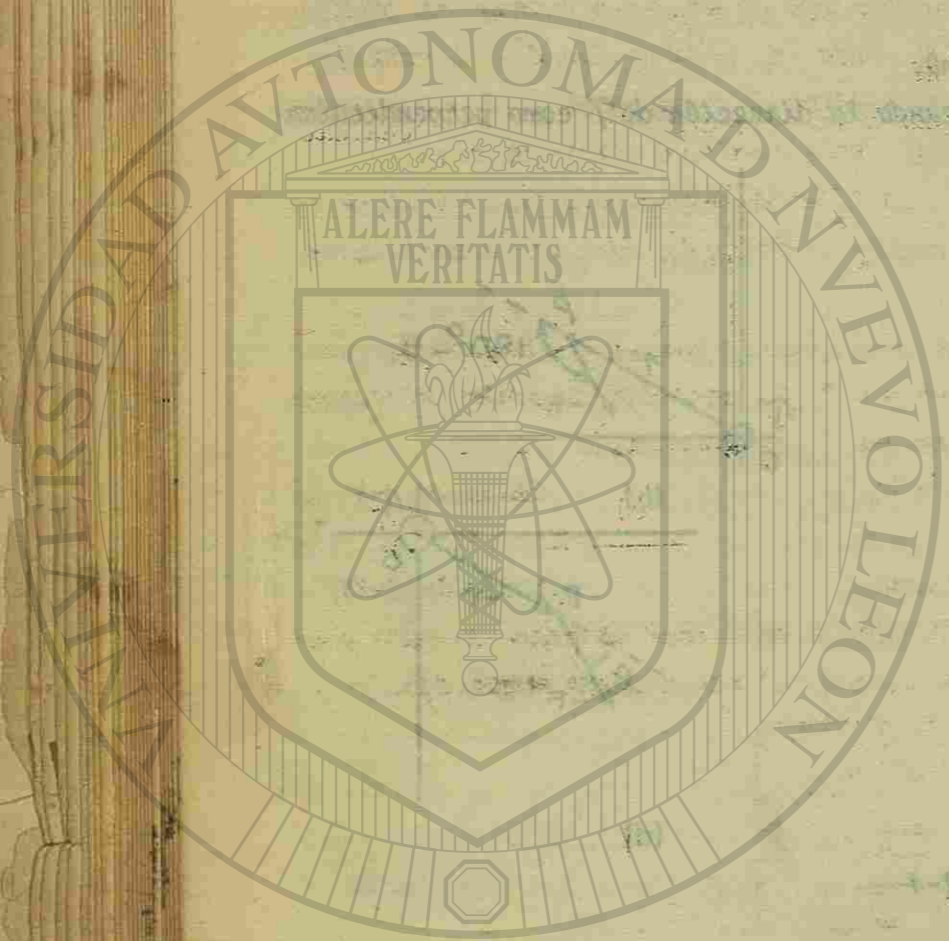


FIGURA 2-5

A continuación se encontrará una relación importante entre la cantidad de movimiento angular y el movimiento de rotación. Newton en su segunda ley del movimiento hizo intervenir la cantidad de movimiento quedando definida como; "La rapidez con la cual cambia la cantidad de movimiento de un cuerpo, es proporcional a la fuerza resultante que obra sobre el cuerpo y se encuentra en la dirección y sentido de esa fuerza". En forma simbólica se expresa así:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

como este sistema es una partícula de masa  $m$  esta expresión de la segunda ley equivale a la forma  $F = ma$  de donde:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE...

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m a.$$

encontrando que las relaciones  $F = ma$  y  $F = \frac{dp}{dt}$  para partículas solas son equivalentes en mecánica.

Si se toma el producto vectorial de  $r$  para ambos miembros de la expresión  $F = \frac{dp}{dt}$  se obtiene:

$$r \times F = r \times \frac{dp}{dt}$$

como  $r \times F$  es el momento de rotación se puede escribir,

$$\tau = r \times \frac{dp}{dt}$$

Ecuación 2-9

Si ahora se deriva la ecuación 2-8 con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (r \times p)$$

como la derivada de un producto vectorial se toma de la misma forma que la derivada de un producto ordinario con la excepción de que no se debe cambiar el orden de los términos la expresión quedará:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}$$

Como  $\frac{dr}{dt}$  es la velocidad instantánea  $v$  de la partícula, debido a que  $dr$  es el desplazamiento vectorial de la partícula en el tiempo  $dt$  y  $p$  es igual a  $mv$ . La ecuación se puede escribir así:

$$\frac{dL}{dt} = (v \times mv) + r \times \frac{dp}{dt}$$

Ahora bien, como el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero, la expresión  $v \times mv = 0$ , por lo tanto:

$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt}$$

Ecuación 2-10

Haciendo una comparación de las ecuaciones 2-9 y 2-10 se encuentra que:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

Ecuación 2-11

A partir de lo cuál se puede establecer que "la rapidez con que cambia la cantidad de movimiento angular de una partícula con respecto al tiempo es igual al momento de rotación que obra sobre ella."

Como la ecuación 2-11 es una ecuación vectorial, entonces será equivalente a tres ecuaciones escalares que son:

$$\tau_x = \left(\frac{dL}{dt}\right)_x, \quad \tau_y = \left(\frac{dL}{dt}\right)_y, \quad \tau_z = \left(\frac{dL}{dt}\right)_z.$$

Ecuación 2-12

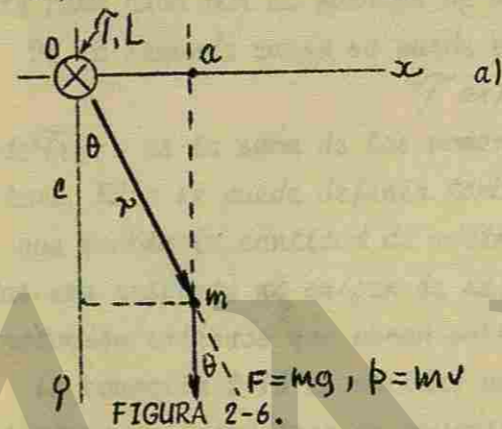
Por lo tanto, la componente  $x$  del momento de rotación aplicado, esta dado-



por la componente x del cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular. Para las direcciones y y z se obtienen resultados similares.

Ejemplo 2-2.

Una partícula de masa 80 grs. se suelta a partir del reposo desde el punto a, como se muestra en la figura 2-6, cayendo paralelamente al eje de las y. Si  $b = 35$  cm y  $\theta = 30^\circ$ , encontrar: a) El momento de rotación que obra sobre la masa, con respecto al origen O y b) La cantidad de movimiento angular de la masa con respecto a ese mismo origen.



Sabiendo que:

$$T = r F \sin \theta$$

y que para este ejemplo,  $r \sin \theta = b$  y

$$F = mg.$$

entonces:

$$r = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{35}{\sin 30^\circ} = 70 \text{ cm.}$$

$$F = mg = 0.08 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 0.784$$

$$T = 0.70 \text{ m} \times 0.784 \text{ N} \times 0.5 = 0.275 \text{ N-m}$$

$F = mg, \beta = mV$

FIGURA 2-6.

La regla de la mano derecha pone de manifiesto que  $T$  es perpendicular al plano de la figura y penetra en ella.

b) Si  $\beta = r \beta \sin \theta$ , y sabiendo que para este ejemplo,  $r \sin \theta = b$  y  $\beta = mV$  se obtiene:  $c = r \cos \theta = 70 \times 0.866 = 60.7$  cm.

Haciendo uso de la ecuación de caída libre, se tiene:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy = 0 + 2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \times 0.607 \text{ m.}$$

$$v = 3.45 \frac{\text{m}}{\text{seg.}}$$

$$\beta = mV = 0.08 \text{ kg} \times 3.45 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 0.276 \text{ N-t} - \text{seg.}$$

$$L = 0.35 \text{ m} \times 0.276 \text{ N-t} - \text{seg} = 0.969 \text{ N-t-m} - \text{seg.}$$

### 3.- Sistemas de partículas.

Para calcular la cantidad de movimiento angular total  $L$  de un sistema con  $n$  número de partículas con respecto a un punto dado, basta sumar vectorialmente la cantidad de movimiento angular de cada partícula con respecto a ese mismo punto. Encontrando que para el sistema con  $n$  partículas se tiene:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i$$

Al transcurrir el tiempo puede presentarse un cambio en la cantidad de movimiento angular total  $L$  del sistema con respecto a el punto de referencia fijo. El cambio  $dL/dt$  puede ser debido a dos causas: a) Por momentos de rotación ---

ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas internas entre las partículas y b) Por momentos de rotación ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas externas.

La primera causa se puede despreciar basandose en la tercera ley de Newton ya que las fuerzas entre dos partículas no solo son iguales y opuestas sino que también están sobre la línea que une las dos partículas y por lo tanto el momento de rotación interno total es cero debido a que el momento de rotación resultante para cada par de fuerzas de acción y reacción es cero.

De la segunda causa se puede escribir:

$$\sum \tau_{EXT.} = dL/dt$$

Ecuación 2-13

donde  $\sum \tau_{EXT.}$  es la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el sistema. Esto se puede definir también como: "la rapidez con respecto al tiempo con que cambia la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas con respecto al origen de referencia, es igual a la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el sistema".

La ecuación 2-13 es válida, ya sea cuando las partículas que constituyen un sistema se encuentren en movimiento unas con respecto a otras, o bien que -- tengan relaciones especiales fijas, como el caso de un cuerpo rígido.

La ecuación 2-13 es aplicable solamente cuando  $\tau$  y  $L$  se miden con respecto a un origen con un marco de referencia inercial. Así como también si se escoge como centro de referencia el centro de masa del sistema, aún cuando este punto no este fijo en este marco de referencia.

No siendo válida si se trata de medir los vectores  $\tau$  y  $L$  con respecto a un punto arbitrario del sistema en movimiento, por ejemplo con respecto a una cierta partícula del sistema ya que tal punto se moverá de una manera complicada -- cuando el sistema de partículas se traslade, de vueltas o cambie su configuración.

#### 4.- Energía cinética de rotación y momento de inercia.

Se ha demostrado que el valor de la velocidad de una partícula de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo, es:  $v = r\omega$ , siendo  $r$  la distancia de la partícula al eje, y  $\omega$  la velocidad angular del cuerpo.

La energía cinética de la partícula de masa  $m$  será,  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$ . La energía cinética total del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del mismo:

$$K = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2.$$

Sabiendo que  $\omega$  en un cuerpo rígido es la misma para todas las partículas.-

El término  $\sum m_i r_i^2$  es la suma de los productos de las masas de las partículas - por los cuadrados de sus distancias respectivas al eje de rotación. El resultado se denomina momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación, y se representa por **I** :

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{Ecuación 2-14}$$

Notándose que el momento de inercia de un cuerpo depende del eje con respecto al cuál este girando, así como de la forma del cuerpo y de la manera como - esta distribuida su masa.

Las unidades del momento de inercia pueden ser:  $\text{kg} - \text{M}^2$ ,  $\text{gr} - \text{cm}^2$  o  $\text{slug} - \text{ft}^2$ .

La energía cinética del cuerpo en rotación puede escribirse en función del momento de inercia, esto es:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{Ecuación 2-15}$$

cuya forma es análoga a la energía cinética de translación de un cuerpo, que - es,  $K = \frac{1}{2} M V^2$ . Esto es, para la rotación alrededor de un eje fijo, el momento de inercia **I** es análogo a la masa, o sea, a la inercia de translación **M**, y la - velocidad angular  $\omega$  es análoga a la velocidad lineal  $v$ .

Ejemplo 2-3.

En el sistema de la figura 2-7, se muestran tres pequeños cuerpos, que pueden considerarse como masas puntuales, están unidos por barras ligeras rígidas. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema: a) respecto a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por A; b) respecto a un eje que coincide con la barra B C? c) Si el cuerpo gira con una velocidad angular  $\omega = 6 \frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}$ , alrededor de un eje que pasa por A y es perpendicular al plano de la figura, ¿Cuál es la energía cinética de rotación?

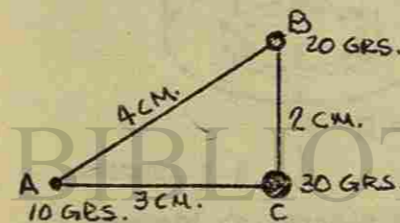


FIGURA 2-7

a) La partícula que se encuentra en A está sobre el eje. Su distancia al mismo es nula y no contribuye a formar el momento de inercia. Por tanto,

$$I = \sum m_i r_i^2 = 20 \text{grs} (4 \text{cm})^2 + 30 \text{grs} (3 \text{cm})^2$$

$$I = 590 \text{grs} - \text{cm}^2.$$

b) Ahora las partículas B y C se encuentran ambas sobre el eje, y el momento de inercia es:

$$I = \sum m_i r_i^2 = 10 \text{grs} (3 \text{cm})^2 = 90 \text{grs} - \text{cm}^2.$$

c)

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times 590 \text{grs} \cdot \text{cm}^2 \times \left( 6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)^2$$

$$K = 10,620 \text{ ergios.}$$

Si ahora se considera un cuerpo que no está constituido por masas puntuales aisladas, sino que es una distribución continua de materia, la suma expresada en la definición de momento de inercia,  $I = \sum m_i r_i^2$ , debe calcularse por los métodos del cálculo integral. Supongase que el cuerpo está dividido en elementos infinitesimales de masa  $dm$ , y sea  $r$  la distancia de cualquiera de uno de ellos al eje de rotación. El momento de inercia se obtiene multiplicando la masa  $dm$  de cada uno por el cuadrado de su distancia al eje, y hacer la suma de todos los productos  $r^2 dm$  correspondientes al cuerpo entero. Así,

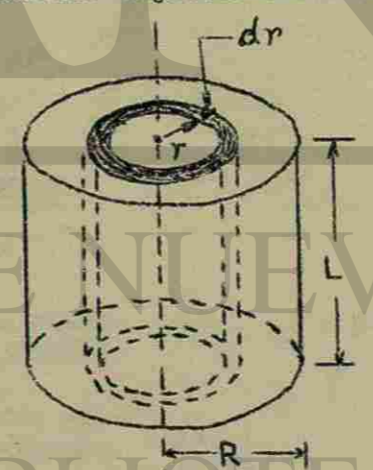
$$I = \int r^2 dm \quad \text{Ecuación 2-16}$$

Si el cuerpo tiene forma irregular el cálculo de este tipo de integrales puede presentar dificultades considerables; pero para cuerpos de forma sencilla la integración resulta sencilla.

Como ejemplo, calcular el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo respecto a su eje de simetría.

En la figura 2-8, se ha seleccionado como elemento de masa mas conveniente un tubo cilíndrico infinitamente delgado, de radio  $r$ , espesor  $dr$  y altura  $L$ .

Si se representa la densidad del material por la letra griega  $\rho$ , esto es, la masa por unidad de volumen, resulta:



$dm = \rho dV$   
siendo  $dV$  el volumen del tubo cilíndrico, esto es:

$$dV = (2\pi r dr) L$$

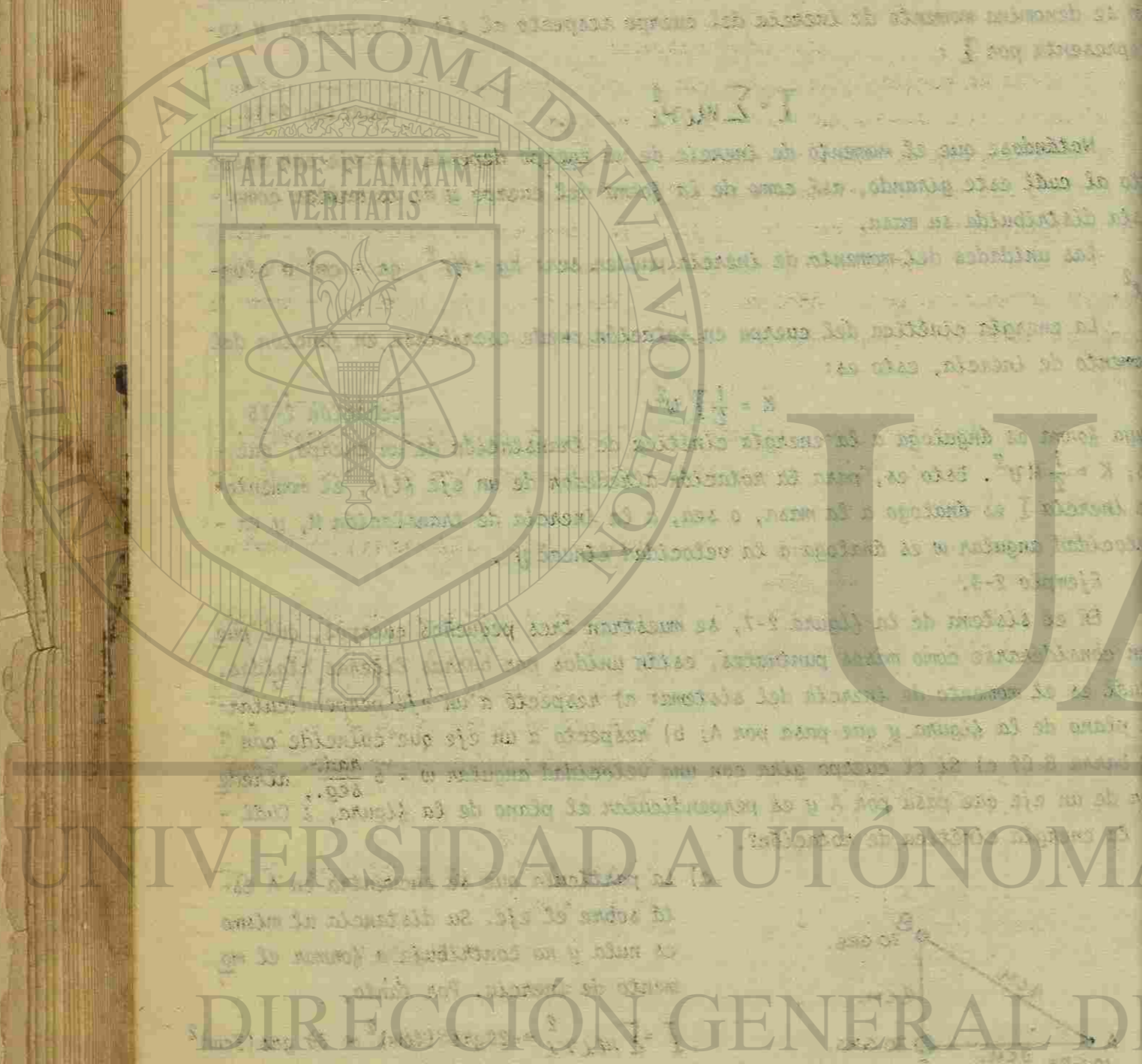
por lo tanto,

$$dm = 2\pi L \rho r dr$$

El momento de inercia con respecto al eje cilíndrico, sera:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_0^R \rho r^3 dr.$$

Si el cuerpo no tubiera una densidad constante, se debería conocer  $\rho$  en función de  $r$  para poder efectuar la integración. Pero para un sólido homogéneo,  $\rho$  es constante, e



$$I = 2\pi L \int_0^R \rho r^3 dr = 2\pi L \rho \frac{R^4}{4} = \pi R^2 L \frac{R^2}{2}$$

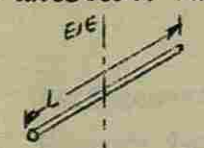
La masa M de todo el cilindro es el producto de su densidad  $\rho$  por su volumen en  $\pi R^2 L$ , o sea,

$$M = \pi R^2 L \rho$$

por lo tanto, el momento de inercia será:

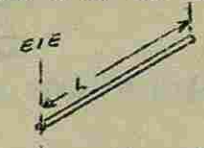
$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

En la figura 2-9, se da una lista de los momentos de inercia con respecto a diversos ejes, de algunos cuerpos sencillos, pero importantes. Cada uno de los resultados se obtiene por integración de una manera semejante a la del ejemplo anterior. Para todas las ecuaciones M es la masa total del cuerpo.



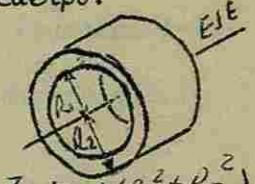
$$I = \frac{1}{12} M L^2$$

a) barra delgada; el eje pasa por el centro



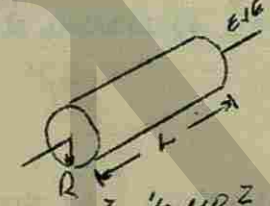
$$I = \frac{1}{3} M L^2$$

b) Barra delgada; el eje pasa por un extremo.



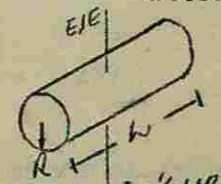
$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

c) Cilindro anular o anillo cilíndrico.



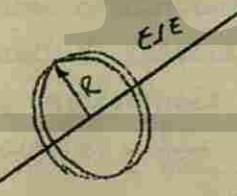
$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

d) Cilindro sólido



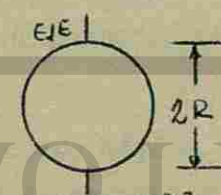
$$I = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{2} M L^2$$

e) Cilindro sólido o disco, con respecto a un diámetro central.



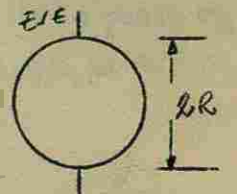
$$I = M R^2$$

f) Aro o tubo cilíndrico de paredes delgadas, con respecto al eje del cilindro.



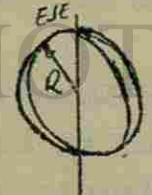
$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

g) Esfera sólida con respecto a un diámetro cualquiera.



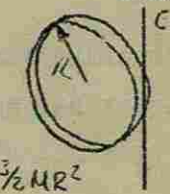
$$I = \frac{2}{3} M R^2$$

h) Cascarón esférico delgado con respecto a un diámetro cualquiera.



$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

i) Aro con respecto a un diámetro -- cualquiera.



$$I = \frac{3}{2} M R^2$$

j) Aro con respecto a una línea tangente cualquiera.

FIGURA 2-9

po en torno del eje. Las componentes del momento de rotación perpendiculares al eje, tienden a hacerlo girar. Ahora bien, se ha considerado que el eje conserva una dirección fija. Por ejemplo, el cuerpo puede estar fijo a un eje que esta sostenido en una posición fija, por medio de apoyos en cada extremo, al aplicar un momento de rotación que tenga una componente perpendicular al eje que pueda hacerlo girar, automáticamente los apoyos aplican al eje un contramomento de rotación igual y opuesto, anulando el efecto de esta componente.

En la figura 2-10, se ha considerado un cuerpo rígido que puede girar libremente en torno del eje Z. Una fuerza F, obra sobre una partícula que se encuentra en el punto P del cuerpo situado a una distancia r del eje, el momento de rotación que obra sobre la partícula, actúa sobre el cuerpo rígido como un todo y se representa por:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como r y F son paralelos al plano de la figura, aplicando la regla de la mano derecha el momento de rotación T, apuntará perpendicularmente al plano de la figura y saliendo de ella.

La magnitud de T esta dada por la ecuación:

$$T = r F \sin \theta$$

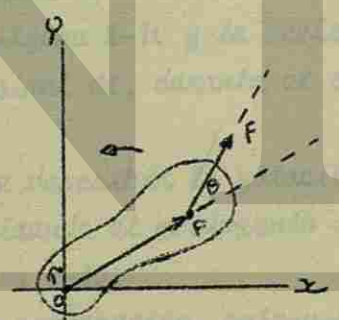
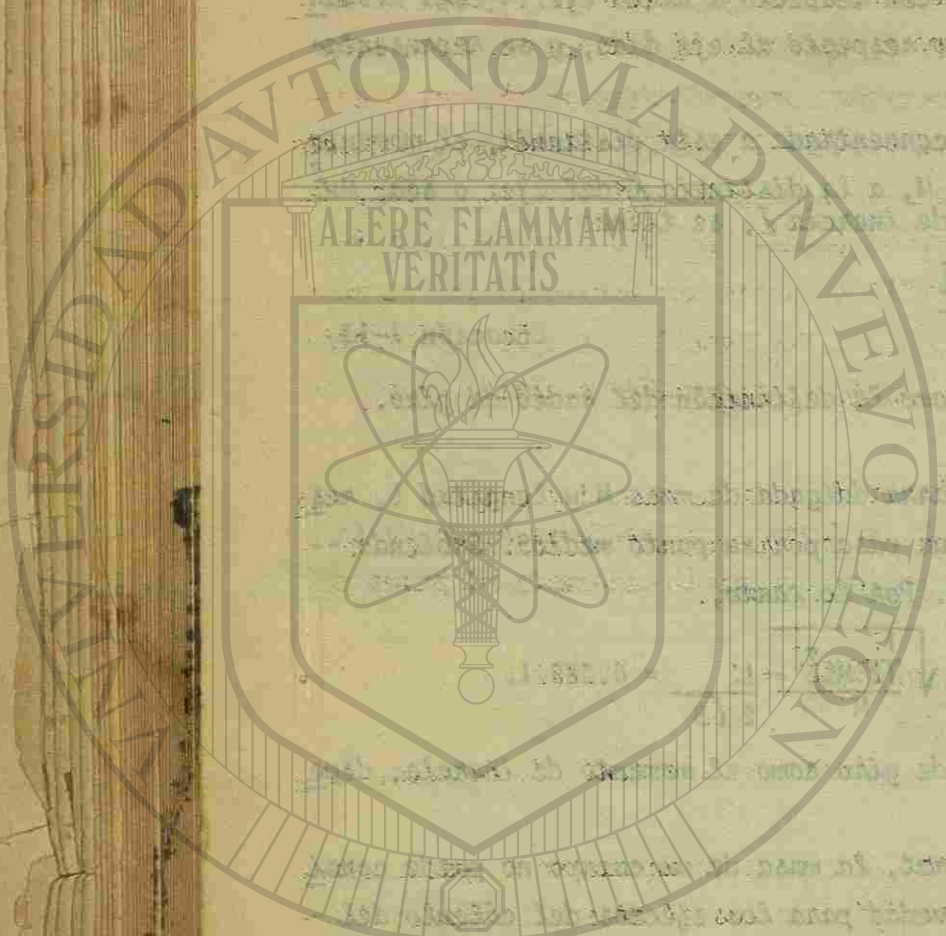


FIGURA 2-10

Ejemplo 2-5.

Una rueda de vagón puede girar libremente en torno de un eje horizontal -- que pasa por O. SE aplica una fuerza de 50 Nt a un rayo en el punto P que está a 0.305 m del centro. OP forma un ángulo de 30° con la horizontal (eje x) y la fuerza se encuentra en el plano de la rueda y forma un ángulo de 45° con la horizontal (eje x). ¿Cuál es el momento de rotación aplicado sobre la rueda?.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

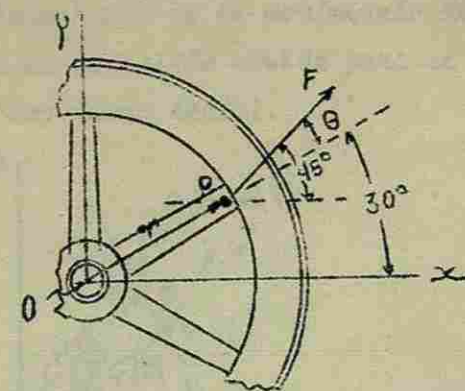


FIGURA 2-11

El ángulo que forma el vector de desplazamiento  $r$  y la fuerza aplicada  $F$  (figura 2-11 es  $\theta$ , donde

$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

Por consiguiente, la magnitud del momento de rotación es:

$$\begin{aligned} \tau &= rF \sin \theta \\ &= (0.305 \text{ m}) (50 \text{ N}) (\sin 15^\circ) = 3.96 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Analizando ahora la relación que existe entre el momento de rotación aplicado al cuerpo rígido de la figura 2-10 y la aceleración del mismo. Observese el cuerpo un tiempo infinitesimal  $dt$ , durante el cual gira un ángulo infinitesimal  $d\theta$ .

Se ha visto que se puede describir la rotación de un cuerpo rígido girando en torno a un eje fijo, analizando el movimiento de un punto cualquiera fijo en el cuerpo, como P en la figura 2-10.

Entonces para una mejor comprensión, enfoquese la atención a la figura 2-12, en el punto P del cuerpo que esta girando alrededor de un eje que pasa por O y es perpendicular al plano de la figura. Se ejerce sobre el cuerpo en el punto P, una fuerza F; cuando este cuerpo gira un pequeño ángulo  $d\theta$ , el punto P recorre una distancia  $dS$  sobre su trayectoria circular, siendo

$$dS = r d\theta$$

El trabajo  $dW$  realizado por la fuerza durante esa pequeña rotación es:

$$dW = F \cdot dS = F \cos \phi dS = (F \cos \phi) (r d\theta)$$

Donde  $F \cos \phi$  es la componente de F en la dirección de  $dS$ . Pero como  $(F \cos \phi) r$  es la magnitud del momento de rotación instantáneo ejercido por F sobre el cuerpo rígido con respecto al eje perpendicular al plano de la figura -- que pasa por O, de modo que

$$dW = \tau d\theta$$

Ecuación 2-18

Esta expresión es el trabajo hecho en el movimiento de rotación (en torno de un eje fijo) y es análoga a la expresión  $dW = Fdx$  para el trabajo efectuado en la translación (a lo largo de una línea recta).

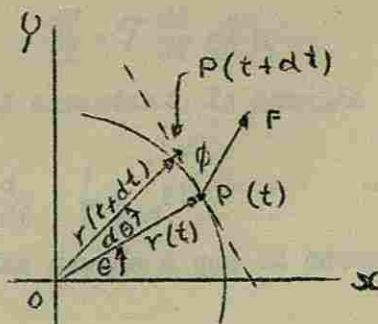


FIGURA 2-12

Para obtener la rapidez con que se hace trabajo en el movimiento de rotación (en torno de un eje fijo), divídase ambos miembros de la ecuación 2-18 entre el intervalo infinitesimal de tiempo  $dt$  durante el cual el cuerpo se desplaza  $d\theta$ , obteniendo

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Pero como  $\frac{dW}{dt}$  es la derivada respecto al tiempo del trabajo realizado, o sea, la potencia  $P$ , y  $\frac{d\theta}{dt}$  es la velocidad angular  $\omega$ , por lo tanto:

$$P = \tau \omega$$

siendo esta expresión análoga a  $P = FV$  para el movimiento de translación (a lo largo de una línea recta).

Si ahora se aplica un cierto número de fuerzas  $F_1, F_2$  etc; sobre el cuerpo en el plano normal a su eje de rotación, las fuerzas harán un trabajo sobre el cuerpo durante una pequeña rotación  $d\theta$  que será:

$$\begin{aligned} dW &= F_1 \cos \phi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \phi_2 r_2 d\theta + \dots, \\ &= (\tau_1 + \tau_2 + \dots) d\theta = \tau d\theta, \end{aligned}$$

siendo la  $r_1 d\theta$  igual a  $ds_1$ , el desplazamiento del punto en que está aplicada  $F_1$  y  $\phi_1$  el ángulo entre  $F_1$  y  $ds_1$ , etc. Por lo tanto  $\tau$  será la magnitud de la componente del momento de rotación resultante con respecto al eje que pasa por  $O$ . Al calcular esta suma, cada momento de rotación se considera positivo o negativo según sea el sentido en que él solo tendería a hacer girar el cuerpo en torno de su eje.

No existe movimiento interno de las partículas dentro de un cuerpo verdaderamente rígido, sólo se mueven con el cuerpo como un todo. Por lo tanto, no puede haber disipación de energía dentro de un cuerpo verdaderamente rígido. --



Por consiguiente, se puede igualar la rapidez con que se esté haciendo trabajo sobre el cuerpo con la rapidez con que está aumentando su energía cinética. La rapidez con que se está haciendo trabajo sobre el cuerpo rígido es:

$$\frac{dw}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau w \quad \text{Ecuación 2-19}$$

La rapidez con que está aumentando la energía cinética del cuerpo rígido es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I w^2 \right)$$

Pero como  $I$  es constante debido a que el cuerpo es rígido y el eje está fijo. Entonces, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I w^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} w^2 = I w \frac{dw}{dt} = I w \alpha \quad \text{Ecuación 2-20}$$

Igualando las ecuaciones 2-19 y 2-20, se obtiene:

$$\tau w = I \alpha w$$

o sea,

$$\tau = I \alpha \quad \text{Ecuación 2-21}$$

Esta ecuación se refiere al movimiento de rotación en torno a un eje fijo. El momento de rotación  $\tau$ , la velocidad angular  $w$  y la aceleración angular  $\alpha$ , actúan solo a lo largo del eje en un sentido o en el otro. El caso de translación equivalente es aquel en el cual la fuerza  $F$  que obra sobre un cuerpo, su velocidad  $v$ , y su aceleración  $a$  apuntan todas sobre una línea recta dada, en un sentido o en otro.

Las seis cantidades anteriores son vectores, pero cuando están actuando a lo largo de una línea fija, sólo pueden tener dos sentidos, positivo o negativo. Se pueden analizar estos vectores algebraicamente y ocuparse solamente de sus magnitudes. Así, al derivar la ecuación 2-21, se habrá transformado solamente la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ), escrita en forma escalar adecuado para describir el movimiento rectilíneo, a términos rotacionales. Es decir, así como se puede asociar una fuerza con la aceleración lineal de un cuerpo, de la misma manera se puede asociar un momento de rotación con la aceleración angular de un cuerpo en torno de un eje dado.

La inercia de rotación  $I$  es una medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de rotación como consecuencia de un momento de rotación dado, así como la inercia de translación, o masa,  $M$ , es la medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de translación bajo la acción de una fuerza dada.

En la tabla 2-1 se hace una comparación del movimiento de translación de

un cuerpo rígido en una trayectoria rectilínea, con el movimiento de rotación - de un cuerpo rígido en torno de un eje fijo.

TABLA 2-1

MOVIMIENTO RECTILÍNEO		ROTACION EN TORNO DE UN EJE FIJO	
Desplazamiento	$x$	Desplazamiento angular	$\theta$
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Masa	$M$	Inercia de rotación	$I$
Fuerza	$F = Ma$	Momento de rotación	$\tau = I\alpha$
Trabajo	$W = \int F dx$	Trabajo	$W = \int \tau d\theta$
Energía cinética	$\frac{1}{2} M v^2$	Energía cinética	$\frac{1}{2} I \omega^2$
Potencia	$P = Fv$	Potencia	$P = \tau \omega$
Cantidades de movimiento lineal	$M v$	Cantidad de movimiento angular	$I \omega$

La expresión  $\tau = I\alpha$  que es la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, no es la clase más general de movimiento rotatorio en donde el cuerpo puede ser o no rígido y el eje también puede o no estar fijo en un marco de referencia inercial. Para este caso general se aplica la ecuación 2-13, o sea, -- Text. =  $dL/dt$ . Según se había ya indicado, esta expresión equivale a la segunda ley de Newton del movimiento general de translación de un sistema de partículas o sea,  $F_{ext.} = dP/dt$ .

Ejemplo 2-6.

Un disco uniforme de radio  $R = 0.20$  m y masa  $M = 3$  kg está montado en un -- eje sostenido en unos apoyos fijos sin rozamiento, como se muestra en la figura 2-13. En el borde de la rueda se enrolla una cuerda ligera y se aplica una fuerza constante  $T = 4.5$  N hacia abajo sobre la cuerda. Encontrar la aceleración angular de la rueda y la aceleración tangencial de un punto del borde.

El momento de rotación en torno del eje central es  $\tau = TR$  y el momento de inercia del disco con respecto al eje central es  $I = \frac{1}{2} MR^2$ . De la ecuación

$$\tau = I\alpha$$

Tenemos:

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

de donde,



$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \times 4.5 \text{ N}}{3 \text{ kg} \times 0.20 \text{ m}} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$$

La aceleración tangencial de un punto del disco está dada por

$$a = R\alpha = 0.20 \text{ m} \times 15 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

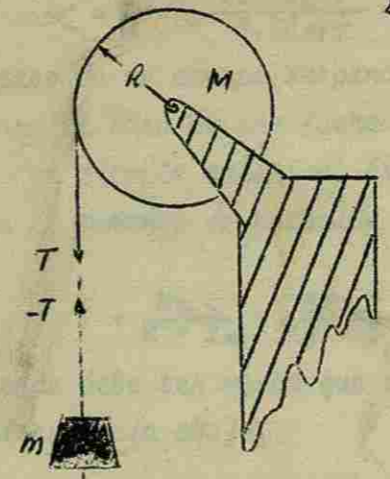


FIGURA 2-13

Ejemplo 2-7.

Supóngase que ahora se suspende un cuerpo de masa  $m$  de la cuerda del ejemplo anterior. Encontrar la aceleración angular del disco y la aceleración tangencial de un punto de la periferia.

Si  $T$  es la tensión de la cuerda. Puesto que el cuerpo suspendido acelerará hacia abajo, la magnitud de la fuerza de la gravedad,  $mg$ , que obra hacia abajo sobre ella deberá exceder a la magnitud de la tensión ascendente de la cuerda - sobre el cuerpo, que será  $T$ . La aceleración  $a$  del cuerpo suspendido es la misma que la aceleración tangencial de un punto en la periferia del disco. De la segunda ley de Newton se tiene,

$$mg - T = ma$$

El momento de rotación del disco es  $TR$  y su momento de inercia es  $\frac{1}{2}MR^2$ . A partir de la ecuación

$$\tau = I\alpha$$

se tiene:

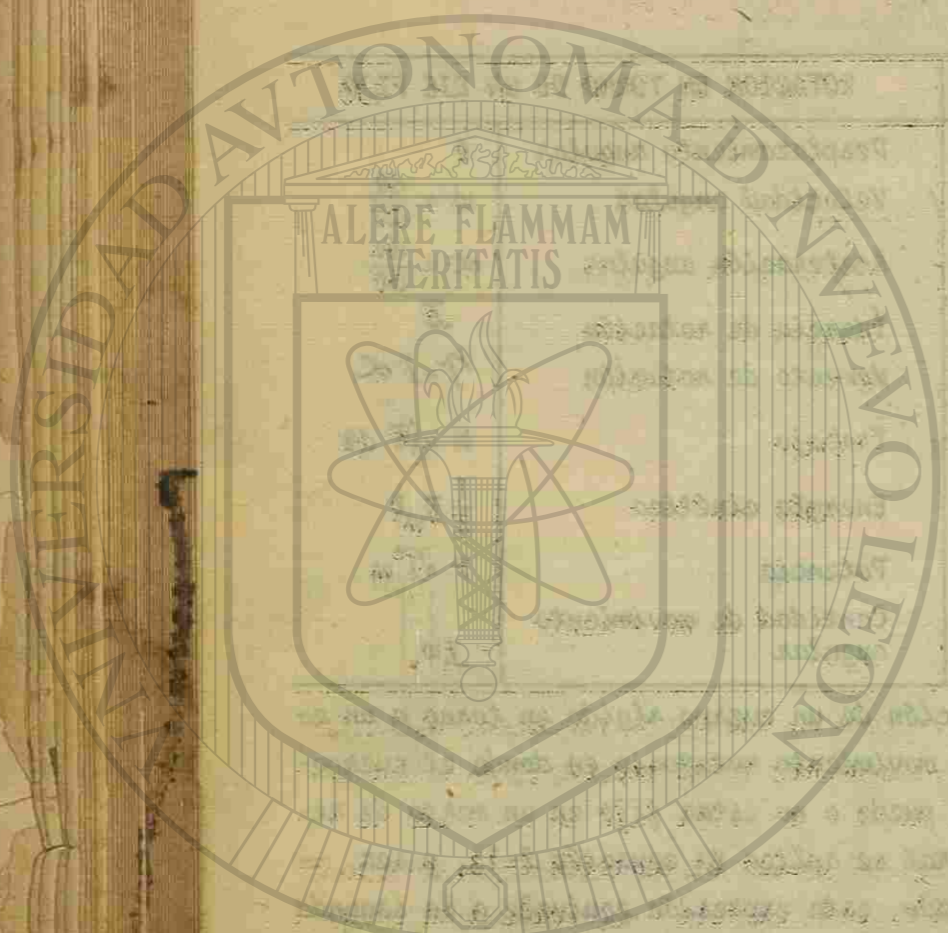
$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

de la relación  $a = R\alpha$ , se puede escribir esta última ecuación así:

$$2T = Ma$$

desarrollando por simultáneas la primera y última ecuación, se tiene:

$$a = \left( \frac{2m}{M+2m} \right) g \quad \text{y} \quad T = \left( \frac{Mm}{M+2m} \right) g$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si  $M = 3\text{kg}$  y  $R = 0.20\text{MT}$  y considerando que el cuerpo suspendido pesa  $4.5\text{N}$ , se obtiene:

$$a = \frac{2Mg}{M + 2m} = \frac{2 \times 4.5 \text{ NT}}{3\text{kg} + 2 \times 0.46\text{kg}} = 2.3 \frac{\text{NT}}{\text{seg}^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2.3 \frac{\text{NT}}{\text{seg}^2}}{0.20\text{MT}} = 11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$$

Nótese que para el caso de un cuerpo suspendido que pesa  $4.5\text{N}$  las aceleraciones son menores que para el caso de una fuerza de tensión constante de  $4.5\text{N}$  aplicada sobre la cuerda del ejemplo anterior. Esto se debe a que la tensión en la cuerda que proporciona el momento de rotación es ahora menor que  $4.5$ , siendo su valor

$$T = \frac{Mm g}{M + 2m} = \frac{3\text{kg} \times 4.5 \text{ NT}}{3\text{kg} + 2 \times 0.46 \text{ kg}} = 3.45 \text{ NT}$$

La tensión en la cuerda debe ser menor que el peso del cuerpo suspendido para que este cuerpo acelere hacia abajo.

Ejemplo 2-8.

Suponiendo que el disco del ejemplo 2-7 parta del reposo, calcular el trabajo hecho por el momento de rotación aplicado sobre el disco en 2 seg. Calcular también el incremento de energía cinética rotacional que experimenta el disco.

Como el momento de rotación aplicado es constante, la aceleración angular resultante es constante. El desplazamiento angular total, en el caso de aceleración angular constante, se obtiene a partir de,

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

en la cual,

$$\omega_0 = 0 \quad \alpha = 11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} \quad t = 2 \text{ seg.}$$

por lo tanto

$$\theta = 0 + \frac{1}{2} (11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}) (2 \text{ seg})^2 = 23 \text{ rad.}$$

Para un momento de rotación constante, el trabajo hecho en un desplazamiento angular finito es:

$$W = \int (\theta_2 - \theta_1)$$

donde

$$\tau = TR = (3.45\text{NT}) (0.20\text{M}) = 0.69\text{NT-M}$$

y

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta = 23 \text{ rad.}$$

Por consiguiente,

$$W = 0.69\text{NT-M} \times 23\text{rad.} = 15.9\text{NT-M}$$

El trabajo da lugar a un aumento de energía cinética de rotación del disco. A partir del reposo, el disco adquiere una velocidad angular  $w$ .

La energía de rotación es  $\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2$ .  
 $\omega$  se obtiene a partir de,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

de manera que,

$$\omega = 0 + 11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} (2 \text{ seg}) = 23 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

entonces,

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} (3 \text{ kg.}) (0.2 \text{ m})^2 (23 \frac{\text{rad}}{\text{seg}})^2 = 15.9 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El aumento de energía cinética del disco es igual al trabajo efectuado por la fuerza resultante que obra sobre el disco.

6.- El movimiento cambiando de traslación y de rotación de un cuerpo rígido.

Cuando un cuerpo está rodando, experimenta un movimiento de traslación y a la vez gira en torno de un eje. Es de esperarse que al analizar el movimiento de los cuerpos que ruedan debiera tratarse como una combinación de un movimiento de traslación y de uno de rotación. Sin embargo, sería posible considerar el problema de un cuerpo que rueda como si su movimiento fuera de rotación pura.

En la figura 2-14, se muestra un cilindro que rueda en una superficie horizontal. En un instante dado, la parte del cilindro que está en contacto con la superficie se encuentra en reposo debido a que no se desliza. El eje normal al plano de la figura que pasa por el punto de contacto P se le llama eje instantáneo de rotación. La velocidad lineal de toda partícula del cilindro, en este instante tiene una dirección perpendicular a la línea que une la partícula con P y su magnitud es proporcional a esa distancia. Esto equivale a decir que el cilindro gira en torno de un eje fijo que pasa por P con una velocidad angular  $\omega$ , en ese instante. Por lo tanto, en un instante dado, el movimiento del cuerpo es equivalente a una rotación pura. Así, la energía cinética total se escribe:

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2, \quad \text{Ecuación 2-22}$$

donde  $p$  es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por P.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos, que dice,

$$I_p = I_{cm} + MR^2,$$

donde  $I_{cm}$  es el momento de inercia del cilindro de masa  $M$  y de radio  $R$  con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa. De la ecuación 2-22 se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2, \quad \text{Ecuación 2-23}$$

$R\omega$  es la velocidad con que se mueve el centro de masa del cilindro con respecto

al punto fijo P. Si  $R\omega = v_{CM}$  la ecuación 2-23 queda:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2. \quad \text{Ecuación 2-24}$$

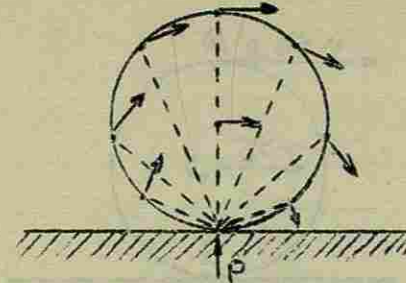


FIGURA 2-14

La velocidad del centro de masa con respecto a P es la misma que la velocidad de P con respecto al centro de masa.

Cualquier línea de referencia del cilindro gira el mismo ángulo en tiempo dado, ya sea que se observe desde un marco de referencia fijo con respecto a la superficie sobre la cuál está rodando el cilindro o desde un marco que tenga un movimiento de translación con respecto a ese marco fijo.

Esto es, la velocidad angular  $\omega$  del centro de masa con respecto a P tal como la vería alguien que estuviera en P es la misma que la velocidad angular de una partícula colocada en P con respecto a C, tal como la vería alguien que estuviera en C (moviéndose con el cilindro).

La ecuación 2-24, que fué obtenida a base de un movimiento de rotación pura se puede interpretar de otra manera; esto es, el primer término,  $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ , es la energía cinética que tendría el cilindro si solamente girara en torno de un eje que pasará por su centro de masa, sin movimiento de translación; y el segundo término,  $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ , es la energía cinética que tendría el cilindro si tuviera un movimiento de translación con la velocidad de su centro de masa, sin estar girando.

Como se puede observar la ecuación 2-24 se puede aplicar a cualquier cuerpo que se mueva y gire en torno de un eje perpendicular a su movimiento, ya sea que esté rodando o no sobre una superficie.

Combinados los efectos de la rotación en torno de un eje que pase por el centro de masa y de la translación del centro de masa son equivalentes a una rotación pura con la misma velocidad angular con respecto a un eje que pase por el punto de contacto de un cuerpo que va rodando.

Si la velocidad del centro de masa es  $v_{CM}$ , la velocidad angular instantánea con respecto a un eje que pasa por P es  $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$ . Por lo tanto, un punto Q,

situado en la parte superior del cilindro, tendrá el doble de la velocidad  $V_{CM}$  en ese instante o sea  $2WR = 2V_{CM}$ . El punto de contacto P se encuentra instantáneamente en reposo. Por lo tanto, desde el punto de vista de la rotación pura en torno de P, la situación es la que se muestra en la figura 2-15.

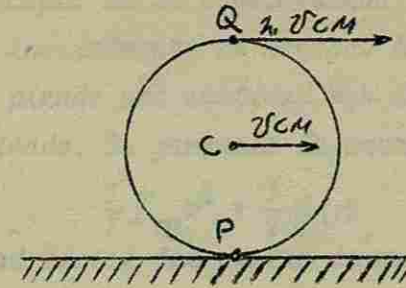


FIGURA 2-15

Considerando el rodamiento como una combinación de una translación del --- centro de masa y de una rotación alrededor del eje del cilindro que pasa por C. Si sólo se considera la translación, todos los puntos del cilindro tienen la -- misma velocidad  $V_{CM}$  que el centro de masa, como se muestra en la figura 2-16a. En la figura 2-16b, se considera solamente la rotación, el centro se encuentra en reposo, mientras que el punto Q en la parte superior tiene una velocidad --- + WR en la dirección de las x y el punto P en la parte inferior del cilindro -- tiene una velocidad - WR en la dirección de las -x.

Combinando estos dos resultados y recordando que  $W = \frac{V_{CM}}{R}$ , se obtiene:

Para el punto Q	$V = V_{CM} + WR = V_{CM} + \frac{V_{CM}}{R}R = 2V_{CM}$
Para el punto C	$V = V_{CM} + 0 = V_{CM}$
Para el punto P	$V = V_{CM} - WR = V_{CM} - \frac{V_{CM}}{R}R = 0.$

Este resultado, se muestra en la figura 2-16c, y es exactamente igual al -- que se obtuvo desde el punto de vista puramente rotacional en la figura 2-15.

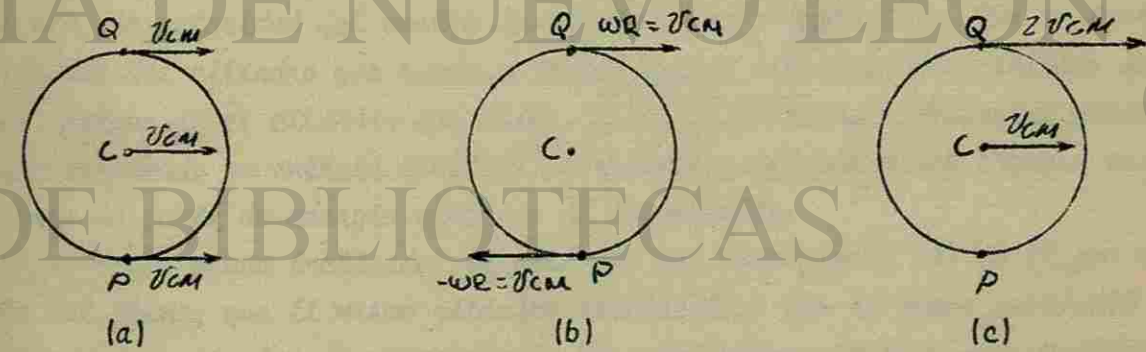
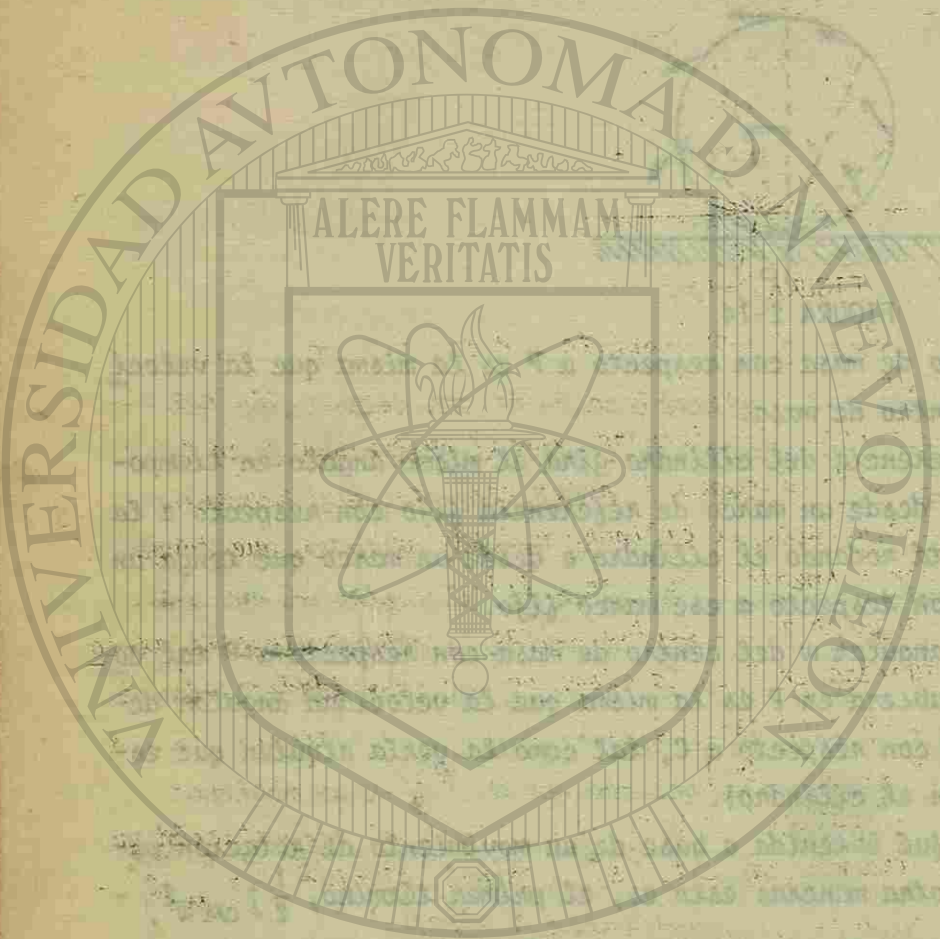


FIGURA 2-16



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 2-9.

En la figura 2-17 se representa un cilindro macizo de masa  $M=3\text{kg}$ . y de radio  $R=0.20\text{M}$  que baja rodando por un plano inclinado sin deslizar. Encontrar la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega a la base del plano.

Aplicando el principio de la conservación de la energía y sabiendo que el cilindro se encuentra inicialmente en reposo. Al bajar rodando por el plano inclinado, el cilindro pierde una cantidad  $Mgh$  de energía potencial, siendo  $h$  la altura del plano inclinado. Su ganancia de energía cinética es igual a

$$\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$

donde  $v$  es la velocidad lineal del centro de masa y  $\omega$  la velocidad angular con respecto al centro de masa en la base del plano.

A partir de la relación.

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$

en donde,

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{y} \quad \omega = \frac{v}{R}$$

se tiene,

$$Mgh = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \left( \frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) M v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

sustituyendo valores se obtiene,

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \times 9.8 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2} \times 1.5 \text{MT}}$$

$$v = 4.42 \frac{\text{MT}}{\text{seg.}}$$

Si el cilindro hubiera deslizado bajando por el mismo plano inclinado sin rozamiento, la velocidad del centro de masa hubiera sido  $v = \sqrt{2gh}$ . Por lo tanto, la velocidad del cilindro que rueda es menor que la velocidad del cilindro que desliza, porque en el cilindro que rueda, parte de la energía potencial perdida se ha transformado en energía cinética de rotación, dejando menos energía disponible para la parte de energía cinética de translación.

En el mismo plano inclinado, el cilindro que rueda tarda más en llegar a la base del plano, que el mismo cilindro deslizando por el plano inclinado -- sin rozamiento; pero los dos llegan a la base del plano con la misma cantidad de energía.

Ejemplo 2-10.

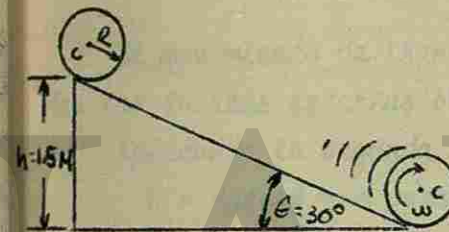
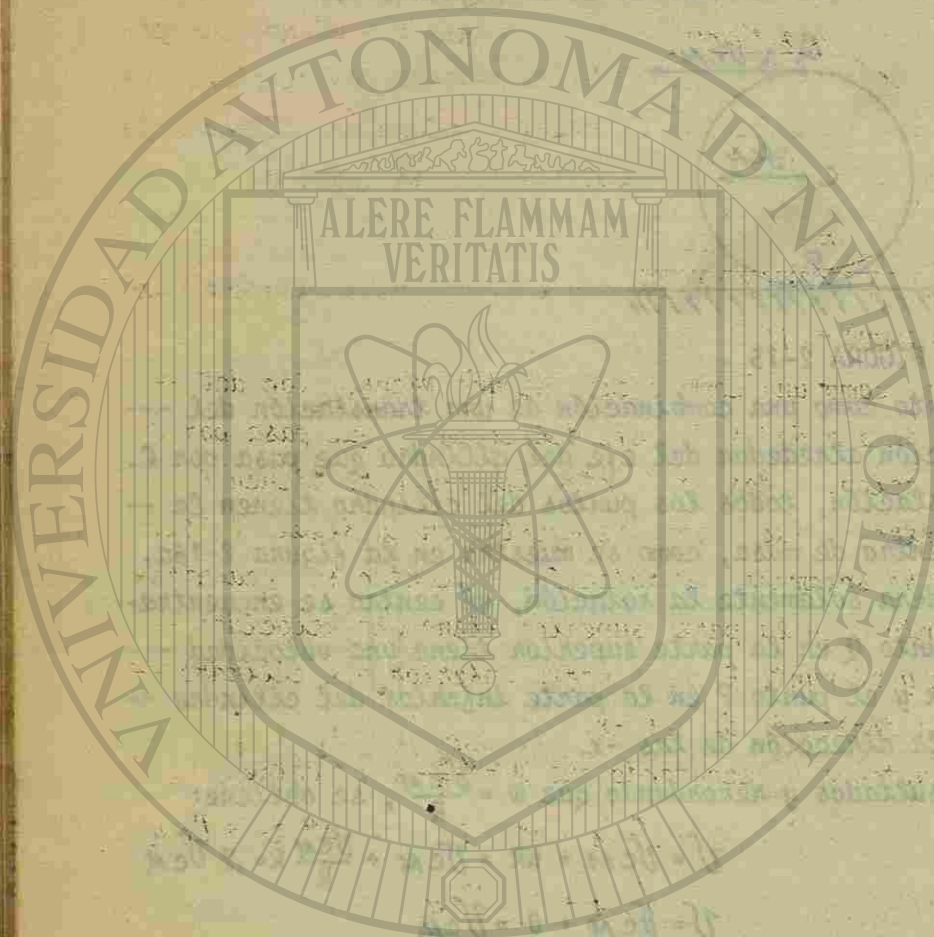


FIGURA 2-17

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Resolver el ejemplo 2-9 usando métodos dinámicos.

En la figura 2-18 se muestra el diagrama de fuerzas. Mg es el peso del cilindro que actúa verticalmente hacia abajo y que pasa por el centro de masa, N es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y f es la fuerza de rozamiento estático que obra a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

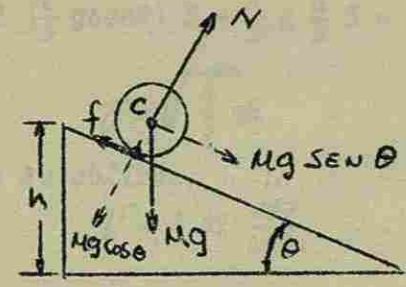


FIGURA 2-18

El movimiento de translación de un cuerpo se obtiene considerando que todas las fuerzas externas obran en su centro de masa.

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$N = Mg \cos \theta = 0 \text{ para el movimiento normal al plano inclinado, y}$$

$$Mg \sin \theta - f = Ma \text{ para el movimiento en el plano inclinado.}$$

Para el movimiento de rotación en torno del centro de masa se aplica la expresión

$$\tau = I_{CM} \alpha$$

Ni N ni Mg pueden producir rotación en torno de C porque sus líneas de acción pasan por C, y tienen brazos de palanca nulos.

La fuerza de rozamiento tiene un brazo de palanca R con respecto a C, de manera que

$$fR = I_{CM} \alpha,$$

pero,

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

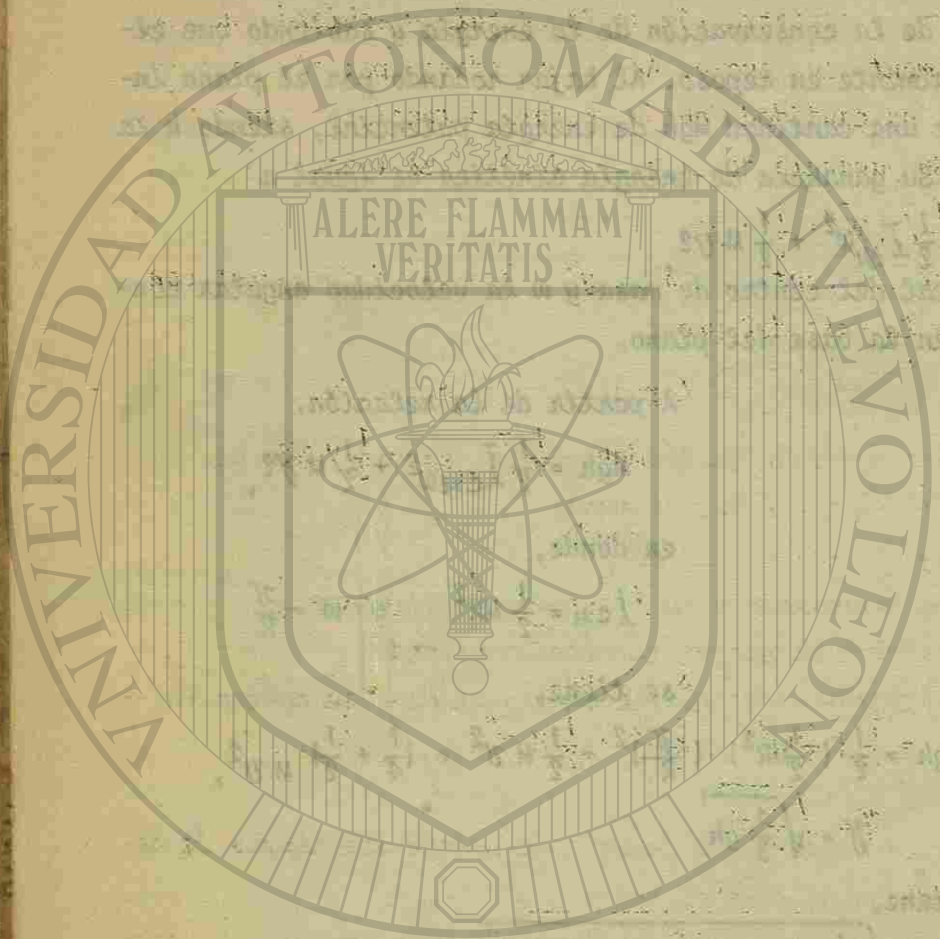
por lo tanto,

$$f = \frac{I_{CM} \alpha}{R} + \frac{Ma}{2}$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación de la translación, se tiene,

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta.$$

La aceleración del centro de masa del cilindro que rueda ( $\frac{2}{3} g \sin \theta$ ) es menor que la aceleración del centro de masa del cilindro que baja deslizando por el plano inclinado ( $g \sin \theta$ ).



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El centro de masa se mueve con aceleración lineal constante.

La velocidad del centro de masa, a partir del punto de reposo, se obtiene aplicando la relación.

$$v^2 = 2as,$$

de manera que

$$v^2 = 2 \left(\frac{2}{3} g \sin \theta\right) S = \frac{4}{3} g \frac{h}{S} S = \frac{4}{3} gh.$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

sustituyendo valores se obtiene,

$$v = 4.42 \frac{MT}{seg.}$$

Ejemplo 2-11.

Una esfera y un cilindro, que tienen la misma masa y el mismo radio, parten del punto de reposo y bajan rodando por el mismo plano inclinado. ¿Cuál de los dos cuerpos llegará primero a la base del plano?.

Para una esfera,  $I_{CM}$  es igual a  $\frac{2}{5} MR^2$ . Por el método dinámico, se tiene:

$$Mg \sin \theta - f = Ma, \quad \text{translación del c.m.}$$
$$fR = I_{CM} \alpha = \left(\frac{2}{5} MR^2\right) \left(\frac{a}{R}\right), \text{rotación en torno del c.m.}$$

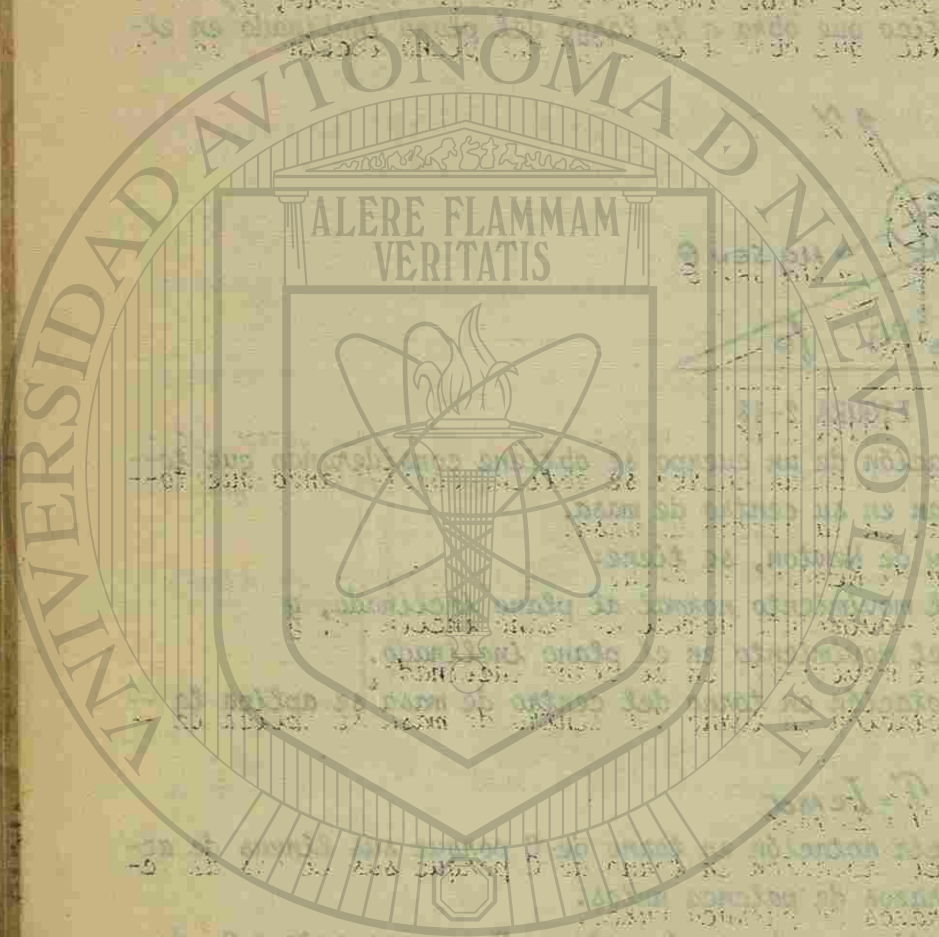
o sea,

$$f = \frac{2}{5} Ma \quad \text{y} \quad a = \frac{5}{7} g \sin \theta, \text{ esfera}$$

Para el cilindro, del ejemplo 2-10,

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta, \quad \text{cilindro.}$$

Como la aceleración del centro de masa de la esfera es en todo momento mayor que la aceleración del centro de masa del cilindro. Puesto que ambos parten del reposo en el mismo instante, la esfera será la primera que llegue a la base del plano.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## PROBLEMAS

1.- a) Demostrar que el momento de inercia de una varilla delgada de longitud  $l$  con respecto a un eje que pasa por su centro y que es perpendicular a su longitud es  $I = \frac{1}{12} Ml^2$ . b).- Utilizar el teorema de los ejes paralelos para demostrar que  $I = \frac{1}{3} Ml^2$  cuando el eje de rotación pasa por un extremo perpendicularmente a la longitud de la varilla.

2.- a) Demostrar que un cilindro sólido de masa  $M$  y de radio  $R$  es equivalente, para la rotación en torno de un eje central, a un aro delgado de masa  $M$  y de radio  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ . b).- La distancia radial a un eje dado, a la cual podría considerarse concentrada la masa de un cuerpo sin alterar el momento de inercia del cuerpo con respecto a ese eje se llama su radio de giro. Represente con  $k$  el radio de giro y demuestre que  $k = \sqrt{\frac{I}{M}}$ . Este valor da el radio del "aro equivalente" en el caso general.

3). La molécula de oxígeno tiene una masa total de  $5.30 \times 10^{-26}$  kg y un momento de inercia de  $1.94 \times 10^{-46}$  kg·m<sup>2</sup> con respecto a un eje que pasa por el centro y que es perpendicular a la línea que une los átomos. Supóngase que tal molécula en un gas tiene una velocidad media de 500 m/seg y que su energía cinética de rotación es los  $\frac{2}{3}$  de su energía cinética de translación. Encontrar su velocidad angular media.

$$R: 6.75 \times 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$$

4.- Un aro de radio 3.05 m pesa 1425 N. Rueda por un piso horizontal de manera que su centro de masa tiene una velocidad de 0.152 m/seg. ¿Qué cantidad de trabajo tiene que hacerse para detenerlo?

$$R: -3.35 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5.- Supóngase que la tierra es una esfera de densidad uniforme. a) ¿Cuál es su energía cinética de rotación? Tómese como radio de la tierra  $6.4 \times 10^3$  km y como masa de la misma  $6 \times 10^{24}$  kg. b).- Supóngase que esa energía pudiera ser aprovechada por el hombre. ¿Durante cuánto tiempo podría proporcionar la tierra una potencia de 1 kw a cada una de las  $3.5 \times 10^7$  personas que hay en la tierra?

$$R: \begin{array}{l} a) 2.6 \times 10^{29} \text{ joules} \\ b) 2.4 \times 10^9 \text{ años.} \end{array}$$

6.- Una varilla delgada de longitud  $l$  y masa  $m$  está suspendida libremente por su extremo. Se jala lateralmente y se le da un impulso en torno de un eje horizontal, haciéndola pasar por su posición más baja, con una velocidad angular  $w$ . ¿A qué altura con respecto a su posición más baja, se levanta su centro de masa? No tomar en cuenta el rozamiento ni la distancia del aire.

$$R: h = \frac{l^2 w^2}{6g}$$

7.- El motor de un automóvil desarrolla 100 hp al estar girando con una velocidad de 1800 RPM. ¿Qué momento de rotación produce?

$$R: 396 \text{ joules.}$$

8.- Una rueda de masa  $M$  y de radio de giro  $k$  está girando sobre un eje horizontal fijo que pasa por su cubo. El cubo frota contra el eje, de radio  $a$ , en un sólo punto, siendo el coeficiente de rozamiento  $\mu$ . Se comunica a la rueda -- una velocidad angular inicial  $\omega_0$ . Considerando una deceleración uniforme, encontrar el tiempo que pueda la rotación y el número de revoluciones que da la rueda hasta detenerse.

$$R: \quad t = \frac{\omega_0 k^2}{Mga}$$

$$\theta = \frac{\omega_0^2 k^2}{2Mga}$$

9.- En una máquina de Atwood (figura 2-19) un bloque tiene una masa de 500 grs. y el otro una masa de 460 grs. La polea, que está montada en unos apoyos horizontales sin rozamiento, tiene un radio de 5 cm. Si se suelta el bloque más pesado a partir del punto de reposo, se observa que cae 75 cm. en 5 seg. Explicar cómo se puede determinar el momento de inercia de la polea a partir de estos datos.

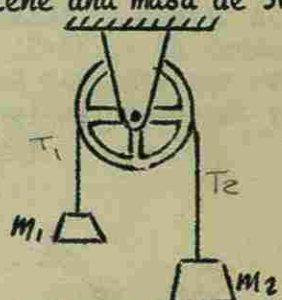


FIGURA 2-19

$$R: \quad I = 1.62 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

10.- Un bloque de 26.8 NT se coloca en un plano inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal y mediante una cuerda paralela al plano y que pasa por una polea que está en la parte superior va unido a un bloque colgante que pesa 80 . La polea pesa 8.9 NT y tiene un radio de 0.10 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es de 0.10. Encontrar la aceleración del bloque que está suspendido y la tensión en la cuerda a cada lado de la polea. Supóngase que la polea es un disco uniforme.

$$R: \quad \begin{aligned} & a) \ 5.79 \text{ m/seg}^2 \\ & b) \ 32.5 \text{ NT} \\ & \quad 29.8 \text{ NT} \end{aligned}$$

11.- Una caja de 1.83m de alto por 1.22 m de ancho y por 0.95m de profundidad, que contiene un refrigerador, está colocado en el fondo de un camión en posición vertical. El peso del refrigerador más el de la caja es de 1335 NT y se supone uniformemente distribuido en todo el volumen de la caja. La caja se voltea al acelerar el camión. ¿Cuál es el mínimo valor que tuvo que tener esta aceleración.

$$R: \quad a = \frac{1}{2} g.$$

12.- Demostrar que un cilindro resbalará sobre un plano que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, si el coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el cilindro es menor que  $\frac{1}{3} \text{tg}\theta$ .

13.- Una esfera rueda subiendo un plano inclinado de ángulo  $30^\circ$ . En la base del plano inclinado, el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de translación de 4.87 mt/seg. a) ¿Hasta donde sube la esfera por el plano? b) ¿Cuánto tiempo tarda en regresar a la base?.

$$R: \quad \begin{aligned} & a) \ 3.36 \text{ MT} \\ & b) \ 1.4 \text{ seg.} \end{aligned}$$

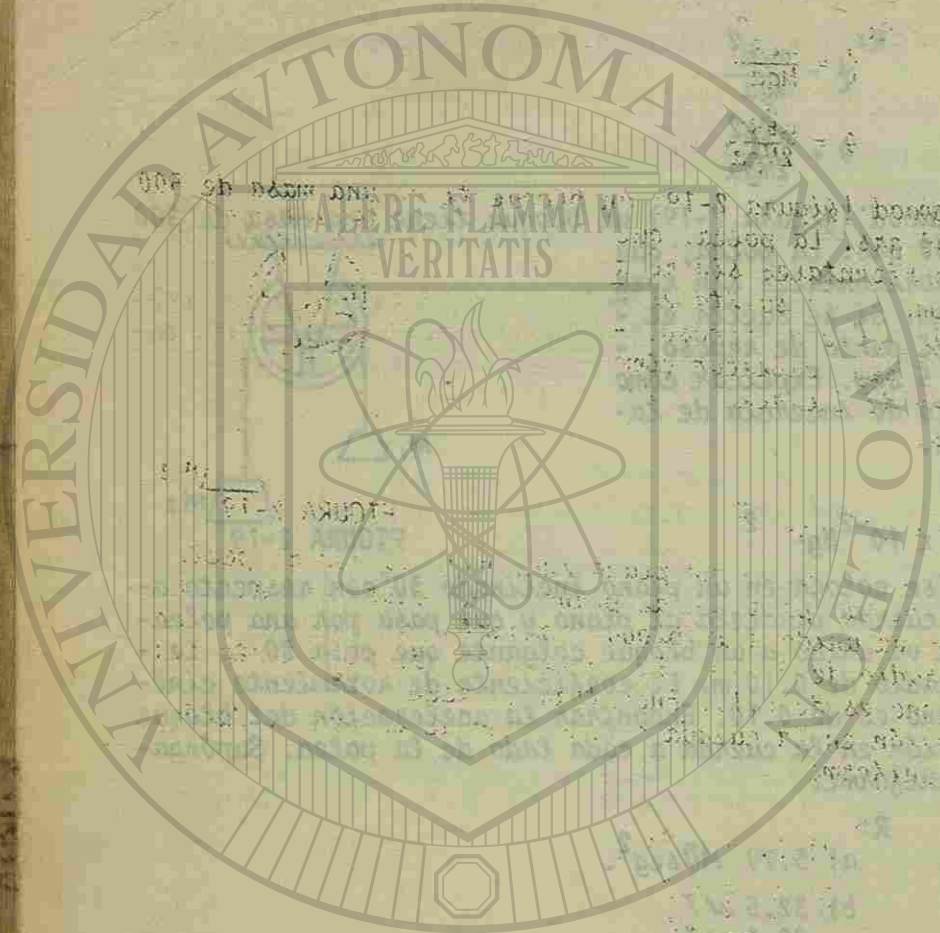
14.- Un yo-yo de masa  $M$  tiene un eje de radio  $r$  alrededor del cual esta enredado el hilo. Un muchacho deja que se desenrolle el yo-yo, sosteniendo en una posición fija el extremo libre. El yo-yo acelera hacia abajo, llega al extremo, y comienza a subir, enrollándose el hilo alrededor del eje en sentido contrario. Encontrar la tensión del hilo durante la bajada y la subida, suponiendo que  $r$  sea lo suficientemente pequeño para considerarse que el hilo se conserva vertical en todo momento. Llame  $I$  al momento de inercia del yo-yo con respecto a su eje central.

R: 
$$= Mg \frac{I}{I+Mr^2}$$

15.- Una cuerda esta enrollada en un cilindro de masa  $M$ , y radio  $R$ . La cuerda se jala verticalmente hacia arriba para impedir que descienda el centro de masa conforme el cilindro esta desenrollando la cuerda. a) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? b) ¿Qué cantidad de trabajo se ha hecho sobre el cilindro una vez que ha alcanzado una velocidad angular  $\omega$ ? c) ¿Cuál es la longitud de cuerda que se ha desenrollado en un momento?

R:

- a)  $T = Mg$
- b)  $\omega = \frac{MR^2\omega^2}{4}$
- c)  $L = \frac{R^2\omega^2}{4g}$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS



### CAPITULO III

## DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION. Y LA CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

### 1.- Introducción. El trompo.

Este capítulo tratará del estudio de la rotación de un cuerpo rígido en -- torno de un eje que no está fijo en un marco de referencia inercial. A partir -- de la relación vectorial del movimiento de rotación  $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , se resolverán los -- problemas dinámicos para este caso. Posteriormente se considerará nuevamente la rotación de los cuerpos rígidos y de partículas en torno de ejes fijos. Sin embar-- go, para este caso solamente se analizará el efecto de los momentos de rotación que tengan componentes perpendiculares al eje. Y finalmente se estudiarán los -- sistemas en los cuales no intervienen momentos de rotación externos, pero se to-- mará en cuenta el principio de la conservación de la cantidad de movimiento an-- gular.

El trompo:

En la figura 3-1a se representa un trompo que gira en torno de su eje de -- simetría, la punta del trompo se encuentra fija en el origen  $O$  de un marco de -- referencia inercial. Al girar el trompo rápidamente su eje se mueve en torno de -- el eje vertical, describiendo un cono. A este movimiento se le llama precesión.

Para determinar la velocidad angular del movimiento de precesión  $\omega_p$ , consi-- dere el instante mostrado en la figura 3-1a donde el trompo tiene una veloci-- dad angular  $\omega$  alrededor de su propio eje y una cantidad de movimiento angular  $L$  con respecto a este eje;  $\theta$  es el ángulo que forma este eje con la vertical.

Sobre el trompo actúa una fuerza hacia arriba sobre el pivote en  $O$ , y otra -- debida al peso de este, que obra en el centro de masa hacia abajo. La primera -- fuerza no provoca momento de rotación con respecto a ese punto debido a que su -- brazo de palanca es cero, mientras que la segunda fuerza sí provoca un momento -- de rotación con respecto a  $O$  y, está dado por,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{g},$$

donde  $r$  es la distancia del centro de masa al origen. La dirección de  $\vec{\tau}$  se en-- cuentra aplicando la regla de la mano derecha y es la que se muestra en la figu-- ra 3-1a. Tanto  $\vec{\tau}$ , como  $L$  y  $\vec{r}$ , giran alrededor del eje con una velocidad angular  $\omega_p$ .



FIGURA 3-1

Cuando en un cuerpo rígido obra un momento de rotación, la cantidad de movimiento angular del cuerpo cambia de acuerdo con la relación  $\dot{T} = \frac{dL}{dt}$ .

La relación anterior muestra que el cambio de  $L$  (o sea,  $dL$ ) debido a la acción del momento de rotación, apunta en la dirección y sentido de  $T$  y deberá ser perpendicular a  $L$ .

Durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el trompo presenta un cambio de  $L$ , de magnitud,

$$\Delta L = T \Delta t.$$

En la figura 3-1b se muestra el cono descrito por el eje del trompo en precesión y se representa este cambio  $\Delta L$ . Al terminar el intervalo de tiempo  $\Delta t$  la cantidad de movimiento angular del trompo se encuentra sumando vectorialmente  $L$  y  $\Delta L$ . Como la magnitud de  $\Delta L$  es muy pequeña en comparación con  $L$  y a la vez es perpendicular a  $L$ , el nuevo vector de cantidad de movimiento angular tiene la misma magnitud que el anterior, pero con diferente dirección. Por lo tanto, al transcurrir el tiempo la punta del vector de cantidad de movimiento angular se mueve en un círculo horizontal (figura 3-1b). Como este vector siempre está a lo largo del eje de rotación del trompo, de esta manera queda explicada la precesión del trompo.

A partir de la figura 3-1b se encuentra la velocidad angular de precesión  $\omega_p$ . Esto es,

$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

Como  $\Delta L \ll L$ ,

$$\Delta \phi \approx \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{T \Delta t}{L \sin \theta}$$

por lo tanto,

$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{T}{L \sin \theta}$$

Ecuación 3-1

De la figura 3-1a se tiene que:

$$\tau = r \cdot mg \sin(180^\circ - \theta) = r \cdot mg \sin \theta$$

por consiguiente,

$$\omega_p = \frac{m g r}{L} \quad \text{Ecuación 3-2.}$$

Ejemplo 3-1.

Un trompo está girando a  $30 \frac{\text{rev}}{\text{seg}}$  alrededor de un eje que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. Su masa es de  $0.50 \text{ kg}$  y su momento de inercia es de  $5 \times 10^{-4} \text{ kg-m}^2$ . El centro de masa se encuentra a  $4 \text{ cm}$  de la punta del pivote. Si la rotación es en sentido de las manecillas del reloj vista desde arriba, ¿Cuál será la magnitud y dirección de la velocidad angular de precesión?

La velocidad angular de precesión se obtiene a partir de la expresión:

$$\omega_p = \frac{m g r}{L},$$

donde la cantidad de movimiento angular es,

$$L = I \omega = 5 \times 10^{-4} \text{ kg-m}^2 \left( 30 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} \times 2 \pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \right) = 0.0942 \frac{\text{kg-m}^2}{\text{seg}}$$

por lo tanto,

$$\omega_p = \frac{0.50 \text{ kg} \times 9.8 \text{ M/seg}^2 \times 0.04 \text{ M}}{0.0942 \frac{\text{kg-m}^2}{\text{seg}}}$$

$$\omega_p = 2.06 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

La dirección de la velocidad angular de precesión es en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

2.- Cantidad de movimiento angular y velocidad angular.

Para encontrar la relación entre la cantidad de movimiento angular y la velocidad, para el caso de partículas y cuerpos rígidos que giran en torno de un eje fijo en un marco de referencia inercial, considere la partícula de masa  $m$  de la figura 3-2, moviéndose con una velocidad  $v$  en torno del eje  $z$  de un marco de referencia inercial. La velocidad angular  $\omega$  se encuentra sobre el eje  $z$  y apunta en la dirección de él. La cantidad de movimiento angular  $L$  de la partícula con respecto al origen  $O$  está dada por:

$$L = r \times p \quad \text{®}$$

Para este caso el vector  $L$  no es paralelo a  $\omega$ , por ser este perpendicular al plano que forma  $r$  y  $p$ . Sin embargo, aunque  $L$  no sea paralela a  $\omega$ , la relación  $\dot{L} = \frac{dL}{dt}$  para un momento de rotación que obra sobre una partícula si es aplicable para este caso, ya que al moverse la partícula el vector  $L$  cambia de dirección al transcurrir el tiempo, sin cambiar su magnitud.

Al estarse moviendo la partícula en un círculo, actúa sobre ella una fuerza centrípeta  $F$ , como se muestra en la figura 3-2b. Se puede imaginar que  $F$  es-



ta aplicada por la tensión de una cuerda que une la partícula que gira con el eje z.

La fuerza centrípeta F provoca un momento de rotación con respecto a 0 que está dado por:

$$\vec{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Donde  $\vec{\tau}$  es perpendicular al plano formado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$  y es tangente al círculo; su dirección se representa en la figura 3-2b y se obtiene aplicando la regla de la mano derecha.

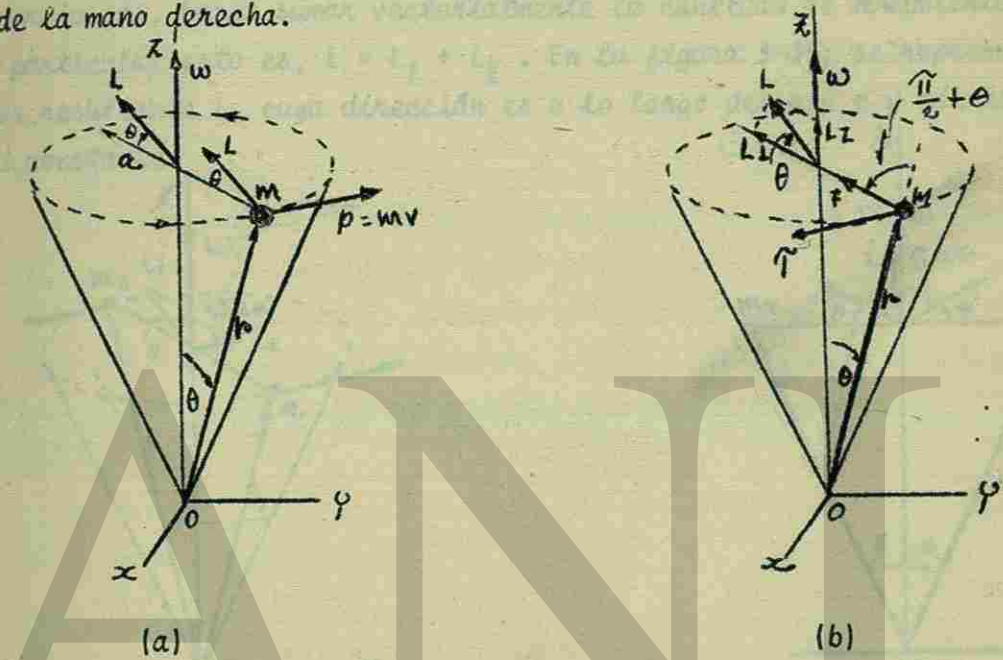


FIGURA 3-2

En la figura 3-2b se vé que el vector L tiene una componente  $L_z$  paralela a w, y una componente  $L_{\perp}$  perpendicular a w.

Para encontrar una relación entre  $L_z$  y w para la partícula de la figura -- 3-2b; se tiene a partir de la figura 3-2a que:

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r p \sin 90^\circ = r(mv) = rm [w(r \sin \theta)] = m r^2 w \sin \theta.$$

De la figura 3-2b se tiene que:

$$L_z = L \sin \theta = m r^2 w \sin^2 \theta.$$

Como  $r \sin \theta = a$ , el radio del círculo a través del cuál se mueve la partícula, se obtiene que:

$$L_z = m a^2 w, \tag{Ecuación 3-3}$$

donde  $m a^2$  es el momento de inercia I de la partícula con respecto al eje z. Por lo tanto:

$$L_z = I w \tag{Ecuación 3-4}$$

Si ahora en el sistema de la figura 3-2 se introduce otra partícula de masa m en la misma órbita y moviéndose con igual velocidad, pero en un punto dia-

metralmente opuesto al otro lado del eje de rotación. Para esta segunda partícula, la cantidad de movimiento angular  $L_2$  con respecto a  $O$ , tendrá una magnitud igual a la de  $L_1$  y formará el mismo ángulo  $(90^\circ - \theta)$  con el eje  $z$ , pero con una dirección diferente con respecto a ese eje. En la figura 3-3a se representa el vector  $L_2$  que se encuentra en el lado opuesto del eje  $z$  con respecto a  $L_1$ . Los vectores  $L_1$  y  $L_2$  forman entre sí un ángulo de  $180^\circ - 2\theta$ .

Para encontrar la cantidad de movimiento angular total  $L$  del sistema de dos partículas, basta sumar vectorialmente la cantidad de movimiento angular de cada partícula; esto es,  $L = L_1 + L_2$ . En la figura 3-3b, se representa este vector resultante  $L$ , cuya dirección es a lo largo del eje  $z$  y además es de magnitud constante.

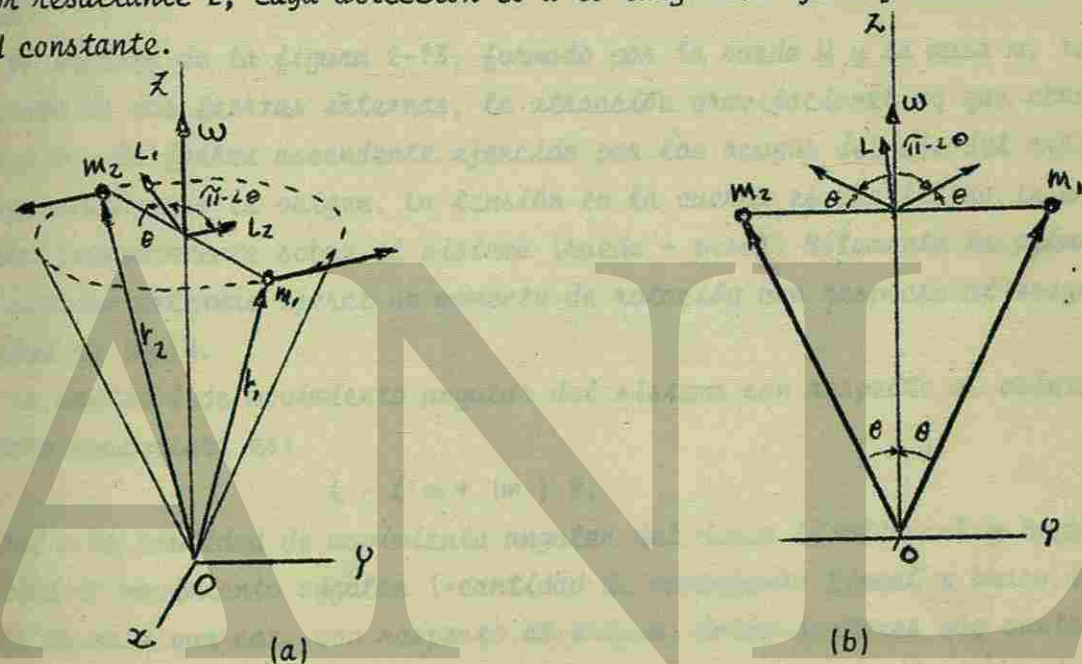
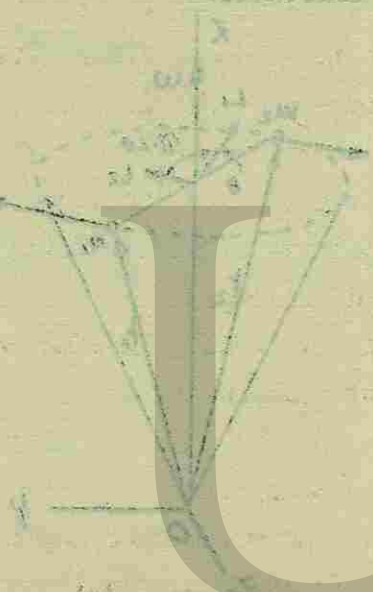
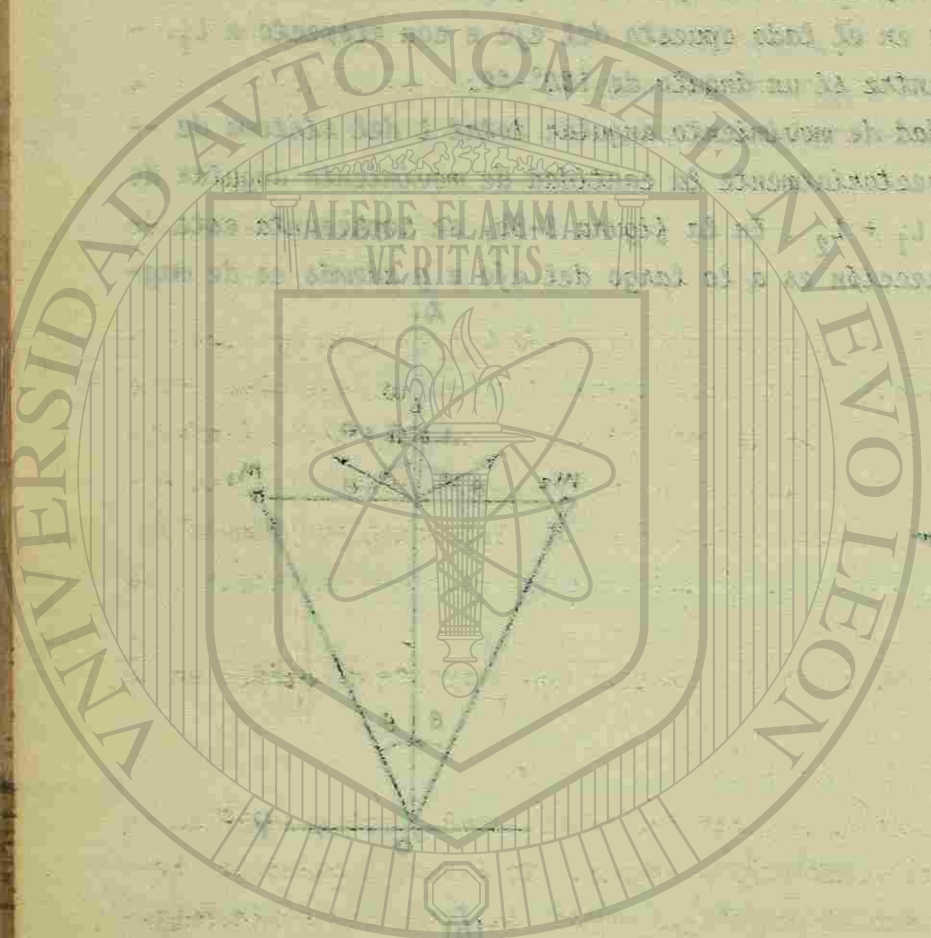


FIGURA 3-3.

La razón de que el vector resultante  $L$  sea constante para este sistema de dos partículas, significa que  $\frac{dL}{dt} = 0$ ; por lo tanto,  $\vec{\tau} = 0$  para este sistema. Es to es, debido a que el momento de rotación con respecto a  $O$  de cada partícula tiene la misma magnitud, pero con dirección opuesta. Por lo tanto, el momento de rotación que obra sobre el sistema de dos partículas es cero.

El hecho de que  $w$  u  $L$  tengan la misma dirección se debe a que las dos partículas tienen igual masa y se encuentran diametralmente opuestas a la misma distancia del eje de rotación.

Si ahora se considera que el sistema es un cuerpo rígido, que es simétrico con respecto al eje de rotación, entonces para cada elemento de masa en el cuerpo corresponderá otra elemento idéntico en posición diametralmente opuesta y a la misma distancia del eje de rotación; por lo tanto, se puede considerar que -



el cuerpo está formado por grupos de pares de partículas. Por consiguiente,  $W$  u  $L$  son paralelos para todos estos pares así como también para cuerpos rígidos -- que sean simétricos con respecto a su eje de rotación. Por lo tanto, para cuerpos rígidos simétricos se puede escribir en forma vectorial,

$$L = I \omega, \quad \text{Ecuación 3-5}$$

donde  $L$  representa la cantidad de movimiento angular total. La ecuación 3-5 se aplica solamente a cuerpos simétricos con respecto al eje de rotación.

Ejemplo 3-2.

Resolver el problema del ej. 2-7, cap. 2, aplicando directamente la ecuación

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

El sistema de la figura 2-13, formado por la rueda  $M$  y la masa  $m$ , recibe la acción de dos fuerzas externas, la atracción gravitacional  $mg$  que obra sobre la masa  $m$  y la fuerza ascendente ejercida por los apoyos del eje del cilindro, -- que se tomará como el origen. La tensión en la cuerda es una fuerza interna y -- no obra exteriormente sobre el sistema (rueda + peso). Solamente la primera de esas fuerzas externas ejerce un momento de rotación con respecto al origen y su magnitud es  $(mg)R$ .

La cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al origen en un instante cualquiera es:

$$L = I \omega + (m) R v,$$

siendo  $I \omega$  la cantidad de movimiento angular del disco (simétrico) y  $(m)R v$  la -- cantidad de movimiento angular (=cantidad de movimiento lineal x brazo de placa) de la masa que cae, con respecto al origen. Ambos factores que contribuyen a  $L$  apuntan en la misma dirección y sentido, a saber, perpendicularmente al plano de la figura 2-13 y saliendo de ella.

Aplicando  $\tau = \frac{dL}{dt}$  (en forma escalar) resulta.

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt} (I \omega + m v R) \\ &= I \left( \frac{d\omega}{dt} \right) + m R \left( \frac{dv}{dt} \right) \\ &= I \alpha + m R a. \end{aligned}$$

Puesto que  $a = \alpha R$  y  $I = \frac{1}{2} MR^2$ , lo anterior se reduce a

$$mgR = \frac{1}{2} MR^2 \left( \frac{a}{R} \right) + m R a$$

donde,

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

sustituyendo valores se obtiene:

$$a = \frac{2 \times 4.5 \text{ NT}}{3 \text{ kg} + 2 \times 0.46 \text{ kg}} = 2.3 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2}.$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2.3 \frac{MT}{\text{seg}^2}}{0.20} = 11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}.$$

### 3.- Conservación de la cantidad de movimiento angular.

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular dice que, "cuando el momento de rotación externo resultante que obra sobre un sistema es cero, el vector de cantidad de movimiento angular total del sistema se conserva constante". Esto es, si se considera que a partir de la expresión  $\tau_{\text{ext.}} = \frac{dL}{dt}$  la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre un sistema de partículas es cero ( $\tau_{\text{ext.}} = 0$ ); por lo tanto,  $\frac{dL}{dt} = 0$ , de manera que  $L =$  una constante.

La cantidad de movimiento angular total  $L$  para un sistema con  $n$  partículas es:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

Si el momento de rotación externo resultante que obra sobre el sistema es cero, se tiene:

$$L = \text{una constante} = L_0, \quad \text{Ecuación 3-6.}$$

donde  $L_0$  es el vector de cantidad de movimiento angular total constante. Como la ecuación 3-6 es una cantidad vectorial, entonces será equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada eje de coordenadas que pase por el punto de referencia.

Para un cuerpo rígido que gira en torno del eje  $z$  que se encuentra fijo en un marco de referencia inercial, se tiene que:

$$L_z = I\omega,$$

donde  $L_z$  es la componente de la cantidad de movimiento angular según el eje de rotación e  $I$  el momento de inercia con respecto a ese eje. Cuando no obra ningún momento de rotación externo,  $L_z$  debe permanecer constante, y si se presentará un cambio de  $I$ , debería haber también un cambio de  $\omega$  para poder compensar este cambio de  $L_z$ . Para este caso, el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular se expresa así:

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{una constante.} \quad \text{Ecuación 3-7.}$$

La ecuación 3-7 es aplicable a la rotación alrededor de un eje fijo, así como también alrededor de un eje que pase por el centro de masa del sistema y que se mueva conservándose siempre paralelo a sí mismo.

En la figura 3-4 se muestra un clavadista, que en el momento de dejar el trampolín tiene una velocidad angular  $\omega_0$  con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de masa, tal que lo haría girar la mitad de una vuelta antes de llegar al agua. Si en ese instante deseará dar vuelta y media, debería triplicar su velocidad angular.

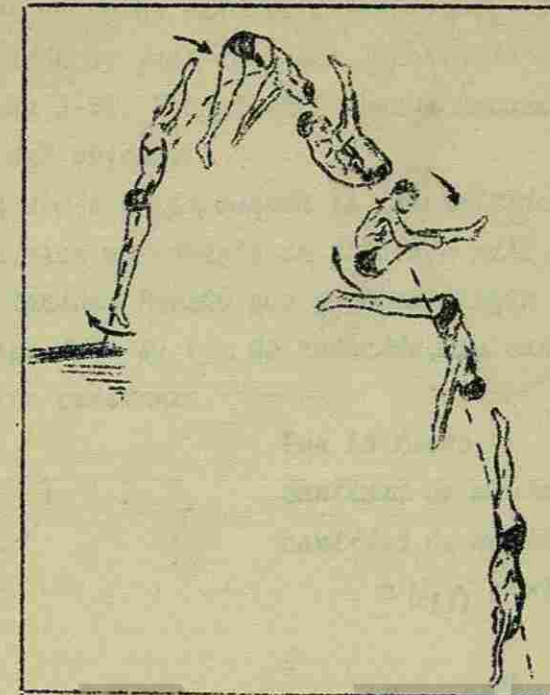


FIGURA 3-4.

Como en este caso no existen fuerzas externas obrando sobre él, excepto -- la gravedad que no provoca ningún momento de rotación con respecto a su centro de masa. Por lo tanto, su cantidad de movimiento angular permanece constante, e  $I_0 \omega_0 = I \omega$ . Como  $\omega = 3 \omega_0$ , el clavadista debe cambiar su momento de inercia con respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masa del valor inicial  $I_0$  a un valor  $I$  que es igual a  $\frac{1}{3} I_0$ . Esto lo podrá lograr encogiendo sus brazos y piernas hacia el centro de su cuerpo.

Entre mas grande sea la velocidad angular inicial que lleve el clavadista y cuatro más pueda reducir su momento de inercia, mayor será el número de revoluciones que pueda dar en un tiempo dado.

La energía cinética de rotación del clavadista no es constante.

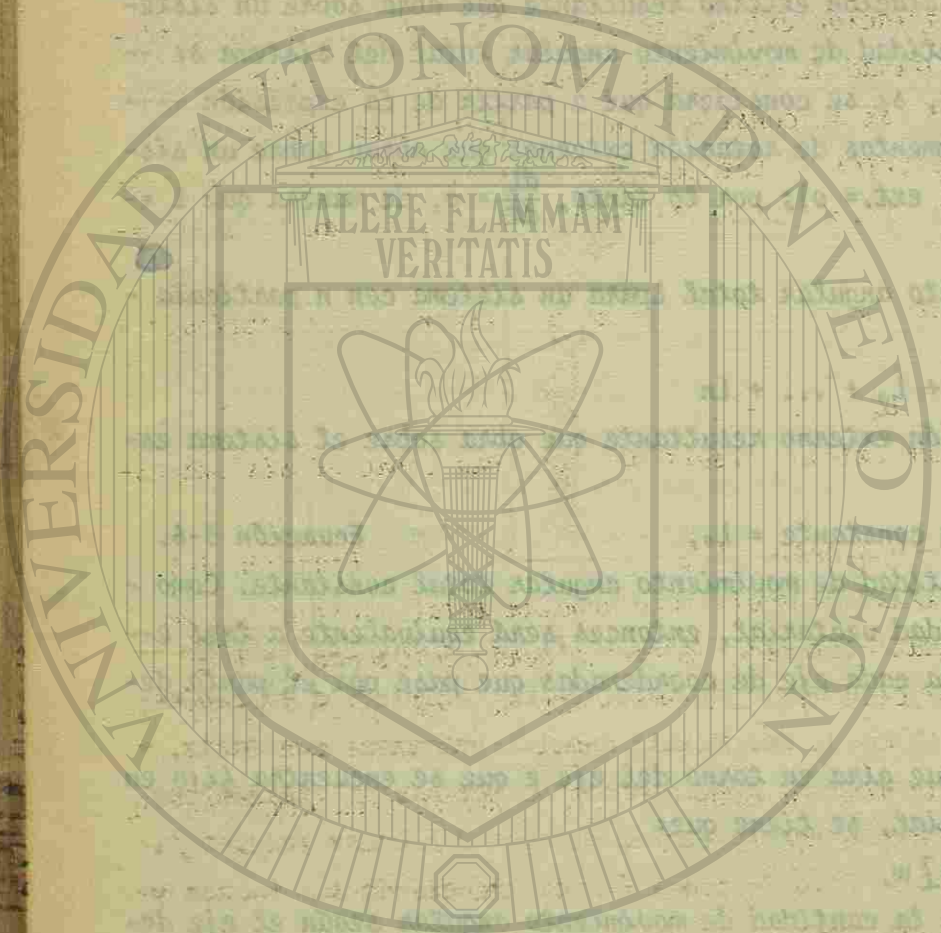
Ya que hay un aumento de ésta proporcionado por el clavadista, quien hace trabajo al encoger las diversas partes de su cuerpo. Esto se debe a que,

$$I \omega = I_0 \omega_0$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

Ejemplo 3-3.

Un pequeño objeto de masa  $m = 80$  grs. está fijo a un cordón ligero que pasa por un tubo hueco. El tubo se sostiene con una mano y el cordón con la otra.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El objeto se pone a girar en un círculo de radio  $r_1 = 30$  cm con una velocidad  $v_1 = 630 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$ . El cordón se jala entonces, acortando el radio de la trayectoria a  $r_2 = 15$  cm (figura 3-5). Encontrar la nueva velocidad lineal  $v_2$  y la nueva velocidad angular  $\omega_2$  del objeto.

La tensión hacia abajo en la cuerda es transmitida como fuerza radial al objeto. Esta fuerza ejerce un momento de rotación nulo sobre el objeto con respecto al centro de rotación. Puesto que no obra ningún momento de rotación sobre el objeto con respecto a su eje de rotación, su cantidad de movimiento angular en esa dirección es constante.

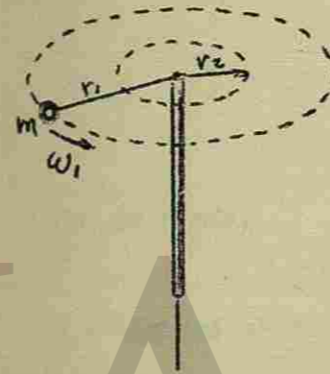


FIGURA 3-5.

Por lo tanto,

cantidad de movimiento angular inicial =  
cantidad de movimiento angular final.

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

y

$$v_2 = v_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right) = 630 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \left( \frac{30 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \right) = 1260 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

puesto que  $v_1$  es igual a  $\omega_1 r_1$  y  $v_2$  es igual a  $\omega_2 r_2$ , se tiene,

$$m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$$

y

$$\omega_2 = \omega_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2,$$

donde,

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{630 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}}{30 \text{ cm}} = 21 \frac{\text{rad}}{\text{seg}},$$

por lo tanto,

$$\omega_2 = 21 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \left( \frac{30 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \right)^2 = 84 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}.$$

#### Ejemplo 3-4.

Un estudiante está sentado en un banquillo que puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Sostiene sus brazos extendidos horizontalmente con una pesa de 35.6 N en cada mano. El instructor lo pone a girar con una velocidad angular de  $0.50 \frac{\text{rev}}{\text{seg}}$ . Supóngase que el rozamiento es insignificante y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje vertical. Supóngase también que el momento de inercia del estudiante permanece constante con un valor de  $5.43 \text{ kg-m}^2$  al acercar sus manos a sus costados y que el cambio del momento de inercia se deba solamente a que las pesas aproximan al centro. Tómese como distancia original de las pesas al eje de rotación  $0.915 \text{ m}$  y como su distancia final  $0.152 \text{ m}$ . Encontrar la velocidad angular final del estudiante.

La única fuerza externa es la gravedad que obra pasando por el centro de masa, y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje de rotación. Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular con respecto a ese eje se conserva y cantidad de movimiento angular inicial = cantidad de movimiento angular final

$$I_0 \omega_0 = I \omega$$

se tiene que,

$$I = I_{\text{estudiante}} + I_{\text{pesas}},$$

$$I_0 = 5.43 + 2 \left( \frac{35.6}{9.8} \right) (0.915)^2 = 11.51 \text{ kg-M}^2$$

$$I = 5.43 + 2 \left( \frac{35.6}{9.8} \right) (0.152)^2 = 5.6 \text{ kg-M}^2$$

$$\omega_0 = 0.50 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} \times 2\pi = \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Por lo tanto,

$$\omega = \omega_0 \left( \frac{I_0}{I} \right) = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \left( \frac{11.51}{5.6} \right) = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 1 \frac{\text{rev}}{\text{seg}}$$

4.- Algunos otros aspectos de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular es más fundamental que las leyes de Newton, ya que mientras la primera se aplica en física atómica y nuclear así como en las regiones celestes y macroscópicas; las de Newton no se aplican a estas regiones atómicas y nucleares.

Para establecer el principio de la conservación se utilizó la tercera ley de Newton para demostrar que la suma de los momentos de rotación internos era cero. Se tubo que afirmar que las fuerzas de acción y reacción eran iguales y opuestas y que estaban dirigidas sobre la línea que une las dos partículas.

Para un sistema de cuerpos que se pueden considerar como partículas, la ley de la conservación es aplicable siempre y cuando los efectos debidos a la rotación de los cuerpos individuales se puedan despreciar. Cuando los cuerpos individuales estan en rotación, el principio de la conservación es valido si se incluye la cantidad de movimiento angular debida a esa rotación.

Cuando aplicamos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular total a la física atómica y nuclear se encuentra que los electrones, protones, mesones y neutrones, tienen cantidad de movimiento angular debida a algún movimiento de rotación intrínseco y a un movimiento orbital alrededor de algún punto externo, que debe ser incluida al calcular la cantidad de movimiento angular total.

Las cantidades de movimiento angulares para los sistemas atómicos, molecu-

lares y nucleares tienen valores definidos.

Si se considera que el sol, los planetas y satélites sean particular que no tienen movimiento de rotación intrínseco, la cantidad de movimiento angular del sistema solar no sería constante. Pero esto no sucede así ya que estos cuerpos si tienen rotaciones intrínsecas provocadas por las fuerzas de marea que -- convierten una parte de esa cantidad de movimiento angular de rotación intrínseca en cantidad de movimiento angular orbital de los planetas y satélites.

La conservación de la cantidad de movimiento angular total es importante -- para valorizar las teorías del origen del sistema solar, de la contracción de -- estrellas gigantes y de otros problemas en astronomía.

Esta forma simple de analizar la cantidad de movimiento angular total de -- los sistemas atómicos o astronómicos, es un teorema de que la cantidad de movimiento angular total  $L$  de un sistema cualquiera con respecto al origen de un -- marco de referencia inercial se puede calcular sumando la cantidad de movimiento angular con respecto a su centro de masa con la cantidad de movimiento angular que proviene del movimiento del centro de masa con respecto al origen.

Las leyes de la conservación de la energía total y de la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular son fundamentales en física, -- y son válidas para todas las teorías de físicas modernas.

#### 5.- Resumen.

En la tabla 3-1 se han reunido todas las ecuaciones que tratan de la dinámica de los movimientos de rotación y se ha hecho un comentario acerca de las -- condiciones bajo las cuales se pueden usar.

TABLA 3-1

#### RESUMEN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE ROTACION

ECUACION	NOTAS
$\vec{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	I.- Ecuaciones de definición Momento de rotación de una partícula con -- respecto a un punto 0, debido a una fuerza resultante $\mathbf{F}$
$\vec{\tau}_{\text{ext.}} = \sum \vec{\tau}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$	Momento de rotación externo resultante sobre un sistema de partículas con respecto a un punto 0
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	Cantidad de movimiento angular de una partícula con respecto a un punto 0
$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$	Cantidad de movimiento angular resultante de un sistema de partículas con respecto a



un punto 0

## II.- Relaciones generales

Ley de movimiento de una sola partícula sobre la que está aplicado un momento de rotación. Es válida solamente si  $\vec{\tau}$  y  $L$  se miden con respecto a un punto cualquiera 0 - fijo en un marco de referencia inercial. Y es el análogo rotacional de  $F = \frac{dp}{dt}$

Ley del movimiento de un sistema de partículas sobre el que obra un momento de rotación externo resultante  $\vec{\tau}_{ext}$ . Es válida solamente si  $\vec{\tau}_{ext}$  y  $L$  se miden con respecto a (a) un punto cualquiera 0 fijo en un marco de referencia inercial, o bien, (b) con respecto al centro de masa del sistema. Es la ley rotacional análoga de  $F = \frac{dp}{dt}$

$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{ext.} = \frac{dL}{dt}$$

## III.- Caso especial de un cuerpo rígido girando alrededor de un eje en un marco de referencia inercial

$\alpha$  está obligada a conservarse a lo largo del eje;  $I$  debe referirse también a este eje y  $\vec{\tau}$  debe ser la componente escalar de  $\vec{\tau}_{ext.}$  dirigida sobre ese mismo eje. Es la ley rotacional análoga de  $F = Ma$  del movimiento rectilíneo.

$w$  está obligada a conservarse a lo largo del eje; y debe referirse también a este eje y  $L$  debe ser la componente escalar de la cantidad de movimiento total sobre ese mismo eje. Si el eje de rotación tiene alguna simetría especial (esto es, si es un eje principal), entonces  $L$  y  $w$  estarán ambos dirigidos sobre el eje. Esta ley es la análoga rotacional de  $P = Mw$  para el movimiento rectilíneo.

$$\tau = I\alpha$$

$$L = Iw$$

PROBLEMAS

1.- Un trompo está girando a 30 rev/seg alrededor de un eje que forma un ángulo de 30° con la vertical. Su masa es de 0.50 kg y su momento de inercia es de  $5 \times 10^{-4} \text{ kg-m}^2$ . El centro de masa se encuentra a 4cm de la punta del pivote. Si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj vista desde arriba, ¿Cuál será la magnitud y dirección de la velocidad angular de precesión?  
 R.- 2 rad/seg; en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

2.- a) Suponiendo que el electrón se mueve en una órbita circular alrededor del protón en un átomo de hidrógeno, si la fuerza centrípeta sobre el electrón es producida por una fuerza eléctrica  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , siendo e la magnitud de la

carga de un electrón y de un protón, r el radio de la órbita, y  $\epsilon_0$  una constante, demostrar que el radio de la órbita es

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

siendo m la masa del electrón y v su velocidad.  
 b) Supóngase ahora que la cantidad de movimiento angular del electrón alrededor del núcleo puede tener solamente valores que sean múltiplos enteros n de  $h/2\pi$  - siendo h una constante que se llama constante de Planck. Demostrar que las únicas órbitas electrónicas posibles son aquellas de radio

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}$$

c) Combinar estos resultados para eliminar a v y demostrar que las únicas órbitas para las cuales se cumplen ambos requisitos son las que tienen radios

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

por consiguiente los radios permitidos son proporcionales a los cuadrados de los números enteros n = 1, 2, 3, etc. Cuando n=1, r tiene el valor más pequeño posible que es de  $0.528 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

3.- Determinar a) la cantidad de movimiento angular de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje, b) la cantidad de movimiento angular de movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol.

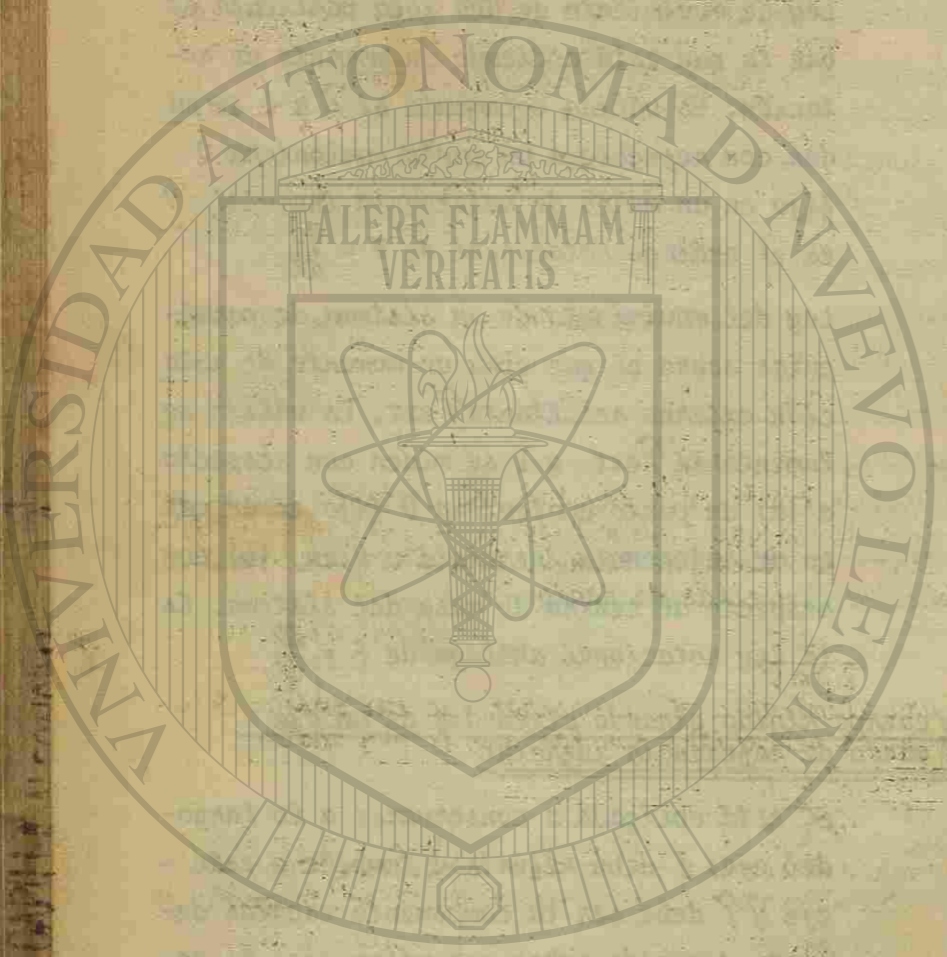
- R:
- a)  $6.94 \times 10^{33} \text{ kg-m}^2/\text{seg}$
  - b)  $2.61 \times 10^{40} \text{ kg-m}^2/\text{seg}$ .

4.- En un parque de juegos hay un pequeño carrusel de 1.22m de radio y 175kg de masa. El radio de giro es de 0.915m. Un muchacho de masa 43.8kg corre con una velocidad de 3.05 m/seg en dirección tangente a la periferia del carrusel cuando éste se encuentra en reposo y salta al carrusel. No tomando en cuenta el rozamiento, encontrar la velocidad angular del carrusel y del muchacho.

R; 0.77 rad/seg; 2.5 rad/seg.

5.- Una regla tiene una masa de 4.38kg y una longitud de 1.22m. Se encuentra inicialmente en reposo en una superficie plana horizontal sin rozamiento y recibe un golpe perpendicularmente de una fuerza impulsiva cuyo impulso es de 13.3nt-seg a una distancia l=0.46m del centro. Determinar el movimiento que toma a partir de ese momento.

R: 11.2 rad/seg.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

6.- Una rueda está girando con una velocidad angular de 500 rev/min en un eje cuyo momento de inercia es insignificante. Una segunda rueda idéntica a la primera, y que inicialmente está en reposo, repentinamente se acopla al mismo eje. ¿Cuál es la velocidad angular de la combinación que resulta al acoplar el eje y las dos ruedas?

R: 26.25 rad/seg.

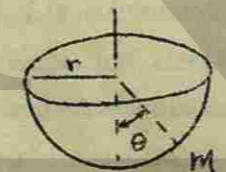
7.- Un hombre está de pie en una plataforma giratoria sin rozamiento, que está girando con una velocidad de 1 rev/seg; sus brazos están estirados y sostiene una pesa en cada mano. Con sus manos en esta posición, el momento de inercia total del hombre y de la plataforma es de  $6\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Si al acercar las pesas al cuerpo, el hombre disminuye el momento de inercia a  $2\text{kg}\cdot\text{m}^2$ , a) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma? b) ¿Cuánto aumenta la energía cinética?

R: 18.9 rad/seg; 236.6 joules.

8.- Una cucaracha, de masa  $m$ , corre en sentido contrario a las manecillas del reloj por el borde de un platillo giratorio montado sobre un eje vertical de radio  $R$  y momento de inercial  $I$  sobre apoyos sin rozamiento. La velocidad de la cucaracha con relación a la tierra es  $V$ , mientras que el platillo gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular  $\omega_0$ . La cucaracha encuentra una migaja de pan en el borde y, por supuesto, se detiene. ¿Cuál es la velocidad angular del platillo después de que se detiene la cucaracha?

R: 
$$\omega = \frac{R\omega_0 - 2V}{3R}$$

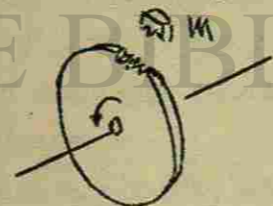
9.- Una partícula se dispara horizontalmente a lo largo del interior de un cazo semiesférico de radio  $r$  que está en reposo figura 3-6. Queremos encontrar la velocidad inicial  $V_0$  que se requiere para que la partícula llegue apenas al borde del cazo. Encontrar a  $V_0$  como función de  $\theta_0$ , la posición angular inicial de la partícula



R: 
$$V_0 = \frac{2gr}{\cos \theta_0}$$

FIGURA 3-6

10.- Un disco plano uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  gira alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro con una velocidad angular  $\omega_0$ . a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular? b) Una astilla de masa  $m$  se desprende del borde del disco en un instante tal que la astilla se eleva verticalmente sobre el punto en donde se rompió figura 3-7. ¿A qué altura sobre el punto sube antes de comenzar a caer? c) ¿Cuál es la energía y la cantidad de movimiento angular finales?

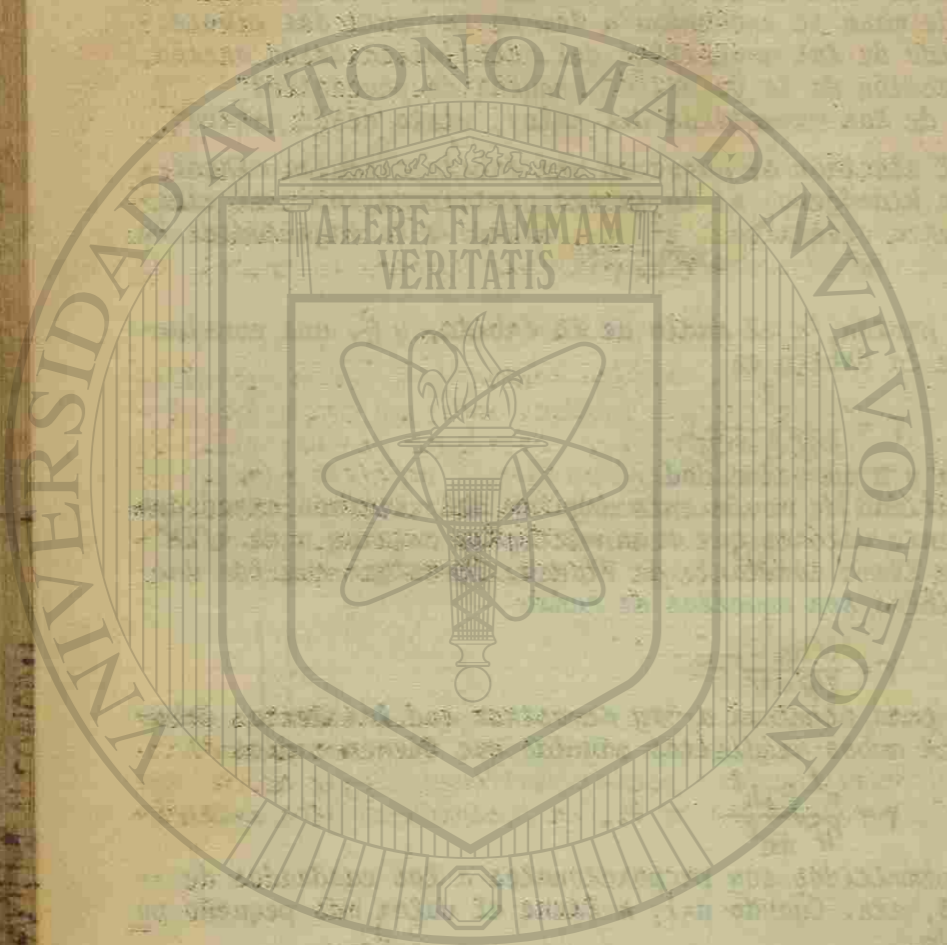


R: a)  $K = \frac{1}{4} MR^2 \omega_0^2$ ;  $L = \frac{MR^2}{2} \omega_0$

b)  $h = \frac{1}{2} R^2 \frac{\omega_0^2}{g}$

c)  $K_f = \frac{R^2 \omega_0^2}{2} (\frac{M}{2} - M)$ ;  $L_f = R^2 \omega_0 (\frac{M}{2} - M)$

FIGURA 3-7



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO IV  
OSCILACIONES

1.- Introducción. Oscilaciones.

En el presente capítulo se estudiará el movimiento de un cuerpo cuando la fuerza resultante que actúa sobre él no es constante, sino que varía durante el movimiento. Como esta fuerza puede variar de infinitas maneras, no se pueden -- dar expresiones generales para el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza variable, excepto que la aceleración en un instante cualquiera es igual a la -- fuerza en dicho instante, dividida por la masa del cuerpo. Un caso particular -- de variación que se presenta en la práctica con mucha frecuencia, es la fuerza -- elástica recuperadora que se origina al deformarse un cuerpo, abandonado en es- -- tado de deformación.

Algunos ejemplos de esta clase de movimiento son la vibración hacia arriba y hacia abajo que se presenta cuando se estira hacia abajo un cuerpo suspendido de un resorte y se abandona a sí mismo; las vibraciones de las cuerdas de los -- instrumentos musicales; las oscilaciones del balancín de un reloj; los átomos -- en las moléculas, etc.

Debido a que las ecuaciones de movimiento contienen senos o cosenos, y que las expresiones donde figuran estas funciones se llaman armónicas, este tipo de movimiento vibratorio se llama movimiento armónico.

Así como existen oscilaciones mecánicas también las hay electromagnéticas, tales como, las ondas de radio, las microondas y la luz visible.

En la figura 4-1 se representa una laminilla de acero sujeta verticalmente en un tornillo de banco, en su extremo superior lleva soldada una pequeña masa. Supóngase que la lámina es lo suficientemente larga y el desplazamiento lo bas- -- tante pequeño para poder considerar el movimiento rectilíneo. Su póngase además -- despreciable la masa de la laminilla.

Si se separa el extremo superior de la lámina hacia la derecha una distan- -- cia A, y se abandona en esa posición, la masa soldada queda sometida a una fuer- -- za recuperadora ejercida por la lámina de acero y dirigida hacia la posición de -- equilibrio O. En consecuencia, adquiere una aceleración en la dirección de esta -- fuerza, y se mueve hacia el centro con velocidad creciente. Como la fuerza ace- -- leradora disminuye cuando el cuerpo se aproxima al centro, la aceleración no se -- rá constante.

En este ejemplo, después de iniciada la oscilación y al transcurrir el --- -- tiempo la elongación A, la velocidad y la aceleración del cuerpo cambian perió- -- dicamente tanto en magnitud como en sentido, y debido a la relación  $F = ma$ , en -- igual forma cambia la fuerza F que obra sobre el cuerpo.

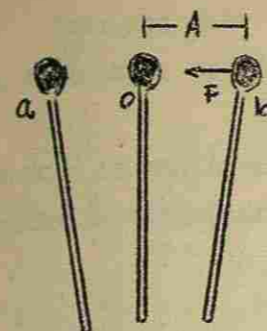


FIGURA 4-1

Cuando el cuerpo alcanza la posición de equilibrio, se anula la fuerza recuperadora; pero, a causa de la velocidad adquirida, el cuerpo sobrepasa la posición de equilibrio y continúa su movimiento hacia la izquierda.

En cuanto ha pasado la posición de equilibrio, entra en juego de nuevo la fuerza recuperadora, dirigida ahora hacia la derecha, y, -- por lo tanto, el cuerpo va perdiendo velocidad con una aceleración negativa cuyo valor absoluto aumenta al aumentar la distancia del cuerpo a 0. Debido a esto el cuerpo se detendrá en algún punto situado a la izquierda de 0, y repetirá su movimiento en sentido opuesto.

Cada movimiento de vaivén tiene lugar en el mismo tiempo, y el movimiento tiene un alcance  $\pm A$  a cada lado de la posición de equilibrio. Si no existiera pérdida de energía por rozamiento el movimiento continuaría indefinidamente una vez iniciado. Al movimiento bajo la acción de una fuerza recuperadora y en ausencia de todo rozamiento, se le llama movimiento armónico simple.

El tipo de movimiento que se repite en intervalos de tiempos iguales se le llama periódico, y si el movimiento es hacia adelante y hacia atrás sobre la misma trayectoria, se le llama oscilatorio.

Una oscilación o vibración completa es el movimiento efectuado hasta volver al punto de partida, esto es, de  $a$  a  $b$  y volver a  $a$ . El período  $T$  del movimiento, es el tiempo empleado en realizar una vibración completa. La frecuencia  $f$ , es el número de vibraciones completas realizadas en la unidad de tiempo y es el valor recíproco del período, o sea:

$$f = \frac{1}{T}$$

Ecuación 4-1

La elongación  $x$  en un instante dado es la distancia a la posición de equilibrio, en dicho instante. La amplitud  $A$  es la elongación máxima.

Si la masa de la figura 4-1 oscila entre los límites fijos  $x_1$  y  $x_2$  con un movimiento armónico, experimenta un vaiven con respecto a su punto de equilibrio en el cual su energía potencial es mínima. La fuerza recuperadora que actúa sobre la masa en un instante cualquiera se obtiene a partir de la función de energía potencial,

$$F = - \frac{du}{dx}$$

siendo nula en la posición de equilibrio 0. Cuando la masa se encuentra a la izquierda de 0 la fuerza apunta hacia la derecha y viceversa. Esto se muestra en la figura 4-2.

Para una masa que oscila la energía mecánica total  $E$  será igual a la suma de su energía cinética y su energía potencial, esto es,

$$E = K + U, \quad \text{Ecuación 4-2}$$

donde  $E$  se mantiene constante, si no obra ninguna fuerza conservativa, como la fuerza de rozamiento.

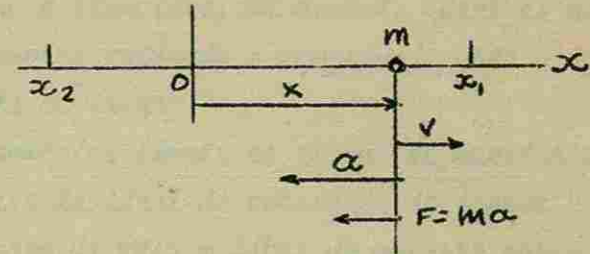


FIGURA 4-2

2.- El oscilador armónico simple.

Cuando una partícula de masa  $m$  oscila entre límites iguales, a ambos lados de su posición de equilibrio, tales como  $-x$  y  $x$ , se le llama oscilador armónico simple y su movimiento se le conoce con el nombre de movimiento armónico simple figura 4-3a.

En la figura 4-3b se representa gráficamente la energía potencial de la partícula, la cual varía de acuerdo con la ecuación,

$$U(x) = \frac{1}{2} Kx^2, \quad \text{Ecuación 4-3}$$

donde  $k$  es una constante, además se muestra la energía mecánica total. La fuerza que obra sobre la partícula está dada por la ecuación,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2} kx^2)}{dx} = -kx, \quad \text{Ecuación 4-4}$$

y se representa gráficamente en la figura 4-3c.

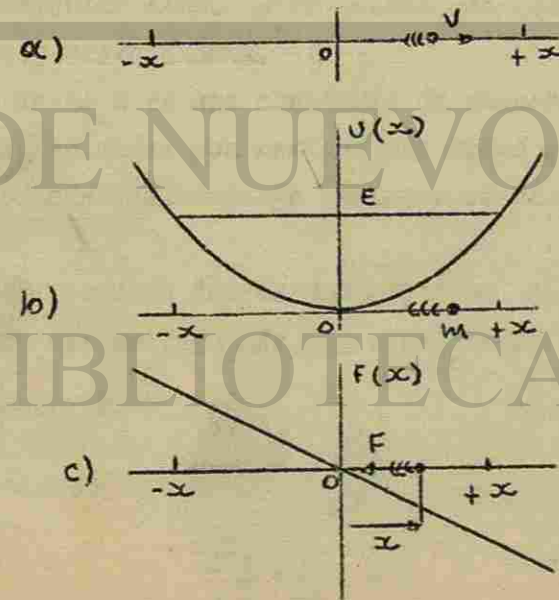
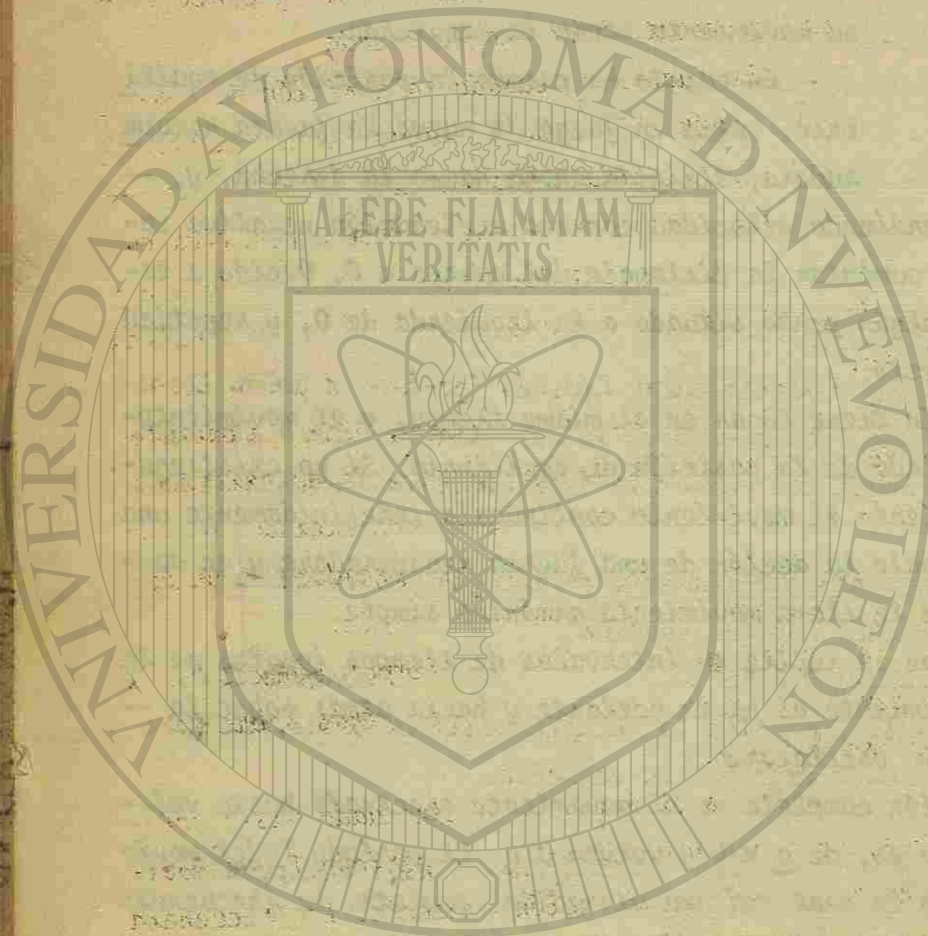


FIGURA 4-3.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En el movimiento armónico simple la energía potencial varía proporcionalmente al cuadrado de la elongación, y la fuerza que obra sobre la partícula es proporcional a la elongación pero con sentido opuesto.

La ecuación 4-3 es la expresión de la energía potencial para un resorte ideal, que se estira o comprime una distancia  $x$ . El resorte ideal es aquél en el cual la fuerza ejercida por el resorte estirado o comprimido está dada por  $F(x) = -kx$ , siendo  $k$  la constante de fuerza.

Un ejemplo de un oscilador armónico simple es el que se muestra en la figura 4-4, el cual consiste de un resorte ideal de constante de fuerza  $k$  en cuyo extremo se encuentra unido un cuerpo de masa  $m$  libre de moverse sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Cuando el resorte se deja libre toma la posición que se muestra en la figura 4-4a, donde la fuerza ejercida por el resorte es nula.

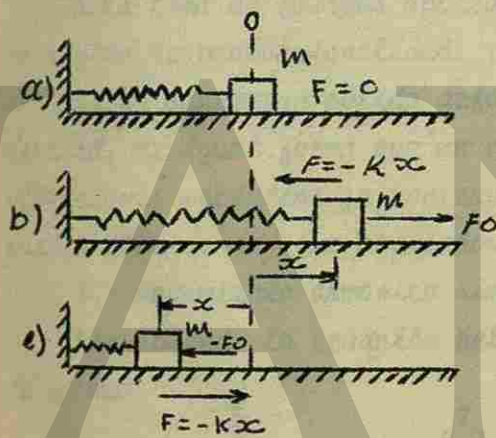


FIGURA 4-4

Si se aplica una fuerza  $F_0$ , el resorte se estira una distancia  $x$ , hacia la derecha, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda y está dada por  $F = -kx$ , (figura 4-4b). Bajo la acción de una fuerza  $-F_0$ , el resorte se comprime hacia la izquierda una distancia  $-x$ , la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la derecha y se da por  $F = -kx$ , figura 4-4c.

El movimiento de la masa que oscila es un movimiento armónico simple y la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo es una fuerza restauradora.

Como ya dijo antes  $k$  es una constante de proporcionalidad llamada constante del resorte. Sus unidades son newtons por metro y es una medida de la fuerza requerida para producir estiramiento unitario si el resorte fuera completamente extensible.

Si se aplica la segunda ley de Newton,  $F=ma$ , al movimiento de la figura 4-4, y sustituyendo  $-kx$  en lugar de  $F$  y escribiendo la aceleración  $a$  como  $\frac{d^2x}{dt^2}$  ( $=\frac{d^2x}{dt^2}$ ), se obtiene:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Ecuación 4-5

Al desarrollar esta ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación  $x$  con el tiempo  $t$  y de esta manera se conocerá el movimiento del cuerpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, óptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se le conoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad, vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si las vibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, se pueden considerar como osciladores armónicos simples.

### 3.- Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \quad \text{Ecuación 4-6}$$

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función  $x(t)$  que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que  $x$  sea una función de  $t$ , tal que su segunda derivada respecto a  $t$ , sea igual al valor negativo de la función misma ( $-x$ ), multiplicada por una constante  $\left(\frac{k}{m}\right)$ .

Esta circunstancia sugiere que  $x$  es una función trigonométrica de  $t$ . De donde se encuentra que por cálculo, la función seno o la función coseno poseen esta propiedad. Por ejemplo,  $\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$  y  $\frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t$ .

Si esta función se multiplica por una constante  $A$ , la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad \text{Ecuación 4-7.}$$



Al desarrollar esta ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación  $x$  con el tiempo  $t$  y de esta manera se conocerá el movimiento del cuerpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, óptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se le conoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad, vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si las vibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, se pueden considerar como osciladores armónicos simples.

### 3.- Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \quad \text{Ecuación 4-6}$$

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función  $x(t)$  que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que  $x$  sea una función de  $t$ , tal que su segunda derivada respecto a  $t$ , sea igual al valor negativo de la función misma ( $-x$ ), multiplicada por una constante  $\left(\frac{k}{m}\right)$ .

Esta circunstancia sugiere que  $x$  es una función trigonométrica de  $t$ . De donde se encuentra que por cálculo, la función seno o la función coseno poseen esta propiedad. Por ejemplo,  $\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$  y  $\frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t$ .

Si esta función se multiplica por una constante  $A$ , la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad \text{Ecuación 4-7.}$$

Para determinar las constantes  $A$ ,  $\omega$  y  $\phi$ , y saber si la ecuación 4-7 es la solución de la ecuación 4-6, es necesario encontrar la segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación 4-7. Esto es,  $\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$ .

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 4-6, se tiene:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi),$$

si se supone que la constante  $\omega$  es,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ecuación 4-8

se encuentra que,

$$x = A \cos(\omega t + \phi),$$

que es la solución adecuada para la ecuación de un oscilador armónico simple.

Como las constantes  $A$  y  $\phi$  siguen siendo arbitrarias, para cualquier valor de las mismas quedará satisfecha la ecuación 4-6 y se podrá determinar una gran variedad de movimientos para el oscilador, o sea, que ésta ecuación describe un grupo de movimientos posibles con algunas características comunes.

Si en la ecuación 4-7, el tiempo  $t$  se aumenta en  $\frac{2\pi}{\omega}$ , la función resulta,

$$x = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] = A \cos(\omega t + 2\pi + \phi)$$

$$x = A \cos(\omega t + \phi).$$

Significando esto, que la función simplemente se repite exactamente igual después de un tiempo  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Como  $\frac{2\pi}{\omega}$  es el período  $T$  del movimiento y sabiendo - que  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad \text{Ecuación 4-9.}$$

El período de oscilación es el mismo para todos los movimientos dados por la ecuación 4-6 y se determina por la masa  $m$  del cuerpo o partícula que vibra y por la constante de fuerza  $k$ . La frecuencia  $f$  del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, y se obtiene por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Ecuación 4-10.}$$

La frecuencia angular  $\omega$  se encuentra a partir de:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{Ecuación 4-11.}$$

Al utilizar las ecuaciones 4-9 o 4-10,  $m$  debe estar en slugs, kilogramos - o gramos y  $k$  en  $\frac{kg}{mt}$ ,  $\frac{nt}{mt}$  o  $\frac{dinas}{cm}$ . La frecuencia  $f$ , se expresa en  $\frac{ciclos}{seg}$ , y el período  $T$ , en  $\frac{seg}{ciclos}$ . Las unidades de la frecuencia angular  $\omega$  son  $\frac{radianes}{seg}$ .

La elongación  $x$  con respecto al punto de equilibrio, tiene un valor máximo  $A$ , que es la amplitud del movimiento. Puesto que  $A$  no ha sido determinada por -



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

la ecuación diferencial, son posibles movimientos con diferentes amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y período. La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.

El término  $(\omega t + \phi)$  se le llama fase del movimiento, y a la constante  $\phi$ , -- constante de fase. Si dos movimientos tienen la misma amplitud y frecuencia pero diferente fase. Por ejemplo, si  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . La ecuación 4-7 resulta:

$$x = A \cos(\omega t - \phi) = A \cos(\omega t - 90^\circ) = A \sin \omega t.$$

Esto es, la elongación es cero para el tiempo  $t=0$ . Si  $\phi=0$ , la elongación  $x = A \cos \omega t$  tiene un valor máximo para el tiempo  $t=0$ .

La amplitud  $A$  y la constante de fase  $\phi$  de la oscilación se determinan por la posición y la velocidad iniciales de la partícula. Sin embargo, una vez que se inicia el movimiento, la partícula sigue oscilando con una amplitud constante y una constante de fase para una cierta frecuencia fija, a menos que otras fuerzas alteren el sistema.

En la figura 4-5, se representa gráficamente la elongación  $x$  en función -- del tiempo  $t$  para diferentes movimientos armónicos simples. La figura 4-5a, representa los movimientos 1 y 2 que tienen igual amplitud y frecuencia, pero de fase diferente cuyo valor es  $\phi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . La figura 4-5b, muestra los movimientos 1 y 3 con igual frecuencia y constante de fase, pero con amplitud diferente que difiere en un factor de 2. La figura 4-5c, representa los movimientos 1 y 4 con igual amplitud y constante de fase, pero con diferente frecuencia, que difiere por un factor de  $\frac{1}{2}$  o en período por un factor de 2.

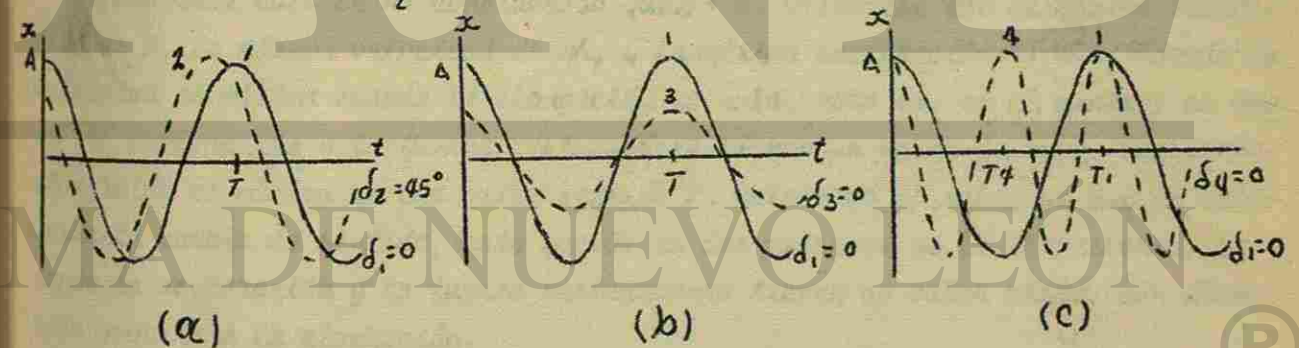


FIGURA 4-5

Para comprender mejor lo que es el movimiento armónico simple, es conveniente representar la elongación, velocidad y aceleración de la partícula que oscila por medio de gráficas en función del tiempo, como se hace en la figura 4-6; donde se han representado estas cantidades para la curva 1 de la figura 4-5.

Estas cantidades pueden considerarse como representaciones gráficas de las

ecuaciones:

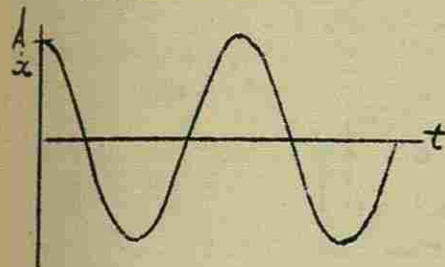
$$x = A \cos (\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$$

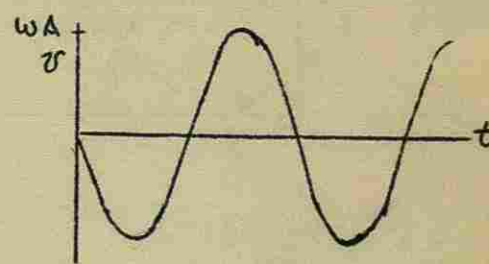
Ecuación 4-12.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi).$$

(a) ELONGACION.



(B) VELOCIDAD.



(C) ACELERACION.

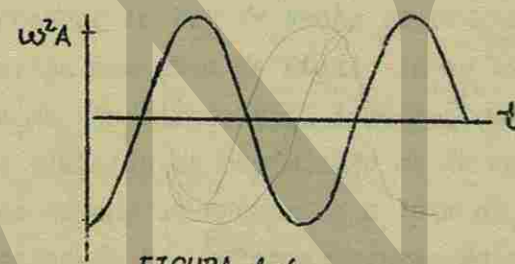


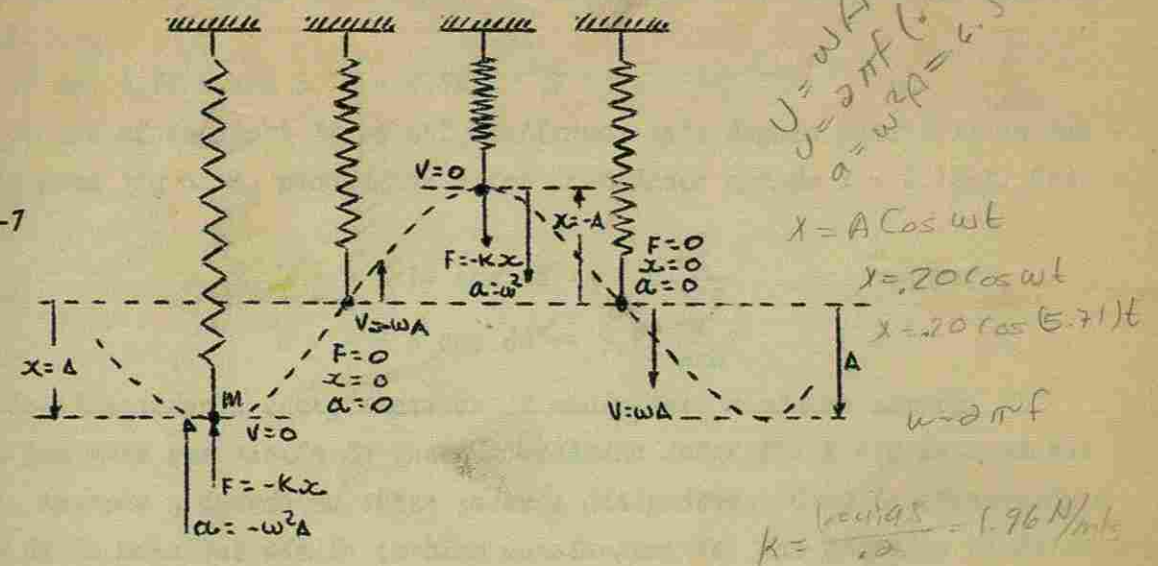
FIGURA 4-6.

Para este caso se ha considerado que  $\phi = 0$ . Obsérvese que la máxima elongación es  $A$ , la máxima velocidad es  $\omega A$ , y la máxima aceleración es  $\omega^2 A$ . Además la velocidad es máxima cuando la elongación es nula, esto es, en el centro; en donde la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor de cero. Cuando la elongación es máxima en cualquier sentido la velocidad es nula, ya que en este instante cambia de sentido, esto sucede en los extremos de la trayectoria, en donde la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor máximo con dirección opuesta a la elongación.

Cuando la partícula se mueve hacia el punto de equilibrio la velocidad aumenta y disminuye al acercarse a la máxima elongación.

En la figura 4-7, se muestra el movimiento de una partícula que oscila en el extremo de un resorte, y se representan los valores instantáneos de  $x$ ,  $v$  y  $a$ , para cuatro instantes.

FIGURA 4-7



Ejemplo 4-1.

Un resorte que obedece la Ley de Hooke se estira 20 cm cuando se cuelgan de él 40grs. Si se cuelga una masa de 60grs. en su extremo, y se tira 20 cm. a partir de su posición de equilibrio y se suelta, encontrar: (a) la frecuencia de oscilación; (b) la ecuación de movimiento de la masa; (c) la velocidad y la aceleración de la masa cuando se encuentra a 10cm de la posición de equilibrio.

A partir de la relación  $k = \frac{F}{x}$ , se encuentra la constante k del resorte; en virtud de que 40grs. lo alarga 20cm:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{0.040 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}}{0.20 \text{ mt.}} = 1.96 \frac{\text{NT}}{\text{Mt.}}$$

Utilizando las ecuaciones 4-9 y 4-10 se encuentra el período T, y la frecuencia f. De esta manera,

$$a) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.060}{1.96}} \text{ seg} = 1.1 \text{ seg.}$$

$$y, f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.1} = 0.91 \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \text{ (o hertz).}$$

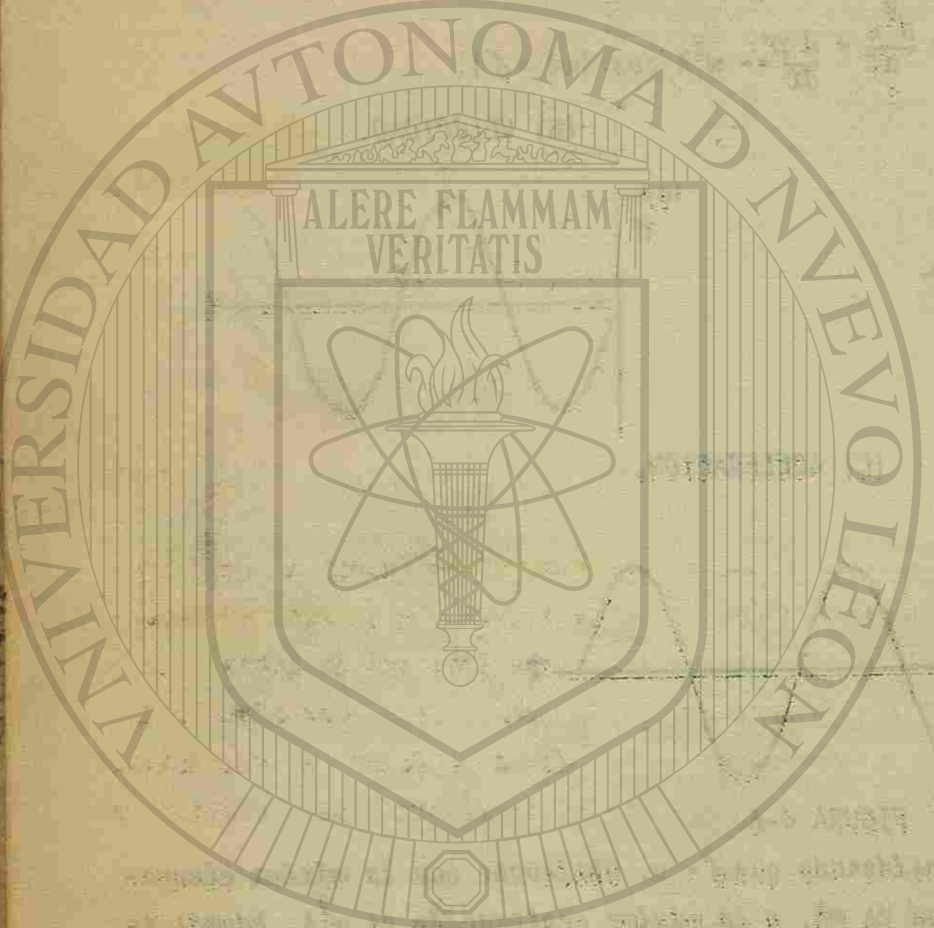
La amplitud del movimiento es 0.20mt, y tiene su desplazamiento máximo  $\text{ent}=0$ . Por lo tanto, x es una función coseno y es,

$$b) x = A \cos \omega t = A \cos 2\pi f t = 0.20 \cos 2\pi \times 0.91 t, \\ \text{que da, } x = 0.20 \cos 5.7 t \text{ mts.}$$

Para encontrar las ecuaciones de velocidad y aceleración, se obtienen la primera y segunda derivada de x con respecto a t. Esto es,

$$c) v = \frac{dx}{dt} = 0.20 (-5.7 \text{sen} 5.7 t) = -1.14 \text{sen } 5.7 t. \frac{\text{mt}}{\text{seg}}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -1.14 (5.7 \cos 5.7 t) = -6.5 \cos 5.7 t. \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para evaluarlas cuando  $x = 0.10\text{mt}$ , se sustituye este valor en la ecuación  $x$ , y se obtiene,

$$0.10 = 0.20 \cos 5.7t \quad \text{ó} \quad \cos 5.7t = 0.50,$$

donde se ve que el ángulo  $5.7t$  es  $60^\circ$ . Utilizando este ángulo para  $5.7t$  en las ecuaciones para  $v$  y  $a$ , se producirán estas cantidades cuando  $x = 0.10\text{mt}$ . Obteniendo:

$$v = -1.14 \sin 60^\circ = -1.0 \frac{\text{mt}}{\text{seg.}}$$

$$a = -6.5 \cos 60^\circ = -3.25 \frac{\text{mt}}{\text{seg.}^2}$$

#### 4.- Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple.

Para una masa que oscila la energía mecánica total  $E = K + U$  se conserva constante, siempre y cuando no obren fuerzas disipadoras. Como la elongación y velocidad de la masa que oscila cambian constantemente, las energías cinética y potencial también varían, pero la suma conserva su valor para cada instante.

La energía potencial  $U$  en un instante cualquiera, para el movimiento armónico simple, está dada por:

$$U = \frac{1}{2} kx^2,$$

si la elongación se da por  $x = A \cos (wt + \phi)$ , resulta:

$$U = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (wt + \phi),$$

la energía potencial varía desde un valor mínimo de cero, hasta un valor máximo de  $\frac{1}{2} kA^2$ .

La energía cinética  $K$  en un instante cualquiera es:  $K = \frac{1}{2} m v^2$ ,

aplicando las relaciones,

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA \sin (wt + \phi) \quad \text{y} \quad w^2 = \frac{k}{m}, \quad \text{se obtiene:}$$

$$K = \frac{1}{2} m w^2 A^2 \sin^2 (wt + \phi)$$

$$K = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 (wt + \phi),$$

Ecuación 4-14.

La energía cinética varía desde un valor mínimo de cero hasta un valor máximo de  $\frac{1}{2} k A^2$ .

Para obtener la energía mecánica total  $E$ , basta sumar las ecuaciones 4-13 y 4-14.

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 (wt + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 (wt + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2.$$

Ecuación 4-15.

En el punto de equilibrio, la energía potencial es cero, mientras que la energía cinética es máxima. Cuando la elongación es máxima la energía potencial alcanza su máximo valor, mientras que la energía cinética se reduce a cero.

En otras posiciones, en la cuales la energía cinética aumenta (o disminu--

ye); la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estas dos energías debe dar siempre un valor constante de  $\frac{1}{2} K A^2$ .

La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

y obtener

$$v^2 = \left(\frac{K}{m}\right) (A^2 - x^2), \text{ o sea,}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{K}{m} (A^2 - x^2)}, \quad \text{Ecuación 4-16}$$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto de equilibrio  $x=0$ , y que es nula en la posición de máxima elongación  $x=A$ .

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1, para la posición que indica la pregunta c; así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máxima.

Para esta posición  $x = 0.10 \text{ mt}$ ,  $v = -1 \frac{\text{MT}}{\text{seg}}$  y  $a = -3.25 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2}$

por lo tanto:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.060) (-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT.}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT.}$$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier etapa del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

$$E = K + U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398 \text{ nt-mt. (masa en } x=0.10\text{m).}$$

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} K x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.20)^2 = 0.0392 \text{ nt-mt. (masa en } x=A).$$

$$v_{\text{max}} = \omega A = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg.}$$

$$K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (0.060) (1.14)^2 = 0.039 \text{ nt-mt. (masa en } x=0).$$

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y péndulo físico. ®

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio. --

Que el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma sendidal depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de algunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-

ye); la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estas dos energías debe dar siempre un valor constante de  $\frac{1}{2} K A^2$ .

La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

y obtener

$$v^2 = \left(\frac{K}{m}\right) (A^2 - x^2), \text{ o sea,}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{K}{m} (A^2 - x^2)}, \quad \text{Ecuación 4-16}$$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto de equilibrio  $x=0$ , y que es nula en la posición de máxima elongación  $x=A$ .

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1, para la posición que indica la pregunta c; así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máxima.

Para esta posición  $x = 0.10 \text{ mt}$ ,  $v = -1 \frac{\text{MT}}{\text{seg}}$  y  $a = -3.25 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2}$

por lo tanto:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.060) (-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT.}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT.}$$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier etapa del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

$$E = K + U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398 \text{ nt-mt. (masa en } x=0.10\text{m).}$$

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} K x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.20)^2 = 0.0392 \text{ nt-mt. (masa en } x=A).$$

$$v_{\text{max}} = \omega A = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg.}$$

$$K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (0.060) (1.14)^2 = 0.039 \text{ nt-mt. (masa en } x=0).$$

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y péndulo físico. ®

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio. --

Que el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma sendidal depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de algunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-



de un hilo inextensible y sin peso. Cuando se separa hacia un lado de su posición de equilibrio y se abandona a sí misma, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad, con un movimiento periódico y oscilatorio.

La condición para que un cuerpo realice un movimiento armónico es que se encuentre sometido a una fuerza recuperadora  $F$ , directamente proporcional a la elongación  $x$ , y con dirección opuesta. La trayectoria de la masa del péndulo no es una recta, sino un arco de circunferencia de radio  $L$ , donde  $L$  es la longitud de la cuerda soporte. La elongación se refiere a distancias medidas a lo largo de este arco (figura 4-8). Por lo tanto, si  $F = -kx$  el movimiento será armónico simple, o bien, como  $x = L\theta$ , la condición se escribe  $F = -kL\theta$ .

En la figura 4-8 se representa un péndulo de longitud  $L$ , una partícula de

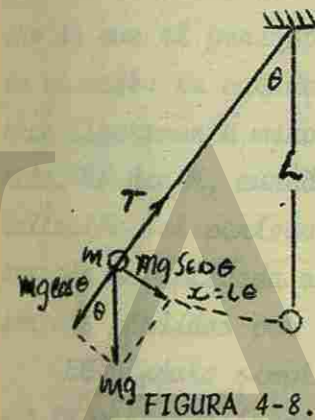


FIGURA 4-8.

masa  $m$ , formando un ángulo  $\theta$  con la vertical en el instante en que su elongación es  $x$ . Las fuerzas que se ejercen sobre la masa del péndulo son  $mg$ , la fuerza gravitacional, y la tensión en la cuerda  $T$ .

Elíjase dos ejes, uno en la dirección de la tangente y otro en la dirección del radio y descompongase el peso en sus componentes según estos ejes. La componente ra-

dial de la fuerza  $mg$  es la magnitud  $mg \cos \theta$  y la componente tangencial es la magnitud  $mg \sin \theta$ . Las fuerzas que provocan la aceleración centrípeta necesaria para conservar la partícula moviéndose en el arco del círculo son las componentes radiales. La componente tangencial es la fuerza recuperadora que obra sobre  $m$  y que tiende a regresarla a su posición de equilibrio y es,

$$F = -mg \sin \theta. \quad \text{Ecuación 4-17}$$

Por lo tanto, la fuerza recuperadora no es proporcional de desplazamiento angular  $\theta$ , sino a  $\sin \theta$ , y, en consecuencia, el movimiento no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo  $\theta$  es pequeño,  $\sin \theta$  es aproximadamente igual a  $\theta$  en radianes y la ecuación 4-17 se convierte en,

$$F = -mg\theta,$$

sabiendo que el desplazamiento a lo largo del arco es  $x = L\theta$ , se obtiene:

$$F = -mg \frac{x}{L} = -\frac{mg}{L} x.$$

Por lo tanto, la fuerza recuperadora es entonces, para elongaciones pequeñas, proporcional a la elongación y de dirección contraria a ella; que es exactamente el criterio que determina el movimiento armónico simple. La fracción  $\frac{mg}{L}$  representa la constante  $k$  en  $F = -kx$ . El período de un péndulo simple cuando su

amplitud es pequeña está dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{Ecuación 4-18}$$

Se puede demostrar que la ecuación general del período de una oscilación, para la elongación angular máxima  $\alpha$ , es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right).$$

El período se puede calcular con toda la aproximación que se desee tomando suficiente número de términos en la serie infinita. Cuando  $\alpha = 15^\circ$  (a cada lado de la posición central), el período exacto difiere en menos de 0.5% del período calculado por la ecuación 4-18.

La utilidad del péndulo para la medición del tiempo, está basada en el hecho de que el período es prácticamente independiente de la amplitud. Así, cuando se acaba la cuerda de un reloj, y por tanto, la amplitud de la oscilación se hace ligeramente menor, el reloj indicará todavía un tiempo aproximadamente exacto. Es decir, cuando las fuerzas amortiguadoras reducen la amplitud de la oscilación, el período permanece casi inalterado. En un reloj de péndulo, la energía es aplicada automáticamente mediante un mecanismo de escape para compensar las pérdidas por fricción.

El péndulo simple es, también, un dispositivo preciso y adecuado para medir la aceleración de la gravedad  $g$ , sin acudir a la caída libre en un cuerpo, puesto que  $L$  y  $T$  pueden medirse fácilmente.

#### Ejemplo 4-3.

Un péndulo simple de 2 mts. de longitud oscila con amplitud de 40cm. a) -- Calcúlese su velocidad en el punto más bajo. b) Calcúlese su aceleración en los extremos de la trayectoria. Primeramente se calcula el período de oscilación a partir de la ecuación 4-18, resultando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9.8}} = 2.85 \approx 3 \frac{\text{ciclos}}{\text{seg.}}$$

La velocidad en el punto más bajo, es cuando  $x = 0$ , y corresponde a la posición de equilibrio donde la velocidad es máxima. Aplicando la ecuación 4-12, se obtiene:

$$v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A = \left( \frac{2\pi}{3} \right) 0.40 = 0.837 \frac{\text{mt}}{\text{seg.}}$$

La aceleración en los extremos de la trayectoria, es cuando  $x=A$ , y son los puntos donde la aceleración es máxima. De la ecuación 4-12, se obtiene:

$$a_{\max} = \omega^2 A = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 A = \left( \frac{2\pi}{3} \right)^2 0.40 = 1.75 \frac{\text{mt}}{\text{seg.}^2}$$

El péndulo de torsión:

El péndulo de torsión se representa en la figura 4-9 y consiste en un disco suspendido de un alambre fijo al centro de masa del disco. La línea  $Op$  es la posición de equilibrio del disco. Al hacer girar el disco hasta el punto  $Q$ , el alambre se tuerce y ejerce un momento de rotación sobre el disco, tendiendo a regresarlo al punto  $P$ .

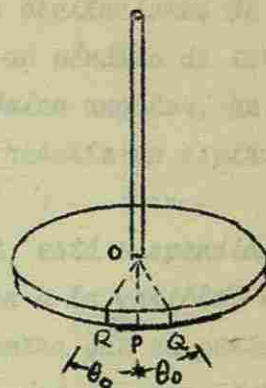


FIGURA 4-9

El péndulo de torsión obedece a la ley de Hooke, ya que para pequeñas torsiones el momento restaurador es proporcional a la torsión, o sea, al desplazamiento angular. Por lo tanto, para el momento restaurador se escribe,

$$\tau = -k\theta,$$

Ecuación 4-19

donde  $k$  es la llamada constante de torsión del sistema, y depende de las propiedades del alambre. El signo menos se debe a que el momento de rotación tiene dirección opuesta al desplazamiento angular  $\theta$ . La ecuación 4-19 es la condición del movimiento armónico angular simple.

La ecuación del movimiento para este sistema es:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

sustituyendo la ecuación 4-19 se tiene:

$$-k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta$$

Ecuación 4-20

La solución de la ecuación 4-20 es una oscilación armónica simple. En virtud de que la ecuación 4-20 para el movimiento armónico angular simple es similar en forma a la ecuación 4-6 del movimiento armónico lineal, de inmediato se puede escribir la solución para la vibración de torsión, teniendo como coordenada el ángulo  $\theta$ , se tiene:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

Ecuación 4-21

siendo  $\theta_0$  el máximo desplazamiento angular, o sea, la amplitud de la oscilación angular.

Por analogía con la ecuación 4-9, el período de oscilación es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Ecuación 4-22

Obviamente, puede usarse el período de un péndulo de torsión para medir momentos de inercia, o para determinar la constante de torsión  $k$  de cualquier ---

alambre.

Algunos instrumentos de laboratorio que funcionan por oscilaciones de torsión son, el galvanómetro, la balanza de Cavendish que es un péndulo de torsión. El balancín de un reloj es otro ejemplo de movimiento armónico angular, en este caso el momento de rotación restaurador lo proporciona un resorte en espiral.

Ejemplo 4-4.

Una varilla delgada, de masa 0.10kg y longitud 0.10m, está suspendida mediante un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. El alambre se tuerce y la varilla se pone a oscilar. Se encuentra que el período es de 2seg. Cuando se suspende en la misma forma por su centro de masa un cuerpo plano de figura de triángulo equilátero, se encuentra que el período es de 6seg. Encontrar el momento de inercia del triángulo con respecto a ese eje.

El momento de inercia de la varilla es  $\frac{ML^2}{12}$ . Por consiguiente,

$$I_{\text{varilla}} = \frac{(0.10\text{kg})(0.10\text{m})^2}{12} = 8.3 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

De la ecuación 4-22, se tiene,

$$\frac{T_{\text{varilla}}}{T_{\text{triángulo}}} = \left( \frac{I_{\text{varilla}}}{I_{\text{triángulo}}} \right)^{1/2}$$

o sea,

$$I_{\text{triángulo}} = I_{\text{varilla}} \left( \frac{T_{\text{t}}}{T_{\text{v}}} \right)^2,$$

$$I_{\text{triángulo}} = (8.3 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2) \left( \frac{6\text{seg}}{2\text{seg}} \right)^2 = 7.5 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

El péndulo físico.

El péndulo físico es cualquier péndulo real que no tiene toda la masa concentrada en un punto, puede ser cualquier cuerpo rígido que oscile en un plano vertical en torno de un eje que pasa por el cuerpo. La figura 4-10, representa un cuerpo de forma irregular que puede girar alrededor de un eje horizontal sin rozamiento que pasa por P y que se ha separado un ángulo  $\theta$  de su posición de equilibrio. La posición de equilibrio es, cuando el centro de masa del cuerpo C, se encuentra abajo de P, o sea, en la vertical que pasa por ese punto.

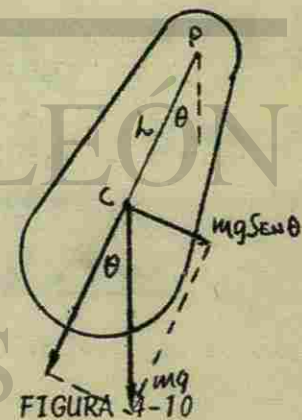


FIGURA 4-10

La distancia del eje al centro de masa es L, el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación es I, y la masa del péndulo m.

El momento restaurador en la posición representada en la figura es:

$$\tau = -mgL \sin \theta,$$

y se debe a la componente tangencial de la fuerza de gravedad.

El movimiento del péndulo no es armónico angular simple, puesto que  $\tau$  es proporcional a  $\text{sen } \theta$ , y no a  $\theta$ .

Si  $\theta$  es pequeño se puede reemplazar  $\text{sen } \theta$  por  $\theta$ , y

$$\tau = -mgL\theta.$$

Por lo tanto, el péndulo está sometido a un par recuperador elástico, con una constante  $k=mgL$ .

El período de oscilación de un péndulo físico que oscila con pequeña amplitud es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad \text{Ecuación 4-23.}$$

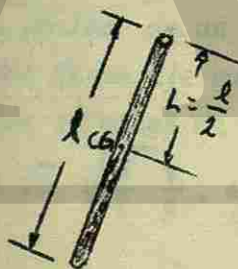
Cuando el péndulo físico, oscila con amplitudes mayores, sigue teniendo un movimiento armónico, pero no simple.

Esta forma de resolver el problema se aplica a un cuerpo de espesor uniforme de forma cualquiera y que el eje de rotación puede estar colocado en un punto cualquiera.

El péndulo físico se utiliza para determinaciones exactas de  $g$ .

Ejemplo 4-5.

Supongase que el cuerpo de la figura 4-10 sea una varilla de 1mt de largo que puede girar alrededor de uno de sus extremos. Si la masa de la varilla es de 1kg, determinar; a) el período  $T$ , y b) el momento de inercia  $I$  de la varilla



El momento de inercia  $I$ , está dado por,

$$I = \frac{1}{3} m l^2,$$

de la ecuación 4-23 se obtiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{1/3 m l^2}{m g l/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{9.8}} = 1.65 \text{ seg.}$$

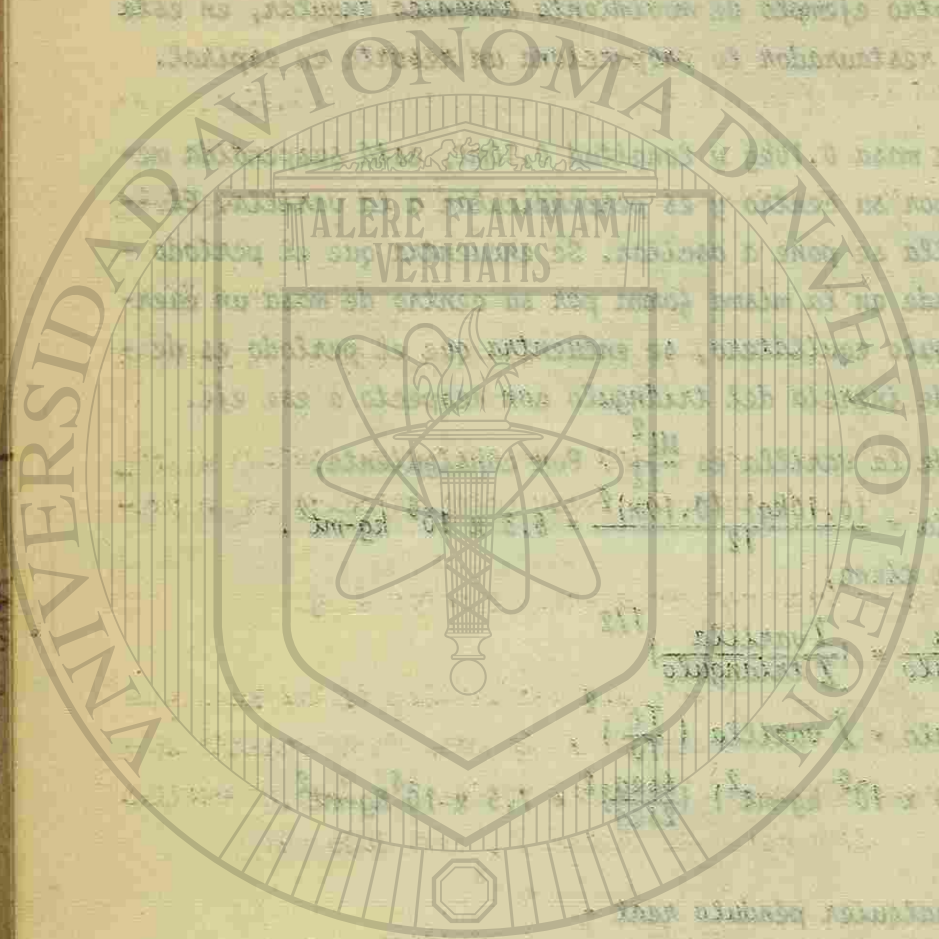
Despejando el valor de  $I$  en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$I = \frac{T^2 mgL}{4\pi^2} = \frac{(1.65 \text{ seg})^2 \times 1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ mt/seg}^2 \times 0.5 \text{ mt}}{4\pi^2}$$

$$I = 0.338 \text{ kg-mt}^2.$$

Ejemplo 4-6.

En la figura 4-11, se muestra un péndulo físico formado por un disco articulado en la periferia (P), junto a él se encuentra un péndulo simple equivalente que tiene el mismo período.



DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

Encontrar su período para oscilaciones pequeñas y hallar la longitud del péndulo simple equivalente.

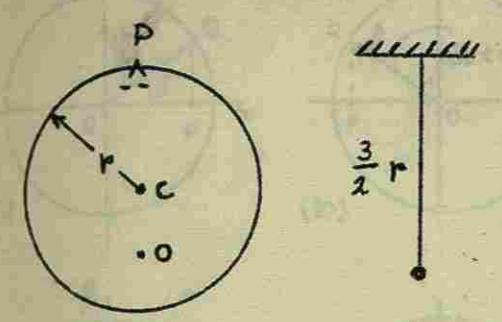


FIGURA 4-11

El momento de inercia de un disco con respecto a un eje que pasa por su centro es  $\frac{1}{2} M r^2$ , siendo  $r$  el radio y  $M$  la masa del disco. El momento de inercia con respecto al eje que esta en la periferia es

$$\bar{I} = \frac{1}{2} M r^2 + M r^2 = \frac{3}{2} M r^2$$

sustituyendo  $r$  en lugar de  $L$  en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{I}}{Mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} M r^2}{M g r}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}}$$

El péndulo simple que posee el mismo período tiene una longitud,

$$L = \frac{\bar{I}}{M r} = \frac{3}{2} r,$$

o sea, las tres cuartas partes del diámetro del disco. El centro de oscilación del disco articulado en  $P$  está, por consiguiente, en  $O$ , a una distancia  $\frac{3}{2} r$  abajo del punto de apoyo.

Ejemplo 4-7.

El período de un disco de radio 0.102mt que ejecuta oscilaciones pequeñas alrededor de un eje que pasa por su periferia se ha medido y es de 0.784seg. Encontrar el valor de  $g$ , la aceleración de la gravedad en ese sitio.

De  $T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{g}}$ , se obtiene:  $g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}$

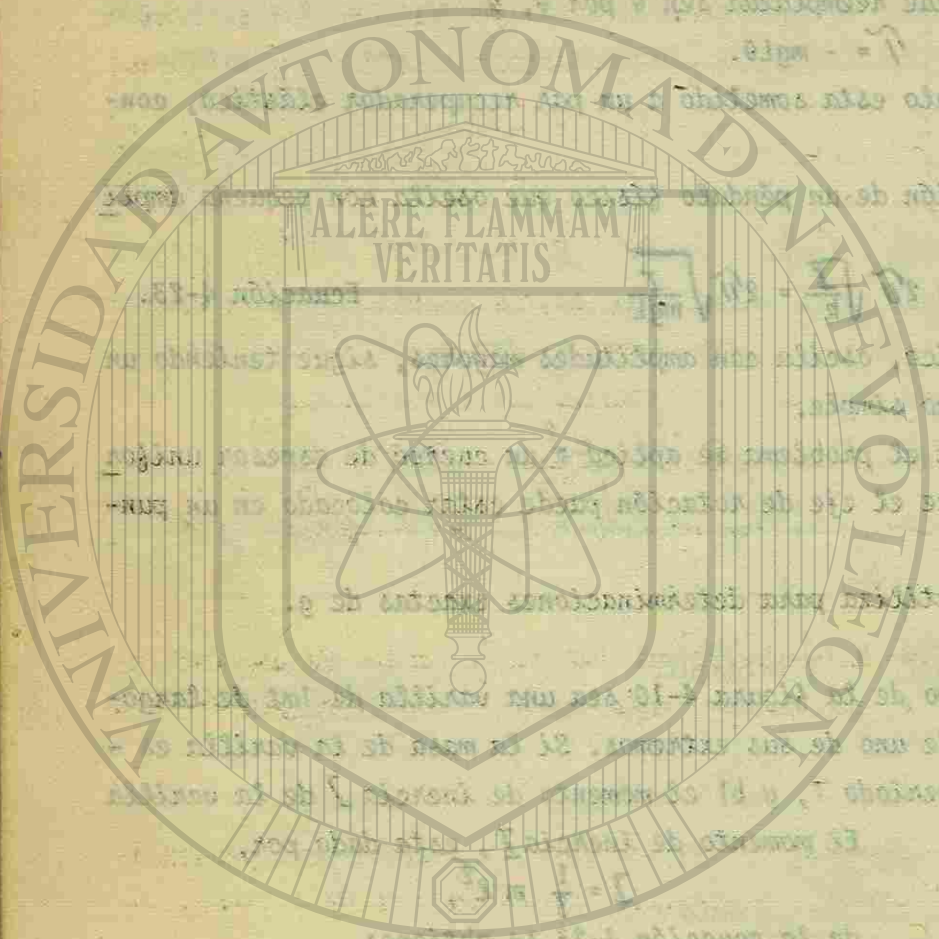
$$g = \frac{6^2 \times 0.102}{(0.784)^2} \frac{mt}{seg^2} = 9.8 \frac{mt}{seg^2}$$

6.- Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme.

El movimiento circular uniforme es una combinación de movimientos armónicos simples, fenómeno que ocurre con frecuencia en el movimiento ondulatorio.

La relación entre el movimiento armónico simple en una línea recta y el movimiento circular uniforme, es de importancia ya que describe algunas características del movimiento armónico simple. Además da un significado geométrico sencillo de la frecuencia angular  $w$  y de la constante de fase  $\phi$ .

Haciendo uso de un método geométrico sencillo, considerese el tipo de movimiento determinando en la figura 4-12; en donde  $Q$ , es un punto que se mueve en



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL

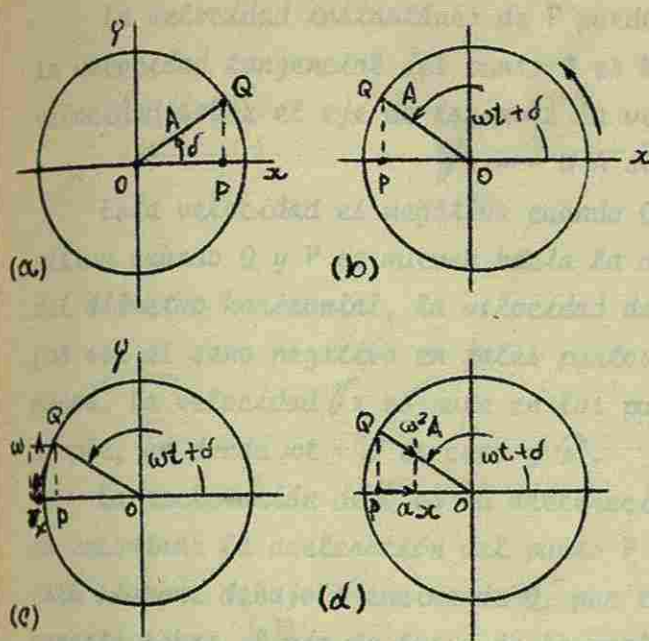


FIGURA 4-12

una circunferencia de radio  $A$ , - con una velocidad angular cons-- tante  $w$  ( $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ ), y  $P$  la proyección de  $Q$  sobre el diámetro horizon-- tal. Cuando el punto  $Q$  gira en -- torno del círculo, el punto  $P$  se mueve hacia adelante y hacia a-- trás sobre una recta horizontal, encontrándose siempre en la mis-- ma vertical que  $Q$ . Por consiguiente, la elongación-- de  $P$  es siempre igual a la absci-- sa de  $Q$  (figura 4-12b); la velo-- cidad de  $P$  es igual en todo ins-- tante a la proyección sobre el -- diámetro horizontal de la velocidad de  $Q$  (figura 4-12c); y la aceleración de  $P$  es igual a la componente sobre el mismo diámetro de la aceleración de  $Q$  (figura 4-12d).

Si los puntos  $P$  y  $Q$  coinciden en el instante  $t = 0$ , el ángulo formado por el radio  $OQ$  y el diámetro horizontal es igual a  $\phi$ . Al transcurrir un tiempo --- cualquiera  $t$ , el ángulo que forma ahora  $OQ$  con el diámetro horizontal es  $(wt + \phi)$  si el punto  $Q$  se mueve con velocidad angular constante.

Por lo tanto, la elongación de  $P$  en cualquier instante  $t$  (véase figura 4-12 b) es,

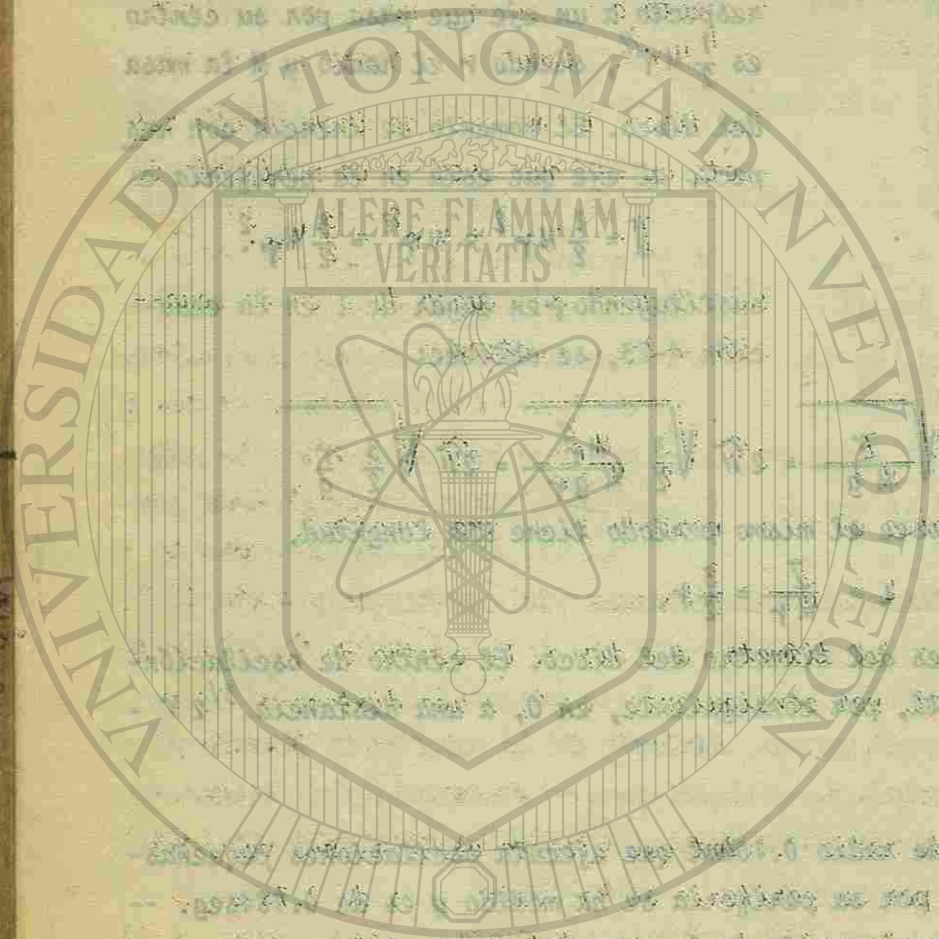
$$x = A \cos (wt + \phi). \quad \text{Ecuación 4-24}$$

El punto  $P$  se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje las--  $x$ . Es por esto que, el movimiento armónico simple se puede describir como la -- proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

La frecuencia angular  $w$  del movimiento armónico simple del punto  $P$  es la -- misma que la velocidad angular del punto  $Q$ . La frecuencia del movimiento armóni-- co simple es la misma que el número de revoluciones por unidad de tiempo del -- punto  $Q$ .

Esto es  $f = \frac{w}{2\pi}$ , o bien,  $w = 2\pi f$ . El punto  $P$  efectúa una vibración com-- pleta por cada revolución de  $Q$ . Por lo tanto,  $T = \frac{2\pi}{w}$ , o bien,  $w = \frac{2\pi}{T}$ .

El ángulo  $(wt + \phi)$  se denomina ángulo de fase o, sencillamente, fase del -- movimiento armónico simple, y es el ángulo que forma  $OQ$  con el diámetro horizon-- tal en un tiempo cualquiera  $t$ . La amplitud del movimiento armónico simple es --



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TOLUCA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

igual al radio de la circunferencia.

La velocidad instantánea de P puede hallarse con ayuda de la figura 4-12c. La velocidad tangencial del punto Q es  $W A$ ; por lo tanto, la componente de esta velocidad sobre el eje de las  $x$  es la velocidad de P. Esto es:

$$v_x = -W A \operatorname{sen}(wt + \phi).$$

Esta velocidad es negativa cuando Q y P se mueven hacia la izquierda y positiva cuando Q y P se mueven hacia la derecha. Cuando Q se halla por debajo -- del diámetro horizontal, la velocidad de P está dirigida hacia la derecha, pero por ser el seno negativo en tales puntos, se precisa anteponer también el signo menos. La velocidad  $v_x$  es nula en los puntos extremos del movimiento armónico simple, en donde  $wt + \phi$  es cero y  $\pi$ .

La aceleración de Q es su aceleración normal  $w^2 A$  (véase figura 4-12d). Para encontrar la aceleración del punto P se utiliza de nuevo el hecho de que P está siempre debajo o encima de Q, por lo que su aceleración es igual a la componente sobre el eje de las  $x$  de la aceleración del punto Q (figura 4-12d). Por lo tanto,

$$a_x = -w^2 A \cos(wt + \phi).$$

La aceleración  $a_x$  es nula en los puntos medios del movimiento armónico simple, en donde  $wt + \phi = \frac{\pi}{2}$ , o bien,  $\frac{3\pi}{2}$ .

En conclusión se obtiene que la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro cualquiera da un movimiento armónico simple. Además, el movimiento circular uniforme se puede describir como la combinación de dos movimientos armónicos simples que se efectúan sobre rectas perpendiculares, que tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase  $90^\circ$ . Esto significa que el punto Q se puede proyectar también sobre el eje  $y$ , obteniendo los mismos resultados con la diferencia de que  $\phi$  será  $\phi - \frac{\pi}{2}$  y entonces  $\cos(wt + \phi)$  se transforma en  $\operatorname{sen}(wt + \phi)$ , quedando la elongación como:

$$y = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \quad \text{Ecuación 4-25}$$

Cuando una componente se encuentra en el punto de máxima elongación, la otra componente se encuentra en el punto de equilibrio. Combinando las componentes de las ecuaciones 4-24 y 4-25, se obtiene:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = w A.$$

De igual forma se puede hacer una relación entre las componentes de la velocidad y las componentes de la aceleración, obteniendo las siguientes relaciones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = w A.$$



$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 A.$$

Correspondiendo estas relaciones a las magnitudes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración del movimiento circular uniforme.

Ejemplo 4-8.

En el ejemplo 4-1 se considero un cuerpo que ejecutaba un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento era:

$$x = 0.20 \cos 5.7t$$

Este movimiento se puede representar también como la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro horizontal.

(a) Dar las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente. La componente sobre el eje de las x del movimiento circular está dada por,

$$x = A \cos (\omega t + \phi)$$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio  $A = 0.20\text{mts}$ , la fase inicial o constante de fase debe ser  $\phi = 0$ , y la velocidad angular debe ser  $\omega = 5.7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ , para obtener la ecuación  $x = 0.20 \cos 5.7t$  para la proyección horizontal.

(b) Mediante el movimiento del punto Q determinese el tiempo requerido para que el cuerpo llegue al punto situado a la mitad de la distancia al centro del movimiento a partir de su posición inicial.

Al moverse el cuerpo la mitad de la distancia hacia adentro, el punto Q se mueve un ángulo  $\omega t = 60^\circ$  (véase figura 4-13). La velocidad angular es constante y de un valor de  $5.7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ , de manera que el tiempo que se requiere para que se mueva  $60^\circ$  es:

$$t = \frac{60^\circ}{\omega} = \frac{\pi/3 \text{ radianes}}{5.7 \text{ rad/seg.}} = \frac{\pi}{17.1} \text{ seg.}$$

$$t = 0.183 \text{ seg.}$$

El tiempo se puede calcular también directamente a partir de la ecuación del movimiento. Así,

$$x = 0.20 \cos 5.7t \text{ y } x = \frac{A}{2} = \frac{0.20}{2} = 0.10$$

de donde,

$$0.10 = 0.20 \cos 5.7t, \text{ o sea,}$$

$$5.7t = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{17.1} = 0.183 \text{ seg.}$$

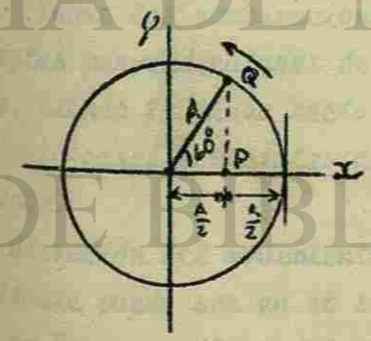


FIGURA 4-13

7.- Combinaciones de movimientos armónicos.

El movimiento que resulta al combinar dos movimientos armónicos simples -- perpendiculares es una suma de dos oscilaciones independientes. Si se considera el caso en el cuál las frecuencias de las vibraciones son iguales, tales como,

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \alpha).$$

Ecuación 4-26

Los movimientos sobre cada eje tienen diferentes amplitudes y constantes de fase.

Cuando las constantes de fase son iguales, esto es que  $\phi = \alpha$ , el movimiento resultante es una línea recta. esto se comprueba analíticamente, haciendo -- uso de las ecuaciones 4-26.

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \phi),$$

despejando el valor del coseno en la ecuación de  $x$ , y sustituyendolo en la ecuación de  $y$ , se obtiene:

$$y = \left(\frac{A_y}{A_x}\right) x,$$

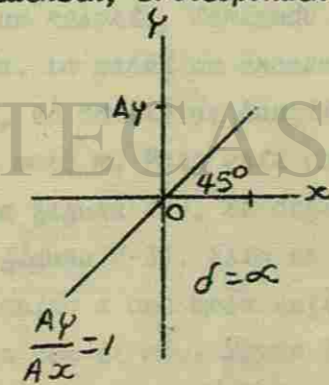
que es la ecuación para una línea recta, de pendiente  $\frac{A_y}{A_x}$ .

En la figura 4-14 a y b se muestran los movimientos resultantes para los -- casos en que,  $\frac{A_y}{A_x} = 1$  y  $\frac{A_y}{A_x} = 2$ . En estos casos, las amplitudes de  $x$  y de  $y$  alcanzan un máximo al mismo tiempo, así como también alcanzan un mínimo al mismo --- tiempo y sus constantes de fase son iguales, es decir, están en fase.

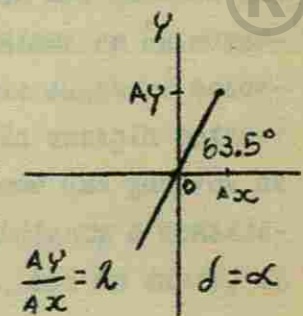
Cuando las constantes de fase no son iguales, el movimiento que resulta no es una línea recta, por ejemplo, si difieren en  $\pi/2$ , la máxima elongación de  $x$  ocurrirá cuando la elongación de  $y$  sea cero y viceversa. Si las amplitudes son iguales, el movimiento que resulta es circular y si las amplitudes son diferentes, el movimiento que resulta es elíptico. En la figura 4-14c y d, se muestran los casos en los cuales  $\frac{A_y}{A_x} = 1$  y  $\frac{A_y}{A_x} = 2$ , para  $\phi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ . En la figura 4-14 e y f, se muestran los casos en los cuales  $\frac{A_y}{A_x} = 1$  y  $\frac{A_y}{A_x} = 2$ , para  $\phi = \alpha - \frac{\pi}{4}$ .

Todas las combinaciones que se puedan hacer de dos movimientos armónicos -- simples perpendiculares de igual frecuencia, corresponden a trayectorias elípticas, siendo la línea recta y el círculo casos especiales de una elipse.

la dirección del movimiento resultante puede ser en el sentido de las manecillas del reloj -- o en sentido contrario, todo de -- pende de la componente que lleve la fase adelantada.



(a)



(b)

En el osciloscopio se puede formar estas figuras. En este aparato, los electrones son desviados mediante dos campos eléctricos perpendiculares entre sí. - Las intensidades de campo tienen alternaciones senoidales de igual frecuencia, pero se puede variar sus fases y amplitudes. - De esta manera los electrones trazan sobre una pantalla fluorescente las diversas figuras indicadas. Otra manera de formar estas figuras es a partir de un péndulo que oscile con una amplitud pequeña pero que no este confinado a un plano vertical. - Estas combinaciones de dos movi-

mientos armónicos simples perpendiculares con igual frecuencia son muy importantes en el estudio de la luz polarizada y de los circuitos de corriente alterna.

Las combinaciones de movimientos armónicos simples con igual frecuencia en la misma dirección, pero con diferentes amplitudes y fases, son importantes en el estudio de la difracción e interferencia de la luz, sonido y radiaciones --- electromagnéticas.

#### 8.- Oscilaciones de un cuerpo doble.

El oscilador armónico simple de la figura 4-4, consiste en una masa  $m$  que esta unida a una pared firme mediante un resorte de constante de fuerza  $k$ . La pared se encuentra rígidamente ligada a la Tierra, por lo tanto, es un sistema de cuerpo doble, unido por medio de un resorte, teniendo uno de los cuerpos una masa que se puede considerar infinita. La pared se encuentra firme en un marco de referencia inercial, por lo tanto, el cambio de longitud que sufra el resorte será igual al desplazamiento de la masa  $m$ . Para este caso, la energía potencial  $U(x)$  del sistema oscilante de la figura 4-4, se define como una función de la elongación  $x$  de la masa  $m$  (véase figura 4-3). Esto es equivalente a considerar que un extremo del resorte está unido a una masa infinita, por lo tanto, el alargamiento del resorte se determina por el movimiento de la masa  $m$ .

Para el sistema oscilante de un cuerpo doble, en el cual no se puede consi-

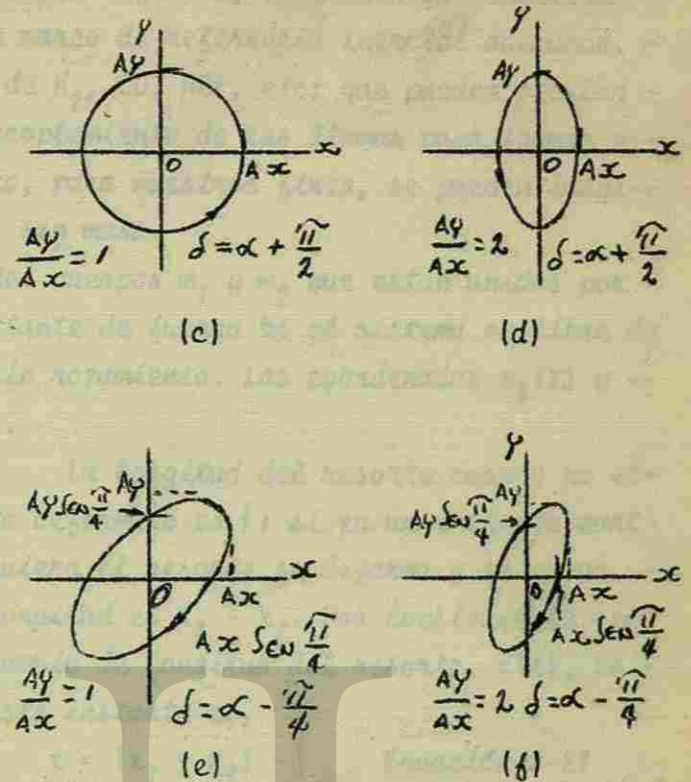


FIGURA 4-14

derar que la masa de uno de los cuerpos sea infinita, se tienen que analizar -- los movimientos de ambos cuerpos en un marco de referencia inercial adecuado. -- Por ejemplo, las moléculas diatómicas de H<sub>2</sub>, CO, HCl, etc; que pueden oscilar -- a lo largo de su eje de simetría. El acoplamiento de los átomos para formar es-- tas moléculas es electromagnético, pero, para nuestros fines, se pueden imagi-- nar unidos por un resorte muy pequeño, sin masa.

En la figura 4-15a, se muestran dos cuerpos m<sub>1</sub> y m<sub>2</sub> que estan unidos por -- medio de un resorte (sin masa) de constante de fuerza k; el sistema es libre de -- oscilar en una superficie horizontal sin rozamiento. Las coordenadas x<sub>1</sub>(t) y -- x<sub>2</sub>(t) indican los extremos del resorte.

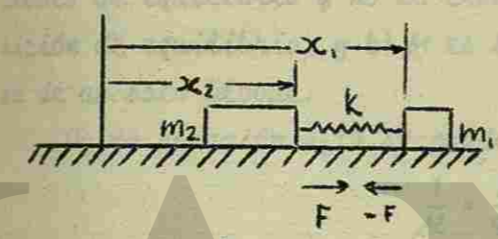


FIGURA 4-15

La longitud del resorte cuando no es-- ta deformado es l; si en un instante cual-- quiera el resorte se deforma y su nueva -- longitud es x<sub>1</sub> - x<sub>2</sub>. Por consiguiente, el-- cambio de longitud del resorte, x(t), en -- este instante es,

$$x = (x_1 - x_2) - l \quad \text{Ecuación 4-27}$$

Cuando el resorte se estira x es po-- sitiva cuando tiene su longitud normal x=0 y x es negativa cuando el resorte se com--

prime. En la figura 4-15a se supone que el resorte esta estirado, y se muestra la fuerza F que ejerce el resorte sobre m<sub>2</sub> y la fuerza -F que obra sobre m<sub>1</sub>. Estas dos fuerzas son iguales y opuestas y tienen la misma magnitud F = kx.

Aplicando la segunda ley de Newton, F = ma, a las masas m<sub>1</sub> y m<sub>2</sub>, se tiene:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - kx \quad \text{y} \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = + kx$$

multiplicando la primera ecuación por m<sub>2</sub>, la segunda por m<sub>1</sub> y restando, se ob-- tiene:

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - m_2 kx - m_1 kx,$$

que también se puede escribir así:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = - kx. \quad \text{Ecuación 4-28}$$

Si la llama masa reducida del sistema a la cantidad  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , y si se re-- representa por M; esto es;



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ecuación 4-29

Como  $l$  es constante,  $\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = \frac{d^2}{dt^2}x$  y la ecuación 4-28 se transforma

en:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0$$

Ecuación 4-30

Esta ecuación es igual a la ecuación 4-5 que se obtuvo para la oscilación del cuerpo solo de la figura 4-4. Las diferencias son que a)  $x$  en la ecuación 4-30 es el desplazamiento relativo de los dos bloques con respecto a sus posiciones de equilibrio y no la elongación de un bloque solo con respecto a su posición de equilibrio, y b)  $\mu$  es la masa reducida del par de bloques y no la masa de un solo bloque.

De la ecuación 4-29 se puede escribir,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

lo cual nos dice que para masas finitas,  $\mu$  es siempre menor que  $m_1$  o  $m_2$ ; de ahí viene el nombre de masa reducida.

La ecuación 4-30 conduce, por el mismo proceso de derivación que se siguió en la ecuación 4-5, a las siguientes fórmulas:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \text{ o bien, } T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}, \text{ Ecuación 4-31}$$

que determinan la frecuencia y el período de oscilación del sistema de la figura 4-15a. Este sistema tiene la misma frecuencia y período que un solo bloque de masa  $\mu$ , unido por medio de un resorte similar a una pared rígida, como se muestra en la figura 4-15b. Por lo tanto, la oscilación del cuerpo doble de la figura 4-15a es equivalente a la oscilación del cuerpo solo de la figura 4-15b. El concepto de masa reducida tiene bastante aplicación en la física cuántica y en la física del estado sólido.

Resolviendo la ecuación 4-30, como en el artículo 3, se obtienen las siguientes relaciones:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Estas ecuaciones son iguales a las ecuaciones 4-12 solo que para este caso  $x$ ,  $v$  y  $a$  son valores relativos de la elongación, la velocidad y la aceleración,

de los dos bloques. Así,

$$x = (x_1 - x_2) - l,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1 - v_2,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = a_1 - a_2,$$

Ecuación 4-32

en las cuales los subíndices se refieren a los dos bloques.

La energía potencial del oscilador armónico simple de cuerpo doble está dada por  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$  y es una característica del sistema en conjunto, puesto que  $x$  depende de las posiciones de ambos bloques.

#### 9.- Movimiento armónico amortiguado.

En las secciones precedentes se estudió la oscilación de varios sistemas, considerando que las fuerzas de rozamiento se encontraban ausentes, en la práctica esto no es cierto, porque si así fuera, un péndulo suspendido de un resorte oscilaría indefinidamente. Se sabe que si el sistema oscilatorio se deja libre, oscilará con amplitud decreciente y finalmente se detendrá, debido al rozamiento. Se dice que el movimiento está amortiguado por el rozamiento y recibe el nombre de movimiento armónico amortiguado. En la mayoría de los casos prácticos, la fuerza de rozamiento se debe a la resistencia del aire y al rozamiento interno del resorte. La fuerza de rozamiento por lo general depende de la velocidad. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento no es constante, sino proporcional a la velocidad del cuerpo y de sentido opuesto a ésta.

En la figura 4-16 se muestra un ejemplo de un oscilador armónico amortiguado, en el cuál un disco se encuentra fijo a la masa y ahogado en un fluido que ejerce una fuerza amortiguadora  $-b \frac{dx}{dt}$ . La fuerza elástica restauradora es  $-kx$ .

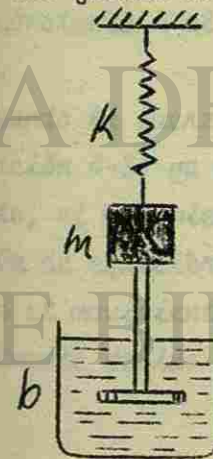


FIGURA 4-16

A partir de la segunda ley de Newton,  $F = ma$ , se determina la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple amortiguado, siendo  $F$  la suma de la fuerza restauradora  $-kx$  y la fuerza amortiguadora  $-b \frac{dx}{dt}$ . Esto es,

$$F = ma,$$

$$\text{o sea, } -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o bien,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Ecuación 4-33

La solución de esta ecuación diferencial se dará sin demostrar (ya que el estudiante hasta este nivel no tiene experiencia con ecuaciones diferenciales) y es válida cuando  $b$  es pequeña.

$$x = Ae^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \phi) \quad \text{Ecuación 4-34}$$

siendo 
$$\omega' = 2\pi \tilde{f}' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \text{Ecuación 4-35}$$

En la figura 4-17 se representa gráficamente la ecuación 4-34, en ella se ha trazado la elongación  $x$  en función del tiempo  $t$  para el movimiento oscilatorio de poca amortiguación.

Cuando existe rozamiento, la frecuencia es más pequeña y el período es mayor. Debido al rozamiento el movimiento se hace mas despacio. Cuando no existe rozamiento,  $b = 0$  y  $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$  que viene siendo  $\omega$ , la frecuencia angular del movimiento no amortiguado. Cuando hay rozamiento,  $\omega'$  es menor que  $\omega$ .

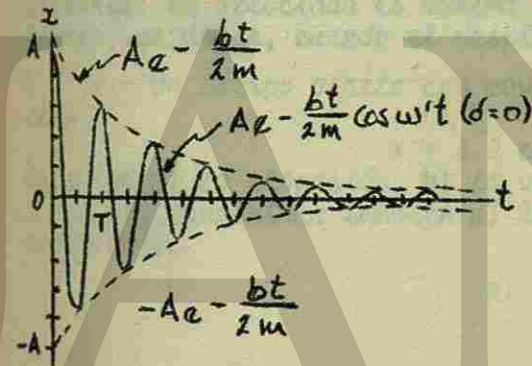


FIGURA 4-17

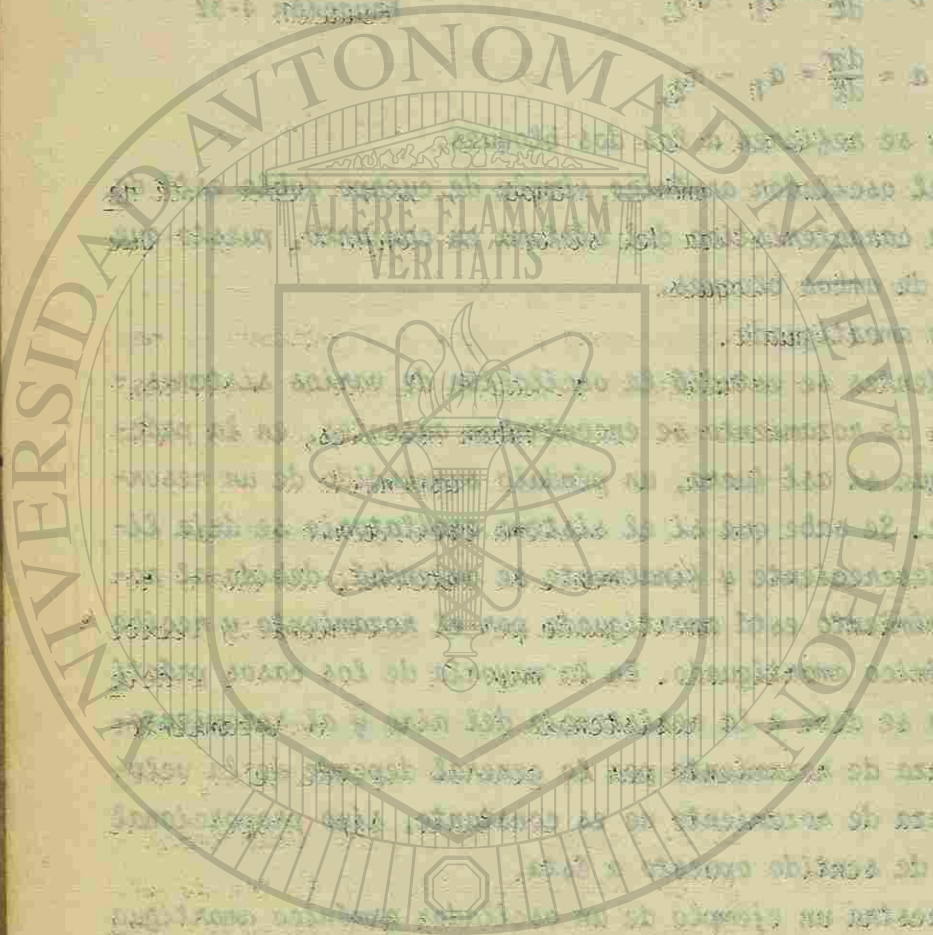
En el movimiento armónico amortiguado, la amplitud del movimiento va disminuyendo continuamente hasta llegar a un valor cero.

Al intervalo de tiempo  $\tilde{T}$ , en el cual la amplitud se reduce a la fracción  $\frac{1}{e}$  del valor inicial, se le llama vida media de la oscilación. Como el factor de amplitud  $Ae^{-\frac{bt}{2m}}$ , por consiguiente,  $\tilde{T} = \frac{2m}{b}$

Si no existiera rozamiento  $b$  sería igual a cero y la amplitud tendría un valor constante  $A$  al transcurrir el tiempo y la vida de la oscilación sería infinita.

Cuando la fuerza de rozamiento es muy grande,  $b$  también es muy grande y la Ecuación 4-34 ya no es solución válida de la ecuación del movimiento. Por lo tanto, el movimiento ya no es periódico y el cuerpo simplemente vuelve a su posición de equilibrio después de soltarlo de su posición inicial  $A$ .

En el movimiento armónico amortiguado la energía del oscilador se disipa gradualmente debido al rozamiento y se reduce a cero al cabo de un tiempo.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS



FIGURA 4-18

## PROBLEMAS

1.- La posición de una masa de 200 g al extremo de un resorte está dada -- por

$$x = 30 \text{ sen}(0.63t + \pi/2) \text{ cm}$$

Encontrar: a) la amplitud, b) el período, c) la frecuencia, d) el ángulo de fase de la vibración, así como, e) la constante del resorte.

R: 30cm; 10 seg; 0.10 ciclos/seg;  $\pi/2$ ; 0.079 nt/mt.

2.- Para la vibración descrita en el problema 1, encontrar las expresiones de velocidad y de aceleración de la masa. Utilizando las expresiones de aceleración, encontrar la constante del resorte.

R:  $18.9 \cos(0.63t + \pi/2)$ ;  $-11.9 \text{ sen}(0.63t + \pi/2)$ ; 0.079 nt/mt.

3.- La ecuación de movimiento de un objeto es

$$y = 2.0 \cos(0.5t + \pi/4) \text{ mt.}$$

Encontrar: a) su aceleración máxima, b) su velocidad máxima. ¿Dónde se encuentra el objeto en el momento de estos máximos? c) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando se encuentra a 1.20m de su posición de equilibrio?

R:  $0.50 \text{ mt/seg}^2$ ;  $1.0 \text{ mt/seg}$  (la aceleración es máxima en los extremos de la trayectoria; la velocidad es máxima cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando el desplazamiento es mínimo);  $0.8 \text{ mt/seg}$ .

4.- Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = 6.0 \cos(3\pi t + \pi/3) \text{ mt.}$$

Calcular A) la elongación, b) la velocidad y c) la aceleración para el tiempo  $t = 2 \text{ seg}$ . Encontrar también d) la fase, e) la frecuencia  $f$ , y f) el período de movimiento.

R: a) 3 mt;  
b)  $-49 \text{ mt/seg}$ ;  
c)  $-267 \text{ mt/seg}^2$ ;  
d)  $\pi/3 \text{ rad}$ ;  
e) 1.5 ciclos/seg;  
f)  $2/3 \text{ seg}$ .

5.- Un bloque de 4.0kg estira un resorte 16cm a partir de su posición no deformada. Se quita el bloque y se suspende un cuerpo de 0.50kg del mismo resorte. Si entonces se suelta el resorte, ¿Cuál es su período de movimiento?

R: 0.28seg.

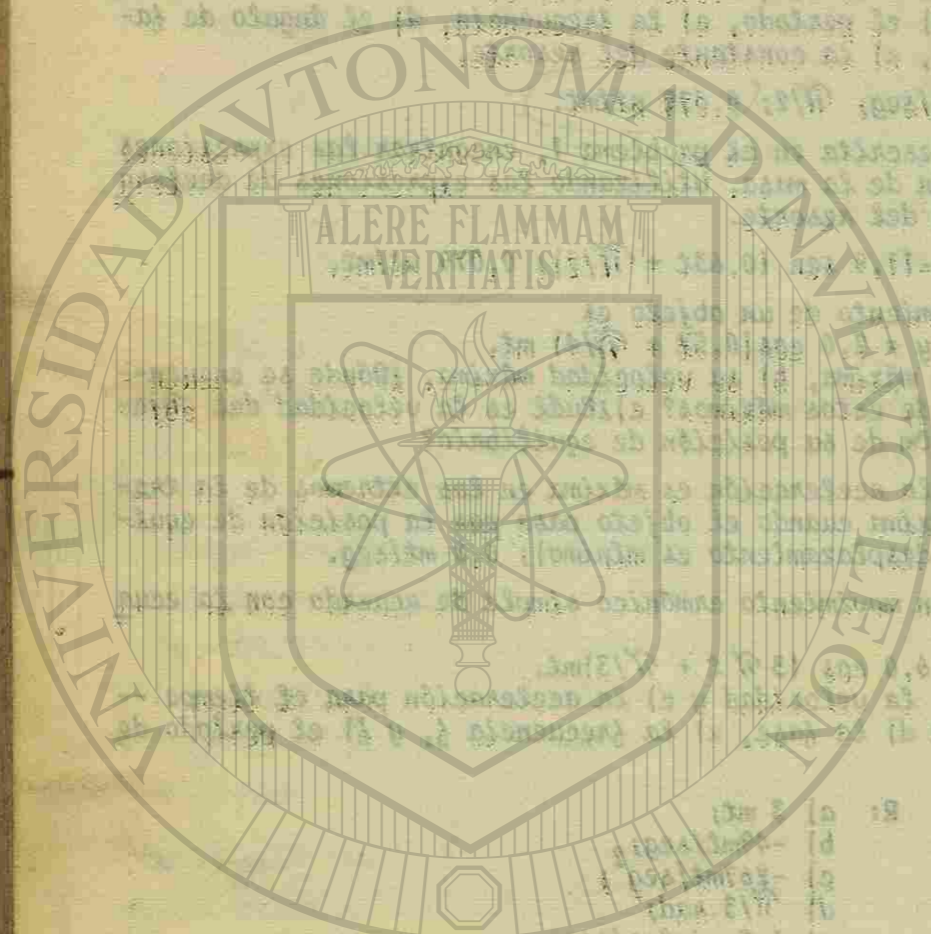
6.- Una masa de 2.0kg se suspende de un resorte. Un cuerpo de 300g, suspendido abajo de la masa, estira el resorte 3.0cm más de lo que estaba. Si se quita el cuerpo de 300g y se pone a oscilar la masa, encontrar el período del movimiento.

R: 0.728seg.

7.- Una bola de 2.0kg sostenida en el extremo libre de una barra metálica flexible ligera sujeta en un extremo, sufre movimiento armónico simple de frecuencia 3.0cps. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere para desplazar la bola 1.0cm a partir de su posición de reposo? ¿Cuál sería la velocidad máxima de la bola si se librara a partir de esta posición? ¿Cuál sería su velocidad si se encontrara a 0.50cm a partir de su posición de equilibrio? (ignore los efectos de la gravedad).

R: 3.2nt;  $0.126 \text{ mt/seg}$ ;  $0.11 \text{ mt/seg}$ .





1.- La posición de una masa de 200 g al extremo de un resorte está dada -- por

$$x = 30 \text{ sen}(0.63t + \pi/2) \text{ cm}$$

Encontrar: a) la amplitud, b) el periodo, c) la frecuencia, d) el ángulo de fase de la vibración, así como, e) la constante del resorte.

R: 30cm; 10 seg; 0.10 ciclos/seg;  $\pi/2$ ; 0.079 nt/mt.

2.- Para la vibración descrita en el problema 1, encontrar las expresiones de velocidad y de aceleración de la masa. Utilizando las expresiones de aceleración, encontrar la constante del resorte.

R:  $18.9 \text{ cos}(0.63t + \pi/2)$ ;  $-11.9 \text{ sen}(0.63t + \pi/2)$ ; 0.079 nt/mt.

3.- La ecuación de movimiento de un objeto es

$$y = 2.0 \text{ cos}(0.5t + \pi/4) \text{ mt.}$$

Encontrar: a) su aceleración máxima, b) su velocidad máxima. ¿Dónde se encuentra el objeto en el momento de estos máximos? c) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando se encuentra a 1.20m de su posición de equilibrio?

R: 0.50 mt/seg<sup>2</sup>; 1.0mt/seg (la aceleración es máxima en los extremos de la trayectoria; la velocidad es máxima cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando el desplazamiento es mínimo); 0.8 mt/seg.

4.- Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = 6.0 \text{ cos}(3\pi t + \pi/3) \text{ mt.}$$

Calcular A) la elongación, b) la velocidad y c) la aceleración para el tiempo  $t = 2$  seg. Encontrar también d) la fase, e) la frecuencia f, y f) el periodo de movimiento.

R: a) 3 mt;  
b) -49mt/seg;  
c) -267mt/seg;  
d)  $\pi/3$  rad;  
e) 1.5 ciclos/seg;  
f) 2/3 seg.

5.- Un bloque de 4.0kg estira un resorte 16cm a partir de su posición no deformada. Se quita el bloque y se suspende un cuerpo de 0.50kg del mismo resorte. Si entonces se suelta el resorte, ¿Cuál es su periodo de movimiento?

R: 0.28seg.

6.- Una masa de 2.0kg se suspende de un resorte. Un cuerpo de 300g, suspendido abajo de la masa, estira el resorte 3.0cm más de lo que estaba. Si se quita el cuerpo de 300g y se pone a oscilar la masa, encontrar el periodo del movimiento.

R: 0.728seg.

7.- Una bola de 2.0Kg sostenida en el extremo libre de una barra metálica flexible ligera sujeta en un extremo, sufre movimiento armónico simple de frecuencia 3.0cps. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere para desplazar la bola 1.0cm a partir de su posición de reposo? ¿Cuál sería la velocidad máxima de la bola si se librara a partir de esta posición? ¿Cuál sería su velocidad si se encontrara a 0.50cm a partir de su posición de equilibrio? (ignore los efectos de la gravedad).

R: 3.2nt; 0.126mt/seg; 0.11mt/seg.

8.- Entre dos postes largos se tiende una cuerda. Cuando se cuelga un objeto de 1.0kg del punto central de la cuerda, ésta se comba 10.0cm; y 20.0cm bajo una carga de 2.0kg. Si únicamente está colgado la carga de 1.0kg y se tira del objeto hacia abajo 5.0cm más y a continuación se suelta, encuentre la frecuencia de la vibración y la velocidad del objeto y medida que pasa por la posición de equilibrio.

R: 1.59hz; 50 cm/seg.

9.- Determinar resorte se estirará 20cm bajo la acción de una fuerza de 5.0nt. Supóngase que ahora el resorte cuelga verticalmente con una masa de 300g en su extremo. ¿de qué magnitud será la fuerza requerida para estirarlo 20cm más?

R: 5 nt.

10.- Un bloque se encuentra en una superficie horizontal que se está moviendo horizontalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia dos oscilaciones por segundo. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es de 0.50. ¿Hasta de qué valor puede ser la amplitud para que el bloque no deslice sobre la superficie?

R: 3.1cm.

11.- Un bloque se encuentra sobre un émbolo que se está moviendo verticalmente con un movimiento armónico simple de período 1.0seg. a) ¿Para qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo? b) Si el émbolo tiene una amplitud de 5.0cm, ¿cuál será la frecuencia máxima para la cual el bloque y el émbolo estarán en contacto continuamente?

R:

a) 0.25mt

b) 2.24 ciclos/swg.

12.- Las frecuencias de vibración de los átomos en los sólidos, a temperaturas normales, son del orden de  $10^{13}$  ciclos/seg. Imagínese que los átomos estuvieran conectados entre sí mediante resortes. Supóngase que un solo átomo de plata vibra con esta frecuencia y que todos los otros átomos se encuentran en reposo. Calcular entonces la constante de fuerza de un solo resorte. Una mol de plata tiene una masa de 108g y contiene  $6.02 \times 10^{23}$  átomos.

R:  $k = 710$  nt/mt.

13.- El extremo de una de las ramas de un diapasón que ejecuta movimiento armónico simple de frecuencia 1000 ciclos/seg tiene una amplitud de 0.40mm. No tomando en cuenta el amortiguamiento, encontrar a) la máxima aceleración y la máxima velocidad de la punta de la rama, y b) la velocidad y la aceleración de la punta de la rama cuando tiene una elongación de 0.20 mm.

R:

a)  $1.6 \times 10^4$  mt/seg<sup>2</sup>; 2.5 mt/seg.

b) 2.2 mt/seg;  $7.9 \times 10^3$  mt/swg<sup>2</sup>

14.- Un resorte de constante de fuerza 19.6nt/mt se encuentra suspendido verticalmente. De su extremo libre se suspende un cuerpo de 0.20kg de masa y se suelta. Supóngase que el resorte estaba sin estirar antes de que el cuerpo se soltara, y encuentre qué cantidad bajará el cuerpo a partir de la posición inicial. Hallar también la frecuencia y amplitud del movimiento armónico simple resultante.

R: 0.1 mt; 1.57 ciclos/seg; 0.1 mt.

15.- Un automóvil se puede considerar como montado sobre un resorte por lo que toca a oscilaciones verticales. Los muelles de cierto vehículo se ajustan de manera que las vibraciones tengan una frecuencia de 3.0 ciclos/seg. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle si el automóvil pesa 14,200nt? ¿Cuál será la frecuencia de vibración si en el auto van cinco pasajeros, que en promedio pesan cada uno 712nt?

R: 515,000 nt/mt; 2.7 ciclos/seg.

16.- La escala de una balanza de resorte que lee de 0 a 142nt es de 0.102-mt de longitud. Se encuentra que un paquete suspendido de la balanza oscila verticalmente con una frecuencia de 2.0 oscilaciones por segundo. ¿Cuánto pesa el paquete?

R: 84.6nt.

17.- Un péndulo simple de 1.0mt de longitud hace 100 oscilaciones completas en 204seg en cierto lugar. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad en ese punto?

R: 9.5mt/seg<sup>2</sup>.

18.- ¿Cuál es la longitud de un péndulo simple cuyo período es exactamente de 1 seg. en un lugar en donde  $g = 9.81 \text{ mt/seg}^2$ ?

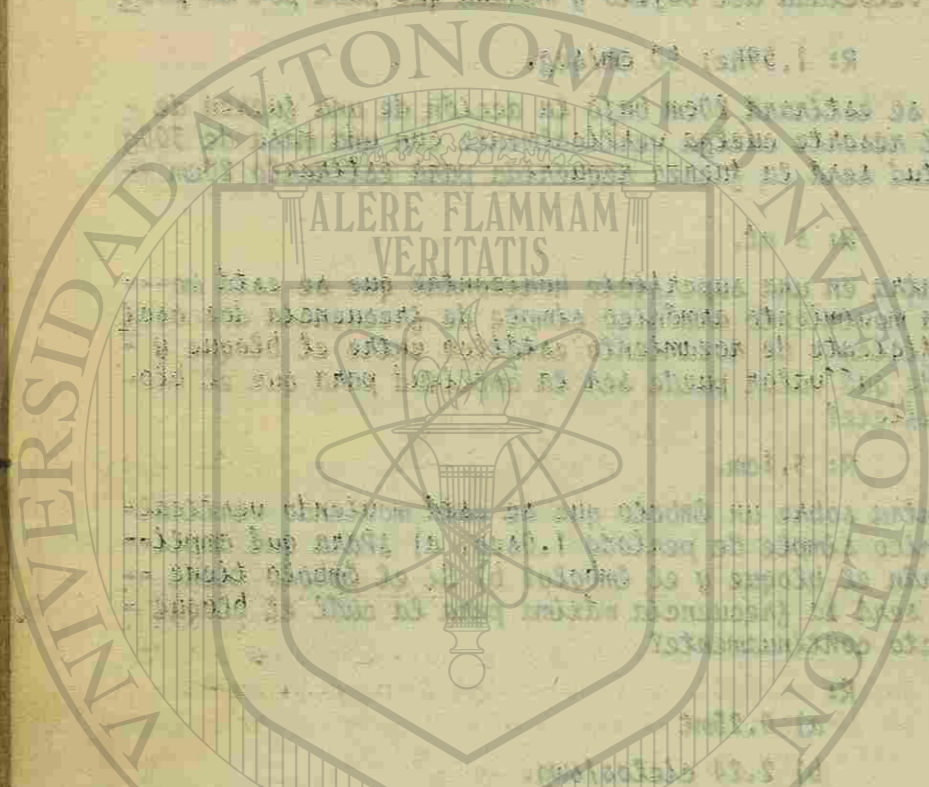
R: 0.248 mt.

19.- Se tiene un péndulo formado por una regla de un metro articulada en su extremo de manera que puede girar libremente alrededor de un eje horizontal. ¿Cuál es el período del péndulo así formado? Si el eje de rotación pasa por la marca de 75cm, ¿Cuál será su período? ¿Cuál será si el eje está en la marca --- 60cm?

R: 1.64seg; 1.82seg; 2.1seg.

20.- Un aro circular de 0.61mt de radio y 35.6nt de peso está suspendido de un clavo horizontal. a) ¿Cuál es su frecuencia de oscilación para pequeños desplazamientos a partir del equilibrio? b) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?

R: a) 0.45 ciclos/seg  
b) 1.22 mt.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPITULO V  
ESTATICA DE LOS FLUIDOS

1.- Fluidos. Presión y densidad.

En este capítulo se tratará del estudio de los fluidos en reposo. Definido un fluido como una sustancia que puede fluir. Por lo tanto, esta denominación de fluido incluye tanto a los líquidos como a los gases, pero mientras que un líquido tiene un volumen definido, al adoptar la forma de la vasija que lo contiene, un gas llena completamente el volumen del recipiente que lo contenga.

Algunos fluidos, tales como el vidrio o la brea se comportan como sólidos ya que fluyen lentamente, otros como el plasma que es un gas muy ionizado, no se sabe fácilmente si es líquido o gas; a menudo se le llama "cuarto estado de la materia" para poderlo distinguir.

Los líquidos y los gases se pueden diferenciar por sus coeficientes de compresibilidad; ya que mientras un líquido es prácticamente incompresible, un gas puede ser fácilmente comprimido.

Para el estudio que se haga, se despreciará la pequeña variación de volumen que experimenta un líquido por la acción de una presión.

Los fluidos difieren también unos de otros por su viscosidad, que es la facilidad con que pueden fluir. La viscosidad de un gas es pequeña en comparación con la de los líquidos, tales como el agua, el petróleo y la glicerina ya que poseen viscosidades mayores. La densidad de un material homogéneo se define como su masa por unidad de volumen, y se expresa en gramos por centímetro cúbico, kilogramos por metro cúbico, o slugs por pie cúbico.

La expresión que define la densidad es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densidad relativa de una sustancia es la relación de la densidad de esta sustancia, con la del agua y es, por tanto, un número abstracto.

Presión y densidad:

La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura, así como también al aumentar la distancia al fondo de un lago o un océano. Generalizando el concepto de presión para un fluido que se encuentra en reposo, una fuerza en la superficie siempre debe estar dirigida perpendicularmente a la superficie, así como las fuerzas ejercidas por el fluido contra la pared y las ejercidas por la pared sobre el fluido son normales a la pared.

Esto resulta evidente cuando se comprueba que un fluido no puede soportar permanentemente esfuerzos cortantes, ya que cualquier fuerza tangencial ejercida sobre el fluido provocaría que las capas del fluido resbaláran unas sobre las otras y por lo tanto se presentaría el deslizamiento del fluido. Por otra

parte, es precisamente la incapacidad de los fluidos de resistir tales fuerzas-tangenciales (esfuerzos cortantes) lo que les dá su propiedad característica - de cambiar su forma, o sea, de fluir.

La presión en un fluido se define como la magnitud de la fuerza normal que obra sobre el fluido por unidad de área y se transmite a todos los límites sólidos en todos sus puntos.

La presión es una cantidad escalar y sus unidades comunes son:

$$\frac{\text{Lbs}}{\text{In}^2}, \frac{\text{NT}}{\text{MT}^2}, \frac{\text{Dina}}{\text{cm}^2}, \frac{\text{Kg}}{\text{MT}^2}$$

atmósferas (1 atm. = 14.7  $\frac{\text{Lbs}}{\text{In}^2}$ ) y milímetros de mercurio (760 mm - HG = 1 atm).

Al considerar una superficie cerrada que contiene un fluido, el valor de la presión en un punto se define como la razón de la fuerza dF ejercida sobre una pequeña superficie dA que comprenda este punto, por lo tanto:

$$P = \frac{dF}{dA} \quad \text{Ecuación 5-1}$$

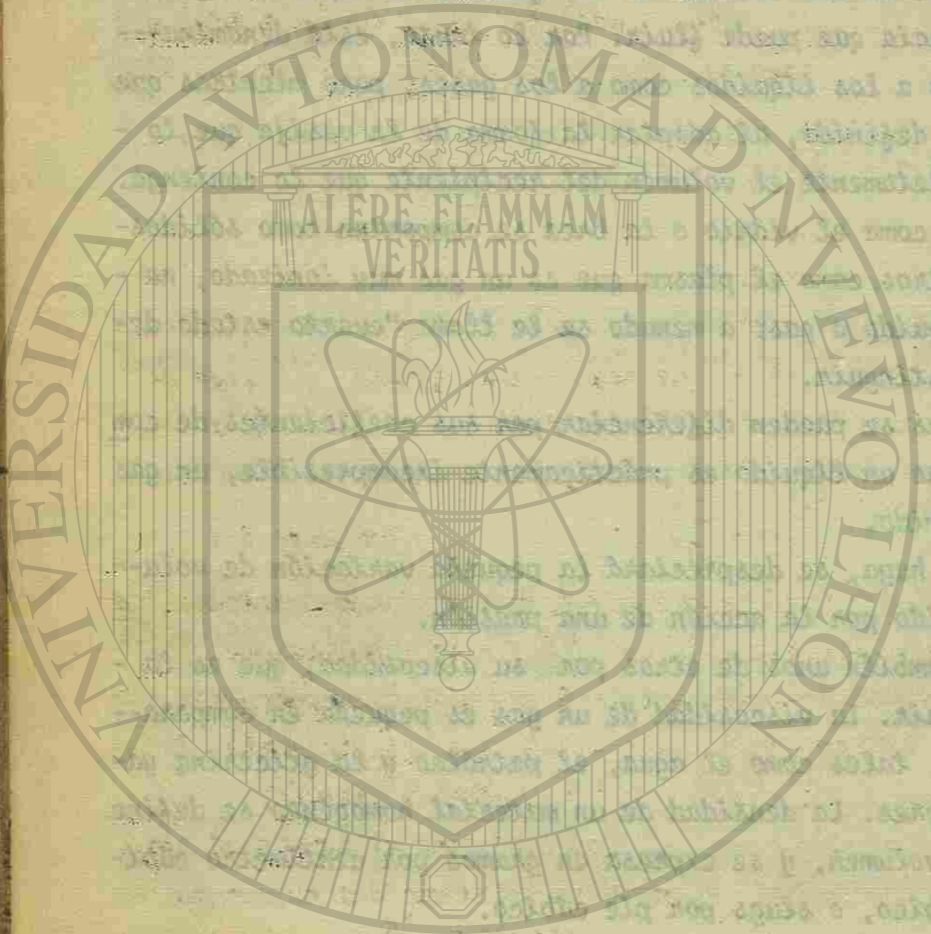
La densidad p de un fluido homogéneo puede depender de varios factores, tales como la temperatura y presión a que esté sometido. Para los líquidos, la densidad varía muy poco dentro de grandes límites de presión y temperatura, por lo tanto se le puede tratar como constante para nuestros fines. En cambio la densidad de un gas es sensible a los cambios de temperatura y presión.

En seguida se muestran las variaciones de densidad para el agua y el aire cuando están sometidos a las condiciones de presión y temperatura indicadas:

AIRE	DENSIDAD ( $\frac{\text{Kg}}{\text{M}^3}$ )
a 0°C y 1 atm. _____	1.3
a 100°C y 1 atm. _____	0.95
a 0°C y 50 atm. _____	6.5
AGUA	
a 0°C y 1 atm. _____	$1 \times 10^3$
a 100°C y 1 atm. _____	$0.958 \times 10^3$
a 0°C y 50 atm. _____	$1.002 \times 10^3$

2.- Variaciones de presión en un fluido en reposo.

Un fluido se encuentra en equilibrio, cuando todas las partes del mismo están en equilibrio. A continuación se deducirá la relación existente entre la presión y la altura de un fluido. Considerese un pequeño cubo del volumen de fluido, sumergido dentro de la masa del fluido que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas dirigidas hacia su interior, ejercidas sobre sus



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS



caras por el fluido que lo rodea y por su peso, como se muestra en la figura -- 5-1.

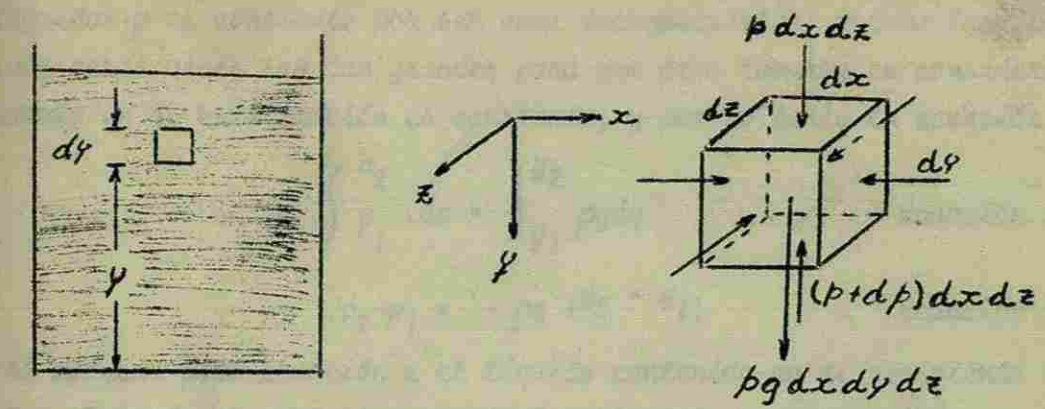


FIGURA 5.1

Las fuerzas horizontales ejercidas sobre las caras opuestas, son iguales-- y opuestas, pero la fuerza hacia arriba que actúa sobre la cara inferior del cu- bo debe ser mayor a la fuerza ejercida sobre su cara superior, para equilibrar-- el peso del fluido contenido en el cubo.

Representese por  $p$  y  $p + dp$  las presiones sobre las caras superiores e in- ferior, y sea  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  las dimensiones del cubo. La densidad del fluido se - representará por  $\rho$ . Puesto que el cubo está en equilibrio.

$$\sum F_y = 0, \text{ por lo tanto:}$$

$$\begin{aligned} (p + dp)dx dy - p dx dy - \rho g dx dy dz &= 0 \\ dp dx dy &= \rho g dx dy dz \\ dp &= \rho g dy \end{aligned}$$

Ecuación 5-2

Que es la ecuación general que relaciona la variación de presión con la al- tura. (La coordenada "y" se considera positiva cuando se mide hacia abajo). Ob- sérvese que el producto  $\rho g$  es, el peso por unidad de volumen del fluido, o sea, - su peso específico. Conforme aumenta la altura en el recipiente, disminuye la - presión.

Por consiguiente, la ecuación 5-2 se convierte en:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \quad \text{Ecuación 5-2a.}$$

Si se analiza un punto sumergido en un líquido que se encuentra en un reci- piente abierto a la atmósfera como el de la figura 5-2.

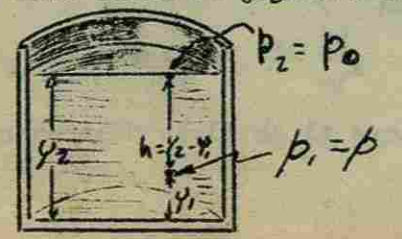
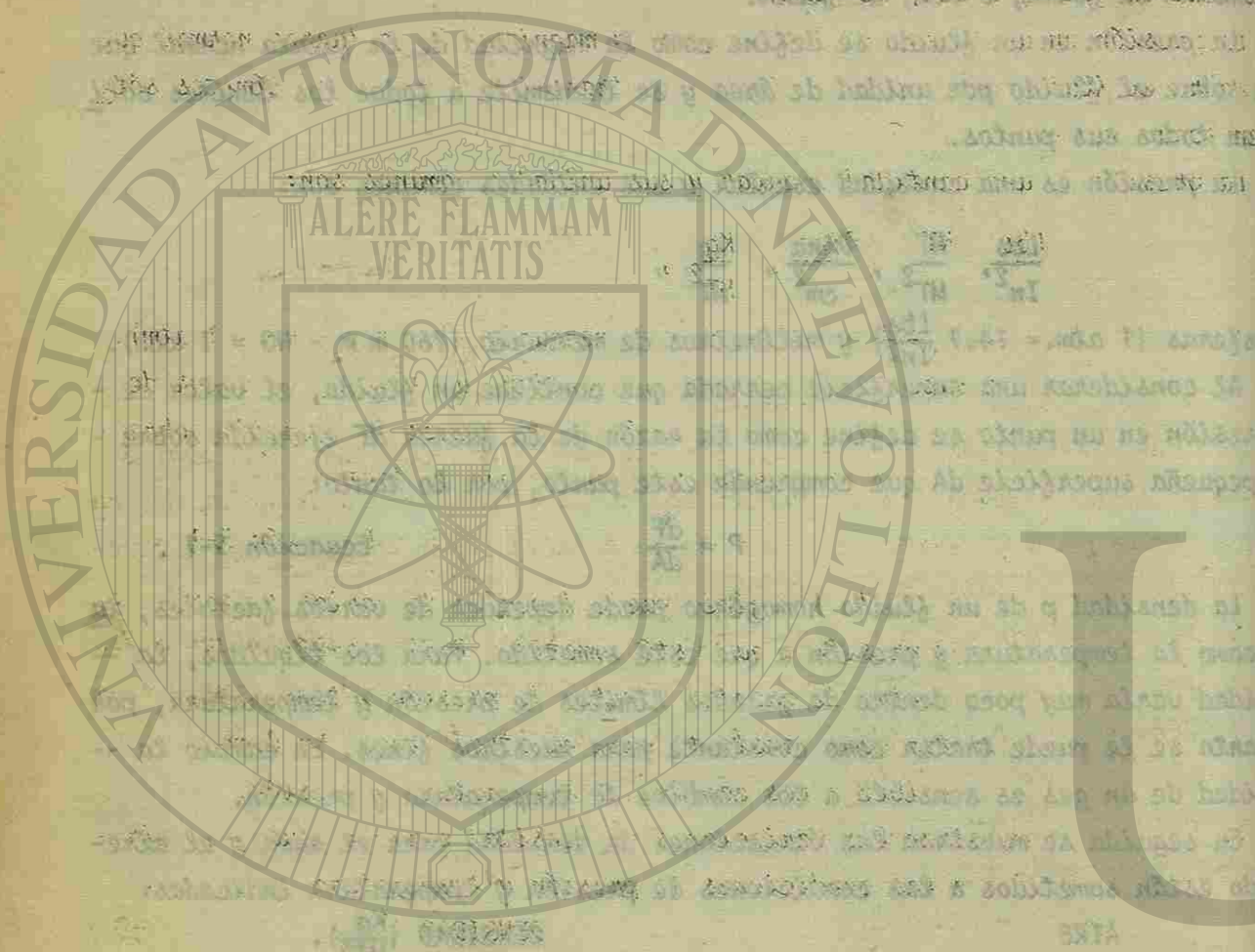


FIGURA 5-2



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones a las alturas  $y_1$  e  $y_2$  contadas por encima de un cierto plano horizontal, al integrar la ecuación 5-2a y sabiendo que para los líquidos  $\rho$  es constante por ser casi incompresibles; y como las diferencias de nivel raras veces son tan grandes para que deba tomarse en consideración algún cambio en  $g$ , está también es constante, y por lo tanto la ecuación quedará:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \quad \text{Ecuación 5-3}$$

$$p_2 - p_1 = - \rho g (y_2 - y_1) \quad \text{Ecuación 5-3a}$$

Al aplicar esta ecuación a el líquido contenido en el recipiente de la figura 5-2. Tomando el punto 1 a un nivel cualquiera y representado por  $p$  la presión en este punto; el punto 2 se encuentra en la superficie donde la presión es la atmosférica,  $p_0$ . Entonces,

$$p_0 - p = - \rho g (y_2 - y_1)$$

Como  $(y_2 - y_1)$  es la profundidad  $h$  bajo la superficie. la ecuación quedará

$$\begin{aligned} p_0 - p &= - \rho g h \\ p &= p_0 + \rho g h \end{aligned} \quad \text{Ecuación 5-4}$$

Obsérvese que la presión es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad, y que la forma del recipiente no afecta a la presión.

Para los gases  $\rho$  es muy pequeña y de ordinario la diferencia de presión entre dos puntos es insignificante. Así se puede admitir, que un depósito que contenga un gas, la presión es la misma en todos los puntos. Sin embargo cuando  $(y_2 - y_1)$  es muy grande esto no sucede así, ya que la presión del aire varía continuamente cuando nos elevamos a grandes alturas en la atmósfera. En tales casos la densidad  $\rho$  varía con la altitud y para poder integrar la ecuación 5-3 debe conocerse a  $\rho$  en función de "y".

Ejemplo 5-1.

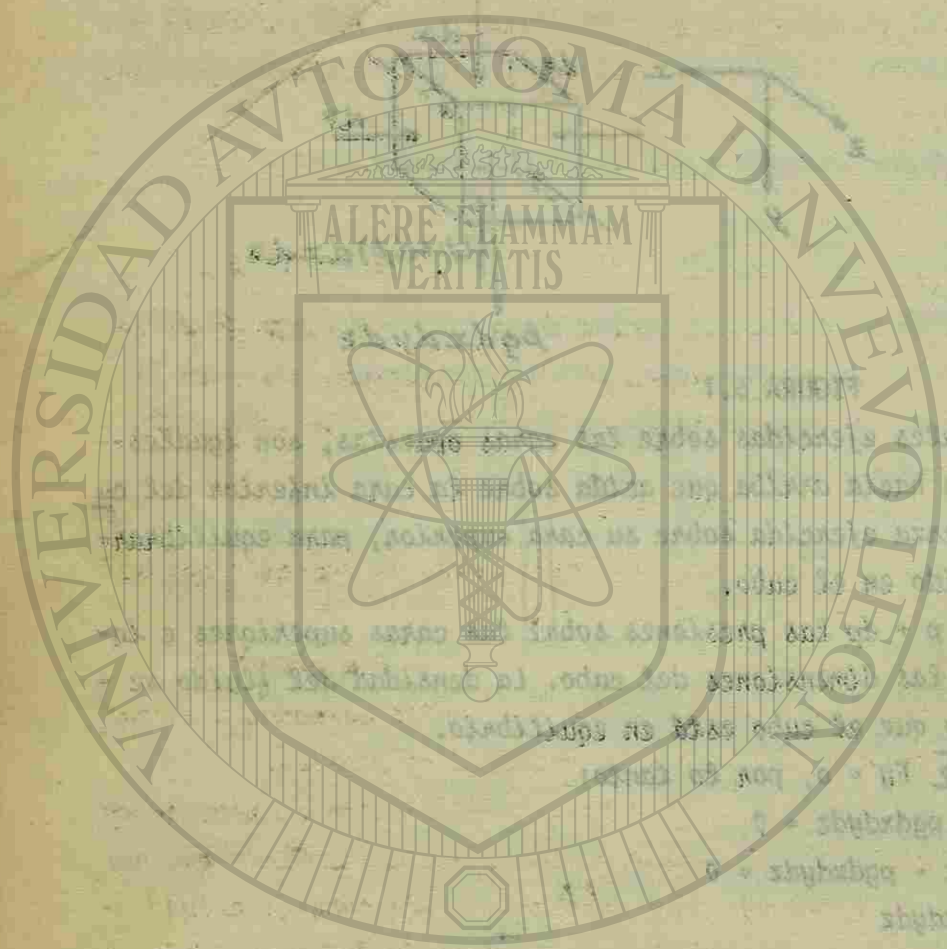
Un tanque abierto contiene 2 metros de agua cubiertos con 1 metro de aceite de densidad relativa 0.83. Calcular la presión en la superficie de separación agua-aceite y en el fondo del tanque.

En la superficie de separación,  $h = 1$  mt y  $\rho_{\text{aceite}} = \frac{\rho_{\text{aceite}}}{\rho_{\text{agua}}}$

$$\rho_{\text{aceite}} = 0.83 \times 1000 = 830 \frac{\text{kg}}{\text{mt}^3}$$

$$p = \rho h = 830 \times 1 = 830 \frac{\text{kg}}{\text{mt}^2}$$

En el fondo del tanque la presión es la de la superficie de separación más  $\rho h$  para el agua, o sea:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



$$p = 830 + 2 \times 1000 = 2830 \frac{\text{kg}}{\text{mt}^2}$$

La ecuación 5-3a relaciona las presiones entre dos puntos cualesquiera en un fluido, no importando la forma del depósito que lo contenga. Cualquiera que sea la forma del depósito dos puntos en el fluido se pueden unir mediante una trayectoria formada por escalones horizontales y verticales.

Considerese los puntos A y B en el líquido homogéneo contenido en el tubo en U de la figura 5-3.

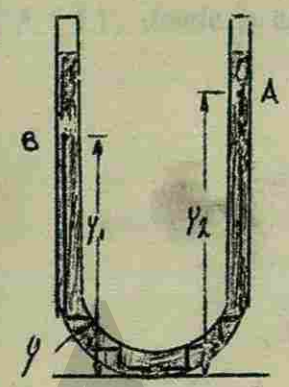


FIGURA 5-3

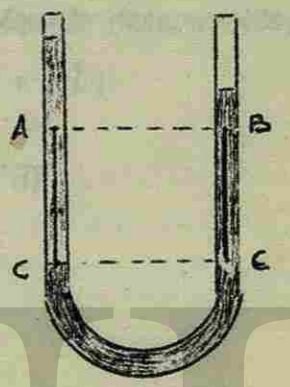


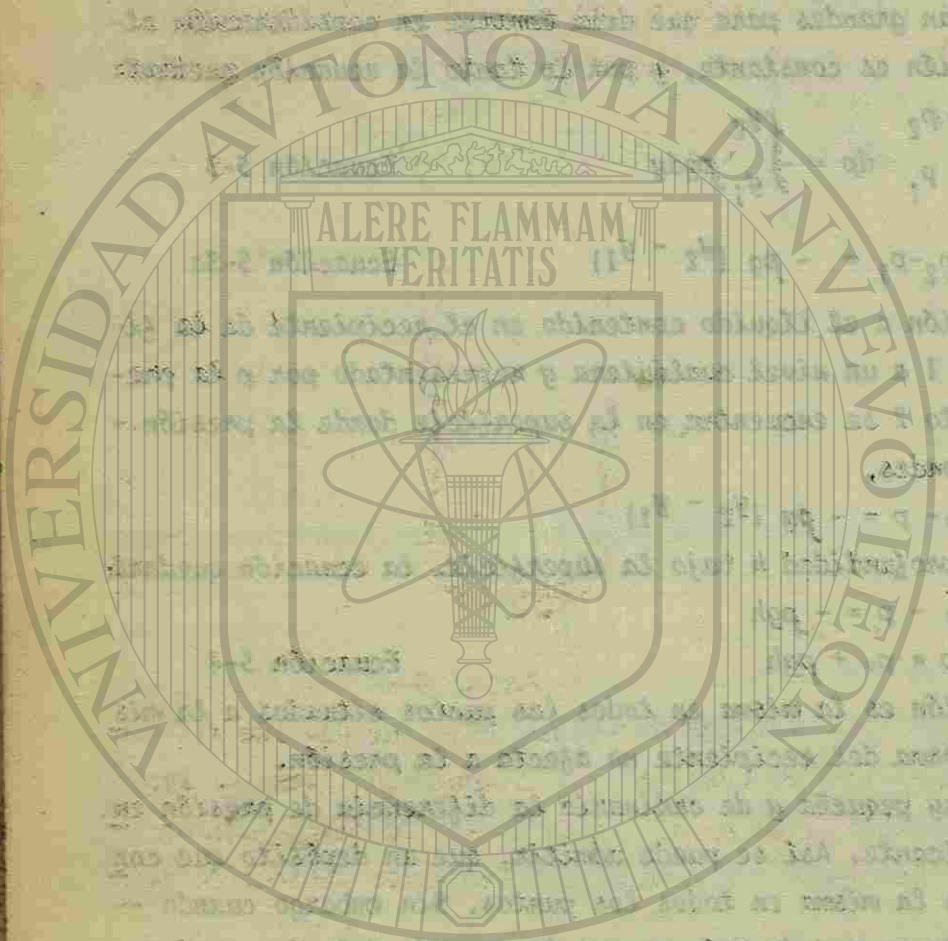
FIGURA 5-4

Siguiendo la trayectoria desde A hasta B, se encuentra que hay una diferencia de presión  $pgy^1$  para cada segmento vertical  $y^1$ , en tanto que para los segmentos horizontales no hay cambio de presión. Por lo tanto, la diferencia de presión  $p_B - p_A$  es  $pg$  veces la suma algebraica de los segmentos verticales de A hasta B, o sea  $pg(y_2 - y_1)$ .

Si el tubo U contiene líquidos diferentes, supongase un líquido denso en el tubo de la derecha y uno menos denso en el tubo de la izquierda, como se muestra en la figura 5-4, la presión puede ser diferente al mismo nivel en diferentes lados. En el tubo de la izquierda la superficie del líquido está mas alta que en el de la derecha, por lo tanto la presión en A será mayor que en B. La presión en C es la misma en ambos lados, pero la presión se reduce menos de C a A, que de C a B, ya que una columna de líquido de sección transversal de área unidad, que una al punto A con C pesará menos, que una columna que una al punto B con C.

Ejemplo 5-2.

En la figura 5-5. se muestra un tubo en U, inicialmente lleno de agua. Otro líquido, que no se mezcla con el agua, se vierte por uno de los lados hasta quedar a una altura d sobre el nivel del agua en el otro lado, el cual, mientras tanto, se ha elevado una altura l.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Encontrar la densidad del líquido con relación a la del agua. (Densidad relativa del líquido).

Como los puntos C están a igual presión, la caída de presión desde C hasta cada superficie será la misma, debido a que cada superficie se encuentra a la presión atmosférica.

La caída de presión en el lado del agua es,  $p_{\text{agua}} g 2l$ ; el  $2l$  proviene de que la columna de agua se elevó una altura  $l$  de un lado y bajo una altura  $l$  del otro lado, a partir de su posición inicial. La caída de presión en el otro lado es  $pg(d + 2l)$ , donde  $p$  es la densidad del líquido desconocido, por lo tanto:

$$p_{\text{agua}} g 2l = pg(d + 2l)$$

$$\frac{p}{p_{\text{agua}}} = \frac{2l}{(2l + d)}$$

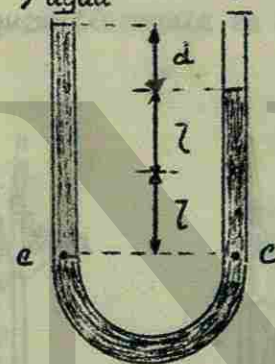


FIGURA 5-5

3.- Principio de Pascal y principio de Arquímedes.

De la ecuación 5-4 se deduce que si la presión  $p_0$  se aumenta de algún modo por ejemplo, ajustando un pistón sobre la parte superior como se muestra en la figura 5-6, y ejerciendo una presión hacia abajo, la presión  $p$  a determinado -- profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. Este hecho fue enunciado por el científico francés Blas Pascal (1623-1662) en 1653, y se conoce con el nombre de Principio de Pascal, que se enuncia así: "La presión aplicada a un -- fluido encerrado se transmite sin disminución a cada punto del fluido y de las -- paredes del recipiente".

Este resultado es consecuencia necesaria de las leyes de la mecánica de -- los fluidos, y por lo tanto no se trata de un principio independiente.

En realidad los líquidos son ligeramente compresibles, ya que al aplicar -- un cambio de presión a una porción de un líquido, se propaga por este como una -- onda, a la velocidad del sonido en ese líquido. Una vez terminada la perturba-- ción y establecido el equilibrio, se encuentra que el principio de Pascal es v<sub>á</sub> -- lido para los gases, con pequeñas complicaciones de interpretación debidas a --

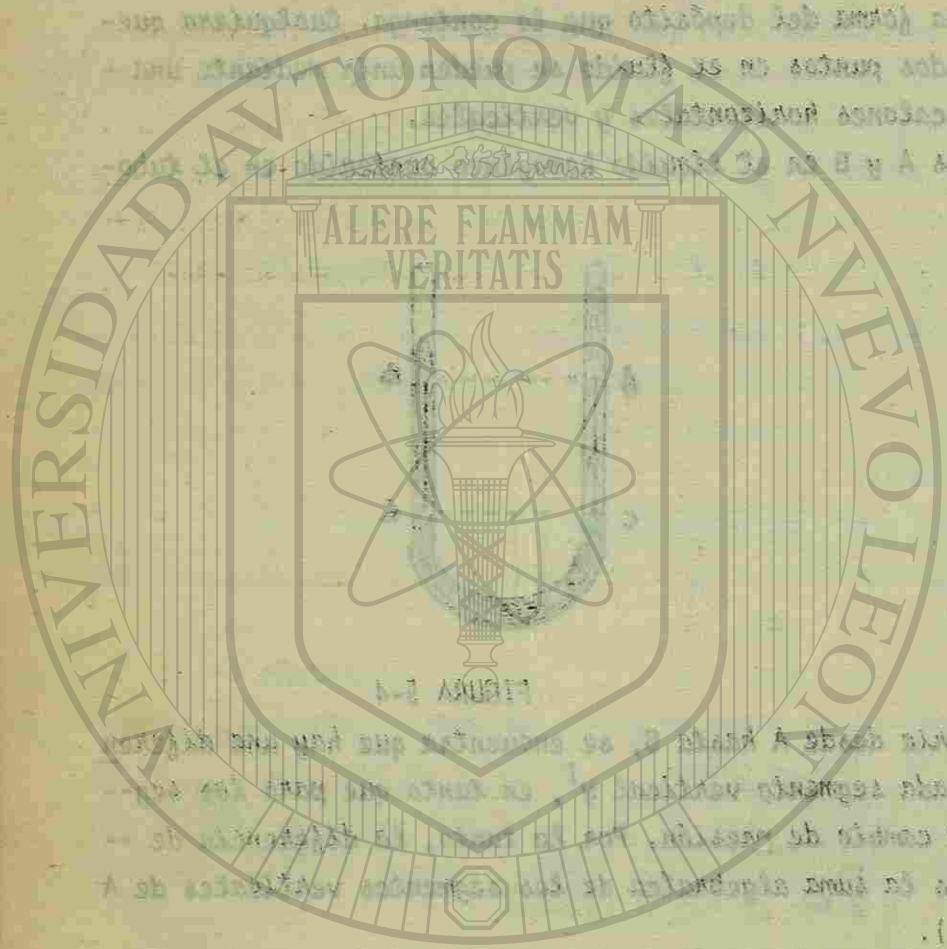


FIGURA 5-3

DIRECCIÓN GENERAL

los grandes cambios de volumen que pueden ocurrir cuando se hace variar la presión de un gas encerrado.

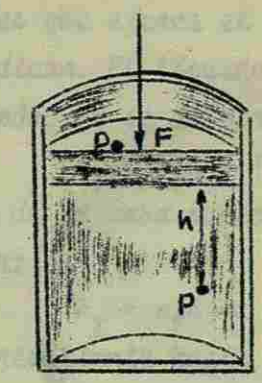


FIGURA 5-6

El principio de Pascal se aplica en el funcionamiento de la prensa hidráulica, que se representa esquemáticamente en la figura 5-7.

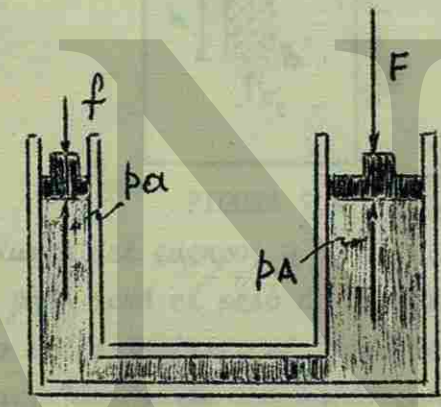


FIGURA 5-7

Un pistoñ de sección transversal pequeña a, se utiliza para ejercer directamente una pequeña fuerza sobre un líquido, tal como aceite. La presión  $p = \frac{f}{a}$  es transmitida a lo largo de un tubo, hacia el cilindro mas ancho que tiene también un pistoñ mas ancho, de área A. Como la presión es la misma en los dos cilindros,

$$p = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

$$F = \frac{A}{a} f$$

Como se verá la prensa hidráulica es un dispositivo para multiplicar la fuerza con una ventaja mecánica ideal igual a la razón de las áreas de los pistones.

Principio de Arquímedes.

Es un hecho experimental conocido que un cuerpo sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por él. La figura 5-8 muestra un cuerpo que tiene forma

encuentra en densidad del líquido con respecto a la densidad del líquido.

Como los puntos C están a igual presión, la carga de presión desde C hasta la superficie será la misma, debido a que en un punto cualquiera de la superficie superior.

La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

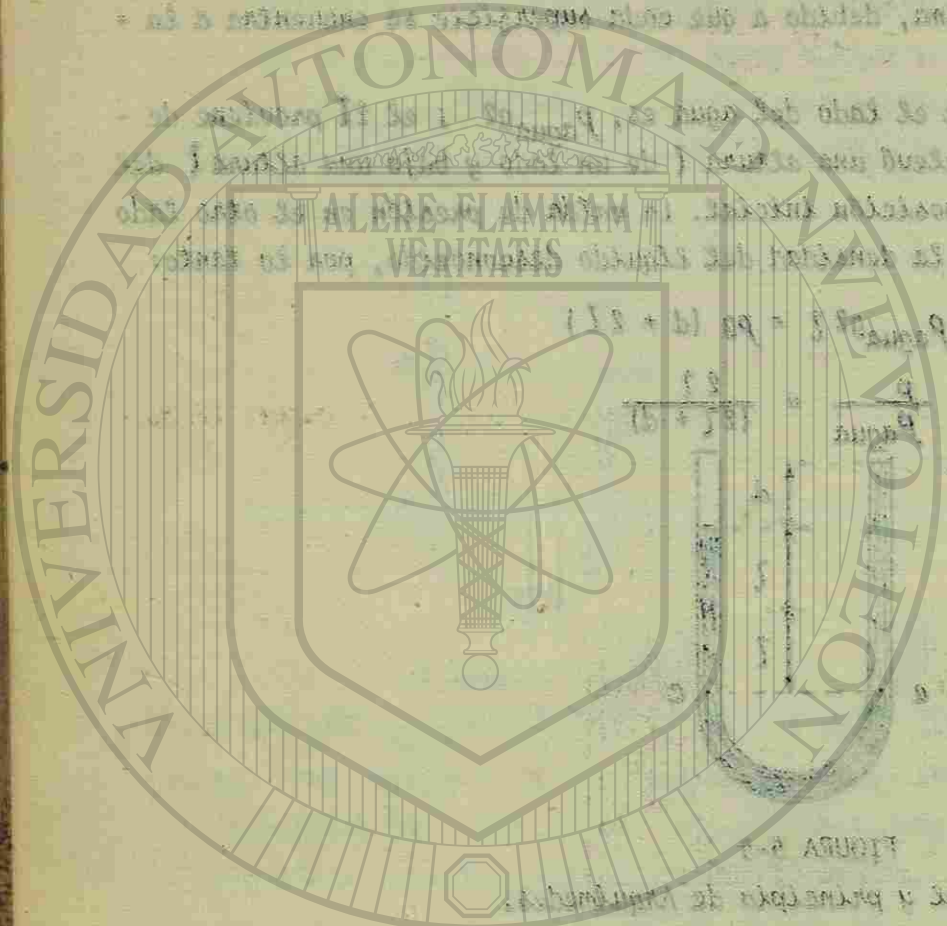
La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

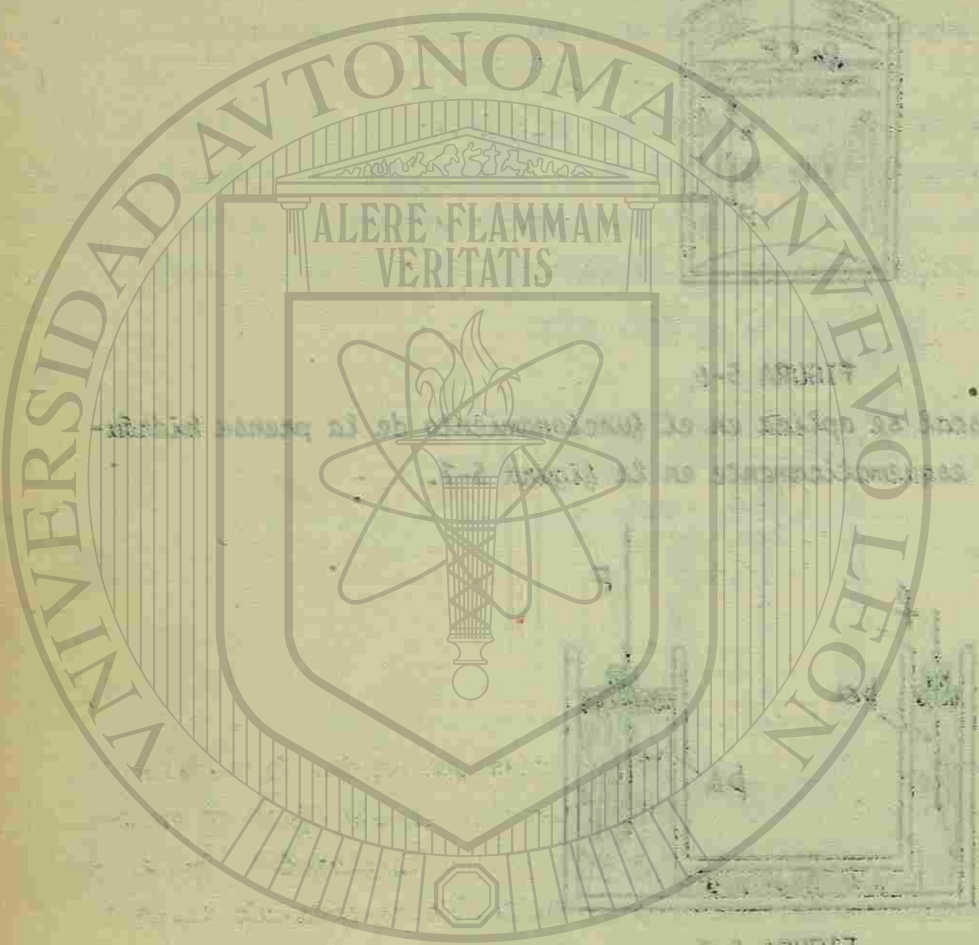
La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.

La carga de presión en el lado del punto C es igual a la carga de presión en el lado del punto C, a menos que se considere la carga de presión desde C hasta la superficie superior.



CAPÍTULO V



de cilindro recto, de altura  $h$  y sección  $A$ , sumergido en un fluido de densidad  $\rho$ . Las fuerzas horizontales que ejerce el fluido sobre el cilindro dan una resultante nula, y no se indican. El líquido ejerce una fuerza hacia abajo sobre la cara superior del cilindro, y se da por:

$$F_1 = p_1 A = (p_0 + \rho g x) A,$$

donde  $x$  es la profundidad de la cara superior del cilindro.

Para la cara inferior;

$$F_2 = p_2 A = [p_0 + \rho g(x + h)] A$$

El empuje, o fuerza resultante hacia arriba es:

$$F_2 - F_1 = \rho g h A$$

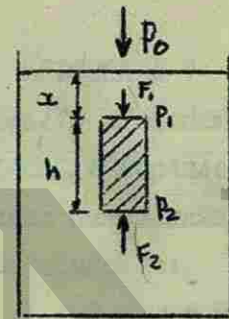


FIGURA 5.8

Como  $hA$  es el volumen del cuerpo, y  $\rho g$  es el peso por unidad de volumen de fluido, por lo tanto,  $\rho g h A$  será el peso de un volumen de fluido igual al volumen del cuerpo o, como suele decirse, el "peso del fluido desplazado". Por lo cual se puede decir que: "un cuerpo sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del fluido desplazado".

Este es el principio de Arquímedes.

Cuando el cuerpo no está totalmente sumergido en el fluido, el empuje es igual al peso de un volumen de fluido igual al volumen de la porción sumergida del cuerpo. Si un cuerpo puede desplazar un peso de fluido igual al suyo antes de estar sumergido, flotará, y en caso contrario se hundirá en el fluido.

Ejemplo 5-3.

Un depósito lleno de agua es colocado sobre una balanza de resorte, que señala un peso total  $W$ .

Una piedra de peso  $W$  está suspendida de una cuerda y se introduce en el agua sin tocar las paredes ni el fondo del depósito [figura 5-9 (a)].

¿Cuál será ahora la indicación en la escala de la balanza?

Primeramente se ha considerado la piedra aislada, y se han representado las fuerzas en la figura 5-9b, donde  $B$  es el empuje, y  $T$  la tensión de la cuerda. Como  $\sum F_y = 0$ .

$$T + B = W$$

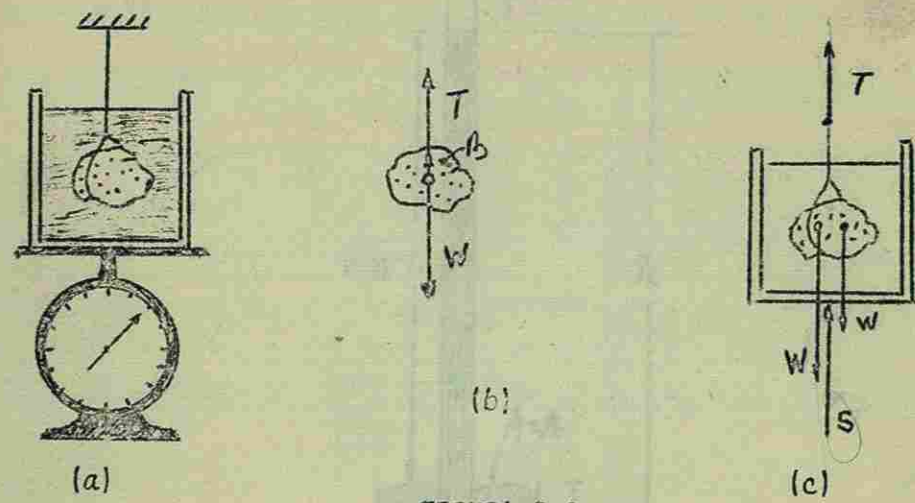


FIGURA 5-9

Considerando ahora el depósito aisladamente, con el agua y la piedra dentro de él; las fuerzas que actúan se representan en la figura 5-9c, donde S es la fuerza ejercida por la balanza de resorte sobre el sistema aislado. La condición de equilibrio conduce a la ecuación:

$$T + S = w + W$$

Restando la primera de la segunda ecuación, se obtiene:

$$S = W + B$$

Que representa, que la indicación de la balanza de resorte ha aumentado en una cantidad igual al empuje.

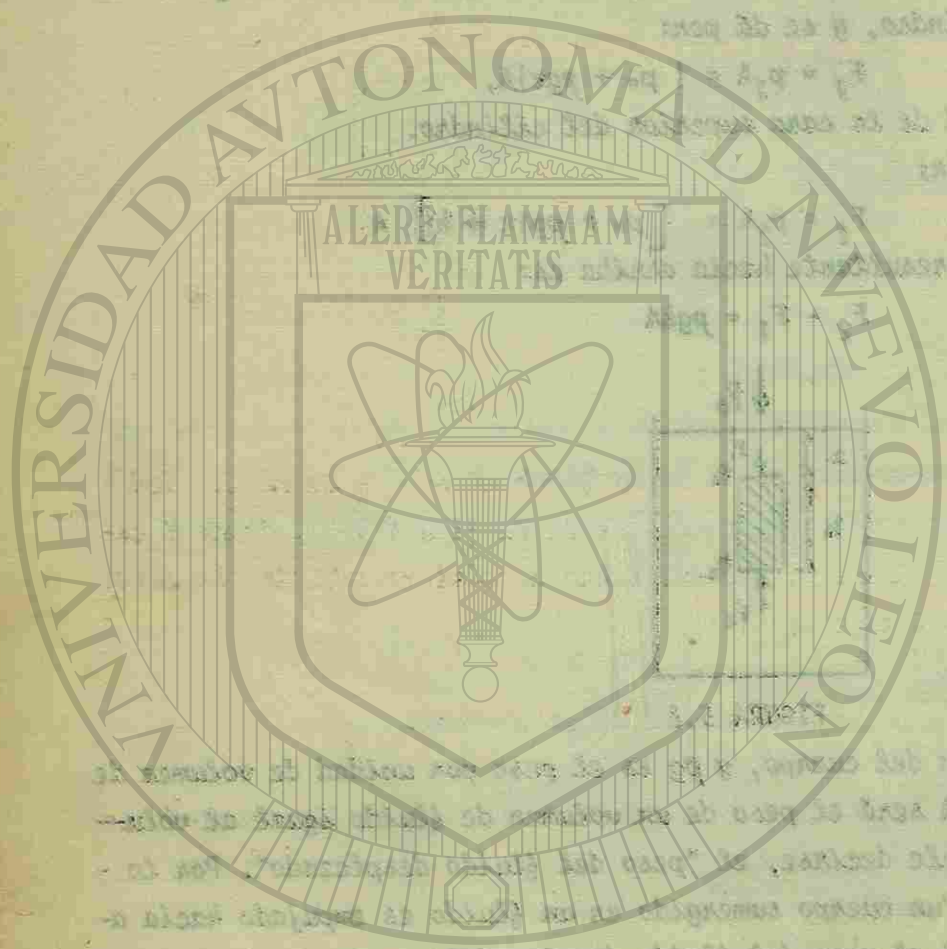
4.- Medida de la presión.

En 1643 Torricelli ideó un método para medir la presión atmosférica, inventando el barómetro de mercurio. El barómetro de mercurio es un tubo largo de vidrio que se llena de mercurio y se invierte después en una cuba que contiene también mercurio. Como se indica en la figura 5-10. El espacio situado en la parte superior de la columna de mercurio solo contiene vapor de mercurio, cuya presión, a la temperatura ambiente, es tan pequeña que puede despreciarse. Demostrándose fácilmente a partir de la ecuación 5-3a que la presión atmosférica es:

$$p_0 = \rho gh$$

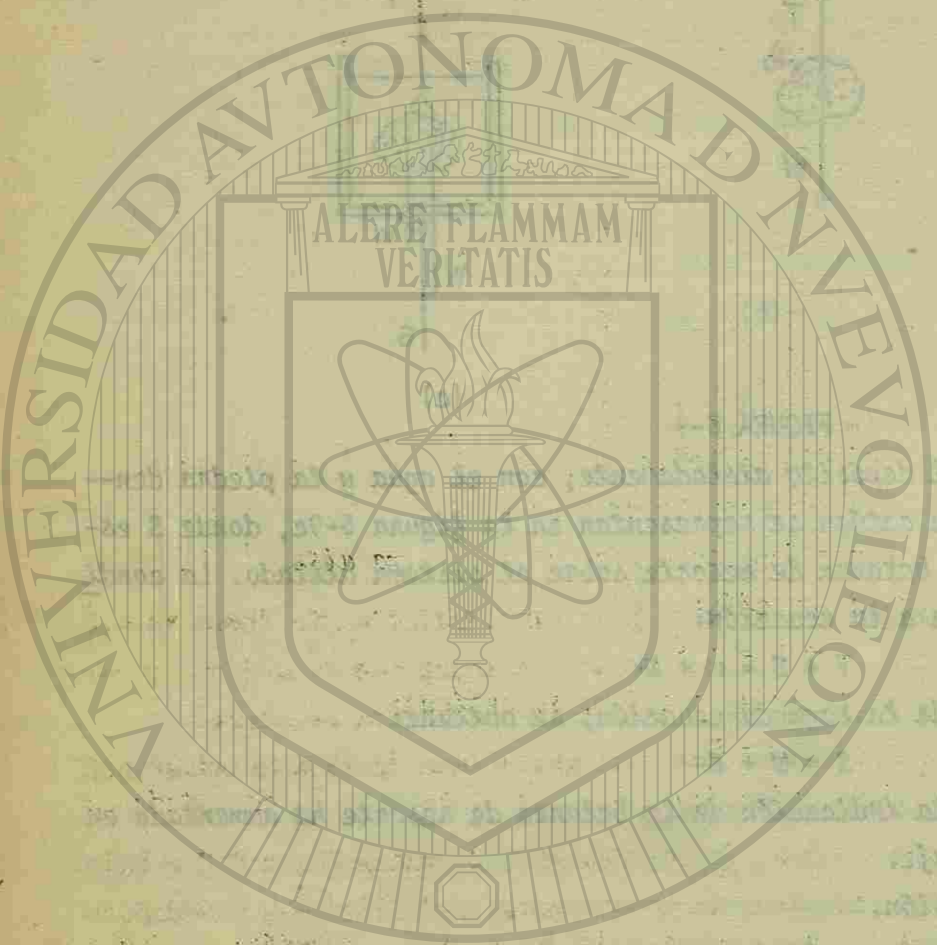
La mayor parte de los aparatos empleados para medir presiones utilizan la presión atmosférica como nivel de referencia, y miden la diferencia entre la presión real y la presión atmosférica, llamándose a este valor presión manométrica.

En un fluido la presión real en un punto se llama presión absoluta. La presión manométrica se da sobre la presión atmosférica o debajo de ella.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

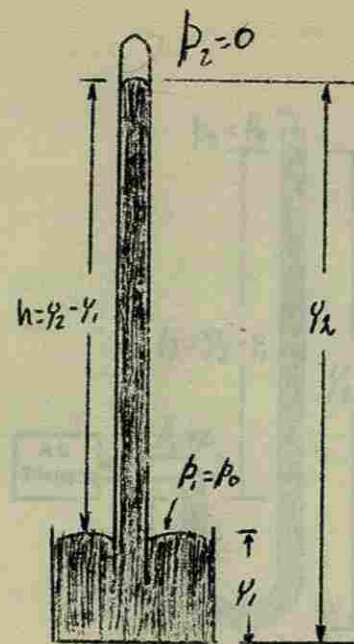


FIGURA 5-10

Un manómetro que lee presiones debajo de la atmosférica se le llama manómetro de vacío. La presión atmosférica en un lugar disminuye con la altitud y varía de un día a otro debido a que la atmósfera no se encuentra en reposo.

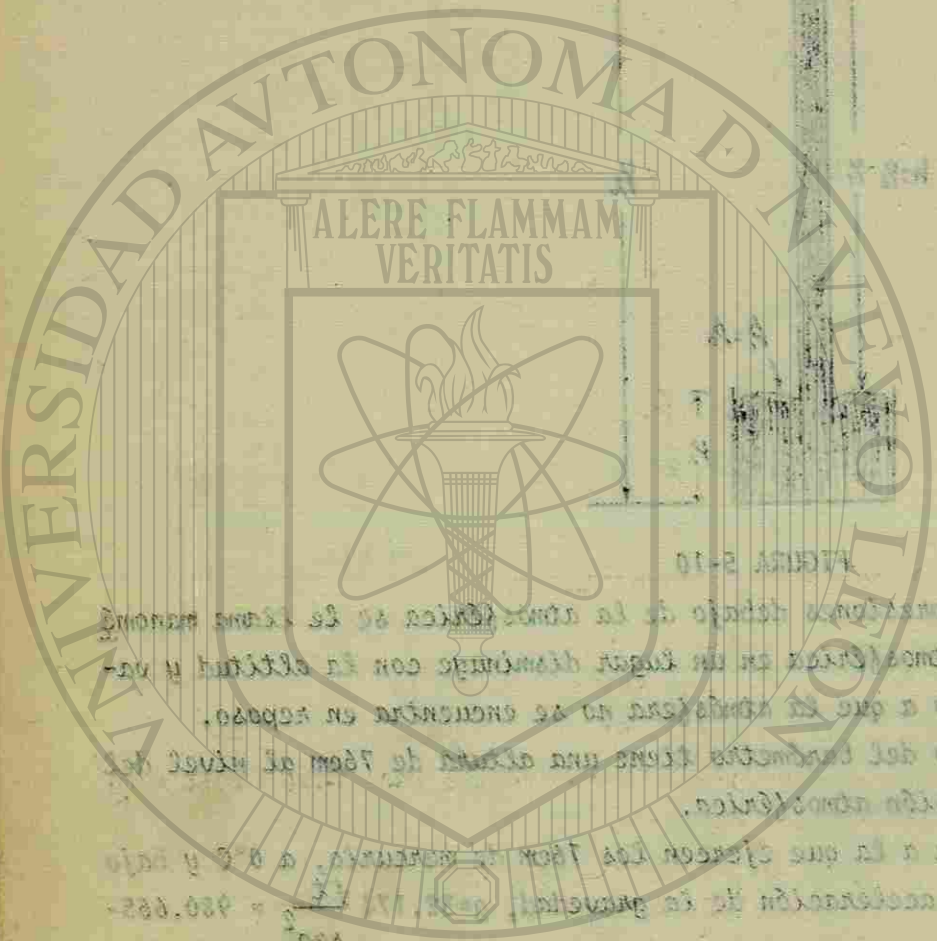
La columna de mercurio del barómetro tiene una altura de 76cm al nivel del mar, pero varía con la presión atmosférica.

La presión equivalente a la que ejercen los 76cm de mercurio, a 0°C y bajo condiciones normales de la aceleración de la gravedad,  $g = 32.174 \frac{ft}{seg^2} = 980.665 \frac{cm}{seg^2}$ , se llama una atmósfera. A la temperatura de 0°C, la densidad del mercurio es  $13.5950 \frac{grs}{cm^3}$ , por lo tanto una atmósfera equivale a:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ atm.} &= (13.5950 \frac{grs}{cm^3}) (980.665 \frac{cm}{seg^2}) (76cm) \\
 &= 1.013 \times 10^5 \frac{Nt}{mt^2} \\
 &= 2116 \frac{lb}{ft^2} \\
 &= 14.7 \frac{lb}{in^2}
 \end{aligned}$$

El tipo mas sencillo de manómetro es el tubo abierto representado en la figura 5-11, que sirve para medir la presión manométrica.

Se trata de un tubo en forma de U que contiene un líquido; un extremo del tubo se conecta al sistema (tanque cuya presión p se desea medir, mientras que el otro extremo esta en comunicación con la atmósfera.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

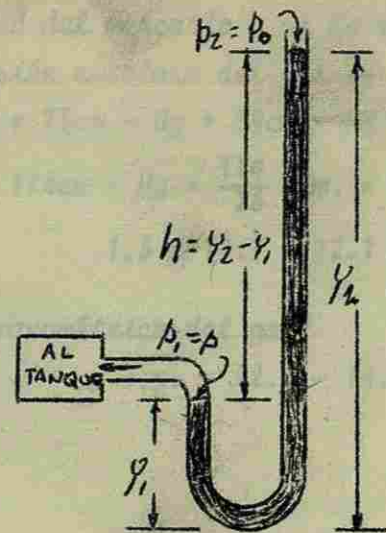


FIGURA 5-11

La presión debida a la columna de la izquierda es:

$$p + \rho g y_1$$

mientras que la debida a la columna de la derecha es:

$$p_0 + \rho g (y_1 + h)$$

( $\rho$  es la densidad del líquido del manómetro). Como las dos presiones están referidas al mismo punto, son iguales; por lo tanto:

$$p + \rho g y_1 = p_0 + \rho g (y_1 + h)$$

$$p - p_0 = \rho g h$$

La diferencia de alturas  $h$  entre las dos columnas líquidas es proporcional a la diferencia de presiones  $p - p_0$ .

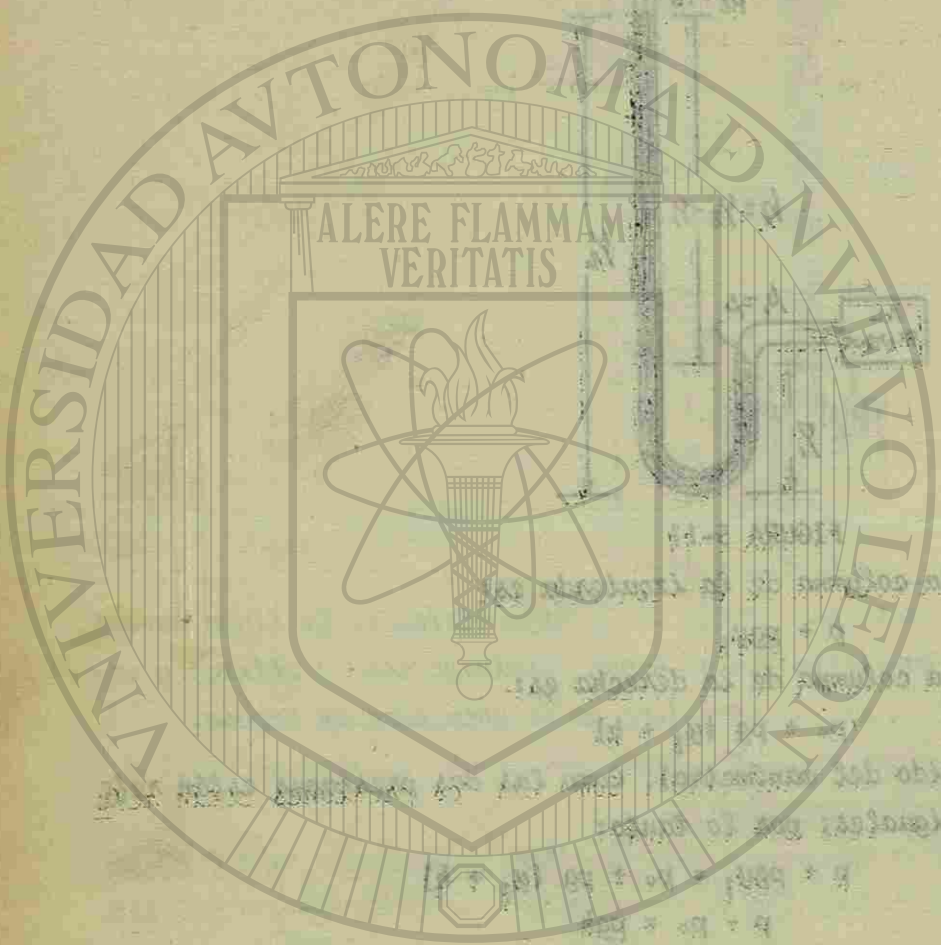
A la diferencia de presiones  $p - p_0$ , se le denomina presión manométrica, - mientras que a la presión  $p$  se le llama presión absoluta.

Si el recipiente contiene un gas con una presión grande, en el tubo se usa un líquido denso como el mercurio; cuando se miden pequeñas presiones de gas se puede emplear agua.

Ejemplo 5-4.

El manómetro abierto de mercurio de la figura 5-11, se conecta a un tanque de gas. La diferencia de alturas entre las dos columnas que contienen mercurio - es de 39cm, cuando un barómetro cercano marca 75cm de mercurio. ¿Cuál es la presión absoluta del gas? en cm-Hg, atm,  $\frac{1b}{in}$ .

La presión del gas es la que se encuentra en la parte superior de la columna de mercurio de la izquierda. Y a la vez es igual a la presión que obra al --



mismo nivel en la columna de la derecha. La presión en este punto es igual a la presión atmosférica mas la presión que ejerce la columna extra, bajo condiciones normales de la densidad del mercurio y de la gravedad.

Por lo tanto, la presión absoluta del gas es:

$$p = 75\text{cm} - \text{Hg} + 39\text{cm} - \text{Hg} = 114\text{cm} - \text{Hg}.$$

$$114\text{cm} - \text{Hg} = \frac{114}{76} \text{ atm.} = 1.5 \text{ atm.}$$

$$1.5 \times 14.7 = 22.1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}.$$

¿Cuál es la presión manométrica del gas?

$$p - p_0 = 22.1 - 14.7 = 7.4 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

UNANIL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS

1.- El pistón de un elevador hidráulico de automóviles tiene 30cm de diámetro. ¿Qué presión en  $\text{kg/cm}^2$  se requiere para levantar un coche que pesa 1200kg?

R:  $1.7 \text{ kg/cm}^2$

2.- a) encontrar la presión, en  $\text{nt/mt}^2$ , a 152.5mt bajo la superficie del océano. La densidad relativa del agua del mar es de 1.03  $\text{kg/mt}^3$ . b) Obtener la presión en la atmósfera a 16.1km sobre el nivel del mar.

R: a)  $1.65 \times 10^6 \text{ nt/mt}^2$

b)  $15.8 \times 10^3 \text{ nt/mt}^2$

3.- Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se echan 13.6cm de agua en la rama derecha, ¿Hasta qué altura sube el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?

R: 0.5cm.

4.- En 1654 Otto von Guericke, burgomaestre de Magdeburgo e inventor de la máquina neumática, presentó una demostración ante la Dieta Imperial, en la que, dos tiros de ocho caballos no pudieron separar dos hemisferios de latón en los cuales se había hecho el vacío. a) Demostrar que la fuerza  $F$  que se requiere para separar los hemisferios es  $F = \pi R^2 P$ , siendo  $R$  el radio exterior de los hemisferios y  $P$  la diferencia de presiones exterior e interior de la esfera (figura-5-12). b) Tomando a  $R$  igual a 30.5cm y la presión interior igual a 0.1atm, ¿Qué fuerza hubiera tenido que ejercer el tiro de caballos para separar los hemisferios?

R: b) 26,700nt.

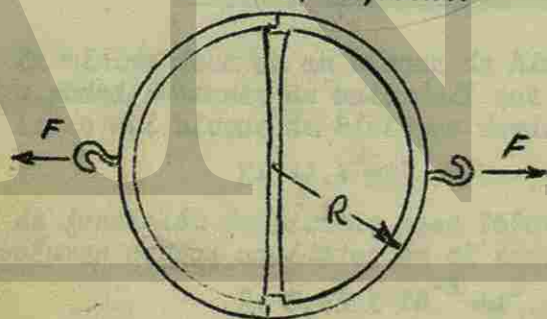


FIGURA 5-12

5.- Detrás de la cara vertical de una presa, el agua se encuentra a una profundidad  $D$  en el lado de aguas arriba, como se ve en la figura 5-13. Llámese  $w$  la anchura de la presa. a) Encontrar la fuerza resultante ejercida por el agua sobre la presa y el momento de rotación ejercido por esa fuerza con respecto al punto  $O$ . b) ¿Cuál es la línea de acción de la fuerza resultante equivalente?

R: a)  $1/2 \rho g D^2 w$ ;  $1/6 \rho g D^3 w$ .

b)  $D/3$  hacia arriba, o  $2/3 D$  hacia abajo.

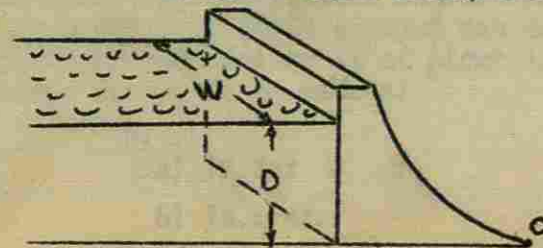
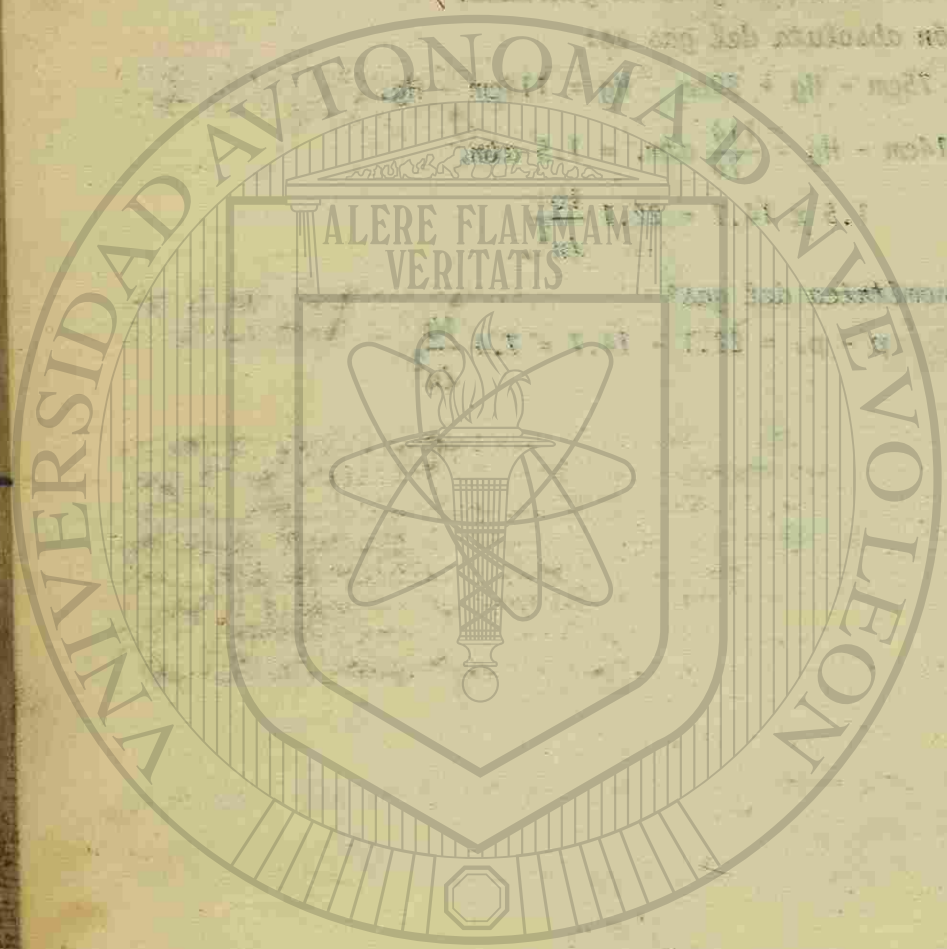


FIGURA 5-13



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



6.- Un estanque de natación tiene de dimensiones 24.4m por 9.15m por 2.44m. Cuando se encuentra lleno de agua, ¿Cuál es la fuerza total en el fondo? ¿En -- los extremos? ¿En los lados?

R:  $2.76 \times 10^7 \text{ nt}$ ;  $2.67 \times 10^5 \text{ nt}$ ;  $6.51 \times 10^5 \text{ nt}$ .

7.- Un tubo en U está lleno de un solo líquido homogéneo. Temporalmente se comprime el líquido en una de sus ramas mediante un émbolo. Se quita el émbolo y el nivel del líquido en ambas ramas oscila. Demostrar que el período de oscilación es  $\pi \sqrt{2L/g}$ , siendo L la longitud total del líquido en el tubo.

8.- En la prensa hidráulica se usa un émbolo de pequeña sección transversal a para ejercer una pequeña fuerza f en el líquido encerrado. Un tubo de conexión conduce a un émbolo más grande de sección transversal A (figura 5-14). - a) ¿Qué fuerza F podrá sostener el émbolo mayor? b) Si el émbolo menor tiene un diámetro de 3.8cm y el émbolo grande un diámetro de 53.3cm, ¿Qué peso colocado en el émbolo pequeño podrá sostener un peso de 2.0 toneladas cortas en el émbolo grande?

R:  
a)  $fA/a$ ;  
b) 59nt.

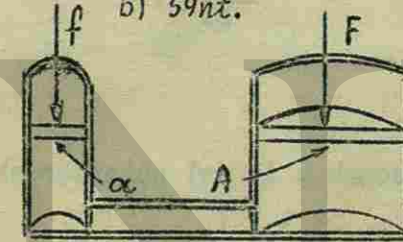


FIGURA 5-14

9.- ¿Cuál es la mínima área de un bloque de hielo de 0.305m de espesor que flotando en el agua podrá sostener un automóvil que pese 11,100nt? ¿Tiene alguna importancia el sitio del bloque de hielo en donde se coloque el automóvil?

R:  $47.3 \text{ m}^2$

10.- Un trozo de fundición de fierro pesa 267nt en el aire y 178nt en el agua. ¿Cuál es el volumen de las cavidades en el trozo de fierro?

R:  $5.66 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ .

11.- Un cascarón esférico hueco de fierro flota casi completamente sumergido en el agua. Si el diámetro exterior es de 0.61m y la densidad relativa del fierro es de 7.8, encontrar el diámetro interior.

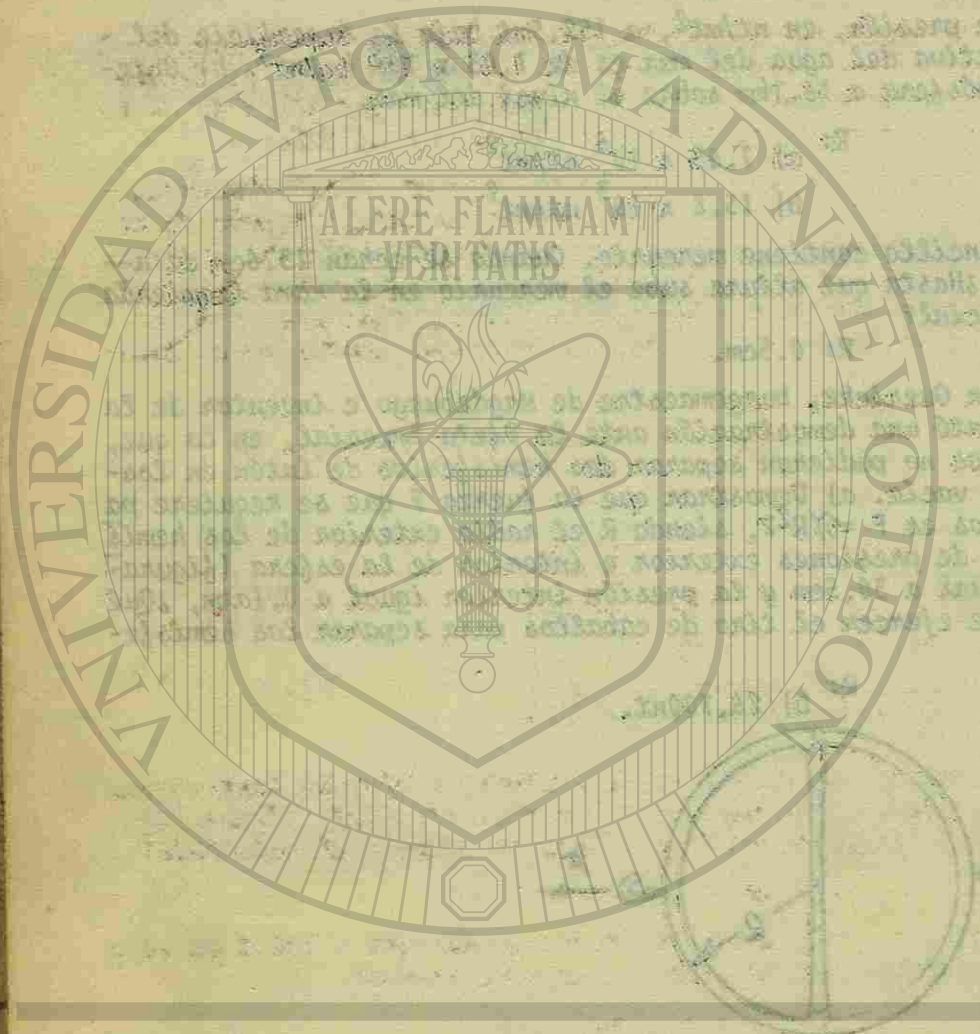
R: 0.58nt.

12.- Un bloque de madera flota en el agua con las dos terceras partes de su volumen sumergidas. En aceite tiene 0.90 de su volumen sumergido. Encontrar la densidad de la madera y del aceite.

R:  $0.67 \text{ gr/cm}^3$ ;  $0.74 \text{ gr/cm}^3$ .

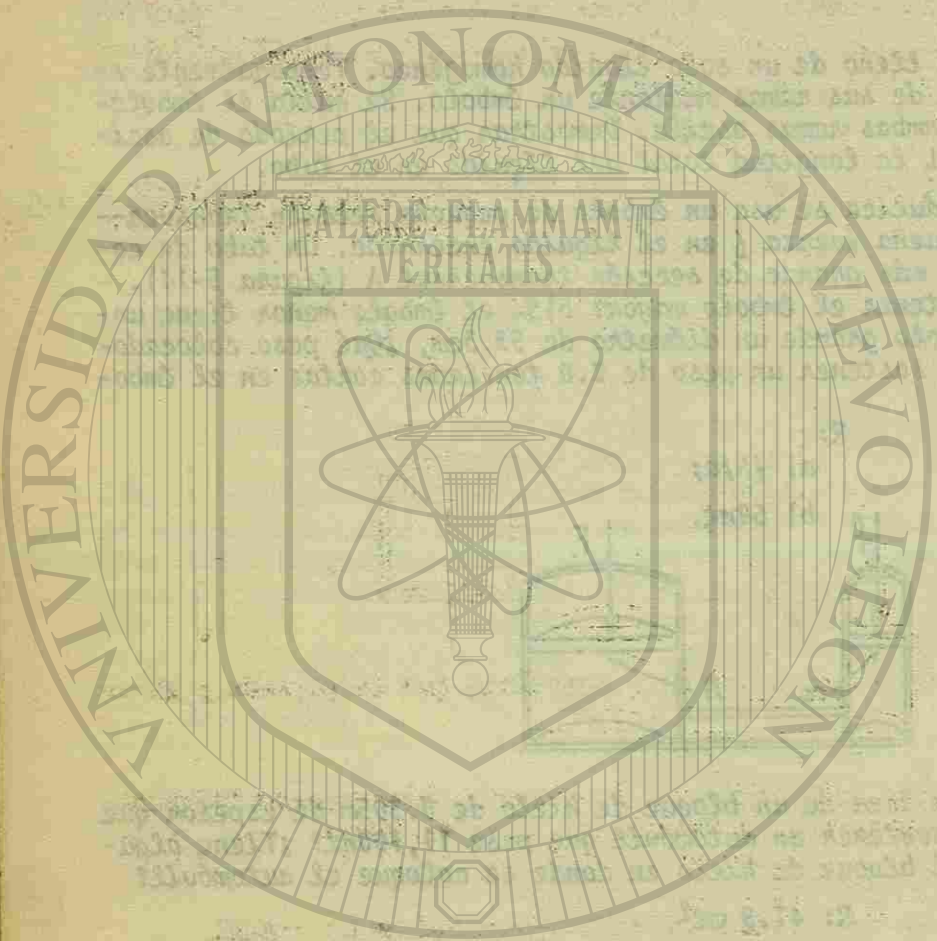
13.- Un bloque de madera pesa 35.6nt y tiene una densidad relativa de 0.60. Se va a cargar con plomo de manera que flote en agua con el 0.90 de su volumen sumergido. ¿Qué peso de plomo se necesita a) si el plomo se pone sobre la madera? b) ¿Si el plomo se coloca debajo de la madera?

R:  
a) 17.8nt  
b) 19.51nt.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

14.- a) Considerar un depósito de fluido sometido a una aceleración vertical ascendente  $a$ . Demostrar que la variación de presión con relación a la profundidad está dada por

$$p = \rho h (g + a),$$

siendo  $h$  la profundidad y  $\rho$  la densidad. b) Demostrar también que si el fluido en conjunto experimenta una aceleración vertical descendente  $a$ , la presión a una profundidad  $h$  está dada por

$$p = \rho h (g - a).$$

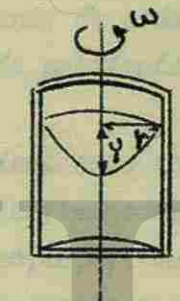
c) ¿Cómo ocurren las cosas en la caída libre?

15.- a) Una masa fluida está girando con una velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje vertical central de un depósito cilíndrico. Demostrar que la variación de presión en la dirección radial está dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r.$$

FIGURA 5-15

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$



b) Tomar  $p = p_c$  en el eje de rotación ( $r = 0$ ) y demostrar que la presión  $p$  en un punto cualquiera  $r$  es:

$$p = p_c + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2.$$

c) Demostrar que la superficie del líquido tiene forma de paraboloide (figura 5-15); esto es, una sección vertical de la superficie es la curva

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

d) Demostrar que la variación de presión con la profundidad es  $dp = \rho g dh$ .



## CAPITULO VI

### DINAMICA DE LOS FLUIDOS

#### 1.- Conceptos generales del flujo de los fluidos.

La dinámica de los fluidos trata del estudio de los fluidos en movimiento; constituyendo una de las ramas más complicadas de la mecánica. Una forma de analizar el movimiento de un fluido podría ser dividiendo el fluido en elementos de volumen infinitesimales, llamadas partículas de fluido y estudiar el movimiento de cada una de estas partículas. Como se verá resulta un trabajo muy grande, por ejemplo; si se analiza la corriente de agua de un río desbordado, o los remolinos de humo de un cigarrillo. Aunque se cumple la ecuación  $F=ma$  en todo instante, para cada partícula de humo, o cada gota de agua, resultaría complicado tener que escribir las ecuaciones de movimiento de cada partícula, ya que se tendría que asignar coordenadas  $x, y, z$  a cada partícula y expresarlas en función del tiempo.

Si una partícula de fluido en el instante  $t_0$  tiene como coordenadas  $x_0, y_0, z_0$ , en un tiempo  $t$  las coordenadas  $x, y, z$  quedarían determinadas por las funciones  $x(x_0, y_0, z_0, t)$ ,  $y(x_0, y_0, z_0, t)$  y  $z(x_0, y_0, z_0, t)$ , que describirían el movimiento del fluido. Este procedimiento fue desarrollado por Lagrange (1736-1813) y es una generalización directa de los conceptos de la mecánica de las partículas.

Otra forma de analizar el movimiento de un fluido es la desarrollada por Euler (1707-1783), la cual especifica la densidad y la velocidad de un fluido en cada punto en el espacio, en cada instante. Este método es el que se seguirá.

La densidad y la velocidad en un punto  $(x, y, z)$  en el instante  $t$  para el movimiento de un fluido, quedarán determinadas por las funciones  $\rho(x, y, z, t)$  y  $v(x, y, z, t)$ .

Que determinarán lo que ocurre en cierto punto en el espacio en un determinado momento, más bien que lo que ocurre a una partícula de fluido determinada. Toda cantidad empleada para describir el estado del fluido tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo.

Como esta forma de analizar el movimiento de un fluido enfoca la atención en un punto en el espacio y no en una partícula del fluido, no se puede evitar seguir a las partículas mismas, aunque sea durante cortos intervalos de tiempo  $dt$ . Va que es a las partículas y no a los puntos del espacio a las que se aplican las leyes de la mecánica.

A continuación se analizarán algunas características generales del flujo de los fluidos.

El flujo de un fluido puede ser estable (estacionario) o inestable (turbu-

lento). El movimiento de un fluido es de tipo estable siempre que la velocidad no sea demasiado grande, y las obstrucciones, estrechamientos o curvas del tubo que conduce el fluido no sean tales que obliquen a las líneas de corriente a modificar su dirección bruscamente. También es estable cuando la velocidad  $v$  en un punto cualquiera, es constante al transcurrir el tiempo.

Esto es, que cada partícula que pasa por este punto, tiene la misma velocidad y sigue exactamente la misma trayectoria que las partículas precedentes que pasaron por dicho punto. Una partícula puede tener una velocidad diferente en algún otro punto, pero todas las demás partículas que pasen por este segundo punto se comportan de igual manera que la primera partícula que paso por este punto. Estas condiciones se logran cuando la velocidad del fluido es pequeña.

El flujo inestable se presenta cuando la velocidad es grande y hay obstrucciones, estrechamientos o curvas en el tubo que conduce el fluido; así como -- también cuando las velocidades varían irregularmente de un punto a otro, ya que las líneas de corriente modifican su dirección bruscamente. En el flujo inestable las velocidades  $v$  son funciones del tiempo. El flujo de los fluidos puede ser rotacional o irrotacional.

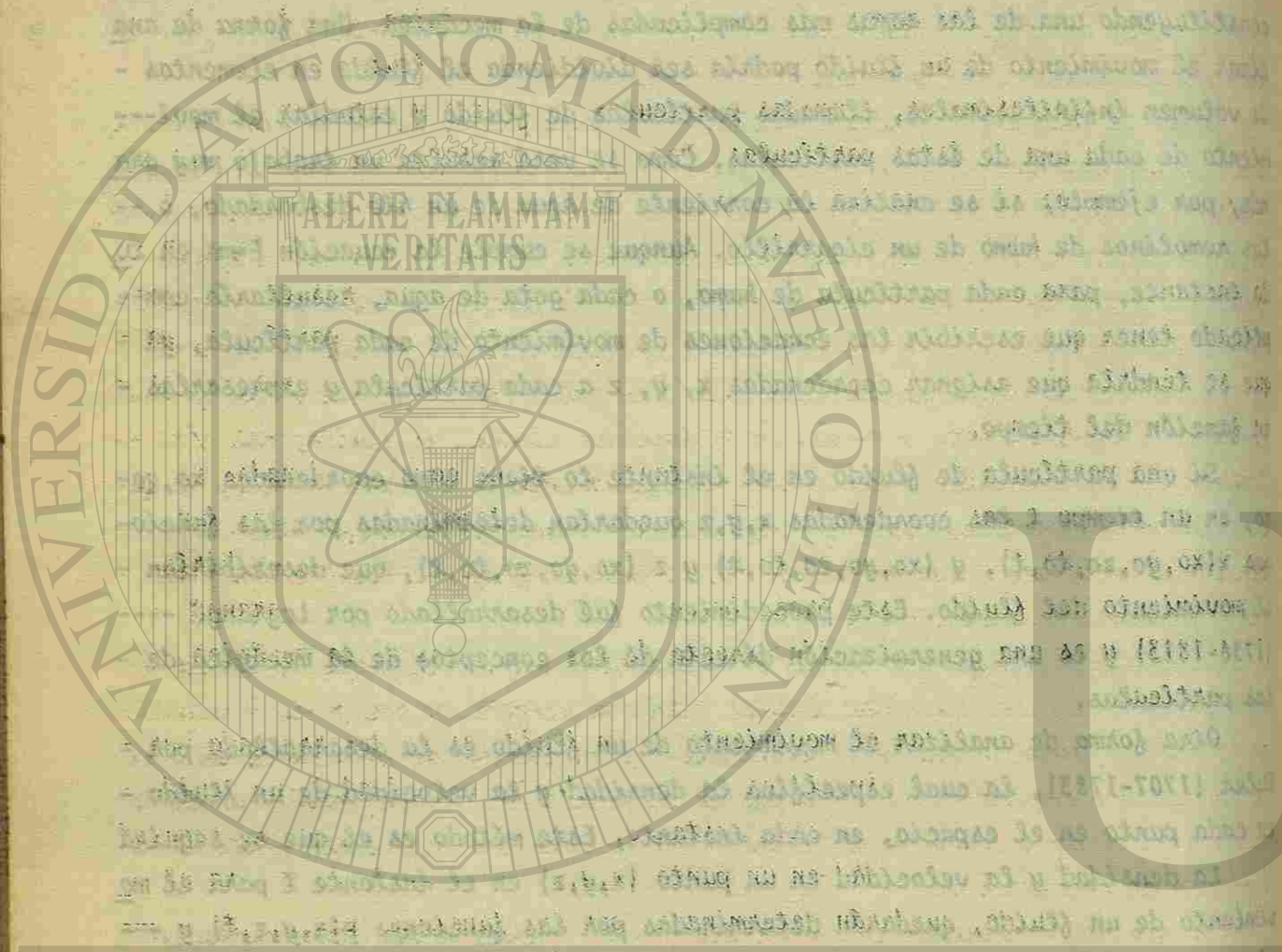
El flujo de fluido rotacional se presenta cuando el elemento de fluido en cada punto tiene una velocidad angular neta con respecto a ese punto y cuando no es así el flujo de fluido es irrotacional. Un ejemplo de esto puede ser, si se coloca una pequeña rueda con aspas en el fluido que se esta moviendo. Si la rueda gira el movimiento es rotacional y si solamente se mueve sin girar el movimiento es irrotacional.

El flujo irrotacional es importante ya que conduce a problemas matemáticos relativamente simples. En este caso, la velocidad  $v$  es relativamente simple ya que la cantidad de movimiento angular no interviene.

En el flujo rotacional esta incluido el movimiento en que el vector velocidad varía en dirección transversal; así como también incluye el movimiento de vórtice, como cuando se forman remolinos.

El flujo de los fluidos puede ser compresible o incompresible. En los líquidos se puede considerar que tienen un flujo incompresible, ya que los cambios de densidad son mínimos y por lo tanto no se consideran. Un gas altamente compresible puede experimentar algunas veces cambios de densidad de poco valor, cuando esto sucede el flujo es prácticamente incompresible.

En los vuelos a velocidades muy inferiores a la velocidad del sonido en el aire, el movimiento del aire con relación a las alas es de fluido casi incompresible. En estos casos, la densidad  $\rho$  es constante, e independientemente de  $x, y,$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL

$z$  y  $t$ , el estudio del flujo de este fluido se simplifica considerablemente.

El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso. La viscosidad, en el movimiento de los fluidos, puede imaginarse como el rozamiento interno de un fluido. En muchos casos, tales como en problemas de lubricación es muy importante, mientras que en otros casos es insignificante.

Tanto los líquidos como los gases presentan viscosidad, aunque los líquidos son mucho más viscosos que los gases. La viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas de fluido en movimiento relativo y da lugar a pérdida de energía mecánica.

## 2.- Líneas de Corriente.

Como se dijo anteriormente para el flujo estable la velocidad  $v$ , en un punto dado, es constante.

En la figura 6-1, conciderese este punto  $P$  dentro de una porción de un tubo en el cuál un fluido se mueve de izquierda a derecha. Si el movimiento es de tipo estacionario, cada partícula que pasa por el punto  $P$ , pasa por este punto con la misma velocidad y sigue la misma trayectoria que las partículas precedentes que pasaron por dicho punto. Debido a que  $v$  en el punto  $P$  no cambia al transcurrir el tiempo. Lo mismo sucede en los puntos  $Q$  y  $R$ , ya que la partícula que se encontraba inicialmente en  $P$ , estará un momento más tarde en  $Q$ , moviéndose en dirección distinta con velocidad diferente, y un momento todavía posterior estará en  $R$ , habiéndose cambiado de nuevo su velocidad. Por consiguiente, al trazar la trayectoria de la partícula, como se ha hecho en la figura, está curva será la trayectoria de toda partícula que llegue a  $P$ . A esta curva se le llama línea de corriente y debe ser siempre perpendicular a la velocidad de las partículas de fluido en todo punto. Si se cruzaran dos líneas de corriente, una partícula de fluido que llegará ahí, seguiría ya fuera por una línea o por la otra y entonces el fluido no sería de tipo estable. En el fluido de tipo estable el mapa de las líneas de corriente, en una corriente, permanece inalterado al transcurrir el tiempo.

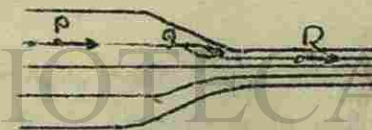


FIGURA 6-1

En la figura 6-2 se ha considerado un fluido de tipo estable, en la cuál se selecciona un número finito de líneas de corriente formando un haz. A la re-

gion tubular se le llama tubo de flujo. El límite de uno de estos tubos esta -- formado por líneas de corriente y siempre es paralelo a la velocidad de las partículas del fluido. Por consiguiente, nada de fluido puede cruzar los límites -- de un tubo de flujo y entonces el tubo se comporta como si fuera una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

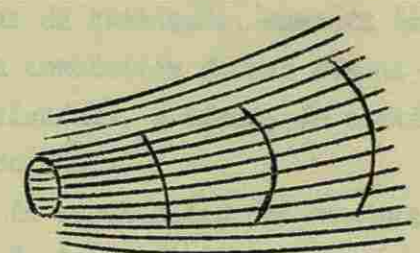


FIGURA 6-2

3.- La ecuación de continuidad.

La figura 6-3, representa un tubo por el cuál circula un fluido de izquierda a derecha. La velocidad del fluido en su interior, aún cuando es paralela al tubo en un punto cualquiera, puede tener diferentes magnitudes en distintos puntos.

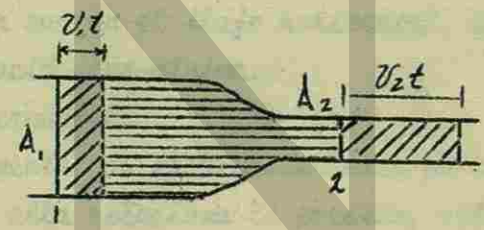


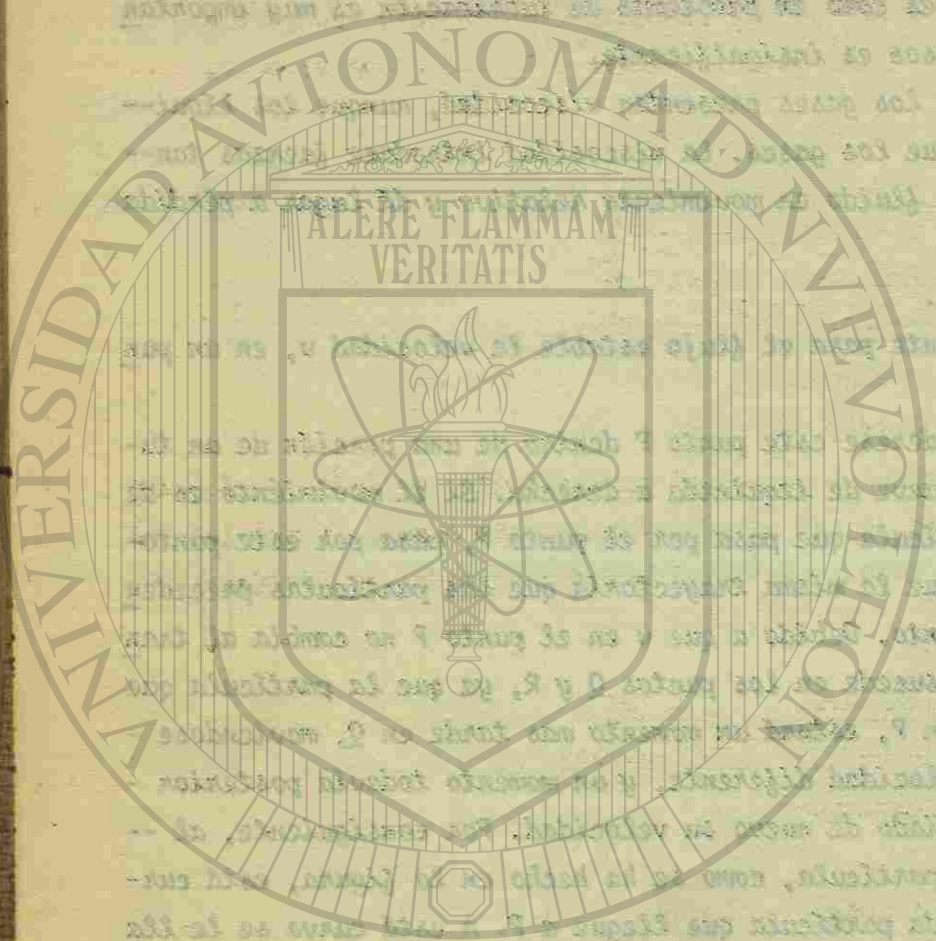
FIGURA 6-3

Sea  $A_1$  el área de la sección transversal en el punto 1 y  $V_1$  la velocidad. Durante el tiempo  $t$  las partículas de fluido que se encuentran inicialmente en 1 avanzarán una distancia  $V_1 t$  y atravesará la sección  $A_1$  un volumen de fluido igual a  $A_1 V_1 t$ . Por lo tanto, el volumen de fluido que atravieza por unidad de tiempo es igual a  $A_1 V_1$ . De igual forma el volumen de fluido que atravesará por unidad de tiempo la sección  $A_2$  es  $A_2 V_2$ . Si el fluido es incompresible las cantidades que fluyen por unidad de tiempo a través de ambas secciones serán iguales, y por consiguiente:

$A_1 V_1 = A_2 V_2 = AV = constante$  Ecuación 6-1

Donde  $A$  y  $V$  son el área de la sección y la velocidad en cualquier punto.

Está es la ecuación de continuidad para el movimiento estacionario de un fluido incompresible. Notese que en esta ecuación, la velocidad del flujo varía en razón inversa al área de la sección transversal, y una consecuencia de esta relación es que la velocidad aumenta cuando la sección transversal disminuye, y



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

viceversa.

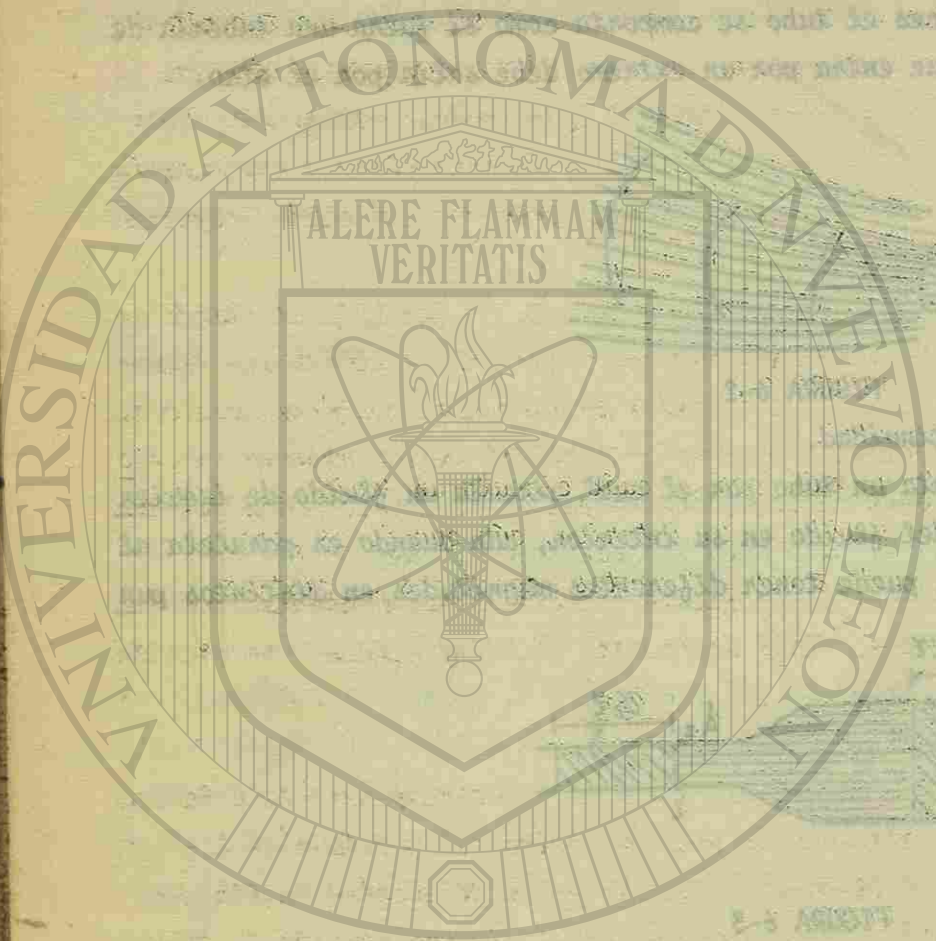
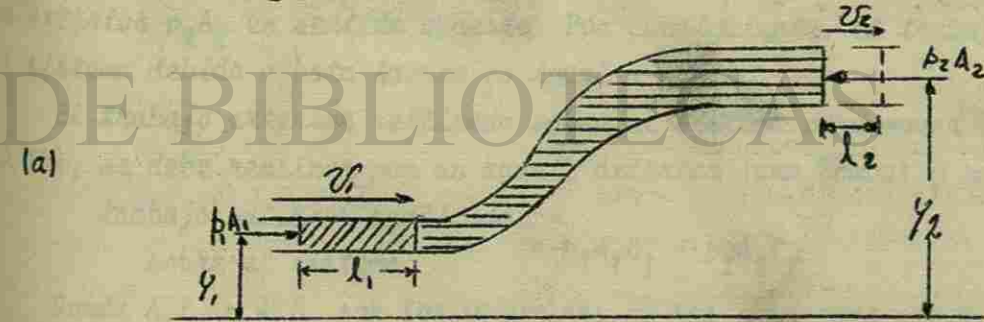
El hecho de que el producto  $A V$  permanece cte. a lo largo del tubo de flujo, permite dar una interpretación al mapa de líneas de corriente. En la parte angosta del tubo las líneas de corriente están mas próximas entre sí, mientras que en la parte ancha están mas espaciadas. Por lo tanto, conforme disminuye la distancia entre las líneas de corriente, aumenta la velocidad del fluido. Apartir de esto se llega a la conclusión de que líneas de corriente muy próximas indican regiones de alta velocidad, y líneas de corriente muy espaciadas representan regiones de baja velocidad.

Así pues, aplicando la segunda ley del movimiento al flujo de un fluido entre 1 y 2 de la figura 6-3. Se encuentra que una partícula de fluido que tiene una velocidad  $V_1$  en el punto 1 debe de aumentar su velocidad conforme avanza al adquirir la velocidad de avance  $V_2$ . Por consiguiente, el fluido aumenta su velocidad al ir de 1 a 2. El aumento de la velocidad puede ser debido a una diferencia de presión que obra sobre la partícula de fluido que va de 1 a 2.

En un tubo de flujo horizontal, la fuerza gravitacional no cambia. Por lo tanto, podemos concluir que en el flujo horizontal, de tipo estable, la presión es máxima donde la velocidad es mínima.

4.- Ecuación de Bernoulli.

La Ecuación fundamental de la hidrodinámica es la correspondiente a la ecuación de Bernoulli, en ella relaciona la presión, velocidad y altura en los puntos situados a lo largo de una línea de corriente, y se deducirá a partir del teorema del trabajo y la energía. La figura 6-4 representa una porción de tubo en el cual se mueve, con movimiento estable, un flujo incompresible y no viscoso. La parte del tubo representada en la figura tiene una sección transversal  $A_1$  en la izquierda. En este lugar el flujo es horizontal y se encuentra a una altura  $y_1$  sobre un nivel de referencia; a la sección  $A_1$  le sigue una región cuya sección transversal va aumentando y levantandose y finalmente tiene una sección transversal  $A_2$  donde el flujo es horizontal y se encuentra a una altura  $y_2$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA

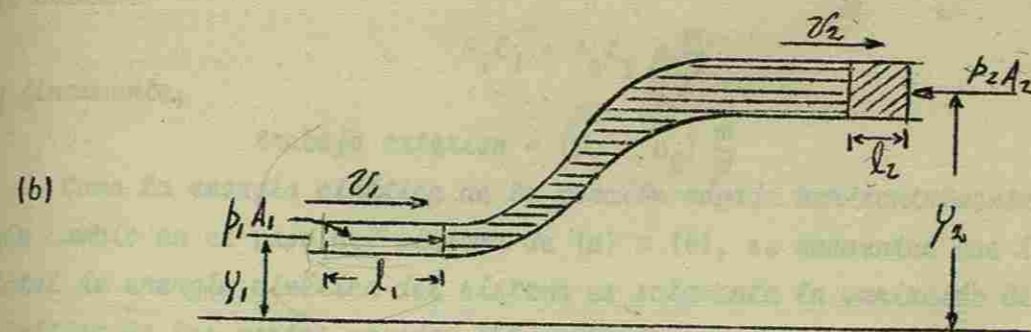


FIGURA 6-4

Fijando la atención en la porción del fluido representada por las dos partes rayadas oblicua y horizontalmente y llamando a este fluido el "sistema". -- considerese el movimiento del sistema desde la porción representada en (a) hasta la indicada en (b). En todos los puntos que se encuentran en la parte angosta del tubo, la presión es  $p_1$  y la velocidad  $v_1$ , mientras que los que se encuentran en la parte ancha, la presión es  $p_2$  y la velocidad  $v_2$ .

El teorema del trabajo y la energía establece que: "El trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio de la -- energía cinética del sistema".

En la figura 6-4 las fuerzas que producen trabajo sobre el sistema, son -- las fuerzas de presión  $p_1 A_1$  y  $p_2 A_2$  que están obrando sobre los extremos izquierdo y derecho del sistema así como la fuerza de la gravedad.

Cuando el fluido se mueve por el tubo el efecto requerido es llevar la cantidad de fluido, representada por la zona rayada diagonalmente en la figura -- 6-4a, a la posición mostrada en la figura 6-4b.

Cuando la parte izquierda del sistema avanza una distancia  $l_1$  paralela a -- la fuerza exterior  $p_1 A_1$ , se encuentra que el trabajo realizado sobre el sistema por esta fuerza es igual a  $p_1 A_1 l_1$ .

La parte de la derecha avanza una distancia  $l_2$  mientras que actúa una fuer -- za exterior  $p_2 A_2$  en sentido opuesto. Por consiguiente, el trabajo realizado por el sistema debido a esta fuerza es igual a  $p_2 A_2 l_2$ .

El trabajo exterior realizado sobre el sistema para mover la posición (a) a -- la (b), se debe realizar por un agente exterior (una bomba) y es igual a;

$$\begin{aligned} \text{trabajo exterior realizado} \\ \text{sobre el sistema} &= p_1 A_1 l_1 - p_2 A_2 l_2 \end{aligned}$$

Donde  $A_1 l_1$  y  $A_2 l_2$  son los volúmenes de las porciones rayadas diagonalmente -- las cuales son iguales puesto que el fluido es incompresible.



Si  $m$  es la masa de cada una de estas porciones y  $\rho$  la densidad del fluido, se obtiene:

$$A_1 l_1 = A_2 l_2 = \frac{m}{\rho}$$

y finalmente,

$$\text{trabajo exterior} = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho}$$

Como la energía cinética de la porción rayada horizontalmente no tiene ningún cambio en el paso del sistema de (a) a (b), se encuentra que la variación total de energía cinética del sistema es solamente la variación de la energía cinética de las partes rayadas oblicuamente, o sea:

$$\text{variación de energía cinética} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

El trabajo realizado por la gravedad sobre el sistema, está relacionado -- con elevar el fluido rayado diagonalmente, de la altura  $y_1$  a la altura  $y_2$  y es igual a:

variación de energía

$$\text{potencial gravitatoria} = m g y_2 - m g y_1$$

A partir de la definición del teorema del trabajo y la energía, se tiene -- que,

$$W = \Delta K$$

igualando entonces el trabajo neto realizado sobre el sistema a la suma de los incrementos de esas energías, cinéticas y potencial gravitatoria, se obtiene:

$$(p_1 - p_2) \frac{m}{\rho} = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \right) + m g y_2 - m g y_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad \text{Ecuación 6-2}$$

puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera situados a lo largo del tubo, se puede escribir:

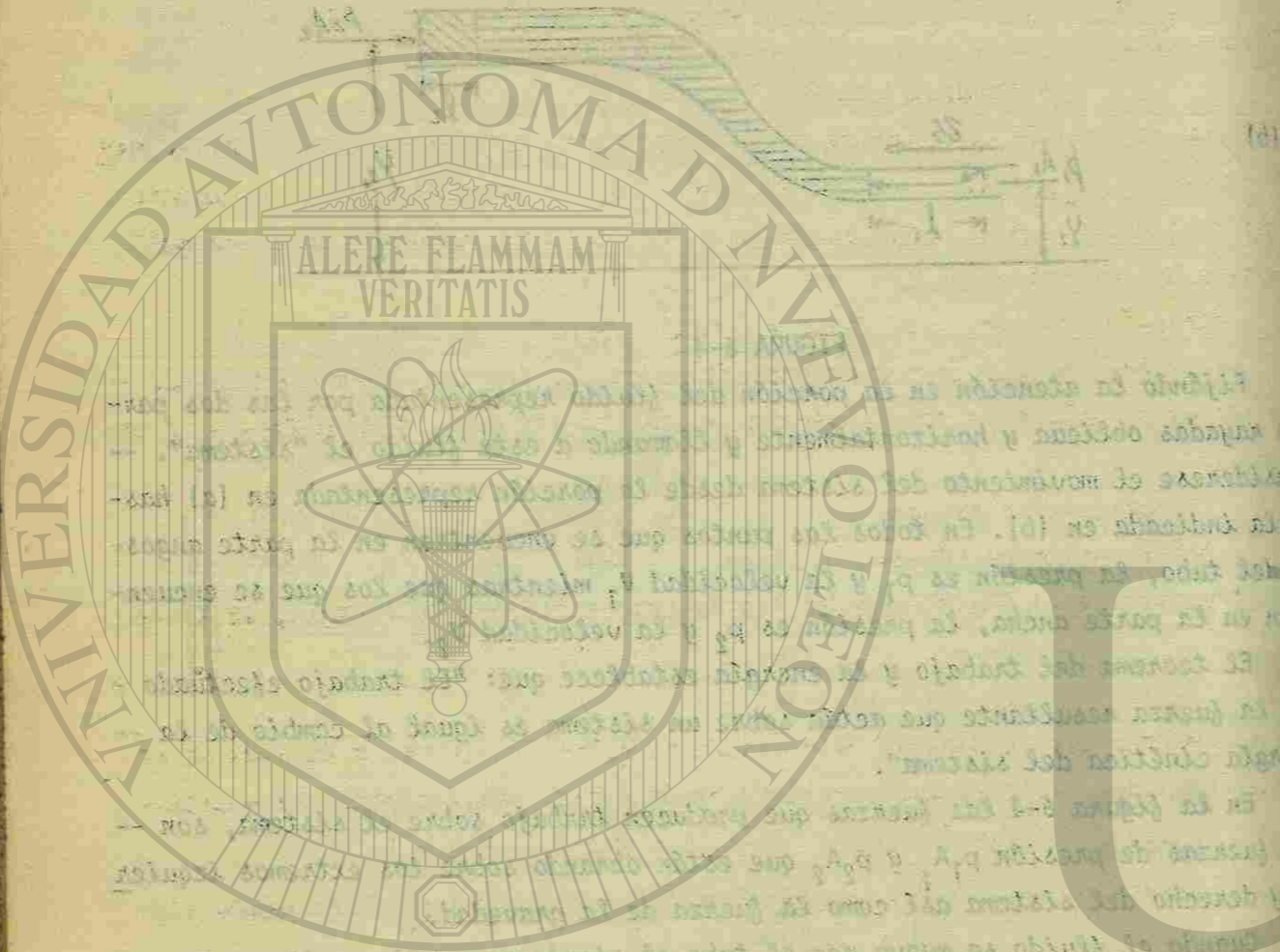
$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constante.} \quad \text{Ecuación 6-2a}$$

a esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación de Bernoulli, y es aplicable a un flujo de tipo estable, no viscoso, incompresible.

En la ecuación 6-2a,  $p$  es la presión absoluta y se expresa en  $\frac{\text{kg}}{\text{mt}^2}$ ,  $\frac{\text{NT}}{\text{mt}^2}$ ,  $\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ , o  $\frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$ . La densidad  $\rho$  debe de estar en  $\text{kg}/\text{mt}^3$ ,  $\text{grs}/\text{cm}^3$ , o  $\text{slugs}/\text{ft}^3$ .

Hecho esto, cada término de la ecuación de Bernoulli tiene dimensiones de presión. La presión  $p + \rho g h$ , que habría aún cuando no hubiera flujo ( $v = 0$ ), se le llama presión estática; al término  $\frac{1}{2} \rho v^2$  se le llama presión dinámica.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinámica -- de la misma, de igual forma, la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los mismos. Por lo tanto, la ley de los cambios de presión con --



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

respecto a la altura de un fluido en reposo, puede quedar incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso especial.

Considerando que el fluido se encuentra en reposo, entonces  $v_1 = v_2 = 0$  y la ecuación 6-2 se transforma en:

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_2 = p_1 - \rho g (y_2 - y_1)$$

5.- Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de Continuidad.

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar para encontrar las velocidades de un fluido mediante mediciones de presión. Generalmente en tales dispositivos medidores establece que la velocidad del fluido aumenta en la parte mas angosta de un tubo; mientras que la ecuación de Bernoulli indica que en este sitio debe disminuir la presión. Por ejemplo, para un tubo horizontal  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p$  es igual a una constante. Esto es, que si  $v$  aumenta y el fluido es incompresible, la presión  $p$  disminuye.

La variación de presión con la profundidad de un fluido incompresible puede encontrarse aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 de la figura 6-5.

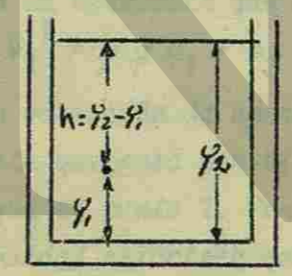


FIGURA 6-5

teniendo que:

$$p_2 = p_0 \text{ (atmosférica) } \text{ y } v_1 = v_2 = 0$$

entonces:

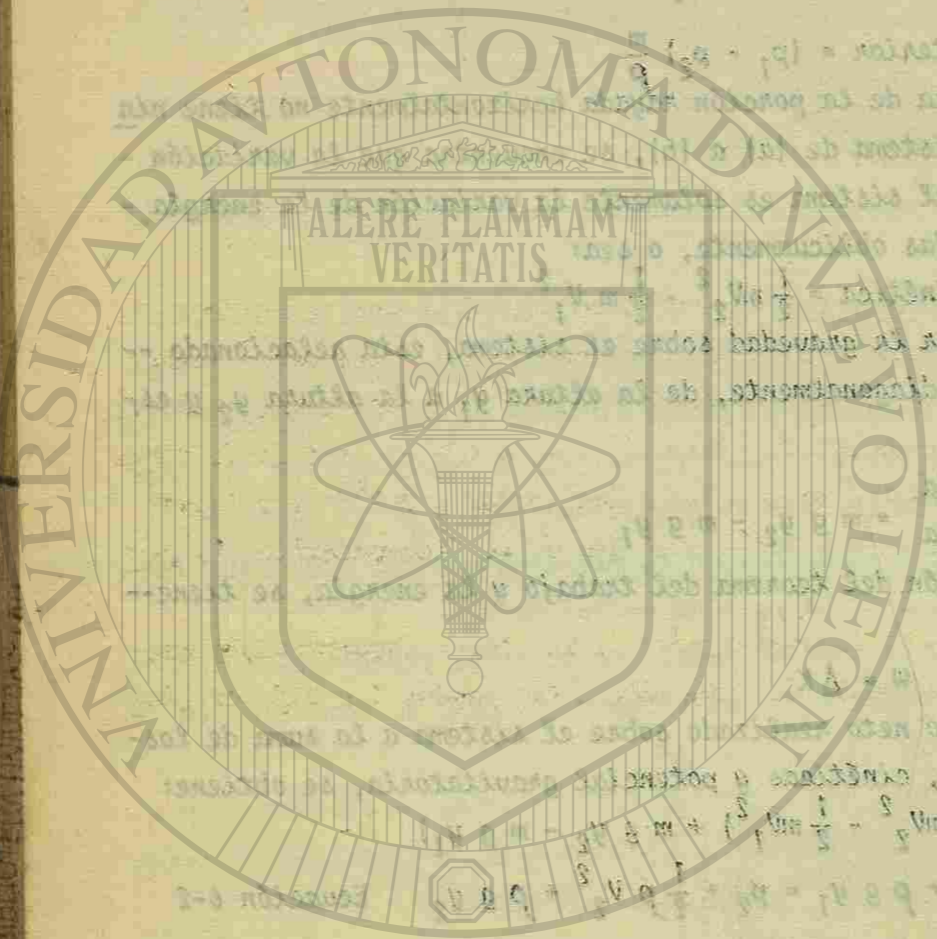
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p_0 + \rho g (y_2 - y_1)$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h$$

El medidor de Venturi.

Este aparato sirve para medir la velocidad de flujo de un líquido. Está representado en la figura 6-6 y consiste en un estrechamiento producido en un tubo y proyectado de tal forma que mediante una disminución gradual de la sección en la entrada y un aumento también gradual en la salida, se evite la produc



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ción de remolinos y quede asegurado un movimiento estacionario. A través de la tubería cuya sección transversal tiene una area  $A$ , fluye un líquido de densidad  $\rho$ . En el angostamiento de la sección es  $a$  y se conecta un tubo manométrico, como se indica en la figura.

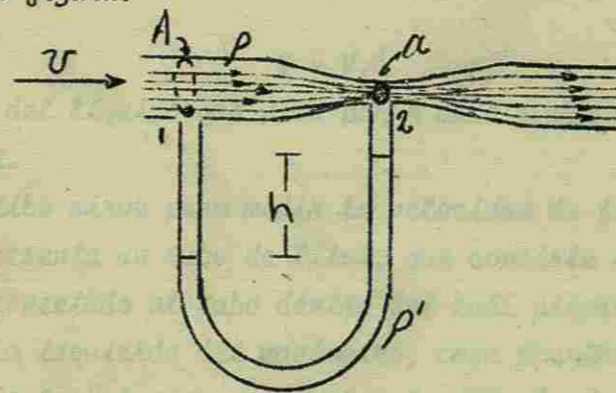


FIGURA 6-6

Ejemplo 6-1

Si el líquido del manómetro, es mercurio cuya densidad es  $\rho'$ ; aplicando -- la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad a los puntos 1 y 2, demostrar cuál es la velocidad de flujo en A.

A partir de la ecuación de Bernoulli que dice:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2,$$

se encuentra que como no hay variación de energía potencial ya que se esta analizando una línea de corriente que pasa por el centro del tubo, en la cuál el punto 1 esta a igual nivel que el punto 2. Por lo tanto,  $y_1 - y_2 = 0$ . Y sabiendo que la ecuación de continuidad establece que:

$$A v_1 = a v_2 \text{ donde } v_2 = \frac{A}{a} v_1$$

se obtiene,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{A}{a} v_1 \right)^2 - v_1^2 \right] = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{A^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{A^2 - a^2}{a^2} \right) \quad \text{®}$$

analizando el manómetro para la misma línea de corriente se encuentra que:

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho' g h + \rho g y_2$$

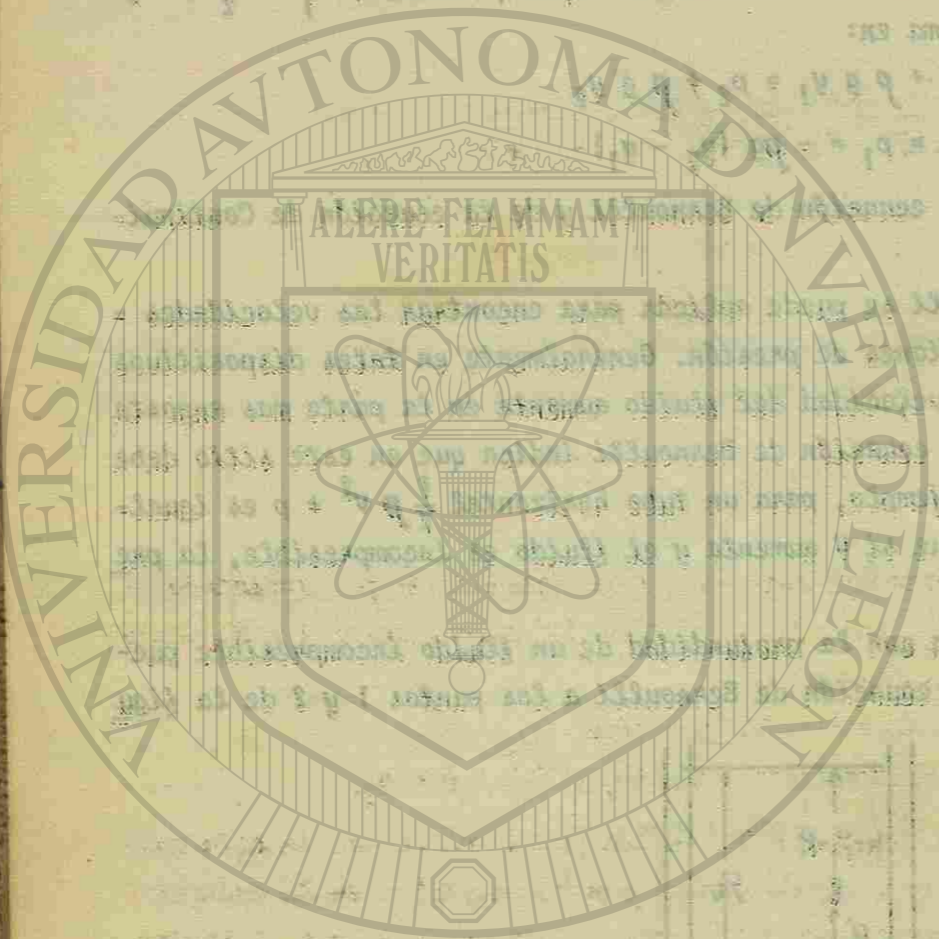
$$p_1 + \rho g h = p_2 + \rho' g h$$

$$p_1 - p_2 = g h (\rho' - \rho)$$

sustituyendo esta expresión en la anterior se tiene,

$$g h (\rho' - \rho) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{A^2 - a^2}{a^2} \right)$$

por lo tanto,



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$v_1 = a \frac{2 g h (p' - p)}{\rho (A^2 - a^2)}$$

Para encontrar el flujo de volumen o gasto que pasa por A, simplemente se calcula,

$$Q = v_1 A \tag{Ecuación 6-3}$$

que es el volumen del líquido que pasa por A cada segundo.

Tubo de Pitot.

Este dispositivo sirve para medir la velocidad de flujo de un gas. En la figura 6-7 se representa un tubo de Pitot, que consiste en un tubo manométricoabierto que esta conectado al tubo dentro del cual circula el gas. La presión en la columna de la izquierda del manómetro, cuya abertura es paralela a la dirección del movimiento del gas, es igual a la presión de la corriente gaseosa. La abertura en la rama de la derecha es perpendicular a la corriente y la presión en esta rama se puede calcular aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos a y b.

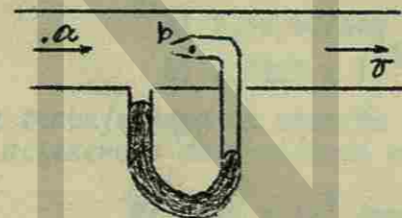


FIGURA 6-7

Si  $V$  es la velocidad de la corriente,  $\rho$  la densidad del gas y  $p_a$  la presión en el punto a, y como la velocidad en el punto b es nula, se obtiene:

$$p_b = p_a + \frac{1}{2} \rho V^2$$

Como  $p_b$  es mayor que  $p_a$ , el líquido del manómetro se desplaza como se indica en la figura. Analizando el manómetro y sabiendo que  $\rho_0$  es la densidad del líquido contenido en el, y  $h$ , la diferencia de alturas del líquido en sus ramas se tiene:

$$p_b = p_a + \rho_0 g h$$

combinando estas dos ecuaciones, resulta:

$$\rho_0 g h = \frac{1}{2} \rho V^2$$

a partir de la cual se puede calcular la velocidad  $V$  del gas.

## PROBLEMAS

1.- Se practica un orificio circular de 1.5cm de diámetro en la pared lateral de un gran depósito, y a una altura de 6mt por debajo del nivel del agua en el mismo. Calcular: a) La velocidad de salida; b) el volumen que sale por unidad de tiempo. Despréciase la contracción de las líneas de corriente después de salir del orificio.

R:  
a) 10.84mt/seg  
b) 5.32 lts/seg.

2.- Una manguera de jardín tiene un diámetro interior de 0.019mt y está conectada con un rociador de césped que consiste simplemente en una caja con 24 agujeros, cada uno de 0.0013mt de diámetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 0.915mt/seg, ¿a qué velocidad saldrá por los agujeros del rociador?

R: 8.84 mt/seg.

3.- Algunas veces se prueban modelos de torpedos en un tubo por el que fluye agua, en forma semejante a como se usa un túnel de viento para probar modelos de aviones. Considere un tubo circular de diámetro interior de 0.254mt y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diámetro de 0.05mt. Se va a probar el torpedo con agua fluyendo junto a él con una velocidad de 2.44 m/seg. a) ¿A qué velocidad deberá fluir el agua en la parte del tubo no estrecha b) ¿Cuál será la diferencia de presiones entre la parte estrecha y la no estrecha del tubo?

R: a) 2.54 mt/seg  
b)  $0.0025 \times 10^5$  nt/mt<sup>2</sup>.

4.- ¿Qué cantidad de trabajo hace la presión al forzar  $1.42\text{mt}^3$  de agua por un tubo de 0.013mt si la diferencia de presiones entre los dos extremos del tubo es de 1.11 atm?

R:  $1.49 \times 10^5$  joules.

5.- Está cayendo agua desde una altura de 18.3mt a razón de  $0.238\text{mt}^3/\text{seg}$  e impulsa una turbina. ¿Cuál es la máxima potencia que se puede obtener con esta turbina?

R: 41.7 kwatts.

6.- Aplicando la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad a los puntos 1 y 2 de la figura (6-6), demostrar que la velocidad de flujo a la entrada es:

$$v = a \sqrt{\frac{2(p' - p)gh}{p(A^2 - a^2)}}$$

7.- Un medidor de Venturi tiene un diámetro de tubo de 0.254mt y un diámetro en el cuello de 0.127mt. Si la presión del agua en el tubo es de  $27.2 \times 10^3$  kg/mt<sup>2</sup> y en el cuello de  $20.4 \times 10^3$  kg/mt<sup>2</sup>, calcular el gasto del agua en mt<sup>3</sup>/seg.

R: 0.074 mt<sup>3</sup>/seg.

8.- Considérese el tubo de Venturi de la figura (6-6) sin el manómetro. Sea a igual a 5a. Supóngase que la presión en A es de 2.0atm. Calcular los valores de v en A y de v' en a para los cuales la presión p' en a es igual a cero. Calcular el gasto correspondiente si el diámetro en A es de 5.0cm. El fenómeno que ocurre en a cuando p' se reduce casi a cero se llama cavitación. El agua se vaporiza en pequeñas burbujas.

R:  $v=4.1\text{mt}/\text{seg}$ ;  $v'=21\text{mt}/\text{seg}$ ;  $Q=8.1 \times 10^{-3}\text{mt}^3/\text{s}$

9.- La figura (6-8) muestra el líquido que está saliendo por un orificio en un gran tanque a una profundidad  $h$  bajo el nivel del agua. a) Aplique la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que une los puntos 1, 2 y 3, y demuestre que la velocidad de salida es  $v = \sqrt{2gh}$ . Esta ecuación se conoce como ley de Torricelli. b) Si el orificio estuviera en un ángulo directamente hacia arriba, ¿hasta qué altura se elevaría la corriente del líquido? c) ¿Cómo afectaría la viscosidad o la turbulencia los resultados del problema?

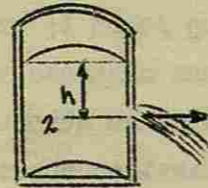


FIGURA (6-8)

10.- Un tanque está lleno de agua hasta una altura  $H$ . Tiene un orificio en una de sus paredes a una profundidad  $h$  bajo la superficie del agua figura (6-9) a) Encontrar la distancia  $x$  a partir del pie de la pared de la cual el chorro llega al piso. b) ¿Podría hacerse un orificio a otra profundidad de manera que este segundo chorro tuviera el mismo alcance? Si es así, ¿a qué profundidad?

R:

a)  $x = 2\sqrt{h(H-h)}$

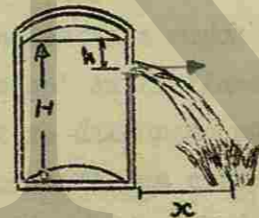
b) Sí, a una distancia  $h$  arriba del fondo.

FIGURA (6-9)

11.- La superficie libre del agua en un tanque se encuentra a una altura  $H$  sobre el piso horizontal. ¿A qué profundidad  $h$  habría que hacer un pequeño orificio para que el chorro horizontal de agua que saliera llegara al suelo a la máxima distancia de la base del tanque? ¿Cuál sería esta distancia máxima?

R:  $h = H/2; x = H.$

12.- Un tubo de Pitot está instalado en el ala de un avión para determinar la velocidad de éste con relación al aire. El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 0.124 mt. ¿Cuál es la velocidad del avión en km/hr con respecto al aire?

R: 139 km/hr.

## CAPITULO VII

### EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

#### 1.- El calor, una forma de la energía.

Cuando dos cuerpos que tienen diferentes temperaturas se ponen en contacto la temperatura final que alcanzan tiene un valor comprendido entre las dos temperaturas iniciales. Hasta principios del siglo XIX admitían que en todos los cuerpos existía una sustancia material, llamada calórico.

SE creía que el calórico era el calor que se presentaba en forma de fluido invisible e imponderable, que se producía cuando una sustancia se quemaba, y -- que podía transmitirse por conducción de un cuerpo a otro. Creían que cuando un cuerpo tenía una temperatura elevada contenía mas calórico que otro que tubiera una temperatura mas baja. Y que si estos dos cuerpos se ponían en contacto, el de mayor calórico cedía algo de esta sustancia al otro, hasta que ambos cuerpos tubieran la misma temperatura. La teoría del calórico podía describir muchos -- procesos, como la mezcla de sustancias en un calorímetro o la conducción del calor, de una manera satisfactoria. Sin embargo, el concepto de calor como sustancia, cuya cantidad total permanecía constante, a la larga no resistió la prueba de los experimentos.

Aún así, todavía se describen algunos cambios de temperatura como el paso de "algo" de un cuerpo que se encuentra a mayor temperatura al que se encuentra a menor temperatura, y a este "algo" se le llama calor.

Una definición de calor que es útil pero no operacional, es la siguiente: "Calor es aquello que se comunica entre un cuerpo y su medio ambiente como resultado unicamente de la diferencia de temperaturas".

Con el tiempo se llegó a comprender que el calor es una forma de energía y no una sustancia. La primera prueba de que el calor no podía ser sustancia fué dada por Benjamín Thompson (1753-1814), un norteamericano que mas tarde llegó a ser el Conde de Rumford de Baviera. Rumford hizo su descubrimiento cuando fué comisionado por el gobierno de Baviera para dirigir el taladrado de los cañones. Para evitar un exceso de calentamiento, el taladro del cañón se mantenía lleno de agua, pero como durante el proceso del taladro el agua hervía, el alma del cañón tenía que llenarse continuamente. SE admitía que para hervir el agua habí a que suministrarle calórico, y la producción continua de calórico se explicaba admitiendo que cuando la materia se dividía finamente (como sucede en el proceso del taladrado) disminuía su capacidad para retener el calórico, el cuál, desprendido de esa forma motivaba que el agua hirviera.

En experimentos específicos Rumford observó, que el agua de refrigeración-- continuava hirviendo aún cuando la herramienta quedaba tan roma que no cortaba.

Esto es, que la herramienta roma constituía todavía aparentemente un depósito - inextinguible de calórico mientras se realizará trabajo para hacer girar la herramienta.

De esta manera se vió que se creaba calor debido al trabajo mecánico gastado en el proceso de taladrado.

En el caso citado se estaba en presencia de un proceso que no obedecía al principio de conservación ya que no había la continua desaparición de energía - mecánica, y la continua creación de calor, entonces todo el proceso se vió como una transformación de energía de una forma o en otra, Conservandose la energía total.

La idea de conservación condujo a los hombres a nuevos descubrimientos. Y fué Joule, en el intervalo de 1843 a 1878, quien demostró que siempre que una cantidad de energía mecánica se transforme en calor, se obtiene la misma cantidad de éste, y así fué como quedó definitivamente establecida la equivalencia - del calor y el trabajo como dos formas de energía.

Helmholtz fué el primero que exprezó la idea de que no solo el calor y la energía mecánica son equivalentes sino que todas las formas de energía lo son, - y que no puede desaparecer una cantidad dada de una forma de energía sin que aparezca una cantidad igual en alguna de las otras formas.

## 2.- Cantidad de calor y calor específico.

La unidad de cantidad de calor Q que interviene en un proceso, se define - en función de un cierto cambio producido en un cuerpo durante el proceso, y es el calor necesario para producir alguna transformación de tipo convenida.

Las unidades mas usuales de calor son; la caloría kilogramo, la caloría gramo, y la unidad termica britanica (BTU).

La caloría kilogramo o kilocaloría es la cantidad de calor que debe suministrarse a un kilogramo en agua para elevar su temperatura en un grado centígrado.

La caloría gramo es la cantidad de calor que debe suministrarse a un gramo de agua para elevar su temperatura en un grado centígrado. ®

El BTU es la cantidad de calor que debe suministrarse a una libra de agua para elevar su temperatura en un grado Fahrenheit.

La caloría se usa también como unidad de calor y es igual a  $10^{-3}$  kilocalorías.

Generalmente, la cantidad de calor y la temperatura suelen confundirse; un ejemplo de que estas dos expresiones son diferentes es el siguiente. Si dos recipientes, uno de ellos contiene una pequeña y el otro una gran cantidad de ---



agua, se colocan sobre mecheros de gas iguales y se calientan durante el mismo tiempo es evidente que, transcurrido este tiempo, la temperatura de la cantidad mas pequeña de agua se habrá elevado más que la de la grande. Así pues, se ve que se ha suministrado la misma cantidad de calor a cada recipiente de agua, pero el incremento de temperatura no es el mismo en los dos casos.

La relación que hay entre las unidades de cantidad de calor es la siguiente:

1 keal = 1000 cal = 3.968 BTU = 4186 joules

Las sustancias difiere entre si en la cantidad de calor que se necesita para producir una elevación determinada de temperatura sobre una masa dada.

Al aplicar una cantidad de calor Q a un cuerpo, produce una elevación Δt en su temperatura. La razón de la cantidad de calor aplicada al incremento de temperatura se le llama capacidad calorífica del cuerpo:

C = capacidad calorífica = Q / Δt

Esta expresión lo que trata de dar a entender, es solamente la cantidad de calor agregado por unidad de elevación de temperatura y no la cantidad de calor que puede contener un cuerpo.

Para encontrar una cifra que sea característica de la sustancia de que está hecho el cuerpo; se define el calor específico de una sustancia, como la capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo formado por dicha sustancia.

Si se representa por la letra c, el calor específico, se obtiene:

c = capacidad calorífica / masa = Q / Δt / m = Q / mΔt Ecuación 7-1

tanto la capacidad calorífica de un cuerpo como el calor específico de la sustancia de que esta hecho, dependen solo de la situación del intervalo de temperaturas y por lo tanto no son constantes.

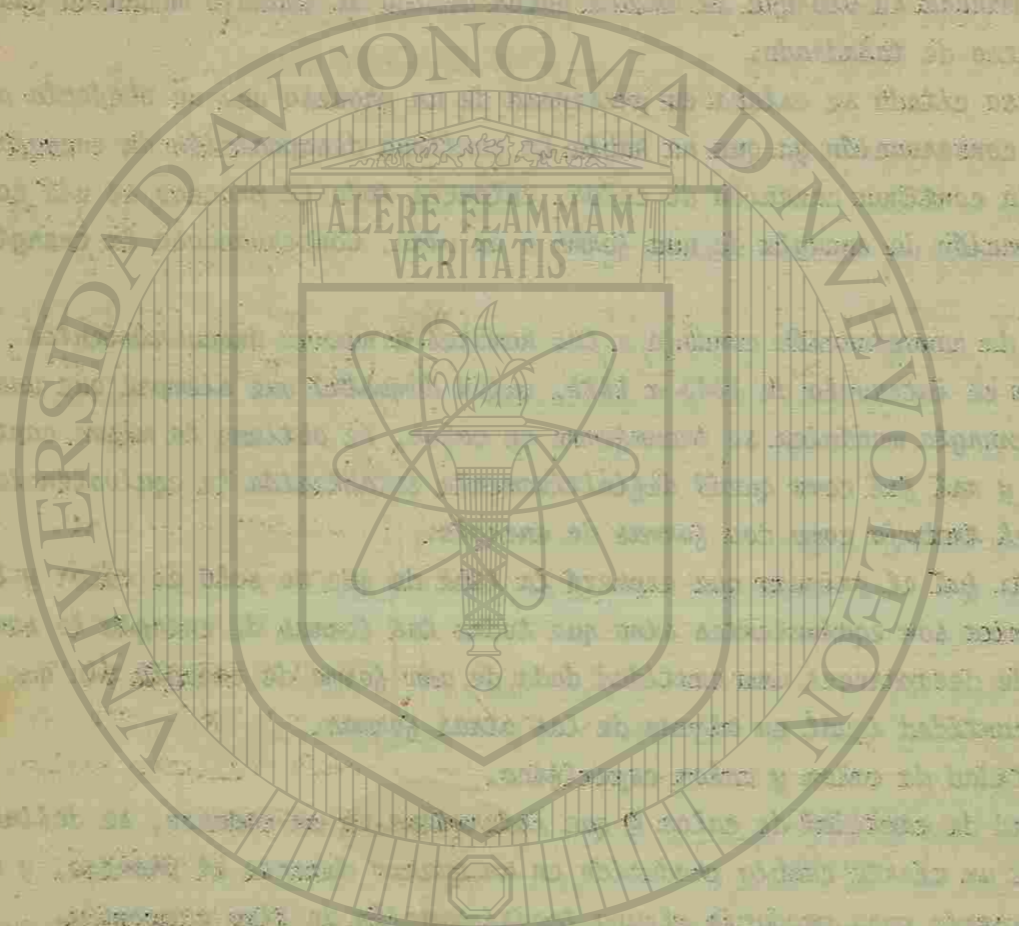
La ecuación 7-1, define el calor específico medio correspondiente al intervalo de temperaturas Δt.

El calor específico verdadero de una sustancia a cualquier temperatura se define apartir de la ecuación 7-1, considerando una elevación de temperatura infinitesimal dt, y llamado dQ a la cantidad de calor necesaria para producir aquella. Esto es:

c = dQ / mdt ; dQ = dQ = mcdt Ecuación 7-2

Por lo tanto, la cantidad de calor que se debe suministrar a un cuerpo de masa m, cuyo material tiene una capacidad calorífica específica c, para elevar su temperatura de t1 a t2, es:

Q = m ∫ t1 t2 c dt Ecuación 7-3



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Donde  $c$  es función de la temperatura y previamente a de conocerse esta función para poder realizar la integración. A temperaturas ordinarias, y en intervalos no muy grandes, los calores específicos se pueden considerar constantes.

Las ecuaciones 7-1 y 7-2 no definen el calor específico en forma única. Si no que hay que especificar las condiciones bajo las cuales se agrega calor al cuerpo; se a dejado entendido que la condición es que el cuerpo se conserve a la presión atmosférica normal, que es una condición común, pero hay algunas otras posibilidades y cada una de ellas conduce a un valor diferente de  $c$ . Para encontrar el valor único para  $c$  se deben especificar las condiciones, tales como el calor específico a presión constante  $c_p$ , el calor específico a volumen constante  $c_v$ , etc.

En la tabla 7-1 se dan los calores específicos de algunas sustancias a presión constante. Observando que a partir de la definición de la caloría y el BTU se tiene, que  $1 \frac{\text{cal.}}{\text{gr.}^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{BTU}}{16^\circ\text{F}}$ .

El calor específico del agua, bajo condiciones normales de temperatura y presión es igual a  $1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}}$ ; cuyo valor es grande comparado con el de la mayoría de las sustancias.

TABLA 7-1.

SUSTANCIA	CALOR ESPECIFICO cal/gr.°C	PESO MOLECULAR gr/mol	CAPACIDAD CALORIFICA MOLAR cal/mol °C
aluminio	0.215	27.0	5.82
carbono	0.121	12.0	1.46
cobre	0.0923	63.5	5.85
hierro	0.113	55.85	6.3
mercurio	0.033	200.61	6.62
plata	0.0564	108.0	6.09
plomo	0.0305	207.0	6.32
wolframio	0.0321	184.0	5.92

## Ejemplo 7-1.

Un bloque de cobre de 80 grs, se saca de un horno y se echa en un depósito de vidrio de 350grs. que contiene 250gramos de agua. La temperatura del agua se eleva de 15 a 30°C. ¿Cuál era la temperatura del horno?.

Este es un ejemplo de dos sistemas que se encontraban inicialmente a diferentes temperaturas y que alcanzaron el equilibrio térmico después de ponerse en contacto. No interviene energía mecánica, solo hay un intercambio de energía calorífica. Por consiguiente, calor perdido por el cobre = calor ganado por el depósito + calor ganado por el agua.

$$M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T_e) = M_{H_2O} C_{H_2O} (T_e - T_{H_2O}) + M_{H_2O} C_{H_2O} (T_e - T_{H_2O}).$$

$$M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T_e) = (T_e - T_{H_2O}) (M_{H_2O} C_{H_2O} + M_{H_2O} C_{H_2O}).$$

La temperatura inicial del cobre es  $T_{Cu}$ , la temperatura inicial del agua del depósito es  $T_{H_2O}$ , y la temperatura final de equilibrio es  $T_e$ . Si  $C_{Cu} = 0.093 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$ ,  $C_v = 0.12 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$  y  $C_{H_2O} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$ , se obtiene:

$$80 \text{ grs.} \times 0.093 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} (T_{Cu} - 30^\circ\text{C}) = (30^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}) (350 \text{ grs.} \times 0.12 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} + 250 \text{ grs} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}})$$

$$T_{Cu} = 620^\circ\text{C}.$$

### 3.- Capacidad calorífica molar de los sólidos.

En la tabla 7-1 se vé que en la segunda columna los calores específicos de los sólidos varían bastante de un material a otro. Sin embargo, si se comparan muestras de materiales que contengan el mismo número de moléculas y no muestras que tengan la misma masa se obtienen resultados muy diferentes.

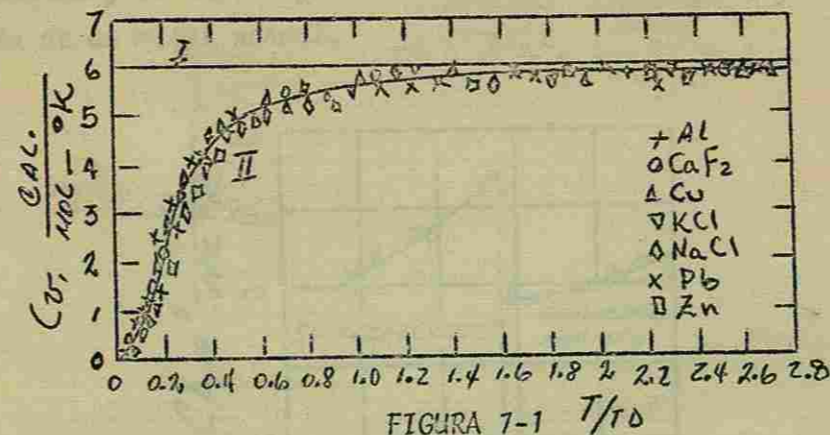
Esto se puede ver si se expresan los calores específicos en  $\frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{C}}$  y no en  $\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$ . En 1819, Dulong y Petit encontraron que las capacidades caloríficas molares de todas las sustancias, tienen valores cercanos a  $6 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{C}}$ , con algunas excepciones (ver el carbono en la tabla 7-1). La capacidad calorífica molar que se encuentra en la cuarta columna de la tabla 7-1 se obtiene multiplicando el calor específico (segunda columna) por el peso molecular (tercera columna). Donde se observa que la cantidad de calor requerida por molécula para elevar la temperatura de un sólido es aproximadamente la misma para casi todos los materiales.

Esta es una prueba sorprendente de la teoría molecular de la materia.

En realidad, las capacidades caloríficas molares varían con la temperatura aproximándose a cero cuando  $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$  y acercándose al valor de Dulong y Petit cuando  $T \rightarrow \infty$ . Debido a que es el número de moléculas más bien que la clase de ellas lo que parece ser importante para determinar el calor que se requiere para aumentar la temperatura de un cuerpo en una cierta cantidad, es de esperarse que las capacidades caloríficas molares para diferentes sustancias varían con la temperatura de una manera muy parecida.

En la figura 7-1 se muestra que las capacidades caloríficas molares para diversas sustancias se pueden hacer caer en la misma curva mediante un ajuste empírico simple de la escala de temperaturas. La escala horizontal en la figura es la relación  $\frac{T}{T_0}$  sin dimensiones, donde  $T$  es la temperatura Kelvin y  $T_0$  una --

temperatura característica, llamada temperatura Debye, la cuál tiene un valor constante para cada material.

FIGURA 7-1  $T/T_D$ 

Por ejemplo para el plomo  $T_D$  tiene el valor empírico de  $88^\circ\text{K}$  y para el carbono,  $T_D = 1860^\circ\text{K}$ . A partir de estos datos se puede comprobar que un valor de la escala  $T/T_D = 0.600$  corresponde a  $T = 53^\circ\text{K}$  para el plomo, y  $T = 1120^\circ\text{K}$  para el carbono. En cambio, la temperatura ambiente ( $\approx 300^\circ\text{K}$ ) corresponde a  $\frac{T}{T_D} = 3.4$  para el plomo y a  $\frac{T}{T_D} = 0.16$  para el carbono. De esta manera, a partir de la figura 7-1 se ve que en los primeros tiempos, cuando solo se disponía de calores específicos a la temperatura ambiente, el plomo se ajustaba a la regla de Dulong y Petit, pero el carbono parecía ser una excepción.

En la figura 7-1, la línea recta I es el valor de Dulong y Petit de 1819; concuerda con el experimento a elevadas temperaturas pero falla a bajas temperaturas. Está dentro de la suposición de que cada átomo de un sólido vibra independientemente, como un oscilador clásico. La curva II se debe a Debye (1912). De la teoría de Debye se puede obtener una temperatura característica  $T_D$ , que está directamente relacionada con una frecuencia de vibración característica del material, independiente de los experimentos de calor específicos.

Para analizar las vibraciones acopladas de los átomos en un sólido se usan principios cuánticos y se obtiene una fórmula para el calor específico que, en función de la relación sin dimensiones  $\frac{T}{T_D}$ , es la misma para todas las sustancias. La excelente concordancia de esta fórmula (curva II) con el experimento es un triunfo de la física cuántica. Los materiales mostrados en la figura 7-1 son normales desde el punto de vista de que no se funden, ni hierven, ni cambian su estructura cristalina, entre los límites de temperatura indicados. Las mediciones de calores específicos, que dicen la forma como absorbe energía un sólido cuando se eleva su temperatura, constituyen un método de exploración sensible para percibir tales arreglos moleculares, atómicos o electrónicos. Por --

ejemplo en la figura 7-2 se muestra el calor específico del tantalio cerca de  $-4.30^{\circ}\text{K}$ . Abajo de esta temperatura de transición, el tantalio pierde su resistencia eléctrica y se hace superconductor. Arriba de esta temperatura tiene la resistencia de un metal normal.

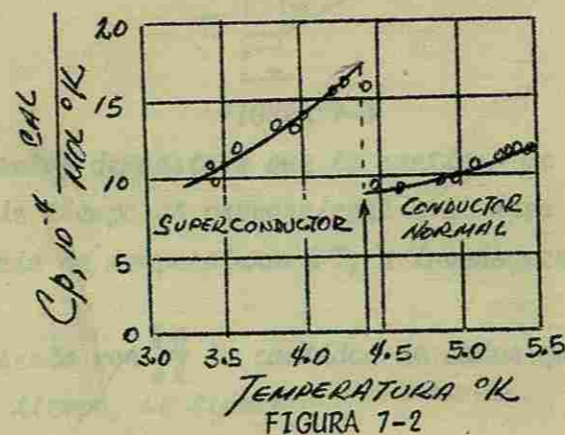


FIGURA 7-2

#### 4.- Conducción del calor.

Si el extremo de una barra metálica se coloca en una llama, fluye energía en forma de calor de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura. Este proceso de transferencia de calor se lleva a cabo por medio de colisiones moleculares, que aumentan cuando crece la temperatura de dicho extremo. Cuando las moléculas que se encuentran en la región de mayor temperatura chocan con sus vecinas que se mueven más lentamente, parte de su energía cinética es compartida con ellas, las cuales, a su vez, la transmiten a las que se encuentran más alejadas de la llama. Por consiguiente, la energía de la agitación térmica se transmite a lo largo de la barra de una molécula a otra, si bien cada una de ellas permanece en su posición inicial.

En la figura 7-3, se muestra una lámina de sección transversal  $A$ , y espesor  $\Delta x$ , cuyas caras se conservan a diferentes temperaturas. Si la cara izquierda de la lámina se mantiene a la temperatura  $T_2$ , y la cara derecha a una temperatura inferior  $T_1$ ; el calor fluirá a través de la lámina de izquierda a derecha. Cuando las caras de la lámina se mantienen durante un tiempo a las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , se comprueba que la temperatura en los puntos interiores de la lámina disminuye uniformemente con la distancia, desde la cara caliente a la fría, permaneciendo constante la temperatura en todo momento en cada punto. Se considera que la lámina se encuentra en un estado estacionario.

ejemplo en la figura 7-2 se muestra el calor específico del tantalio cerca de  $-4.30^{\circ}\text{K}$ . Abajo de esta temperatura de transición, el tantalio pierde su resistencia eléctrica y se hace superconductor. Arriba de esta temperatura tiene la resistencia de un metal normal.

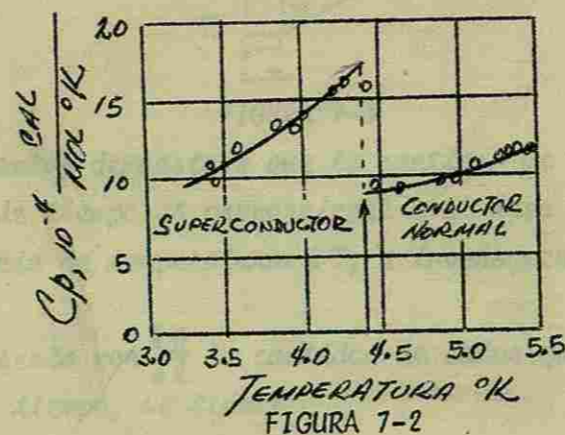


FIGURA 7-2

#### 4.- Conducción del calor.

Si el extremo de una barra metálica se coloca en una llama, fluye energía en forma de calor de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura. Este proceso de transferencia de calor se lleva a cabo por medio de colisiones moleculares, que aumentan cuando crece la temperatura de dicho extremo. Cuando las moléculas que se encuentran en la región de mayor temperatura chocan con sus vecinas que se mueven más lentamente, parte de su energía cinética es compartida con ellas, las cuales, a su vez, la transmiten a las que se encuentran más alejadas de la llama. Por consiguiente, la energía de la agitación térmica se transmite a lo largo de la barra de una molécula a otra, si bien cada una de ellas permanece en su posición inicial.

En la figura 7-3, se muestra una lámina de sección transversal  $A$ , y espesor  $\Delta x$ , cuyas caras se conservan a diferentes temperaturas. Si la cara izquierda de la lámina se mantiene a la temperatura  $T_2$ , y la cara derecha a una temperatura inferior  $T_1$ ; el calor fluirá a través de la lámina de izquierda a derecha. Cuando las caras de la lámina se mantienen durante un tiempo a las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , se comprueba que la temperatura en los puntos interiores de la lámina disminuye uniformemente con la distancia, desde la cara caliente a la fría, permaneciendo constante la temperatura en todo momento en cada punto. Se considera que la lámina se encuentra en un estado estacionario.

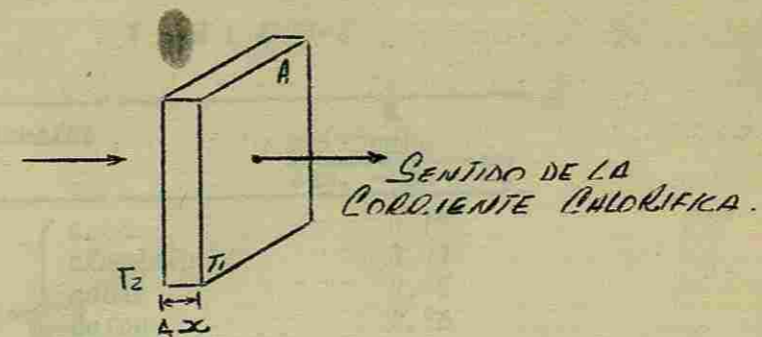


FIGURA 7-3

Los experimentos demuestran que la cantidad de calor que atraviesa la lámina por unidad de tiempo es proporcional a el área de la sección transversal  $A$  para una diferencia de temperaturas  $\Delta T$ , e inversamente proporcional al espesor  $\Delta x$ .

Si se representa por  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  la cantidad de calor que fluye através de la lámina por unidad de tiempo, se tiene:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Esta proporción se puede convertir en igualdad, multiplicando por una constante  $K$  llamada conductividad térmica, cuyo valor depende de la sustancia que forma la lámina. En el límite de una lámina de espesor infinitesimal  $dx$ , cuyas caras están sometidas a una diferencia de temperatura  $dT$ , se puede obtener la ley fundamental de la conducción de calor.

$$\frac{dQ}{dt} = -KA \frac{dT}{dx}$$

Ecuación 7-4

Donde  $\frac{dQ}{dt}$  es la rapidez de transmisión de calor por unidad de tiempo a través del área  $A$ ,  $\frac{dT}{dx}$  se llama gradiente de temperatura. El signo menos se introduce debido a que si la temperatura aumenta de izquierda a derecha, la dirección de la corriente calorífica es de derecha a izquierda.

La unidad del flujo calorífico por unidad de tiempo, es una caloría por segundo, donde la temperatura debe estar en  $^{\circ}\text{C}$ .

Si una sustancia tiene gran conductividad térmica será buen conductor del calor, mientras que otra que tiene una pequeña conductividad térmica será mal conductor del calor, o un buen aislador térmico.

En la tabla 7-2, se muestran los valores de  $K$  para diversas sustancias; se ve que los metales son mejores conductores del calor que los no metales, y que los gases son malos conductores del calor.

TABLA 7-2

Sustancias	K cal seg. - cm - °C	
metales	acero	0.12
	aluminio	0.49
	cobre	0.92
	laton	0.26
	plata	0.97
	plomo	0.083
varios sólidos	amiante	0.0001
	corcho	0.0001
	fieltro	0.0001
	hielo	0.004
	hormigón	0.002
	ladrillo aislante	0.00035
	ladrillo refrac.	0.0025
	ladrillo rojo	0.0015
madera	0.0002	
vidrio	0.002	
gases	aire	0.000057
	argon	0.000039
	helio	0.00034
	hidrógeno	0.00033
	oxígeno	0.00056

Al aplicar la ecuación 7-4 a una varilla de longitud  $L$  y sección transversal constante  $A$ , la cuál se encuentra en estado de régimen estable como lo muestra la figura 7-4. En un estado de régimen estable, la temperatura es constante al transcurrir el tiempo en cada punto. Por lo tanto,  $\frac{dQ}{dt}$  es el mismo para todas las secciones. De manera que, para valores constantes de  $K$  y de  $A$ , el gradiente de  $\frac{dT}{dx}$  es el mismo en todas las secciones. Por lo tanto,  $T$  disminuye linealmente a lo largo de la varilla, de modo que  $-\frac{dT}{dx} = \frac{(T_2 - T_1)}{L}$ .

Así pues, el calor  $\Delta Q$  transmitido en el tiempo  $\Delta t$ , es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \text{Ecuación 7-5. } \textcircled{R}$$

La conducción de calor muestra que los conceptos de calor y temperatura -- son diferentes. Por ejemplo, dos varillas que tengan la misma diferencia de temperatura entre sus extremos, pueden transmitir cantidades totalmente diferentes de calor en el mismo tiempo.



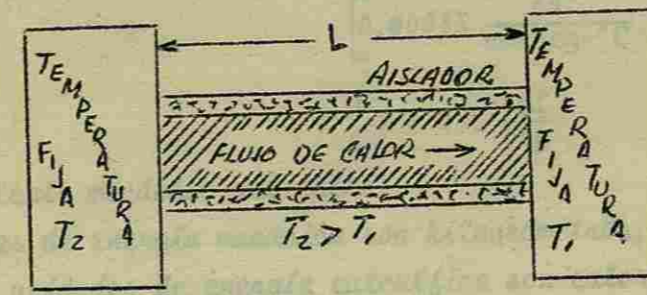


FIGURA 7-4

Ejemplo 7-2.

Una losa compuesta, esta formada por dos materiales, uno de cobre y el otro de ladrillo aislante como se indica en la figura. Sus espesores son  $L_1 = 2.5$  cm y  $L_2 = 5$  cm, las conductividades térmicas de estos materiales son,  $k_1 = 0.00035 \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-}^\circ\text{C}}$  y  $k_2 = 0.92 \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-}^\circ\text{C}}$

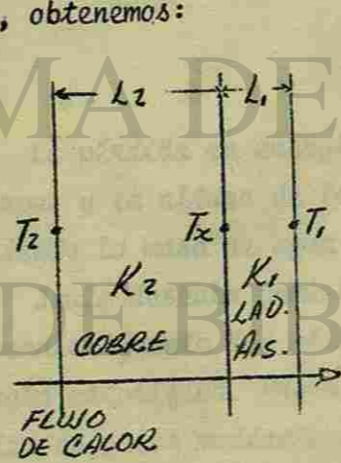
Si las temperaturas de las superficies son:  $T_1 = 40^\circ\text{C}$  y  $T_2 = 250^\circ\text{C}$ , encontrar la rapidez de propagación del calor através de la losa compuesta en condiciones de régimen estable. Si el área de la losa compuesta es  $1\text{m}^2$ .

Si  $T_x$  es la temperatura intermedia entre los dos materiales. Entonces,

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{K_2 A (T_x - T_2)}{L_2}$$

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{K_1 A (T_1 - T_x)}{L_1}$$

En las condiciones de régimen estable  $\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t}$ , de manera que despejando las diferencias de temperatura de estas dos ecuaciones y sumando miembro a miembro, obtenemos:

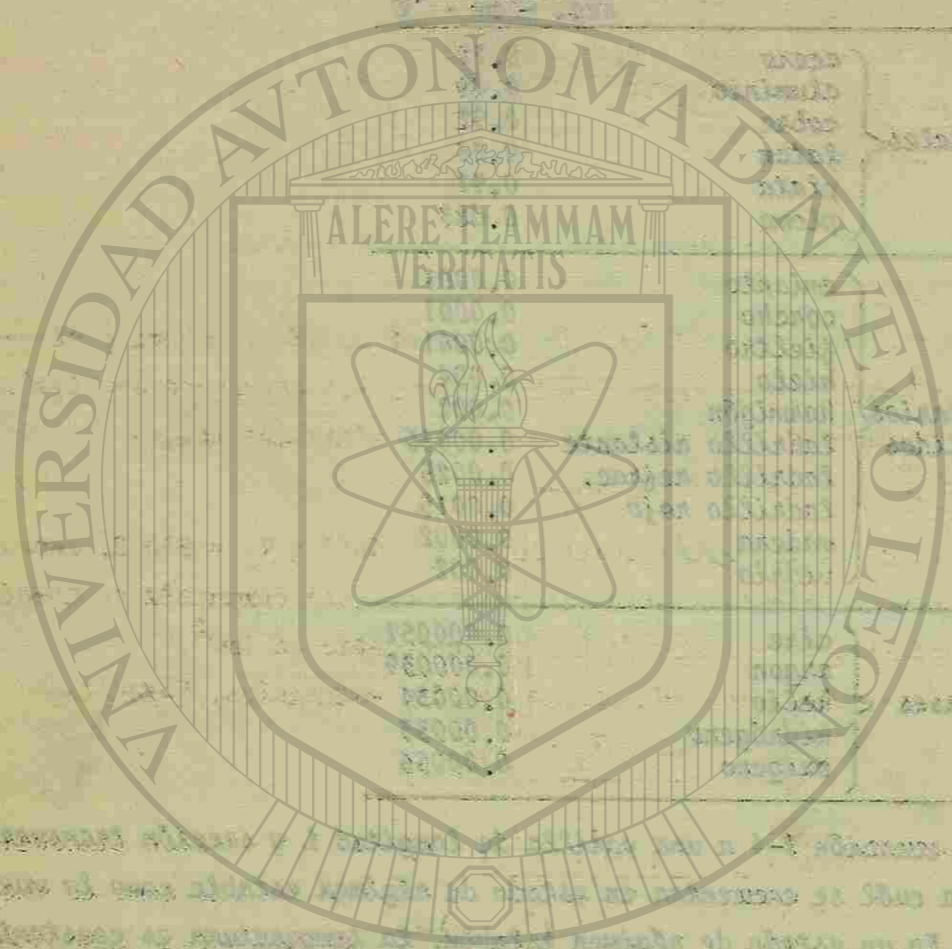


$$\frac{T_x - T_2}{T_1 - T_x} = - \frac{\frac{\Delta Q_2 L_2}{\Delta t A K_2}}{\frac{\Delta Q_1 L_1}{\Delta t A K_1}}$$

$$T_1 - T_2 = - \frac{\Delta Q}{\Delta t A} \left[ \frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} \right]$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \frac{A (T_1 - T_2)}{\left[ \frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} \right]}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \frac{10 \times 10^3 \text{cm}^2 (40^\circ\text{C} - 250^\circ\text{C})}{\left[ \frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} \right]}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\left[ \frac{2.5 \text{ cm}}{0.00035 \frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{seg}\cdot^{\circ}\text{C}}} + \frac{5 \text{ cm}}{0.92 \frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{seg}\cdot^{\circ}\text{C}}} \right]$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 290 \frac{\text{cal}}{\text{seg}}$$

5.- Equivalente mecánico del calor.

Las unidades de energía mecánica son kilográmetros, ergios, julios o libras - pie; las unidades de energía calorífica son calorías o BTU. Se puede encontrar la relación de magnitud entre las unidades caloríficas y las unidades mecánicas a partir de una experiencia en la cuál una cantidad medida de energía mecánica se transforma en una cantidad determinada de calor.

Las primeras experiencias precisas fueron realizadas por Joule, quien midió cuidadosamente el equivalente en energía mecánica de la energía calorífica, esto es, el número de joules equivalente a una caloría, o el número de pies-libras equivalente a un BTU.

Joule, utilizó un aparato que consiste en unas pesas que al caer hacen girar un conjunto de aspas dentro de un recipiente que contiene agua (figura 7-5)

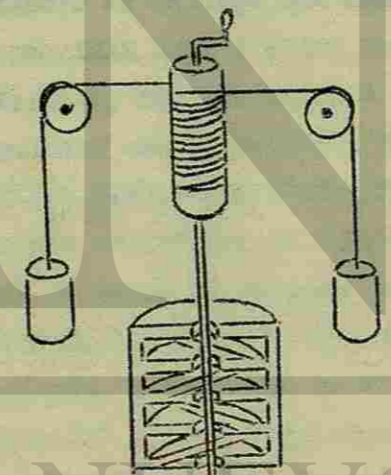


FIGURA 7-5

La pérdida en energía mecánica se calculaba, conociendo el peso de los cuerpos y la altura de los cuales caían y la ganancia de energía calorífica, conociendo la masa de agua y su elevación de temperatura.

Joule deseaba demostrar que al consumir una cierta cantidad de trabajo independientemente del método para producirlo, se obtenía la misma cantidad de energía calorífica. Producía calor agitando mercurio; convirtiendo energía eléctrica en calor mediante un alambre sumergido en agua; y de otras formas. Coincidiendo siempre la constante de proporcionalidad entre la cantidad de calor producido y la cantidad de trabajo ejecutado dentro de un error experimental de 5%.

Sus experimentos son notables por la influencia que tuvieron para convencer a los hombres de ciencia, de lo correcto del concepto de que el calor es una forma de energía. Los mejores resultados obtenidos son:

$$1 \text{ K cal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ joules} = 427.1 \text{ kgm.}$$

$$1 \text{ BTU} = 252 \text{ cal} = 77816 \text{ - pie.}$$

Esto es, cuando se convierten en calor 4186 joules de energía mecánica, elevan la temperatura de 1 kg de agua en  $1^\circ\text{C}$ .

#### 6.- Calor y trabajo.

Se ha visto que el calor es una forma de energía que fluye de un cuerpo a otro debido a la diferencia de temperatura que hay entre ellos. Si el calor fuera cierta clase definida de energía o una sustancia que al estar contenida en un sistema conservará su identidad, no sería posible extraer calor indefinidamente de un sistema que no cambia. Sin embargo, Rumford demostró que era posible. De hecho, si en el aparato de Joule se sigue realizando trabajo mecánico se puede detener una cantidad indefinida de calor del agua, conectandola con un sistema más frío, sin cambiar las condiciones del agua.

De igual forma, el trabajo no es algo del cual un sistema contenga una cantidad definida. Se puede comunicar a un sistema una cantidad indefinida de trabajo sin cambiar sus condiciones, como lo ilustra el aparato de Joule. Tanto el trabajo como el calor, requieren una transmisión de energía. En la mecánica, se trata de trabajo desarrollado cuando hay transmisiones de energía, sin intervenir la temperatura. La energía calorífica se transmite por diferencias de temperatura, a partir de lo cual se puede distinguir el calor y el trabajo.

El término trabajo incluye a partir de la expresión  $dW = Fdx$  todos los procesos de transmisión de energía, en donde  $F$  puede provenir de fuentes eléctricas, magnéticas, gravitacionales y otras; pero excluye toda transmisión de energía que provenga de diferencias de temperatura.

En la figura 7-6 se representan cuatro casos donde se realiza trabajo o transmisión de calor. En (a) el sistema esta compuesto de agua y una rueda de aspas, que está obligado a girar y agitar el agua por la acción de un peso que cae. En (b) el sistema esta formado por agua y una resistencia eléctrica introducida en ella. La corriente eléctrica que pasa por la resistencia es producida por un generador accionado por un peso que cae. En ambos casos se modifica el estado del sistema y debido a que el agente que provoca este cambio es un peso que descende, ambos procesos implican la realización de trabajo.

En los casos (c) y (d) el sistema es agua contenida en un recipiente conductor del calor. En (c) el sistema esta en contacto con los gases en combus---

ción de un mechero de Bunsen, es decir, con otro cuerpo a temperatura más elevada.

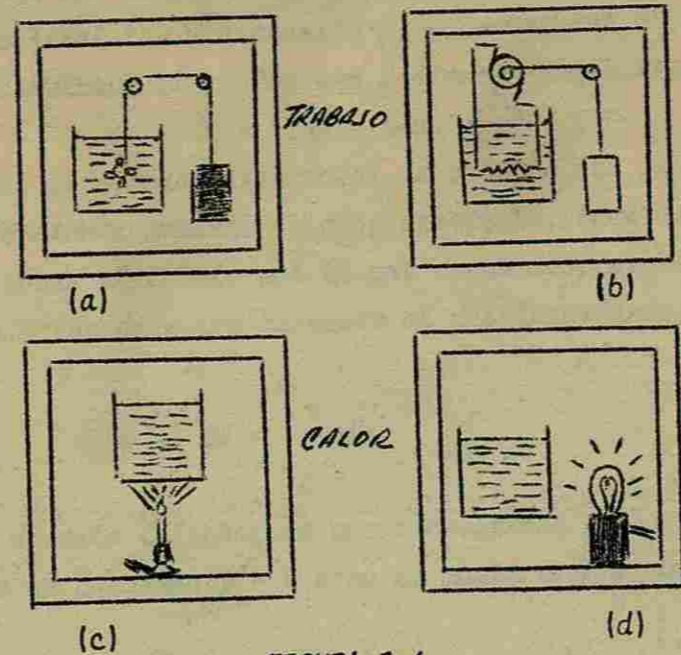


FIGURA 7-6

En (d) el sistema está próximo con una lámpara eléctrica cuya temperatura es mucho más elevada que la del agua. En ambos casos se modifica el estado del sistema, sin intervenir ningún agente mecánico que provoque este cambio; solamente hay una transmisión de calor.

Es importante observar que si hay alguna transformación particular en un sistema implica la realización de trabajo o la transmisión de calor. Por ejemplo si en la figura 7-6b se considera ahora la resistencia como sistema y el agua como medio exterior hay una transmisión de calor desde la resistencia, en virtud de la diferencia de temperatura. Sin embargo, no obran fuerzas a través de los límites del sistema que provoquen desplazamiento, y por lo tanto, para este proceso  $W = 0$ .

Si ahora el sistema está formado por el conjunto del agua y de la resistencia, el medio exterior no contiene ningún objeto cuya temperatura difiera de la del sistema, y por lo tanto no hay transmisión de calor entre este sistema y el medio exterior, y por consiguiente,  $Q = 0$  para este proceso.

Calcular ahora a  $Q$  y a  $W$  para un proceso termodinámico específico. Si se considera un gas en un depósito cilíndrico que tiene un émbolo móvil. Donde el gas es el sistema que inicialmente se encuentra en equilibrio con el medio ambiente externo a él (que es el depósito de calor y el émbolo, que se muestran en la figura 7-7) y tiene una presión  $p_i$  y un volumen  $V_i$ . Si las paredes del recipiente son los límites del sistema, podrá fluir calor al sistema o salir de él por la base del cilindro y se puede hacer trabajo sobre el sistema o el sis-

tema puede efectuar trabajo comprimiendo el gas con el émbolo o dilatándolo.

En la figura 7-7 se representa a el gas dilatándose contra el émbolo alcanzando un estado final con una presión  $p_f$  y un volumen  $V_f$ . El trabajo realizado por el gas al desplazar el pistón una distancia infinitesimal  $dx$  es:

$$dW = F \cdot ds = pAdx = pdV \quad \text{Ecuación 7-6}$$

Donde  $dV$  es el cambio diferencial de volumen del gas. En general, la presión no será constante durante un desplazamiento. Para determinar el trabajo total realizado sobre el émbolo por el gas en un desplazamiento grande, se debe conocer la variación de  $p$  con respecto al desplazamiento; y se calcula la integral:

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} pdV. \quad \text{Ecuación 7-7}$$

El valor de esta integral se puede encontrar graficamente como el área bajo la curva en un diagrama  $p - V$  como se muestra para un caso especial en la figura 7-8.

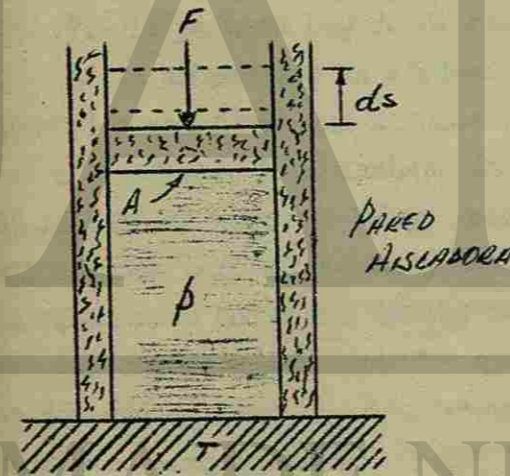


FIGURA 7-7

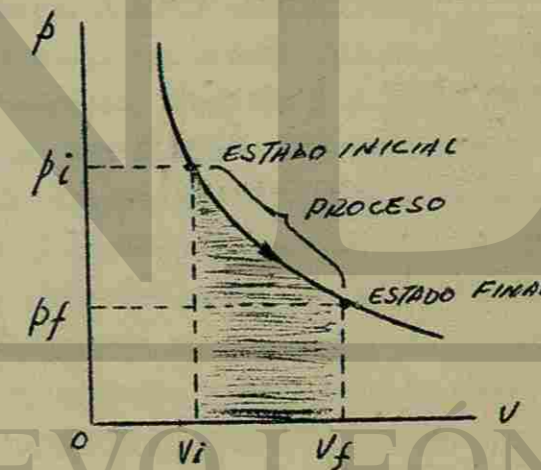


FIGURA 7-8

Tanto el trabajo efectuado por un sistema, como el calor perdido o ganado por este dependen no solamente de los dos estados inicial y final sino también de los estados intermedios, esto es, del recorrido que siga el proceso. Esto se puede ver en la figura 7-9, al conservar constante la presión de  $i$  a  $a$  y después conservar constante el volumen de  $a$  a  $f$ . El trabajo que realiza el gas al dilatarse es igual al área bajo la línea  $ia$ . Si ahora el recorrido es  $ibf$ , el trabajo efectuado por el gas será el área bajo la línea  $bf$ . La curva continua

de  $i$  a  $f$  es otra recorrido, en el cuál, el trabajo efectuado por el gas es el -  
area bajo esta curva.

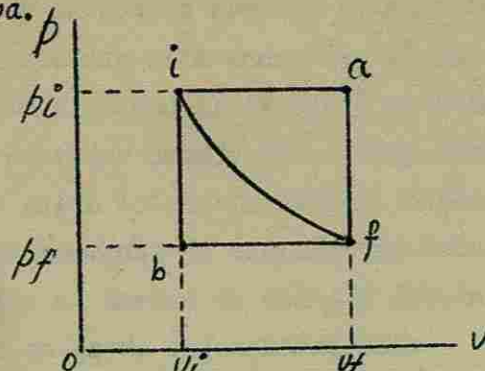


FIGURA 7-9

Para calcular el flujo de calor durante el proceso se llegará a un resultado semejante. A los estados  $i$  y  $f$  los caracterizan las temperaturas  $T_i$  y  $T_f$ . Si se realiza el proceso a presión constante  $p_i$  hasta alcanzar la temperatura  $T_p$  y después se cambia la presión a temperatura constante hasta llegar al valor final  $p_f$  se obtiene cierto resultado. O bien, si primero se reduce la presión a  $p_f$  y después se calienta a esa presión hasta la temperatura final  $T_f$  se obtendrá otro resultado diferente. Esto es, que cada recorrido da un resultado diferente para el valor del calor que fluye al sistema

#### 7.- La primera Ley de la termodinámica. Algunas aplicaciones.

Si en un proceso un sistema se hace pasar del estado inicial  $i$  al estado final  $f$  a través de una trayectoria determinada, y siendo  $Q$  el calor absorbido por el sistema y  $W$  el trabajo desarrollado por el mismo; se puede calcular  $Q-W$ . Si se hace de nuevo lo mismo para muchas trayectorias diferentes, entre los mismos estados inicial y final, se obtiene el importante resultado de que  $Q-W$  es la misma para todas las trayectorias que unen los puntos inicial y final. Esto es, aún cuando  $Q$  y  $W$  dependen independientemente de la trayectoria seguida,  $Q-W$  no depende de como se lleve el sistema del estado  $i$  al estado  $f$  es decir su trayectoria, sino solamente de los estados inicial y final de equilibrio.

Ahora bien,  $Q$  es la energía que se ha suministrado al sistema por transmisión de calor, y  $W$  es la energía que se ha extraído de él al efectuar trabajo. Por lo tanto, la diferencia  $Q-W$  tiene que representar la variación de la energía interna del sistema. A partir de lo cuál se deduce que la variación de la energía interna de un sistema es independiente de la trayectoria, y por lo tanto, es igual a la energía interna del sistema en el estado  $f$ ,  $U_f$ , menos la energía interna en el estado  $i$ ,  $U_i$ :

$$U_f - U_i = \Delta U = Q - W$$

Ecuación 7-8

Si se asigna un valor arbitrario a la energía interna en un cierto estado de referencia, su valor en cualquier otro estado queda definido igualmente, ---

puesto que  $Q-W$  es la misma para cualquier proceso que lleve de un estado a otro. La ecuación 7-8 se conoce como la primera ley de la Termodinámica, y se debe recordar que al aplicar esta ecuación: 1° Que todas las magnitudes deben expresarse en las mismas unidades; 2° Que  $Q$  es positivo cuando entra calor al sistema; 3° Que  $W$  es positivo cuando el sistema realiza trabajo.

Si el sistema sufre solamente cambios infinitesimales en su estado, es decir, si absorbe una cantidad de calor  $dQ$  y solo se realiza una cantidad de trabajo  $dW$ ; el cambio de energía interna será  $dU$ . En tal caso, la primera ley se escribe en forma diferencial así:

$$dU = dQ - dW \quad \text{Ecuación 7-9}$$

Algunas aplicaciones.

Se ha visto que al dilatarse un gas el trabajo que realiza sobre su medio ambiente es:

$$W = \int p dV$$

Donde  $p$  es la presión que se ejerce sobre el gas o por el gas y  $dV$  el cambio diferencial de volumen que experimenta el mismo. Si se considera un caso en que la presión es constante y el volumen cambia una cantidad finita, de  $V_i$  a  $V_f$ . Entonces,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p (V_f - V_i) \quad \text{Ecuación 7-10}$$

Al proceso que ocurre a presión constante se le llama proceso isobárico. Un ejemplo de este proceso se muestra en la figura 7-10, donde el sistema es agua en un depósito cilíndrico. Un émbolo impermeable sin rozamiento se carga con arena para mantener constante la presión sobre el agua, y se transmite calor del medio ambiente al sistema por medio de un quemador de Bunsen, hasta que el agua hierve y algo de ella se convierte en vapor, el sistema se puede dilatar muy lentamente (casi estáticamente), pero la presión que ejerce sobre el émbolo es siempre la misma, debido a que esta presión debe ser igual a la presión constante que efectúa el émbolo sobre el sistema. Si se agregara o se quitara algo de arena durante el proceso variaría la presión, y por lo tanto el proceso no sería isobárico.

Las sustancias cambian su fase de líquido a vapor cuando hay una combinación definida de los valores de la presión y la temperatura. Por ejemplo, el punto de ebullición del agua es a  $100^\circ\text{C}$  y a la presión atmosférica.

Un sistema experimenta un cambio de fase agregándole o quitándole calor, independientemente del calor que se necesita para llevar su temperatura al valor requerido.

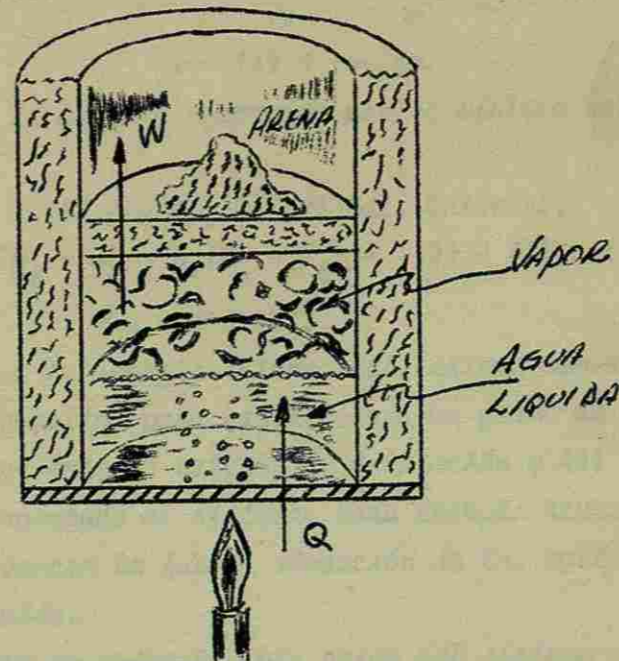


FIGURA 7-10

Si se considera el cambio de fase de una masa  $m$  de líquido a vapor que ocurra a presión y temperatura constante. Siendo  $V_l$  el volumen del líquido y  $V_v$  el volumen del vapor. El trabajo efectuado por esta sustancia al dilatarse de  $V_l$  a  $V_v$  es:

$$W = p (V_v - V_l)$$

Si se representa por  $L$  el calor necesario por unidad de masa para cambiar una sustancia de líquido a vapor a temperatura y presión constante. Entonces la cantidad de calor absorbida por la masa  $m$  durante el cambio de estado es:

$$Q = m L \quad \text{Ecuación 7-11}$$

De la primera ley de la termodinámica, tenemos:

$$\Delta u = Q - W$$

de manera que

$$\Delta u = m L - p (V_v - V_l)$$

para este proceso.

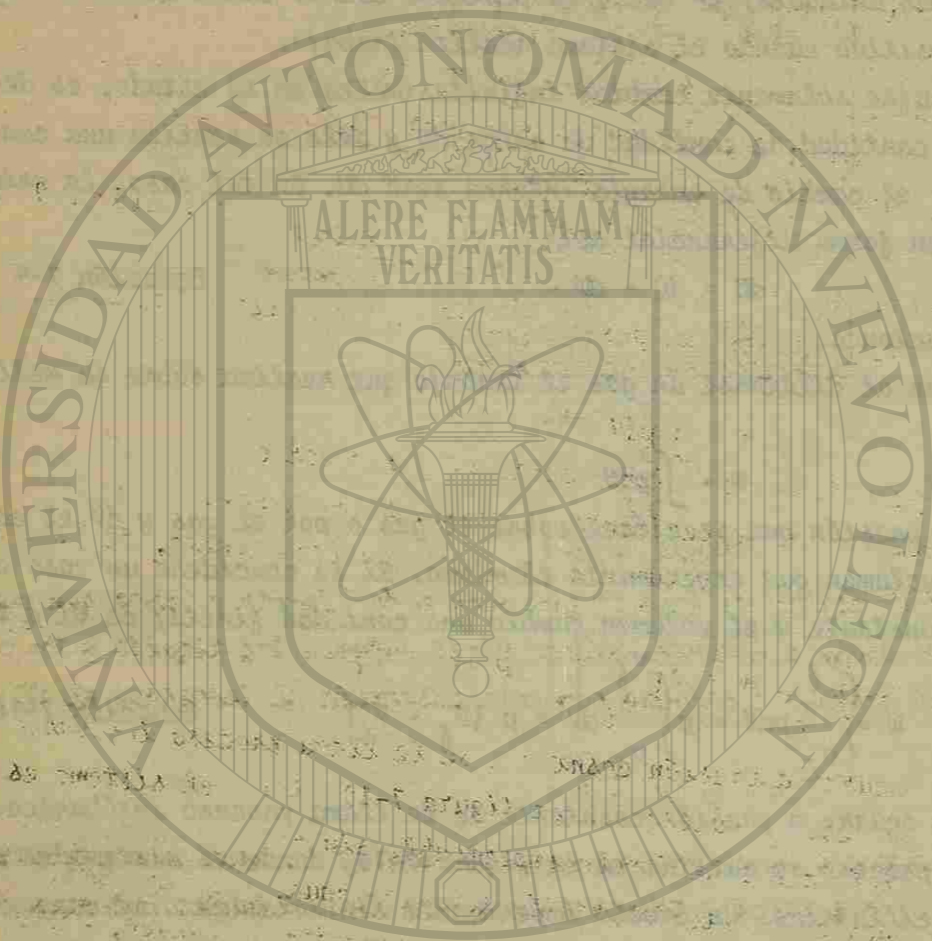
Ejemplo 7-3.

A la presión atmosférica, 1 gr. de agua, que tiene un volumen de  $1 \text{ cm}^3$ , se transforma en  $1617 \text{ cm}^3$  de vapor después de hervir. El calor de vaporización del agua es de  $539 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}}$  a 1 atm. Por lo tanto, si  $m = 1 \text{ gr.}$ ,

$$Q = m L = 539 \text{ cal.}$$

Esta cantidad es positiva, ya que representa el calor agregado por el medio ambiente al sistema.

Sabiendo que  $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \frac{\text{nt}}{\text{m}^2}$ , se encuentra:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS



$$W = p (V_v - V_l) = 1.013 \times 10^5 \frac{\text{nt}}{\text{m}^2} \left[ (1671 - 1) \times 10^{-6} \text{m}^3 \right]$$

$$W = 169.5 \text{ joules.}$$

Que es la cantidad de trabajo efectuada por el sistema sobre el medio ambiente, y es positiva.

Puesto que 1 cal = 4.186 joules,  $W = 41 \text{ cal.}$  Entonces,

$$\Delta u = u_v - u_l = ml - p (V_v - V_l) = (539 - 41) \text{ cal.}$$

$$\Delta u = 498 \text{ cal.}$$

Durante este proceso la energía interna del sistema aumenta. Por lo tanto, de las 539 cal que se necesitan para hacer hervir un gramo de agua a 100°C y -- 1 atm; 41 cal producen el trabajo externo de dilatación y 498 cal se transforman en energía interna agregada al sistema. Esta energía representa el trabajo-interno efectuado para vencer la fuerte atracción de las moléculas de agua entre sí en el estado líquido.

Cuando en un proceso no entra ni sale calor del sistema se le llama proceso adiabático. Este proceso se logra conservando el sistema sellado, separado de su medio ambiente por un material aislador del calor, o efectuando el proceso rápidamente.

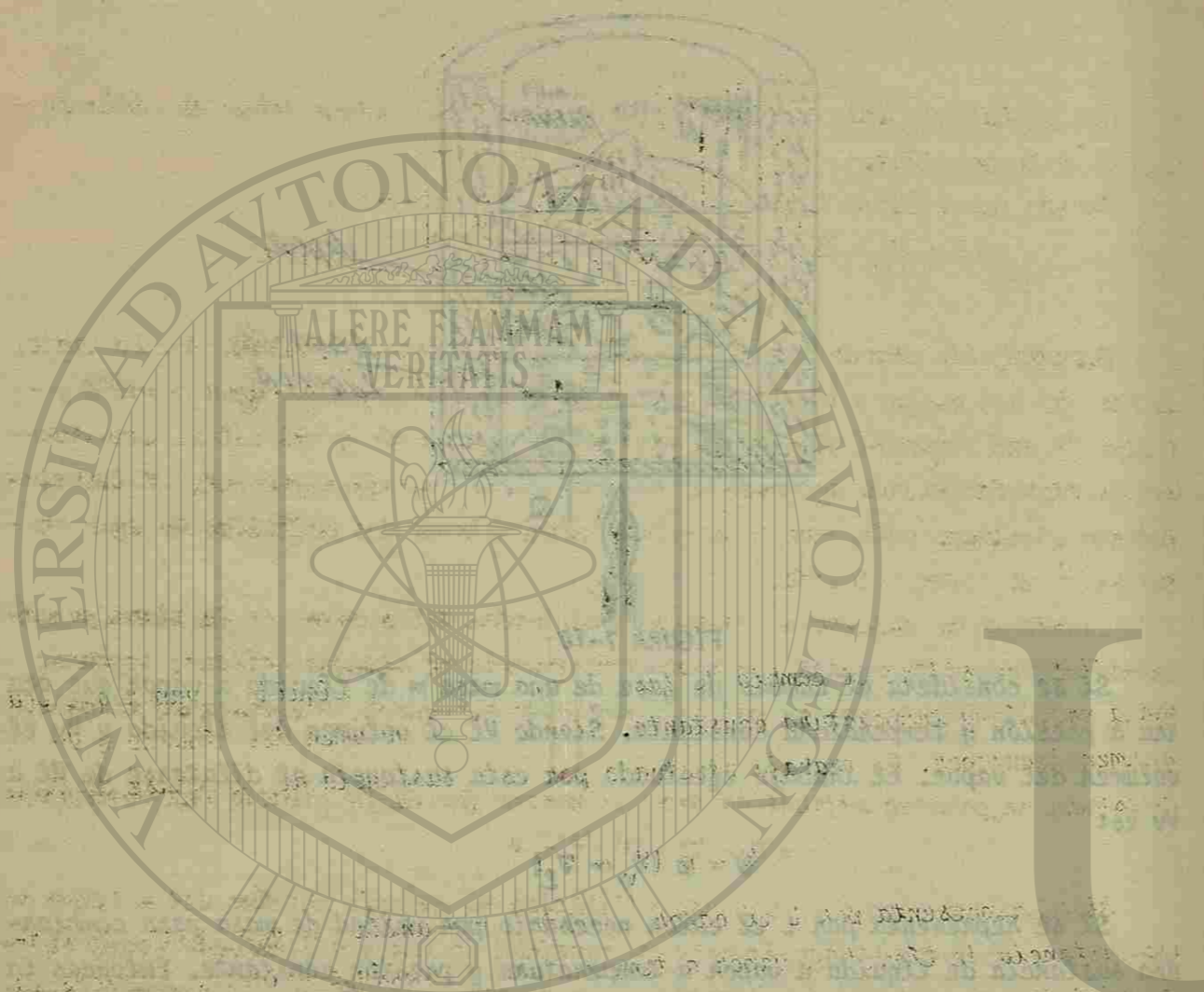
Para un proceso adiabático  $Q=0$ , de manera que de la primera ley obtenemos:

$$\Delta u = u_f - u_i = -W$$

Por lo tanto, para un proceso adiabático la energía interna del sistema se incrementa en una cantidad igual a la cantidad de trabajo efectuado sobre el sistema. Si el sistema hace trabajo en un proceso adiabático, su energía interna disminuye en una cantidad igual al trabajo externo que efectúa. Al aumentar la energía interna se eleva la temperatura del sistema y al disminuir esta se reduce la temperatura.

En la figura 7-11 se muestra un proceso adiabático simple, donde el sistema es un gas encerrado dentro de un cilindro hecho de material aislador del calor. Como al sistema no entra ni sale calor de su medio ambiente, y solo se tiene un émbolo sin rozamiento cargado con arena; solo se realizará trabajo entre el sistema y su medio ambiente. Este proceso ocurre al agregar o quitar arena al émbolo, de manera que el gas se puede comprimir o dilatar contra el émbolo.

Algunos ejemplos de procesos adiabáticos en ingeniería son, la dilatación del vapor en el cilindro de una máquina de vapor, la dilatación de gases calientes en un motor de combustión interna y la compresión del aire en un compresor de aire. Estos procesos se llevan a cabo con una gran rapidez para que solo pueda entrar o salir del sistema una pequeña cantidad de calor a través de sus pa-



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

redes durante ese tiempo.

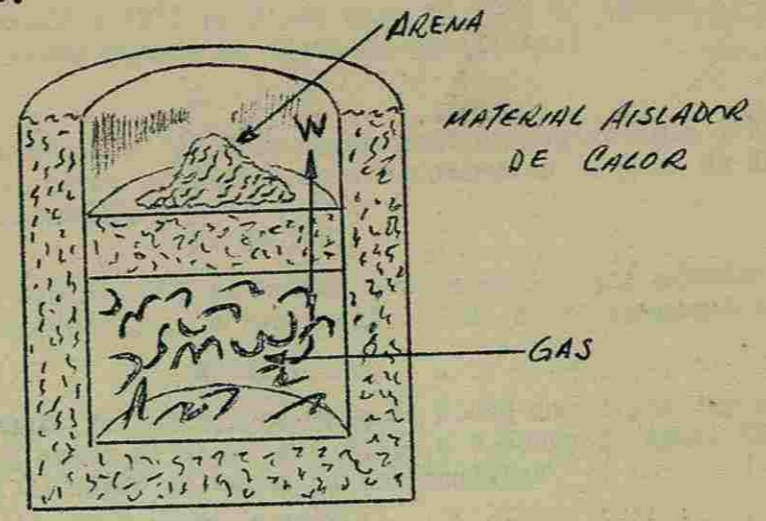


FIGURA 7-11

Un proceso de gran interes teórico es el de la dilatación libre. Se trata de un proceso adiabático en el cual no hace trabajo el sistema ni se efectúa -- trabajo sobre él. Este proceso se logra conectando un depósito que contenga gas con otro en el cual se le ha hecho vacío mediante una espita de conexión, estando todo el sistema aislado como se muestra en la figura 7-12. Si la espita se abre repentinamente, el gas se introduce en el vacío y se dilata libremente.

Debido a que no entra ni sale calor del sistema, y como las paredes de los depósitos son rígidas no se hace trabajo externo sobre el sistema. Por lo tanto, en la primera ley tenemos que  $Q=0$  y  $W=0$ , de manera que  $U_i = U_f$  para este -- proceso. Esto es, que las energías internas inicial y final son iguales en la dilatación libre.

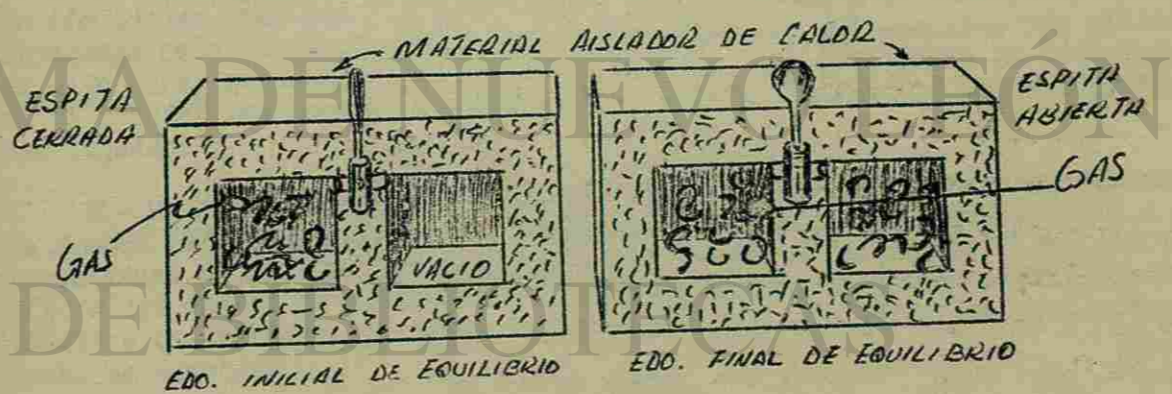
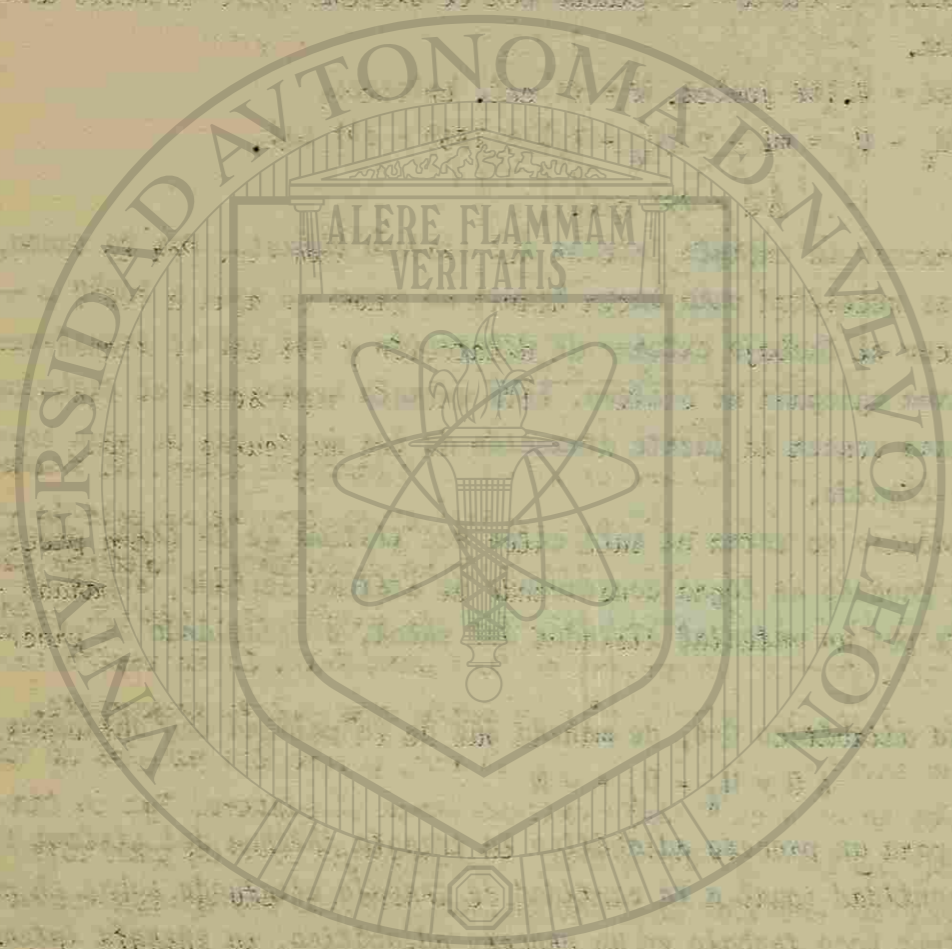


FIGURA 7-12



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO  
DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

## PROBLEMAS

1.- Si 50g de aluminio a  $20^{\circ}\text{C}$  se dejan caer en 500g de etanol a  $-40^{\circ}\text{C}$ , ¿cuál será la temperatura final cuando se logra el equilibrio?

R:  $-37.8^{\circ}\text{C}$ .

2.- Cien gramos de plomo a  $100^{\circ}\text{C}$  se dejan caer en 50g de agua a  $20^{\circ}\text{C}$  contenida en un recipiente de cobre utilizado como calorímetro de masa de 50g. Encuentra la temperatura resultante.

R:  $24.3^{\circ}\text{C}$ .

3.- Un mol de gas helio a  $0^{\circ}\text{C}$  se mezcla con un mol de gas nitrógeno a  $100^{\circ}\text{C}$  al unir los dos recipientes de los gases. ¿Cuál es la temperatura final?

R:  $62^{\circ}\text{C}$ .

4.- En un experimento de Joule, una masa de 6.0kg cae desde una altura de 50.0mt y hace girar una rueda de aspas que agita a 0.600kg de agua. El agua está inicialmente a  $15^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuánto se eleva su temperatura?

R:  $1.17^{\circ}\text{C}$ .

5.- Un atleta de gran energía disipa toda su energía en una dieta de 4000-kcal por día. Si se desprendiera de ese calor de manera uniforme, ¿cómo se compararía esa producción de calor con la producción de energía de una lámpara de 100 watts?.

R: 190 watts.

6.- Calcular el calor específico de un metal a partir de los siguientes datos. Un depósito hecho del metal pesa 35.6nt y contiene además 133.5nt de agua. Un trozo del metal de 17.8nt, que está inicialmente a una temperatura de  $177^{\circ}\text{C}$ , se arroja en el agua. Esta y el depósito tenían inicialmente una temperatura de  $15.5^{\circ}\text{C}$  y la temperatura final de todo el sistema fue de  $18.3^{\circ}\text{C}$ .

R:  $0.13 \text{ kcal/kg}^{\circ}\text{C}$ .

7.- Para medir el calor específico de un líquido se utiliza un "calorímetro de flujo". Se agrega calor uniformemente, en una proporción conocida, a una corriente del líquido conforme éste va pasando por el calorímetro en una cantidad conocida. Después, midiendo la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y de salida de la corriente del líquido se puede calcular el calor específico del líquido.

Un líquido de densidad  $0.85\text{g/cm}^3$  fluye por un calorímetro a razón de  $8.0\text{cm}^3/\text{seg}$ . Se agrega calor mediante una resistencia eléctrica que funciona con 250watts y se establece, en condiciones de flujo estable, una diferencia de temperaturas de  $15^{\circ}\text{C}$  entre los puntos de entrada y de salida. Obtener el calor específico del líquido.

R:  $0.59 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ .

8.- Un trozo de hierro que pesa 13.6kg se saca de un horno de recocido y se temple introduciéndolo en un depósito que contiene 45.5kg de aceite a una temperatura de  $22.2^{\circ}\text{C}$ . La temperatura del aceite llega a  $46.6^{\circ}\text{C}$ . El calor específico del aceite es  $0.45\text{kcal/kg}^{\circ}\text{C}$ . Despreciese la capacidad calorífica del depósito y las pérdidas de calor al medio ambiente. Calcúlese la temperatura del horno de recocido.

R:  $371^{\circ}\text{C}$ .

9.- Doscientos gramos de plomo fundido a  $327^{\circ}\text{C}$  se dejan caer en un gran bloque de hielo a  $0^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuánto hielo se funde por el plomo?

R: 40g.

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

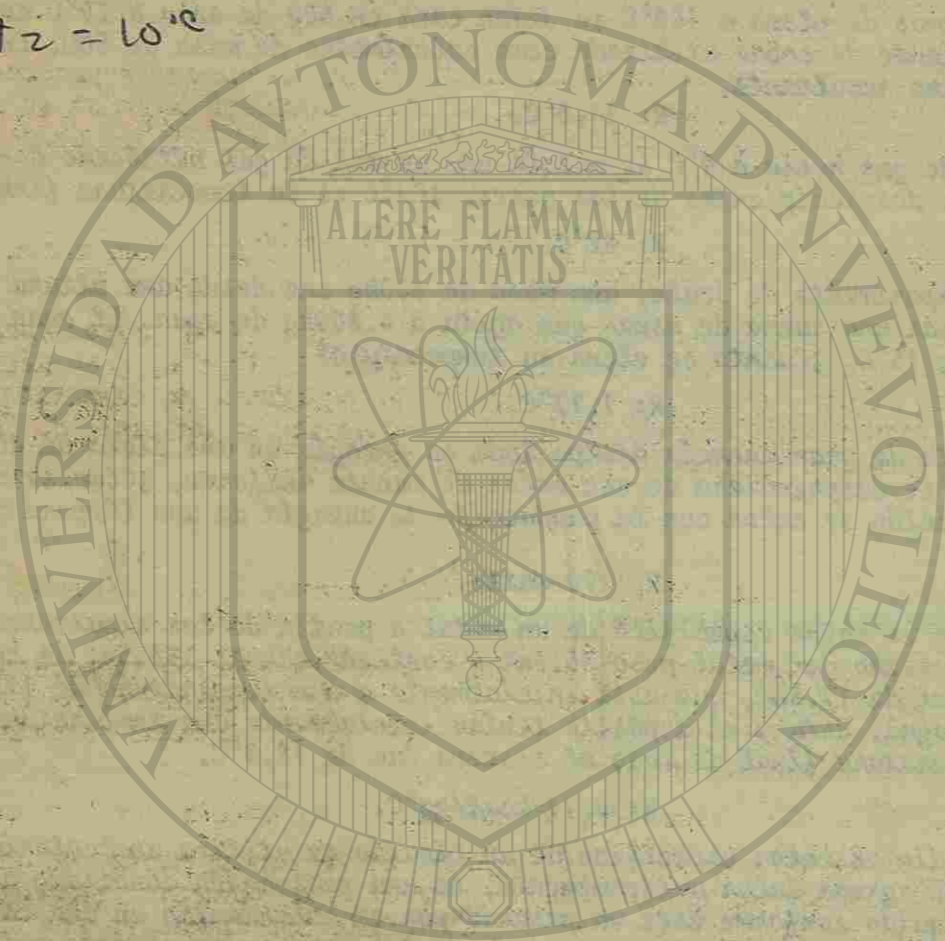
$$\text{Esp. de Pared} = 2.0 \text{ mm}$$

$$T_1 = 30^\circ \text{C}$$

$$T_2 = 10^\circ \text{C}$$

$$Q =$$

$$Q = \frac{Q}{\Delta T}$$



10.- Un tubo de bronce de 50cm de longitud tiene un diámetro medio de 4.0cm y un espesor de pared de 2.0mm. Si un extremo del tubo se encuentra a  $30^\circ\text{C}$  y el otro se encuentra a  $10^\circ\text{C}$ , ¿Cuánto calor fluye hacia la parte inferior del tubo cada segundo? ¿Cuántos watts de potencia deben suministrarse al extremo que se encuentra a  $30^\circ\text{C}$  para que esta situación continúe. Ignore todas las pérdidas de calor a lo largo del tubo.

R: 0.20 cal/seg; 0.84 watts.

11.- Al perforar un agujero en un bloque de latón de 4.45nt se proporciona potencia a razón de 298 watts durante 2.0min. (a) ¿Qué cantidad de calor se genera? (b) ¿Cuál es la elevación de temperatura del latón si el 75% del calor generado calienta al latón? (c) ¿Qué ocurre con el otro 25%?

R: a) 34 BTU = 36000 joules

b)  $150^\circ\text{C}$ .

12.- Considérese la varilla que se muestra en la figura (7-4). Suponiendo que  $L=25\text{cm}$ ,  $A=1.0\text{cm}^2$ , y el material sea cobre. Si  $T_2=125^\circ\text{C}$ ,  $T_1=0^\circ\text{C}$ , y se alcanza una situación de régimen estable, encontrar (a) el gradiente de temperatura, (b) la rapidez de transmisión de calor y (c) la temperatura en un punto de la varilla situado a 10cm del extremo de temperatura elevada.

R: a)  $500^\circ\text{C/m}$ ;

b) 4.6 cal/seg

c)  $75^\circ\text{C}$ .

13.- Una lámina de un aislador térmico tiene  $100\text{cm}^2$  de sección transversal y 2cm de espesor. Su conductibilidad térmica es  $2 \times 10^{-4} \text{ cal/seg-cm-}^\circ\text{C}$ . Si la diferencia de temperaturas entre las caras opuestas es  $100^\circ\text{C}$ , ¿Cuántas calorías pasarán a través de la lámina en un día?

R: 86,400 cal/día.

14.- Una barra de 2m de longitud está formada por un núcleo macizo de acero de 1cm de diámetro, rodeado de una envoltura de cobre cuyo diámetro exterior es de 2cm. La superficie exterior de la barra está aislada térmicamente; uno de sus extremos se mantiene a  $100^\circ\text{C}$ , y el otro a  $0^\circ\text{C}$ . a) Calcular la corriente calorífica total en la barra. b) ¿Qué fracción es transportada por cada sustancia

R: 1.13 cal/seg; 4% a través del acero,

y 96% a través del cobre.

15.- Supóngase que la conductividad térmica del cobre sea doble de la del aluminio y 4 veces mayor que la del latón. Tres varillas de metal, hechas de cobre, aluminio y latón, respectivamente, son cada una de ellas de 15.25cm de largo y 2.54cm de diámetro. Estas varillas se colocan una a continuación de la otra estando la de aluminio entre las otras dos. Los extremos libres de las varillas de cobre y de latón se conservan a 100 y a  $0^\circ\text{C}$ , respectivamente. Encontrar las temperaturas de equilibrio de la junta cobre-aluminio y de la junta aluminio-latón.

R:  $86^\circ\text{C}$  (Cu-Al) y  $57^\circ\text{C}$  (Al-latón).

16.- Un calentador de alambre de tungsteno trabaja a 3.0kw/m y su diámetro es de  $5.0 \times 10^{-4}\text{m}$ . Está ahogado dentro del eje de un cilindro de cerámica de 0.12m de diámetro. Cuando está operando a la potencia de trabajo, el alambre se encuentra a  $1500^\circ\text{C}$ ; la cara exterior del cilindro está a  $20^\circ\text{C}$ . Encontrar la conductividad térmica de la cerámica.

R: 0.42 cal/m seg  $^\circ\text{C}$ .

17.- La figura (7-13) a muestra un cilindro que contiene gas y está cerrado mediante un émbolo móvil. El cilindro va dentro de una mezcla de hielo y agua.- El émbolo se mueve rápidamente bajándolo de la posición (1) a la posición (2).- Se detiene el émbolo en la posición (2) hasta que el gas quede nuevamente a  $0^{\circ}\text{C}$  y después se levanta lentamente a la posición (1). La figura (7-13b) es un diagrama p-V del proceso. Si durante el ciclo se funden 100g de hielo. ¿Cuánto trabajo se ha hecho sobre el gas?

R: 8,000 cal.

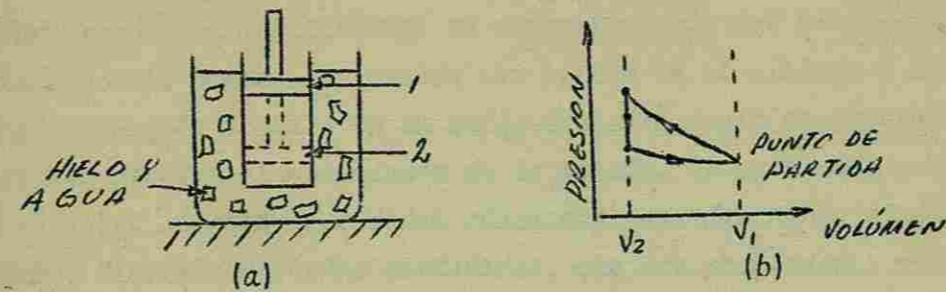
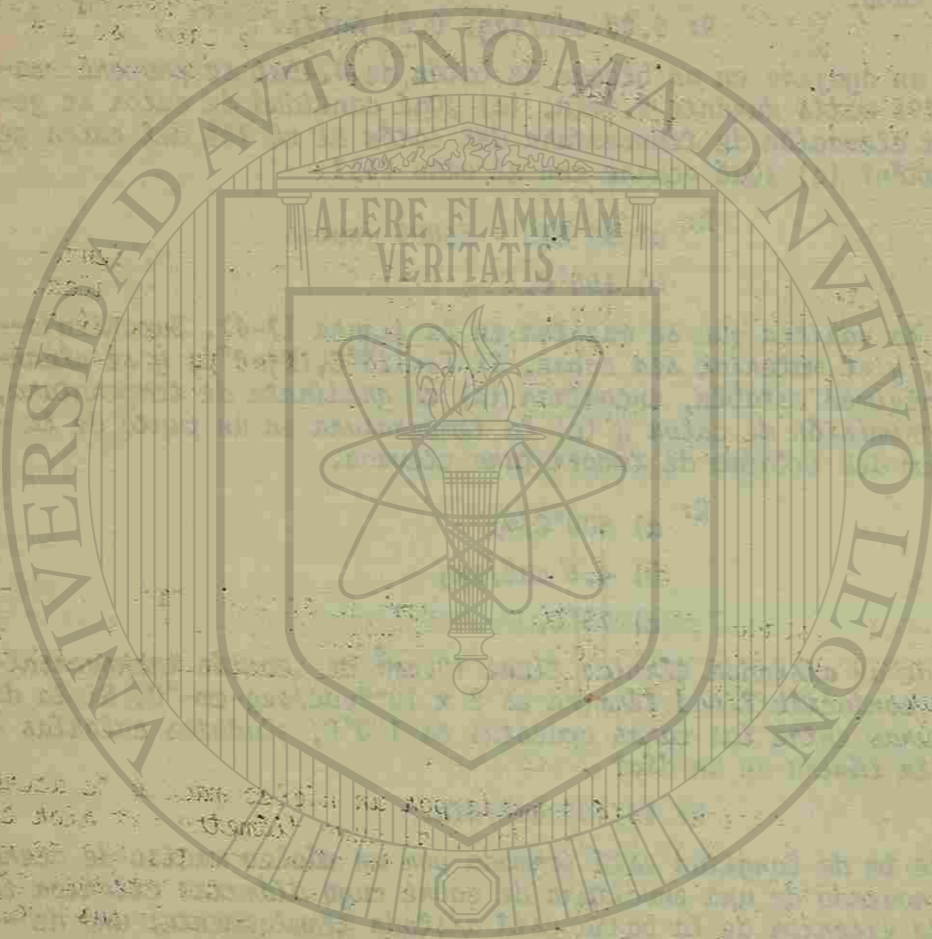


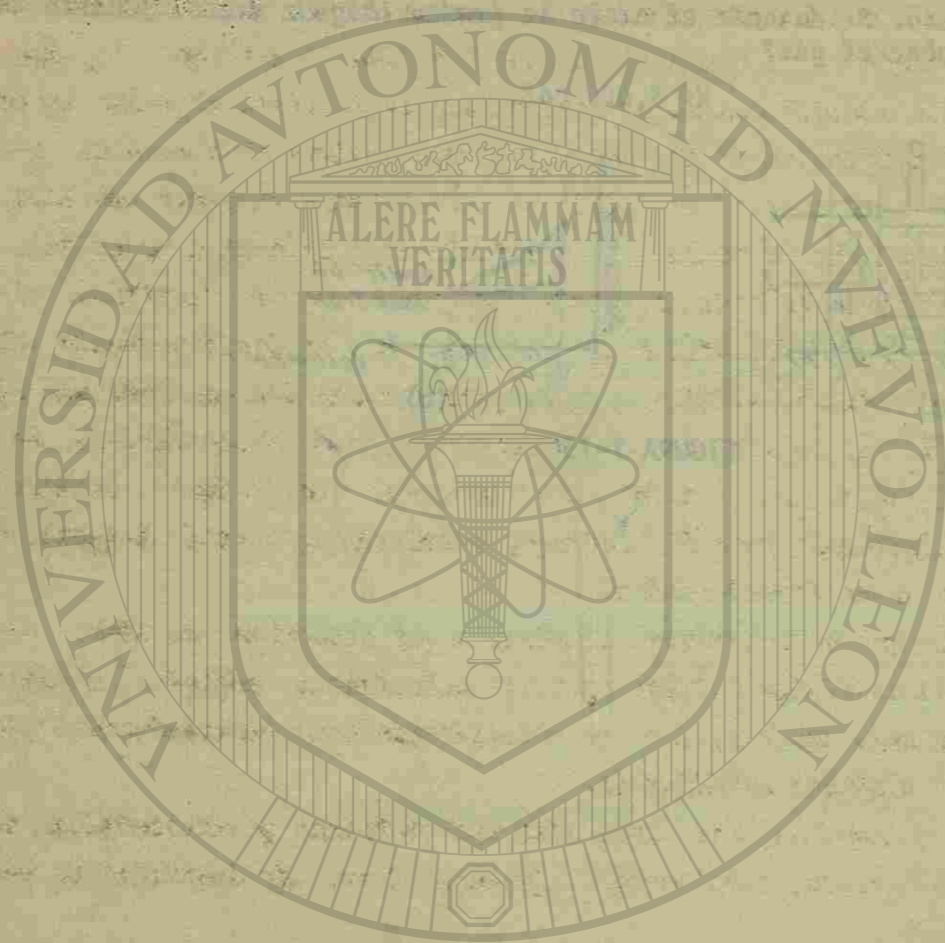
FIGURA 7-13



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





## CAPITULO VIII

### TEMPERATURA

#### 1.- Descripciones macroscópica y microscópica.

Al estudiar las situaciones físicas, generalmente se enfoca la atención en una porción de materia que imaginariamente está separada del medio ambiente que la rodea. A esta porción se le llama el sistema y a todo lo externo a él, que tiene alguna relación directa con su comportamiento se le llama el medio ambiente. Un ejemplo para determinar el comportamiento del sistema al actuar con su medio ambiente puede ser; cuando una pelota es el sistema y el medio ambiente sea el aire y la tierra. En la caída libre se trata de averiguar como el aire y la tierra afectan el movimiento de la pelota. En este caso como en algunos otros se deben escoger cantidades adecuadas para describir el funcionamiento del sistema. Clasificado estas cantidades, que son propiedades del conjunto del sistema medidas por medio de operaciones de la boratorio, como macroscópicas. En los procesos en que interviene el calor, las leyes que relacionan las cantidades macroscópicas tales como, presión, volumen, temperatura, energía interna, etc, forman la base de la Termodinámica.

Para el caso en que se consideren cantidades que describan los átomos y moléculas que forman un sistema, tales como sus velocidades, energías, masas, cantidades de movimiento angular, etc, se clasificarán como microscópicas y formarán la base de la mecánica estadística.

En un sistema cualquiera, las cantidades macroscópicas y microscópicas se deben relacionar ya que son, simplemente diferentes formas de describir la misma situación.

Macroscópicamente la presión de un gas se mide a partir de un manómetro y considerada microscópicamente, se relaciona con la rapidez media por unidad de área con que las moléculas del gas comunican cantidad de movimiento al fluido manométrico al chocar contra su superficie.

Análogamente la temperatura de un gas se relaciona con la energía cinética media de translación de las moléculas.

#### 2.- Equilibrio térmico.

Cuando se tocan varios cuerpos, el sentido del tacto permite hacer una distinción aproximada entre los cuerpos calientes y los cuerpos fríos. Así con el tacto se pueden ordenar los cuerpos A, B, y C en orden de su grado de calentamiento, diciendo que A está más caliente que B, B más caliente que C, etc, con esto queda definido nuestro sentido de temperatura. Para fines científicos este procedimiento no es útil por se muy subjetivo para determinar la temperatura.

Para comprender el significado de temperatura; considerese un objeto A y uno idéntico B, que se sienten frío el primero y caliente el segundo al estar en contacto con la mano, los cuales al ponerse en contacto uno con el otro durante un tiempo grande, producirán la misma sensación de temperatura.

Cuando esto sucede se dice que A y B se encuentran en equilibrio térmico.

Una prueba lógica del equilibrio térmico es emplear un tercer cuerpo tal como un termómetro. "Si A y B están en equilibrio térmico con un tercer grupo C (termómetro), entonces A y B se encuentran en equilibrio térmico entre sí". A esta definición se le conoce como la ley de la Termodinámica anterior a la primera.

El concepto anterior da la idea de que la temperatura de un sistema es una propiedad que a la larga alcanza el mismo valor que la de otros sistemas cuando todos se ponen en contacto.

La idea de temperatura como medida del grado de calor o de frío de un sistema concuerdan con este concepto, porque hasta el punto en que nuestro sentido de temperatura es digno de confianza, el grado de calor de todos los objetos es igual después de que todos ellos han estado en contacto un tiempo suficientemente grande.

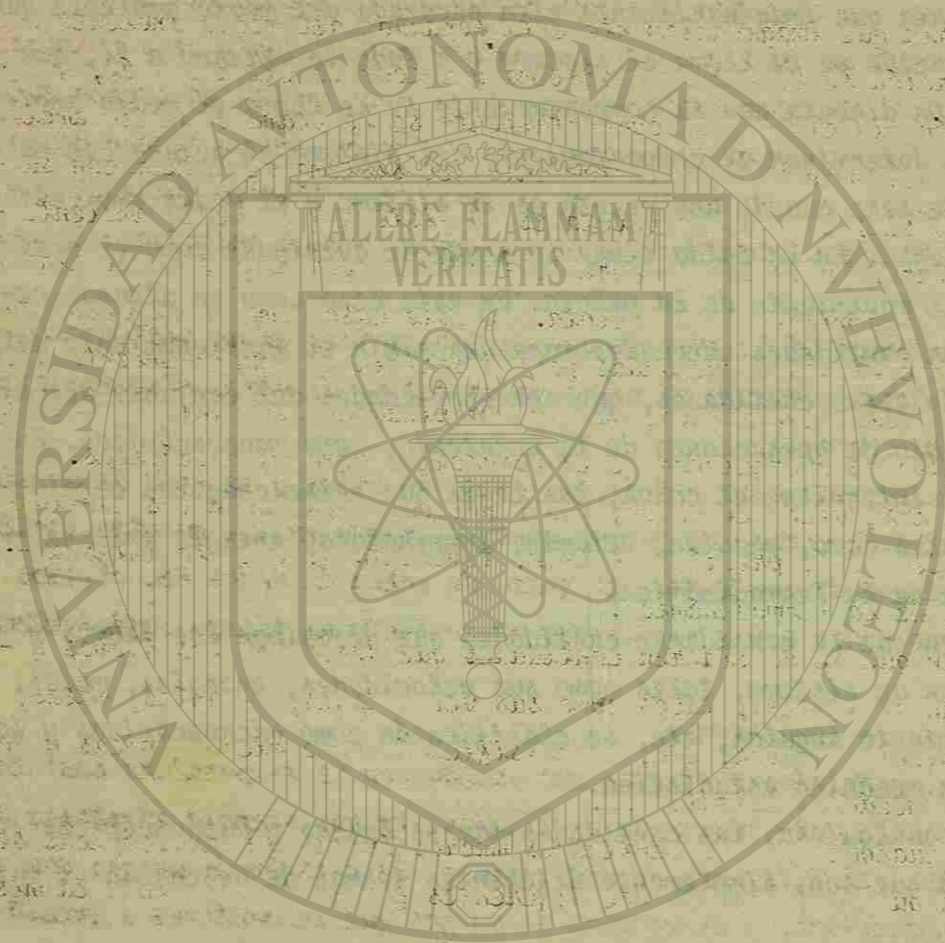
### 3.- Medición de la temperatura.

Algunas de las propiedades físicas que varían con la temperatura son: la longitud de una varilla, el volumen de un líquido, la resistencia eléctrica de un alambre, el color del filamento de una lámpara, la presión de un gas que se mantiene a volumen constante y el volumen de un gas que se mantiene a presión constante.

Todos estos cambios son utilizados en la construcción de diferentes tipos de termómetros.

La escala de temperaturas se establece escogiendo una sustancia termométrica especial y una propiedad termométrica especial de esa sustancia. Por ejemplo, la sustancia termométrica puede ser un líquido que se encuentra en un tubo capilar de vidrio y la propiedad termométrica puede ser la longitud de la columna del líquido. Para cada elección de una sustancia y de su propiedad termométrica, conjuntamente con la relación supuesta entre la propiedad y la temperatura, conducen cada una de ellas a una escala especial de temperatura, cuyas mediciones hechas con cualquier otra escala de temperaturas independientemente definidas. Pero si es recomendable, que una escala de temperaturas particular se compare con la escala universal que se describirá más adelante.

Para graduar un termómetro para el cual se ha escogido una sustancia termo-



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

métrica se hace lo siguiente: Representese por X la propiedad termométrica que se desea utilizar para determinar la escala de temperaturas, en seguida se escoge una función lineal de la propiedad X tal como la temperatura T que tiene el termómetro, y un sistema cualquiera en equilibrio térmico con él:

$$T(X) = aX \quad \text{Ecuación 8-1}$$

Al escoger esta forma lineal para T(X) se establece que diferencias iguales de temperatura, corresponden a cambios iguales de X. De la ecuación 8-1, también se deduce que dos temperaturas, medidas con el mismo termómetro, están relacionadas con sus respectivas X, es decir,

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2}$$

Para encontrar la constante a, y por consiguiente, graduar el termómetro se debe determinar un punto fijo normal, en el cual todos los termómetros deben marcar el mismo valor de temperatura T. Este punto fijo es aquél en el cual el hielo, el agua líquida y el vapor de agua, están en equilibrio y se le llama punto triple del agua.

El punto triple del agua es un estado único que se logra únicamente a una presión definida (figura 8-1). La presión de vapor de agua en el punto triple es de 4.58mm-Hg. y su temperatura a sido designada arbitrariamente llamándola 273.16 grados Kelvin o 273.16°K.

Si  $x_{tr}$ , son los valores en el punto triple, por lo tanto, para cualquier termómetro,

$$\frac{T(X)}{T(x_{tr})} = \frac{X}{x_{tr}}$$

Si  $T(x_{tr}) = 273.16^\circ K$ , para todos los termómetros, entonces,

$$T(X) = 273.16^\circ K \frac{X}{x_{tr}} \quad \text{Ecuación 8-2}$$

Por lo tanto, cuando la propiedad termométrica tiene el valor X, la temperatura T, es la escala particular escogida, estará dada en °K por T(X), cuando en el segundo miembro de esta ecuación se ponen los valores de X y  $x_{tr}$ .

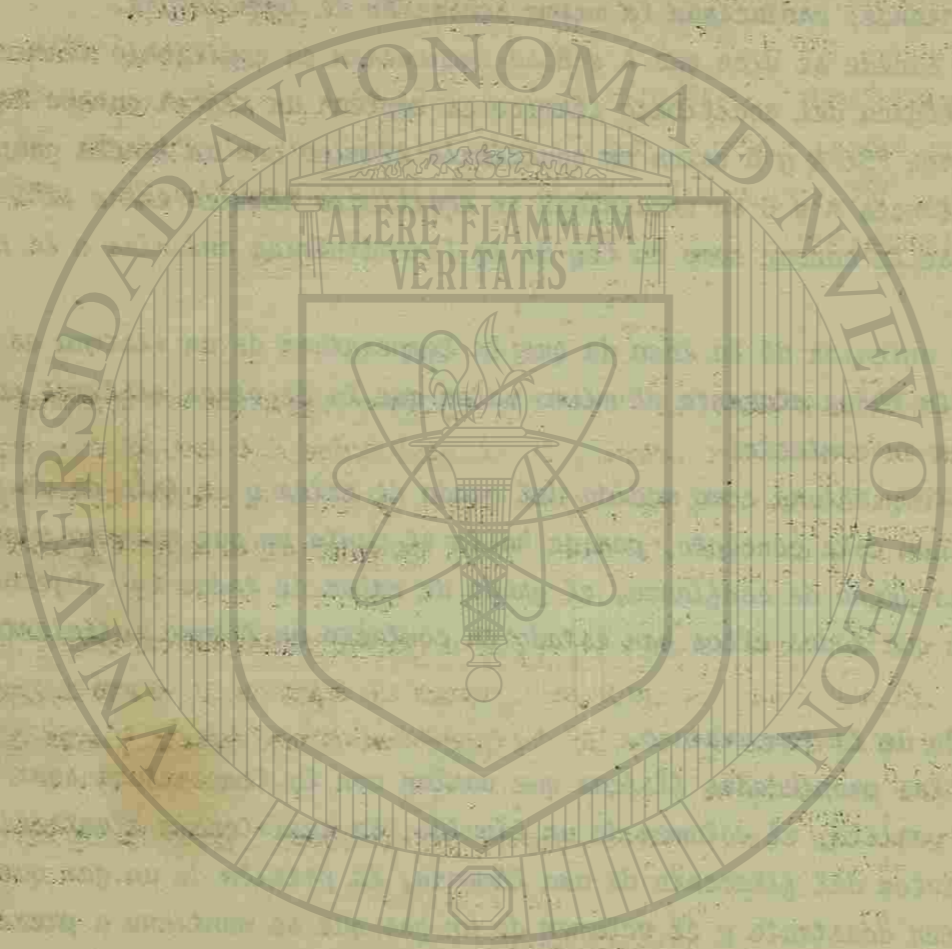
Aplicando la ecuación 8-2 a varios termómetros se obtiene:

- a) Para un termómetro de líquido en un tubo capilar en vidrio, X es L, la longitud de la columna de líquido, y  $T(L) = 273.16^\circ K \frac{L}{L_{tr}}$ .
- b) Para un gas a presión constante, X es V, el volumen del gas, y

$$T(V) = 273.16^\circ K \frac{V}{V_{tr}}$$

- c) Para un gas a volumen constante, X es P, presión de gas, y

$$T(P) = 273.16^\circ K \frac{P}{P_{tr}}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



d) Para un termómetro de resistencia de platino,  $X_{esR}$ , la resistencia eléctrica y  $T(R) = 273.16^\circ K \frac{R}{R_{tr}}$ .

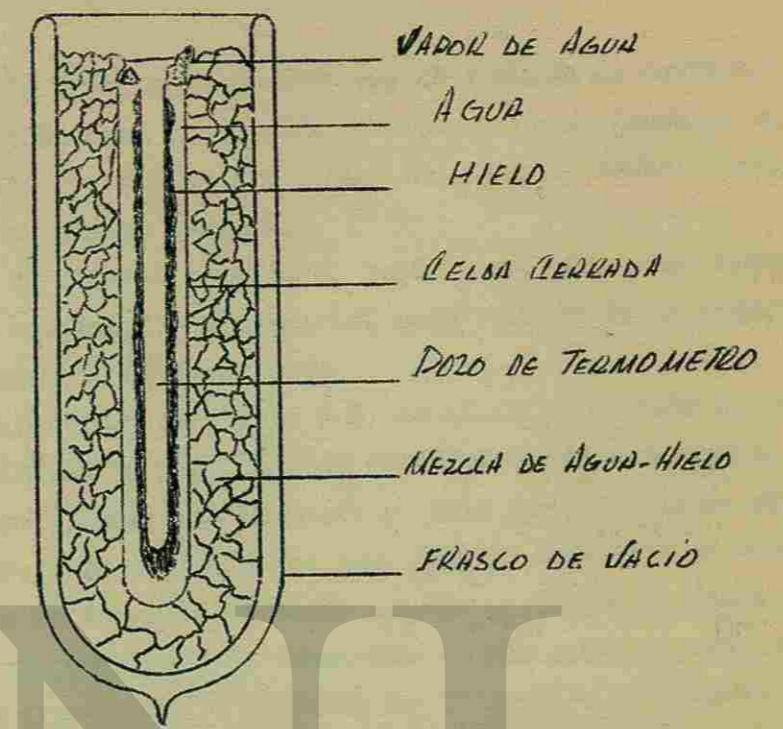


FIGURA 8-1

Ejemplo 8-1.

Un termómetro cuya resistencia es de platino, tiene un valor de 90.35ohms. Cuando su bulbo se coloca en una celda de punto triple, como la de la figura 8-1. ¿Qué temperatura queda definida por la ecuación 8-2 si el bulbo se coloca en un medio ambiente tal que su resistencia sea 98ohms?

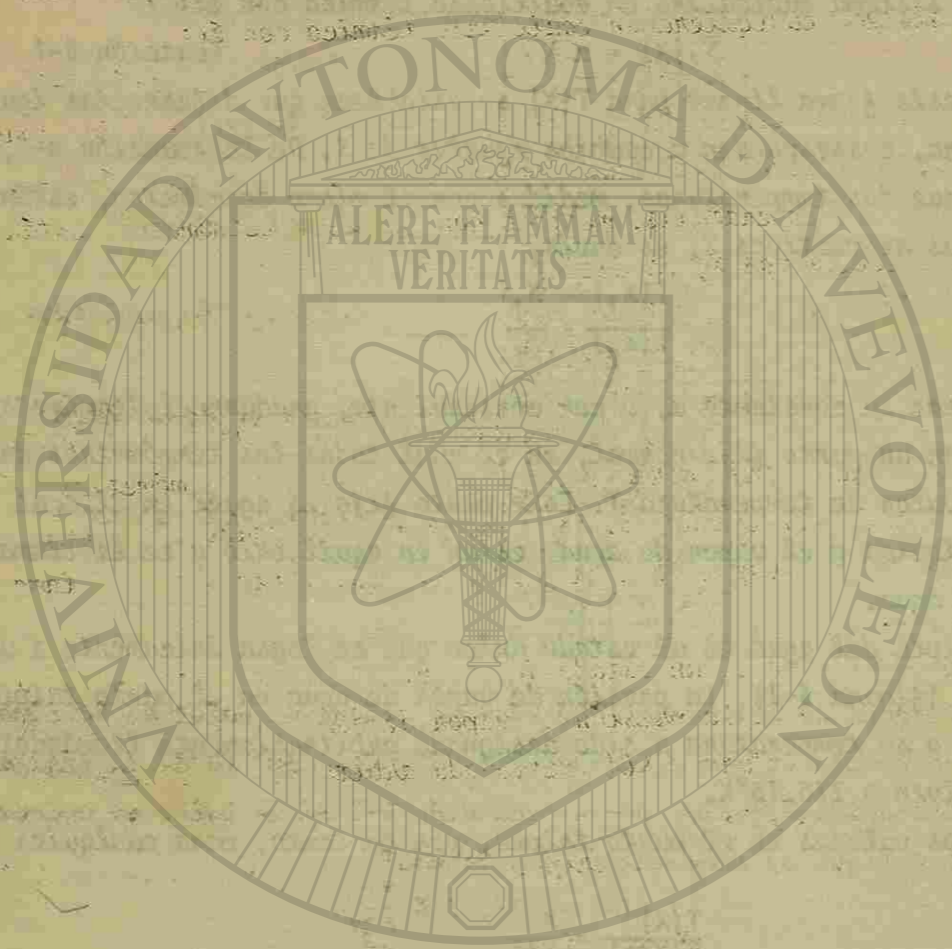
$$T(X) = 273.16^\circ K \frac{X}{X_{tr}}$$

$$= 273.16^\circ K \frac{98}{90.35}$$

$T(X) = 294^\circ K.$

Ahora resulta la pregunta de que si el valor que se encuentra para la temperatura de un sistema depende del termómetro utilizado para medirlo. Como las diferentes clases de termómetros coinciden en el punto fijo patrón, es de esperarse, ¿qué ocurre en otros puntos? Si se mide la temperatura de un sistema con diversos termómetros, cada termómetro dará una lectura diferente, aún cuando sean termómetros de una misma especie, tales como termómetros de gas de volumen constante con diferentes clases de gases, obtenido diferentes mediciones de temperatura para el sistema dado.

Por lo tanto, para encontrar una escala de temperaturas definida, se debe escoger cierta clase de termómetro como patrón. Esta elección se hace determinando si la escala de temperatura definida mediante un termómetro especial resulta ser una cantidad útil en la formulación de las leyes de la física. La varia-



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TLAXCALA  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ción mas pequeña en las lecturas esta entre diferentes termómetros de gas a volumen constante, lo que sugiere que se escoja un gas como sustancia termométrica patrón.

En un termómetro de este tipo, se encuentra que al reducir la cantidad de gas usado, y por lo tanto, reducirse su presión, la variación de lecturas entre termómetros de gas fabricados con diferentes clases de gases se reduce también.

#### 4.- Termómetro de gas a volumen constante.

El termómetro de gas, de volumen constante, emplea como propiedad termométrica la presión a volumen constante, dependiendo esta presión de la temperatura, y aumentando continuamente al elevarse esta.

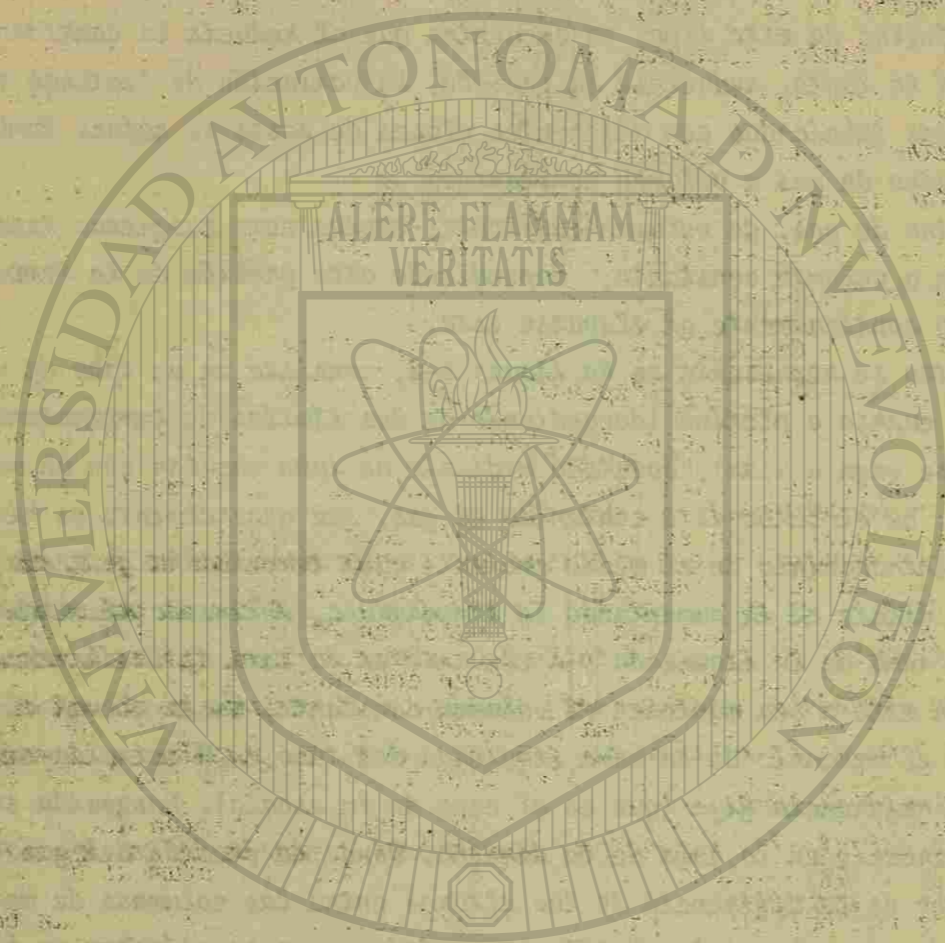
El termómetro se representa en la figura 8-2, conciste en un tubo de vidrio, porcelana, cuarzo o platino (dependiendo de los límites de temperatura entre los cuales se vaya a usar), conectado mediante un tubo capilar con un manómetro de mercurio. En el bulbo esta contenido el gas, que generalmente es hidrogeno o helio; al introducirlo en el medio ambiente cuya temperatura se trata de medir el gas se dilata al ir aumentando la temperatura, obligando al mercurio a descender en la rama de la izquierda y a elevarse en la rama de la derecha.

Para evitar esto o sea mantener el volumen constante, basta elevar el depósito R para que el mercurio de la rama izquierda del tubo en U coincida siempre con la marca de referencia fija (que es el cero de la escala). Enseguida se lee la altura del mercurio en la rama de la derecha. Donde la presión del gas encerrado en el bulbo es la diferencia de las alturas entre las columnas de mercurio (multiplicada por  $\rho g$ ) mas la presión atmosférica, que se mide con un barómetro.

En la práctica el aparato es algo complicado y se le deben hacer muchas correcciones, tales como, (1) tomar en cuenta el pequeño cambio de volumen debido a la ligera contracción o dilatación del bulbo y (2) tener en cuenta que no todo el gas confinado esta sumergido en el baño. Si se supone que las correcciones estan hechas y si se llama P al valor corregido de la presión con respecto a la temperatura del baño. La temperatura estará dada provisionalmente por:

$$T(P) = 273.16^{\circ}\text{K} \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ constante})$$

Ecuación 8-3



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

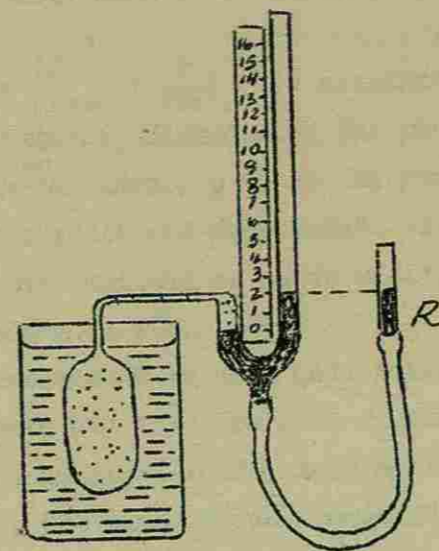


FIGURA 8-2

## 5.- Escala de temperaturas del gas ideal.

El bulbo de la figura 8-2 que contiene una cierta cantidad de gas, al estar rodeado por agua en el punto triple, la presión  $P_{tr}$ , tiene un valor definido, por ejemplo 80cm-Hg. Si ahora el bulbo se rodea con vapor que se condensa a la presión de una atmósfera y manteniendo constante el volumen en su valor anterior, se procede a medir la presión del gas  $P_s$ , que es la presión en el punto de ebullición, para este caso,  $P_{s80}$ .

Enseguida se calcula la temperatura provicional a partir de la expresión -  

$$T(P_{s80}) = 273.16^\circ K \left( \frac{P_{s80}}{80\text{cm-Hg}} \right)$$

Si ahora se extrae algo de gas al bulbo, hasta que la presión  $P_{tr}$  tenga un valor de 40cm-Hg, de igual forma se mide el nuevo valor de  $P_s$  y se calcula otra temperatura provicional a partir de la expresión  $T(P_{s40}) = 273.16^\circ K \left( \frac{P_{s40}}{40\text{cm-Hg}} \right)$

De igual manera se va reduciendo poco a poco la cantidad de gas encerrado en el bulbo, y para cada nuevo valor de  $P_{tr}$ , se calcula la temperatura para el punto de ebullición ( $T(P_s)$ ).

En la figura 8-3 se han trazado algunas curvas obtenidas mediante este procedimiento para termómetros de volumen constante que contienen gases diferentes. A partir de estas curvas se encuentra que las lecturas de la temperatura de un termómetro de gas a volumen constante dependen del gas utilizado para valores ordinarios de la presión de referencia.

Sin embargo, conforme se reduce la presión, las lecturas se van acercando al mismo valor. Por lo tanto, el valor extrapolado de la temperatura depende únicamente de las propiedades generales de los gases y no de un gas en especial.

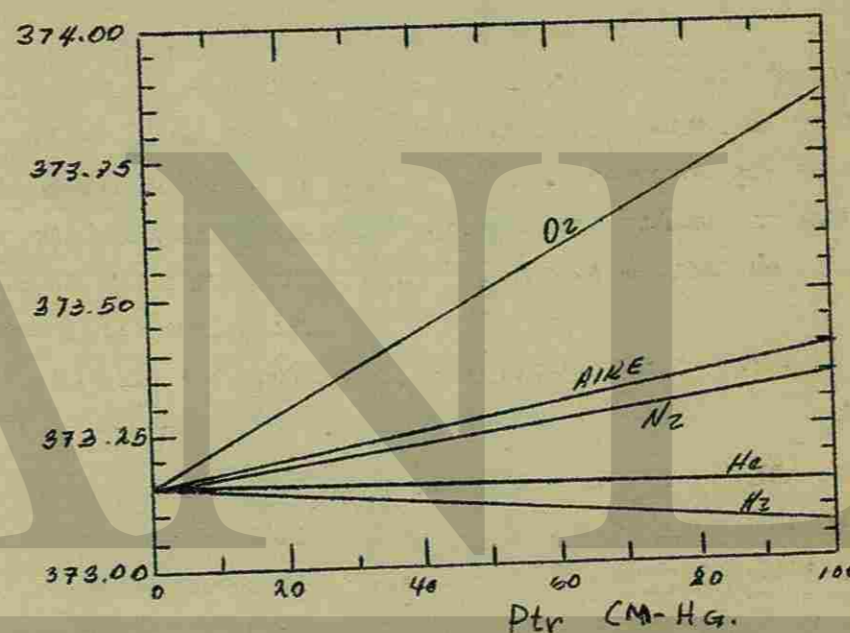
Por consiguiente, se define la escala de temperaturas de gas ideal a partir de la expresión

$$T = 273.16^{\circ}\text{K} \frac{1\text{m}}{P_{tr=0}} \left( \frac{P}{P_{tr}} \right) \quad (V \text{ constante}) \quad \text{Ecuación 8-4}$$

Esta escala de temperaturas, dependen de las propiedades de los gases en general (propiedades de un gas ideal) y no de las propiedades de un gas en particular. Por lo tanto, para medir una temperatura se debe usar un gas a esa temperatura. La temperatura mas baja que se puede medir, con un termómetro cualquiera de gas es aproximadamente de 1°K.

Para obtener esta temperatura se debe usar helio a baja presión ya que el helio se licua a una temperatura inferior a la de cualquier otro gas. Por lo tanto, no se puede asignar un significado experimental a temperaturas inferiores a 1°K aproximadamente, por medio de un termómetro de gas.

FIGURA 8-3



6.- Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de temperaturas práctica - internacional.

Las escalas de temperatura que se usan comúnmente son la Celsius o Centígrada y la Fahrenheit. Estas escalas están definidas a partir de la escala de temperaturas fundamental en la ciencia, que es la Kelvin.

La escala Celsius usa como unidad de temperatura un intervalo de un grado que es de igual magnitud que el grado de la escala Kelvin. La relación que hay entre la temperatura Celsius  $T_c$  (°C) y la temperatura Kelvin  $T$  (°K) es la siguiente:

$$t_c = T - 273.15^{\circ} \quad \text{Ecuación 8-5}$$

Como el punto triple del agua que por definición es igual a 273.16°K corre

cti--  
esca-  
proxi-  
de la-  
in--  
o más  
cuer-  
pera-  
rante

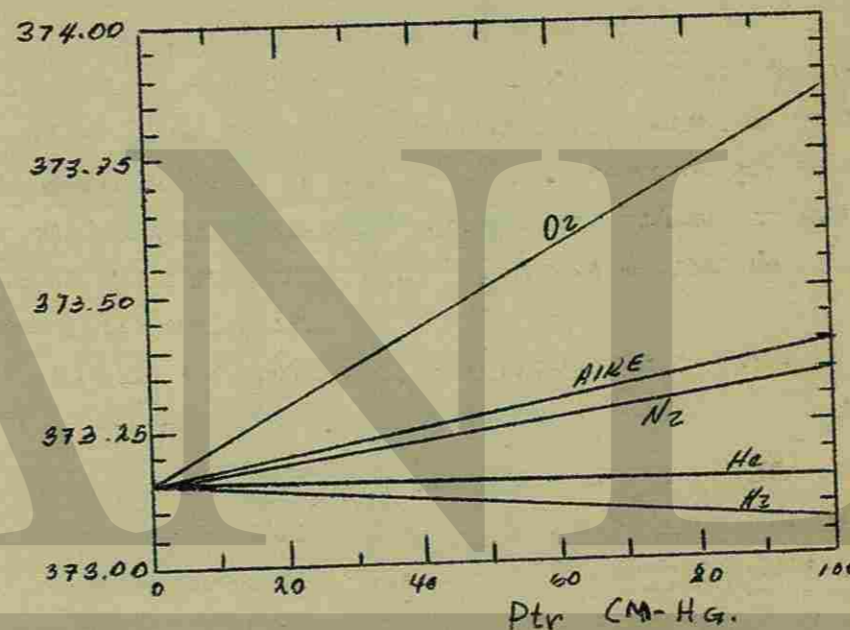
Por consiguiente, se define la escala de temperaturas de gas ideal a partir de la expresión

$$T = 273.16^{\circ}\text{K} \frac{1\text{m}}{P_{tr=0}} \left( \frac{P}{P_{tr}} \right) \quad (V \text{ constante}) \quad \text{Ecuación 8-4}$$

Esta escala de temperaturas, dependen de las propiedades de los gases en general (propiedades de un gas ideal) y no de las propiedades de un gas en particular. Por lo tanto, para medir una temperatura se debe usar un gas a esa temperatura. La temperatura mas baja que se puede medir, con un termómetro cualquiera de gas es aproximadamente de 1°K.

Para obtener esta temperatura se debe usar helio a baja presión ya que el helio se licua a una temperatura inferior a la de cualquier otro gas. Por lo tanto, no se puede asignar un significado experimental a temperaturas inferiores a 1°K aproximadamente, por medio de un termómetro de gas.

FIGURA 8-3



6.- Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de temperaturas práctica - internacional.

Las escalas de temperatura que se usan comúnmente son la Celsius o Centígrada y la Fahrenheit. Estas escalas están definidas a partir de la escala de temperaturas fundamental en la ciencia, que es la Kelvin.

La escala Celsius usa como unidad de temperatura un intervalo de un grado que es de igual magnitud que el grado de la escala Kelvin. La relación que hay entre la temperatura Celsius  $T_c$  (°C) y la temperatura Kelvin  $T$  (°K) es la siguiente:

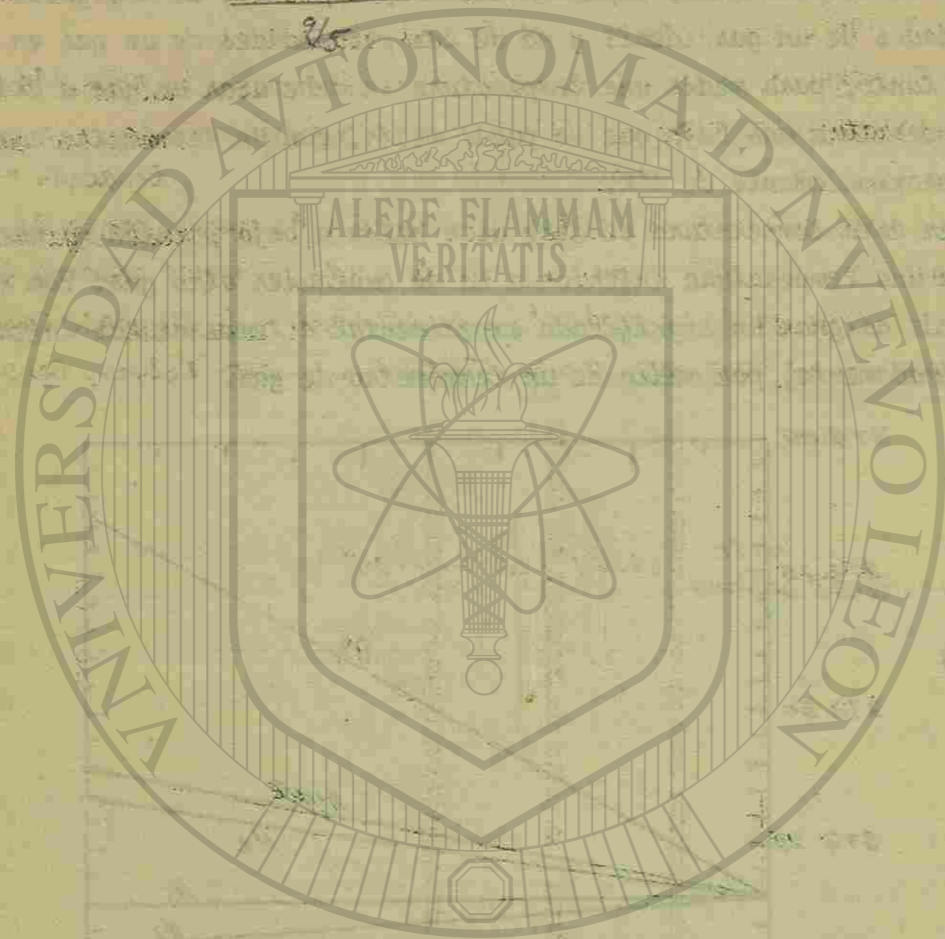
$$t_c = T - 273.15^{\circ} \quad \text{Ecuación 8-5}$$

Como el punto triple del agua que por definición es igual a 273.16°K corre

cti--  
esca-  
proxi-  
de la-  
in--  
o más  
cuer-  
pera-  
rante

$$T_F = 32^{\circ}F + \frac{9}{5}(330^{\circ}C)$$

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32^{\circ}F)$$



sponde  $0.01^{\circ}C$ .

La temperatura a la cuál el hielo y el agua saturada de aire estan en equilibrio a la presión atmosférica es de  $0^{\circ}C$  (punto de fusión del hielo) y la temperatura a la cual el vapor y el agua líquida estan en equilibrio a la presión atmosférica es de  $100^{\circ}C$  (punto de ebullición del agua).

La escala Fahrenheit no se usa en trabajos cinéticos. La relación que hay entre las escalas Fahrenheit y Celsius es la siguiente:

$$T_F = 32^{\circ}F + \frac{9}{5}T_C \quad \text{Ecuación 8-6}$$

A partir de esta relación se obtiene por conclusión que el punto de fusión del hielo es igual a  $0^{\circ}C = 32^{\circ}F$ ; que el punto de ebullición del agua es igual a  $100^{\circ}C = 212^{\circ}F$ , y que un grado Fahrenheit es exactamente  $\frac{5}{9}$  de un grado Celsius.

En la figura 8-4 se hace una comparación de las escalas Kelvin, Celsius y Fahrenheit.

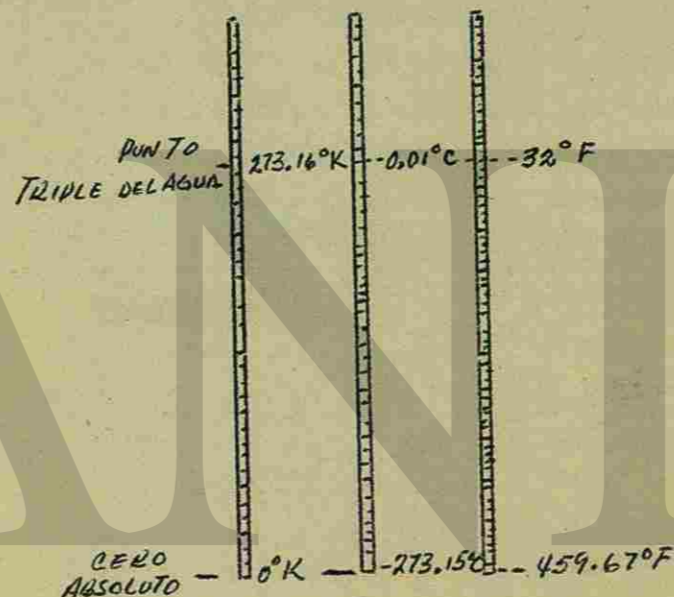


FIGURA 8-4

El punto fijo patrón para los termómetros es el punto triple del agua el cuál tiene un valor arbitrario de  $273.16^{\circ}K$ . El termómetro de gas de volumen constante es el termómetro patrón. La escala de gas extrapolada es la que se usa para definir la temperatura del gas ideal a partir de la expresión  $T = 273.16^{\circ}K \frac{P}{P_{tr}}$ .

Esta escala es igual a la Kelvin para los límites entre los cuales se pueda usar un termómetro de gas.

Empleando de esta forma el termómetro patrón, se pueden encontrar experimentalmente algunos otros puntos de referencia para medir la temperatura, llamados puntos fijos. En la tabla 8-1 se indican las temperaturas de fusión y Ebu-

llición (puntos fijos) para algunas sustancias; estas temperaturas se pueden utilizar para graduar cualquier clase de termómetro.

Sustancia	Designación	Temperatura	
		°C	°K
Oxígeno	Punto de ebullición normal	-182.97	90.18
Agua	punto triple	0.01	273.16
Agua	punto de ebullición normal	100.00	373.15
Azufre	punto de ebullición normal	444.60	717.75
Plata	punto de fusión normal	960.80	1233.95
Oro	punto de fusión normal	1063.00	1336.15

TABLA 8-1

En 1927 se adoptó una escala Internacional de Temperaturas Prácticas (IPTS) para formular una escala que puede usarse fácilmente para fines prácticos, como la calibración de instrumentos industriales o científicos. Esta escala consiste en una serie de recetas para prácticamente obtener la mejor aproximación posible a la escala Kelvin. Se escoge el conjunto de puntos fijos de la Tabla 8-1 y se especifica una serie de instrumentos que se deben usar para interpolar entre estos puntos fijos y para extrapolar más allá del punto fijo más alto. Además se tienen fórmulas que corrigen las temperaturas básicas de acuerdo con la lectura barométrica. La IPTS se aleja de la escala Kelvin en temperaturas comprendidas entre los puntos fijos, pero la diferencia es insignificante. La IPTS es el patrón legal en casi todos los países.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## PROBLEMAS

1.- Si la temperatura del gas ideal en el punto de ebullición del agua es de  $373.15^{\circ}\text{K}$ , ¿Cuál es el valor límite de la relación de las presiones de un gas a la temperatura de ebullición del agua y en el punto triple del agua cuando se conserva el gas a volumen constante?

R:  $373.15/273.16$

2.- Es una observación cotidiana que los cuerpos calientes y los cuerpos fríos se enfrían o se calientan hasta alcanzar la temperatura del medio ambiente. Si la diferencia de temperatura  $\Delta T$  entre un objeto y su medio ambiente no es demasiado grande, la rapidez de enfriamiento o calentamiento es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio ambiente; esto es,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -K \Delta T,$$

siendo  $K$  una constante. El signo menos es debido a que  $\Delta T$  disminuye con el tiempo si  $\Delta T$  es positiva y viceversa. La ecuación anterior se conoce como ley del enfriamiento de Newton. (a) ¿De qué factores depende  $K$ ? ¿Cuáles son sus dimensiones? (b) Si en algún instante la diferencia de temperatura es  $\Delta T_0$ , demostrar que en un tiempo  $t$  después, su valor será:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-Kt}$$

R: Materiales, forma, temperatura absoluta, corrientes de aire. Las dimensiones son  $T^{-1}$

3.- ¿A qué temperatura coinciden las escalas Fahrenheit y Celsius? ¿A qué temperatura las escalas Fahrenheit y Kelvin?

R:  $-40^{\circ}\text{F} = -40^{\circ}\text{C}$ ;  $575^{\circ}\text{F} = 575^{\circ}\text{K}$ .

4.- La temperatura a que se funde cierto metal es de  $330^{\circ}\text{C}$  y la temperatura a que hierve es de  $1170^{\circ}\text{C}$ . Expresar estas temperaturas en la escala Fahrenheit.

R:  $626^{\circ}\text{F}$ ;  $2138^{\circ}\text{F}$ .

5.- La temperatura normal del cuerpo humano es de  $98.6^{\circ}\text{F}$ . ¿A qué temperatura equivale en la escala Celsius?

R:  $37^{\circ}\text{C}$ .

6.- Si el mercurio se congela a  $-40^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué valor tiene esta temperatura en la escala Fahrenheit?

R:  $-40^{\circ}\text{F}$ .

7.- El hielo seco (dióxido de carbono sólido) vaporiza a la temperatura de  $-112^{\circ}\text{F}$ . ¿Qué temperatura corresponde en la escala Celsius?

R:  $-80^{\circ}\text{C}$ .

8.- El punto de fusión de la plata ocurre a la temperatura de  $960.5^{\circ}\text{C}$ . El punto de fusión del oro a la de  $1063^{\circ}\text{C}$ . El punto de ebullición del azufre es  $444.6^{\circ}\text{C}$ . Expresar estas temperaturas en grados Fahrenheit.

R:  $1760.9^{\circ}\text{F}$ ;  $1945.4^{\circ}\text{F}$ ;  $832.28^{\circ}\text{F}$ .





JUAN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA