

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

OQUITION AND THE PROPERTY OF T

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUE ESICA 2EON

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

QC20 .82 U5



1020082299

PONDO UNIVERSITARIO

130279

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL DI

INDICE

CAPITULO		Páginas
1	CINEMATICA DE ROTACION	1
	1 Introducción. Movimiento de Rotación	17
	2 Cinemática de Rotación. Las variables	2
	3 Rotación con aceleración angular constante	8
	4 Cantidades rotacionales como vectores	10
	5 Relación entre la cinemática final y la angular	12
11	DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION	19
	1 Introducción. Momento de Rotación obrando sobre una par	
	tícula	19
	2 Cantidades de movimiento angular de una partícula	23
	/3,- Sistemas de partículas	25
	4 Energía cinética de rotación y momento de inercia	26
	5 Dinámica rotacional de un cuerpo rígido	30
	6 El movimiento combinado de traslación y de rotación de-	
	un cuerpo régido	38
111	DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION. Y LA CONSERVACION DE -	
	LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAP	47
	1 Introducción. El trompo	47
	2 Cantidad de movimiento angular y velocidad angular	49
	3 Conservación de la cantidad de movimiento angular	53
	4 Algunos otros aspectos de la conservación de la canti	
	dad de movimiento angular	56
	5 Resumen	57
IV	VOSCILACIONES	61)
	1 Introducción. Oscilaciones	61
	2 El oscilador armónico simple	63
	3 Movimiento armónico simple	65
	4 Consideraciones energéticas en el movimiento armónico	
	simple	70
	5 Aplicaciones del movimiento armónico simple	71
	6 Relación entre el movimiento armónico simple y el movi-	
	miento circular uniforme	77
	7 Combinaciones de movimientos armónicos	80
List	8 Oscilaciones de un cuerpo doble	82
	9 Movimiento armónico amortiguado	85
V-	FSTATICA DE LOS FLUIDOS	90

1 Fluidos. Presión y Densidad	Páginas 90 91 95 98
2 Variaciones de presión en un fluido en reposo 3 Principio de Pascal y Principio Arquímedes 4 Medida de la presión VI DINAMICA DE LOS FLUIDOS	91 95 98
3 Principio de Pascal y Principio Arquimedes 4 Medida de la presión VI DINAMICA DE LOS FLUIDOS	95 98
4 Medida de la presión	98
4 Medida de la presión	
VI DINAMICA DE LOS FLUIDOS	105
1 Conceptos generales del flujo de los fluidos	105
	(O5)
2 Lineas de corrientes	107
3 La ecuación de continuidad	108
4 Ecuación de Bernoulli	109
5 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecua	
ción de continuidad	112
VII EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA	117
1)- El calor, una forma de la energía	117
2 Cantidad de calor y calor específico	118
3 Capacidad calorífica molar de los sólidos	121
4 Conducción del calor	123
5 Equivalente mecánico del calor	127
6.7 Calor y trabajo	128 •
7) La primera Ley de la Termodinámica. Algunas aplicacio	
nes	131
VIII V TEMPERATURA	139
1. Descripciones macroscopica y microscopica	139
2 Equilibrio térmico	139
3. Medición de la temperatura	140
4 Termómetro de gas a volumen constante	143
5 Escala de temperaturas del gas ideal	144
6 Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de tempe-	
raturas prática internacional	145
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOJECAS	
Control of the Contro	

where we will be a supplied to the supplied of the supplied of

Constitution of the contraction of the contract of the contrac

CAPITULO I

CINEMATICA DE ROTACION

1.- Introducción. Movimiento de Rotación.

En este capítulo se hará un estudio de los cuerpos o partículas que se mue ven en una trayectoria circular. Se dará principio a esta primera parte conside rando el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo; esto es, movimiento de rotación sin traslación.

El movimiento de rotación se produce cuando actúa una fuerza sobre un cuer po en ángulo recto con su movimiento, como runca existe una componente de la --fuerza en dirección del movimiento, no habrá aceleración a lo largo de la tra-yectoria, cambiando la dirección del movimiento mientras permanece constante la celeridad del cuerpo. si la magnitud de la fuerza es constante, la dirección de la trayectoria cambia en igual proporción en cada intervalo de tiempo y la trayectoria es circular.

La fuerza y la aceleración del cuerpo, están dirigidas hacia el centro del circulo, mientras que la velocidad es tangente al círculo en cada punto

Para determinar la posición de un cuerpo que se desplaza a lo largo del arco de un círculo, es necesario conocer el ángulo que se forma entre el centro del círculo al cuerpo y el radio fijo del círculo. Como se muestra en la figura 1-1.

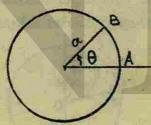


FIGURA 1-1

Para expresar θ se utilizaran tres unidades: grados, revoluciones y radia-

Como las dos primeras unidades son mas conocidas se dará una explicación - de los radianes. Un ángulo expresado en radianes es la longitud del arco girado dividido entre el radio del arco.

Para que θ esté expresada en radianes, basta hacer la relación de; $\frac{AB}{a}$, a - partir de la figura 1-1.

Observando con esto que el radian, no es mas que la relación entre dos lon gitudes y no una unidad propiamente dicha.

Así que las mediciones angulares por los términos θ en radianes, δ θ en -- grados, son con el objeto de expresar la forma en que se mide el ángulo, sin es

perar que estas definiciones se comporten como unidades en las ecuaciones.

Cuando θ es grande hasta llenar el círculo o sea 360°, gira un arco igual a la circunferencia 2Na. De donde 360° equivale a $\frac{2 \, \text{Na}}{a}$, o bien $2 \, \text{N}$ radianes. Además sabiendo que una revolución es igual a 360°, se encuentra que tam--bién una revolución es igual a 2 Tradianes.

2.- Cinemática de la Rotación. Las variables.

La cinemática de la rotación, es la parte de la mecánica que estudia el mo vimiento de un cuerpo que se desplaza atravez de un circulo, sin tomar en cuenta las causas que provocan este movimiento.

VELOCIDAD ANGULAR .-

Las dimensiones de la velocidad angular, es la relación de los desplaza--miento angular y el tiempo; donde do deverá estar en radianes, dt en segundos y w en rad/seg. Otra forma común de unidad para la velocidad angular son rev/min. De donde:

 $1 \frac{\text{rev.}}{\text{min.}} = 1 \frac{\text{rev.}}{\text{MIN.}} \times 2 \pi \frac{\text{rad.}}{\text{rev.}} \times \frac{1}{60} \frac{1}{\text{seg./min.}} = 0.105 \frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}$

En la figura 1-2, se considerará un cuerpo que gira alrededor de un eje -que pasa por 0, perpendicular al plano del dibujo. On es la posición de ciertoradio del cuerpo en el instante to, y Ob la posición del mismo radio en el instante t; siendo 0. y 0. las absisas angulares del radio medidas respecto a la vertical de referencia. El desplazamiento angular del radio es Δ θ , o bien θ - θ .

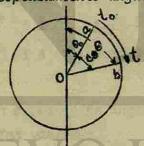


FIGURA-1-2

La velocidad angular media w, se define como: velocidad angular media = desplazamiento angular tiempo transcurrido.

 $\overline{w} = \frac{\theta - \theta \circ}{t - t \circ} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ de donde:

la derivada del desplazamiento angular respecto al tiempo, dará la velocidad an gular instantánea, esto es:

 $W = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \theta = \frac{d\theta}{dt}$

Ecuación 1-1

Cuando un cuerpo gira con velocidad angular constante, su velocidad angular instantánea es igual a su velocidad angular media, cualquiera que sea el in-

THE STATE OF THE SECOND OF STATE OF STA

Augusta of againment of the property of a second

the time that which the property and the property of the sail of t

grades, forther alighted designifications from anti-file entraction of the later of

present que catas definiblicada en compostan como michelas en las ecuaciones. Countly 8 as grande hearts theyar of obserts - and Mar and anca truck a sk aireanformeta like. To donda hay apadidele a like. a liken like nailemen Adamie sublemis que una revolución es digunt a ses escuentian que con--bile una resolución es igual a l'inactores. the Committees to it Romeion. Las value Sel la concretion de la notación, co calif "Upraconto de un cherror que se duranto en compando the last character out provide an external call WELDCIDED ANGULAR ica dominationes de la vergolita tana que, es la collection de les fessiones migrato angulas y al tiempo contact property against a at the an adjunct of we en neithers. Other farms coming to with the to very to so sequent 1-2, as constructed an entrary of the construction mes past not 0, prespectionary stages of the color of the color of and to descend on as motore of the color of the Anies sy atendr 2, y 1, the market synthetic is sent seattent of neckenometer. Et dissinguiste and and the reality

NIVERSIDADAUTÓNO

DIRECCIÓN GENERAL

guier instantinea, isto es:

Bettero des 1-1

95 - 9.5 .mil = 10

cuando un encapo gira con velocidal auquilan cosestante, en velocidad enqui

tervalo de tiempo. Siendo la velocidad angular constante se puede escribir:

$$w = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o}$$
 por lo tanto:

$$\theta$$
- θ o = w (t-to)

considerando que to y θ o son infinitamente pequeños, se obtiene:

Ecuación 1-1a.

Ejemplo 1-1.

Se realizan las siguientes lecturas en el tacómetro de un automóvil en los intervalos de tiempo siguientes.

a).- Cálculese la velocidad angular en $\frac{rad}{seg}$. para cada lectura. Así como:

b).- Los desplazamientos angulares para cada lectura.

a)
$$20 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad./seg.}{rev/min.} = 2.1 \frac{rad.}{seg.}$$

 $40 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 4.2 \text{ " }$
 $60 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 6.3 \text{ " }$
 $80 \text{ " } \times 0.105 \text{ " } = 8.4 \text{ " }$
b) $\theta_1 = wt = 0$. No hay desplazamiento en la p

 θ_1 = wt = 0. No hay desplazamiento en la primer lectura. θ_2 = 4.2 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ x 2 seg. = 8.4 rad.

$$\theta_3 = 6.3$$
 " x 5 " = 31.5 " $\theta_4 = 8.4$ " x 6 " = 50.4 "

ACELERACION ANGULAR .-

Para que un cuerpo tenga oceleración angular, la velocidad angular del --- cuerpo en rotación deberá estar variando.

Siendo wo su velocidad angular instantánea en el instante to, y w su velocidad angular en el instante t, se obtiene la aceleración angular media. La cual se define como la razpon de la variación de la velocidad angular al tiempo transcurrido:

aceleración angular media = variación de la velocidad angular tiempo transcurrido.

$$\overline{d} = \frac{w - w_0}{t - t_0} = \frac{b w}{4 t}$$

Sabiendo que la velocidad angular w esta en rad/seg. y el tiempo en segundos, se obtiene que la aceleración angular estará en $\frac{rad}{sea^2}$.

La aceleración angular instantánea Z es la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo esto es:

counter to ringe, Stands to velocited angular constants or great electrics (北京) 切中 (北京) constituande que de la sea sussimitamente penuegos estes. EREAFIAMAMANTE IN CONTROL NOTICE TO THE SECOND SE intervalor, be Prompt elevisioner. There's suppose the true of and the walk with the rate of the course which

-mental as ormula and home and the state of the second of the state of

A STATE OF THE PARTY OF THE PAR

CASE OF WEST AND CONTRACT OF THE SALE OF T

& = LIM & w = dw dt.

Ecuación 1-2.

sabiendo que $w = \frac{d\theta}{dt}$ se puede escribir.

Ejemplo 1-2.

Un motor que gira a 1800 $\frac{rev}{min}$ sigue haciendolo libremente hasta el reposoen forma uniforme en un tiempo de 20 seg. Encontrar su desaceleración angular

1800
$$\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 0.105 \frac{\text{rad/seg.}}{\text{rev/min.}} = 189 \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$$
 1800 $\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} = 30 \frac{\text{rev}}{\text{seg.}}$

$$1800 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{1}{\frac{\text{seg}}{\text{min}}} = 30 \frac{\text{rev}}{\text{seg}}$$

$$C = \frac{w}{t} = \frac{189}{20} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}. - 9.45 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}.$$
Cantidades tangenciales.

$$\mathcal{L} = \frac{w}{t} = \frac{30}{20} \frac{\text{Rev}}{\text{Seg}} = 1.5 \frac{\text{Rev}}{\text{Seg}^2}.$$

VELOCIDAD TANGENCIAL .-

A medida que una partícula viaja a una velocidad uniforme V, no solo describe un ángulo 8, sino que también cu bre una distancia ds. Como se ilustra en la figura 1-3.

La distancia que se desplaza la partícula en el tiempo dt, está dada por la ecuación ds = V dt.

Y el ángulo átravez del cual la partícula se mueve en este tiempo es:

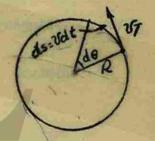


FIGURA 1-3

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$
 de donde:

Si la particula se mueve sobre el arco del circulo tiene una velocidad lineal VT, que siempre es tangencial al circulo. Está velocidad recibe el nombrede velocidad tangencial de la partícula.

Para encontrarla unicamente se toma la derivada con respecto al tiempo dela Ecyación 1-3. Recordando que R es constante.

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$
 de donde:

Ecuación 1-4

Aqui también la medida en radianes debe usarse para w.

DE la ecuación 1-4, se encuentra que entre mas lejana este una partícula del eje de rotación mayor será la línea de velocidad VJ. Aunque todas las partí

建立型造型工工 11-62 11000 ARRIVAN THE WAR SE DE DIEST CONTRACTOR

THE RESIDENCE LIFE THE PROPERTY OF THE PROPERT dution of the situation without the filmen the suffered by the during suches the proof.

THE SHEAR STREET

culas de un cuerpo en rotación tienen la misma velocidad angular lexcepto las que estan sobre el ejel.

Eiemlo 1-3.

Un fonógrafo con un disco de 18cm. de diámetro, rota a 45 nev: a) Encon--trar la linea de velocidad de un punto que se encuentra a 4 cm. del eje y b) --Uno que se encuentra sobre la orilla del disco.

$$45 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg}{rev/min} = 4.725 \frac{rad}{seg}.$$

a)
$$\sqrt{7} = R w = 4 \text{ cm } \times 4.725 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 18.9 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$
.

b)
$$V_T = 9$$
 cm x 4.725 $\frac{rad}{seg} = 42.525 \frac{cm}{seg}$.

ACELERACION TANGENCIAL.

Para encontrar la aceleración tangencial a7 de la partícula de la figura -1-3. Se toma la derivada respecto al tiempo de la equación 1-4, manteniendo Rconstante. Esto da:

$$\frac{dV_T}{dt} = R \frac{dw}{dt}$$

Siendo $\frac{d V_T}{dt}$ la aceleración tangencial y $\frac{dw}{dt}$ la aceleración angular, se obtie

Ecuación 1-5

Debiendo estar \propto en $\frac{\alpha_T}{\text{seg}^2}$.

Ejemplo 1-4.

Suponiendo que en el motor del ejemplo 1-2, se cambia su velocidad de 1800 a 1200 rev. por medio de un reostato y se deja girar libremente hasta el reposo en un tiempo de 15 seg.

a) Determinar la aceleración tangencial para un punto que se encuentra sobre la orilla del rotor (parte móvil del motor), sabiendo que el diámetro de es te es 15 cm.

1200
$$\frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 126 \frac{rad.}{seg.}$$

 $\alpha = \frac{w}{x} = \frac{126 \text{ rad/seg.}}{15 \text{ seg.}} = 8.4 \frac{\text{rad.}}{\text{seg2.}}$

$$a_7 = \text{Roc} = 7.5 \text{cm} \times 8.4 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} = 63 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

ACELERACION RADIAL.

Para encontrar la aceleración radial de una partícula que se desplaza so-bre un círculo, es conveniente analizar el origen de coordenadas X y V, en el-

建立型造型工工 11-62 11000 ARRIVAN THE WAR SE DE DIEST CONTRACTOR

THE RESIDENCE LIFE THE PROPERTY OF THE PROPERT dution of the situation without the filmen the suffered by the during suches the proof.

THE SHEAR STREET

culas de un cuerpo en rotación tienen la misma velocidad angular lexcepto las que estan sobre el ejel.

Eiemlo 1-3.

Un fonógrafo con un disco de 18cm. de diámetro, rota a 45 nev: a) Encon--trar la linea de velocidad de un punto que se encuentra a 4 cm. del eje y b) --Uno que se encuentra sobre la orilla del disco.

$$45 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg}{rev/min} = 4.725 \frac{rad}{seg}.$$

a)
$$\sqrt{7} = R w = 4 \text{ cm } \times 4.725 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 18.9 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$
.

b)
$$V_T = 9$$
 cm x 4.725 $\frac{rad}{seg} = 42.525 \frac{cm}{seg}$.

ACELERACION TANGENCIAL.

Para encontrar la aceleración tangencial a7 de la partícula de la figura -1-3. Se toma la derivada respecto al tiempo de la equación 1-4, manteniendo Rconstante. Esto da:

$$\frac{dV_T}{dt} = R \frac{dw}{dt}$$

Siendo $\frac{d V_T}{dt}$ la aceleración tangencial y $\frac{dw}{dt}$ la aceleración angular, se obtie

Ecuación 1-5

Debiendo estar \propto en $\frac{\alpha_T}{\text{seg}^2}$.

Ejemplo 1-4.

Suponiendo que en el motor del ejemplo 1-2, se cambia su velocidad de 1800 a 1200 rev. por medio de un reostato y se deja girar libremente hasta el reposo en un tiempo de 15 seg.

a) Determinar la aceleración tangencial para un punto que se encuentra sobre la orilla del rotor (parte móvil del motor), sabiendo que el diámetro de es te es 15 cm.

1200
$$\frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 126 \frac{rad.}{seg.}$$

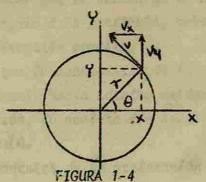
 $\alpha = \frac{w}{x} = \frac{126 \text{ rad/seg.}}{15 \text{ seg.}} = 8.4 \frac{\text{rad.}}{\text{seg2.}}$

$$a_7 = \text{Roc} = 7.5 \text{cm} \times 8.4 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} = 63 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

ACELERACION RADIAL.

Para encontrar la aceleración radial de una partícula que se desplaza so-bre un círculo, es conveniente analizar el origen de coordenadas X y V, en el-

centro del círculo como lo muestra la figura 1-4



Obteniendo que las coordenadas de la partícula son:

Y =T Sen 0

donde θ es función del tiempo y T se mantiene constante.

Suponiendo que la partícula desplaza alrededor del círculo con una velocidad angular constante w, y haciendo uso de la ecuación 1-1a que dice θ = wt, ya que para este caso \overline{w} = w.

Sutituyendo esta expresión en las ecuaciones de X y Y, se encuentra que:

y = T Senwt

Ecuación 1-6

Sabiendo que la componente en el eje X de la velocidad de la partícula es- $Vx = \frac{dx}{dt}y$ en el eje Y es $Vy = \frac{dy}{dt}y$ derivando la ecuación 1-6, con respecto al tiempo, se encuentra que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(r Coswt)}{dt}$$

 $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vx = - Twsenuto

Vy = Twcoswto

Ecuación 1-7

En general claro esta W no sería constante. Sin embargo es conveniente restringirnos al caso en que la partícula se desplaza en torno del círculo a velocidad constante, de tal manera que $\propto = \frac{dw}{dt} = 0'$

Obsérvese que tanto Vx como Vy son función del tiempo. Por lo tanto, en virtud de que las velocidades cambian con el tiempo la partícula debe irse aceler ando aunque su rápidez en el círculo sea constante.

Para encontrar las componentes X y Y de la aceleración, se hace uso del hecho que:

$$\alpha x = \frac{dVx}{dt}$$
 $\alpha y = \frac{dVx}{dt}$

y derivando con respecto al tiempo la ecuación 1-7, se encuentra que:

$$\frac{dVx}{dt} = \frac{-rwd(Senwt)}{dt}$$

 $\frac{dVy}{dt} = \frac{Twd(Coswt)}{dt}$

 $\alpha x = -r w^2 coswto$

 $Qy = -Pw^2$ Semuto Ecuación 1-8.

Las componentes de aceleración son proporcionales al negativo de los desp-

commo del cinerallo camp do muestan la that expude the property of the contract was the statement of the ASSESSED BEING A THE TOTAL OF THE PARTY OF T g detinands con actyceto of thempore to conscibl bet, as undertiating

ins compositives de accessación son pappolacidades al nobeline de las desde

lazamientos, esto significa; que el vector de desplazamiento que es el radio -vector del centro del círculo a la partícula, debe ser proporcional al vector de aceleración pero de dirección opuesta.

De donde se deduce que la aceleración de la partícula en el círculo es unvector que apunta radialmente hacia adentro desde la partícula hacia el centrodel círculo. Por esta razón, la acelera cón recibe el nombre de aceleración radial y se representa por A.

Conociendo las componentes de la aceleración y sabiendo que la resultante-R de dos vectores componentes Rx y Ry esta dada por:

$$R^2 = R^2x + R^2y$$
 se obtiene que:

$$\alpha^{2}R = \alpha^{2}x + \alpha^{2}y$$

 $\alpha^{2}R = r^{2}w^{4}\cos^{2}wt + r^{2}w^{4}Sen^{2}(\omega t)$
 $\alpha^{2}Q = r^{2}w^{4}(\cos^{2}wt + Sen^{2}wt)$.

Sabiendo que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ se encuentra que:

rw² Ecuación 1-9.

Aunque la partícula se desplaza en torno del círculo con velocidad constante, su velocidad cambia de dirección. La razón de cambio de este vector de velocidad es la aceleración radial de la partícula.

La partícula esta acelerada a lo largo de un radio hacia el centro del circulo.

Ejemplo 1-5.

Calcular la magnitud de la aceleración total de una partícula moviéndose en un círculo de radio 0.4 mts. En el instante que esta partícula tiene una velocidad angular de 2 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y una aceleración angular de 5 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{seg^2}} \times 0.4 \text{ mt} = 2 \frac{mt}{seg^2}.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{r} + \alpha^2 n} = (2 \frac{rad}{seg})^2 \times 0.4 \text{mt} = 1.6 \frac{Mt}{seg^2}.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha^2 n}{seg^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2^2} + 7.6^2} \frac{mt^2}{seg^4}$$

$$\alpha = 2.6 \frac{mt}{seg^2}.$$

FUERZAS CENTRÎPETA Y CENTRÎFUGA.

Todos alguna vez hemos experimentado estas fuerzas al atar una piedra o -- un peso a una cuerda y dar vueltas haciendo que la piedra describa una circunfe rencia. De esta manera al dar vueltas notamos que la mano esta sometida a una fuerza hacia afuera, e inversamente la mano tiene que ejercer una fuerza hacia-

commo del cinerallo camp do muestan la that expude the property of the contract was the statement of the ASSESSED BEING A THE TOTAL OF THE PARTY OF T g detinands con actyceto of thempore to conscibl bet, as undertiating

ins compositives de accessación son pappolacidades al nobeline de las desde

lazamientos, esto significa; que el vector de desplazamiento que es el radio -vector del centro del círculo a la partícula, debe ser proporcional al vector de aceleración pero de dirección opuesta.

De donde se deduce que la aceleración de la partícula en el círculo es unvector que apunta radialmente hacia adentro desde la partícula hacia el centrodel círculo. Por esta razón, la acelera cón recibe el nombre de aceleración radial y se representa por A.

Conociendo las componentes de la aceleración y sabiendo que la resultante-R de dos vectores componentes Rx y Ry esta dada por:

$$R^2 = R^2x + R^2y$$
 se obtiene que:

$$\alpha^{2}R = \alpha^{2}x + \alpha^{2}y$$

 $\alpha^{2}R = r^{2}w^{4}\cos^{2}wt + r^{2}w^{4}Sen^{2}(\omega t)$
 $\alpha^{2}Q = r^{2}w^{4}(\cos^{2}wt + Sen^{2}wt)$.

Sabiendo que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ se encuentra que:

rw² Ecuación 1-9.

Aunque la partícula se desplaza en torno del círculo con velocidad constante, su velocidad cambia de dirección. La razón de cambio de este vector de velocidad es la aceleración radial de la partícula.

La partícula esta acelerada a lo largo de un radio hacia el centro del circulo.

Ejemplo 1-5.

Calcular la magnitud de la aceleración total de una partícula moviéndose en un círculo de radio 0.4 mts. En el instante que esta partícula tiene una velocidad angular de 2 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y una aceleración angular de 5 $\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{seg^2}} \times 0.4 \text{ mt} = 2 \frac{mt}{seg^2}.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{r} + \alpha^2 n} = (2 \frac{rad}{seg})^2 \times 0.4 \text{mt} = 1.6 \frac{Mt}{seg^2}.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha^2 n}{seg^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2^2} + 7.6^2} \frac{mt^2}{seg^4}$$

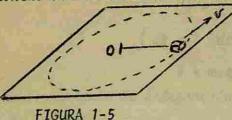
$$\alpha = 2.6 \frac{mt}{seg^2}.$$

FUERZAS CENTRÎPETA Y CENTRÎFUGA.

Todos alguna vez hemos experimentado estas fuerzas al atar una piedra o -- un peso a una cuerda y dar vueltas haciendo que la piedra describa una circunfe rencia. De esta manera al dar vueltas notamos que la mano esta sometida a una fuerza hacia afuera, e inversamente la mano tiene que ejercer una fuerza hacia-

adentro sobre la piedra.

Para tener una mejor idea suponer un punto 0, clavado en una superficie horizontal sin rozamiento como se muestra en la figura 1-5. En donde un pequeño -



cuerpo de masa m. esta unido a la punta por intermedio de una cuerda de radio R, y se pone en rotación alrededor de ella con una velo
cidad angular w, una velocidad tangencial y una aceleración normal $(R, = \frac{2}{3}, = w^2R)$

A partir de la segunda Ley de Newton es necesarió ejercer una fuerza sobre el cuerpo para producir esta aceleración normal y la dirección de esta fuerza tiene que ser la misma que la dirección de la aceleración, es decir, según el radio y hacia el centro de la circunferencia. Por esto recibe el nombre de Fuerza Centralo Centrípeta.

Sabiendo que F = ma y $A = V_7^2/R = w^2R_o$ entonces la fuerza centripeta será: $F = \frac{m}{p} \frac{V_7^2}{p} = mw^2R_o$ Ecuación 1-10

Esta fuerza esta dirigida hacia el centro y la produce la cuerda, lo cualesta en tensión y por lo tanto ejerce sobre la punta del centro una fuerza hacia afuera, igual y opuesta a la centrípeta, llamada fuerza Centrífuga.

Un diagrama de estas fuerzas se puede observar en la figura 1-6, donde lafuerza F es la centrípeta y la fuerza F¹ es la centrífuga.

Las fuerzas centripeta y cebtrífuga como se puedeobservar son una pareja de fuerzas de acción y reacción
siendo la primera una fuerza resultante hacia adentro ejercida sobre el cuerpo que gira, y la segunda la reac
ción a esta fuerza.

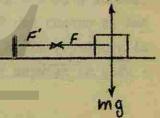


FIGURA 1-6

3.- Rotación con Aceleración Angular Constante.

En el movimiento de rotación con aceleración angular constante, se puede - determinar fácilmente las ecuaciones para este caso, integrando las expresiones- de la velocidad y las abscisas angulares, teniendo que:

$$\frac{dw}{dt} = constante.$$

$$\frac{dw}{dt} = constante.$$

$$\int dw = \int \infty dt$$

$$w = \infty t + c_1$$

Si we es la velocidad angular para t = 0, la constante de integración es - $c_1 = w_0 y$ $w = w_0 + x t$ Ecuación 1-11

VERSIDAL AUTONIONI

DIRECCIÓN GENERAL D

对其中的一个人,这种是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我们就是一个人,我

description, acto physical and of vertex in electronic description of the termination

AND THE REPORT OF THE PROPERTY OF THE PROPERTY OF THE PROPERTY AND ADDRESS AND THE PROPERTY AND THE PROPERTY

de ancesterregiste gover de dissección

Purish Sunstant Su

Puesto que, $w = d\theta/dt$:

 $d\theta = wdt$

sustituyendo la ecuación 1-11, se tiene que:

$$d\theta = |w_0 + \infty t| dt$$

$$\int d\theta = \int wdt + \int c t dt$$

$$\theta = wot + \frac{1}{2} \propto t^2 + c_2$$

La constante de integración c_2 es el valor de θ para t = 0, 0 sea θ_0 , si - θ_0 = 0, entonces,

 $\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \propto t^2$ Ecuación 1-12

Escribiendo la aceleración angular en la forma, $\alpha = w \frac{dw}{d\theta}$ se obtiene que:

$$\int \alpha d\theta = \int w dw$$

$$\alpha \theta = \frac{1}{2} w^2 + c_3.$$

Si el ángulo θ es cero para t = 0, y si la velocidad angular inicial es -- w_0 , se tiene que c_3 = $-\frac{1}{7}w_0^2$, por lo tanto:

$$\omega \mathcal{L} \theta = \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{2} w^2$$

$$w^2 = w^2 + 2 \omega \mathcal{L} \theta$$

θ Ecuación 1-13

Ejemplo 1-6.

La velocidad angular de un cuerpo es $6 \frac{rad}{seg}$ en el instante t = o, y su aceleración angular es constante e igual a $3 \frac{rad}{seg^2}$. Una recta OP del cuerpo es hor izontal en el instante t = o, a) iCuál es el ángulo que esta recta forma con la horizontal en el instante t = 3 seg? b) iCuál es la velocidad angular en este instante?

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \propto t^2$$

$$= 6 \frac{rad}{s \cdot eg} \times 3 s \cdot eg + \frac{1}{2} \times 3 \frac{rad}{s \cdot eg^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1$$

 θ = 31.5 radianes. θ = 5 revoluciones.

$$w = w_0 + \infty t$$

$$= 6 \frac{rad}{seg} + 3 \frac{rad}{seg^2} \times 3 seg.$$

$$w = 15 \frac{rad}{seg}.$$

$$w^2 = w^2 + 2 \propto \theta$$

= $\left(6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)^2 + 2 \left(3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} 2 \right) 31.5 \text{ rad}.$

DIRECCIÓN GENERAL I

energy all as a supremer at the wall many and again behalvaster at as an in

12 44 1

 $= 225 \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2}$

 $w = 15 \frac{rad}{seg}.$

Cuando la aceleración angular es constante, la velocidad angular media sepuede relacionr con las velocidades inicial y final, por medio de:

$$\overline{w} = \frac{w + w_0}{2}$$
 por lo tanto:
 $\theta = \overline{w}t$

4.-Cantidades rotacionales como vectores.

Como primer punto, se dirá que los ángulos de rotación no pueden ser vectores. Sin embargo, como un vector es una cantidad que tiene magnitud y dirección y obedece las leyes de la suma vectorial, si se prefiere, se puede dar direc--ción a las cantidades angulares y por lo tanto hacerlas vectores.

El vector que representa una velocidad o aceleración angular se dibuja a - lo largo del eje de rotación; su longitud, representa la magnitud de la velocidad o aceleración angular y esta hecha con cierta escala elegida. En la figura-1-1, imaginese que el eje sea un tornillo de rosca derecha, el sentido del vector es el correspondiente al avance del tornillo cuando se le hace girar en el sentido de la velocidad o aceleración angular.

En la figura 1-8, se muestran también las direcciones de la velocidad o aceleración angular, de dependiendo el sentido de la rotación.

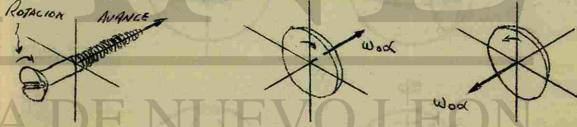


FIGURA 1-7

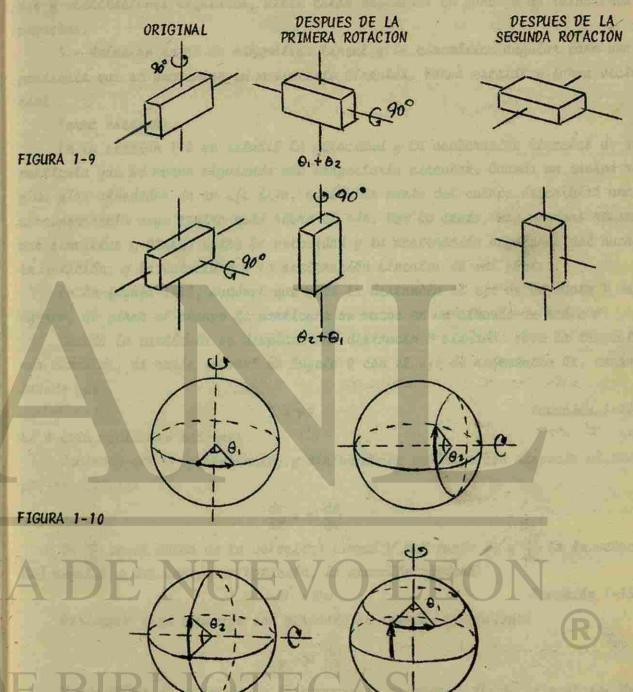
figura 1-8

La suma de dos vectores que representan dos rotaciones sucesivas θ_1 y θ_2 , deben dar el mismo resultado, independientemente del orden en que se tomen, es; θ_1 + θ_2 = θ_2 + θ_1 .

Esta ley no se sigue en caso de rotaciones finitas, excepto en casos especiales. Este hecho se demuestra fácilmente en la figura 1-9, en que se consideran dos rotaciones sucesivas a 90° del bloque, siendo evidente que el orden enque se llevan a cabo las rotaciones es importante, pues los resultados son diferentes en los dos casos. Por lo tanto, $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. Sin embargo, si se restringe a rotaciones pequeñas, el orden en que se tomen las rotaciones no tiene



importancia, como se muestra en la figura 1-10, en donde al efectuar dos rota-ciones sucesivas los resultados son los mismos para ambos casos.



The meritian date annichment was a base at them at

nanousitt i acceptación anabet

CONTRACTOR OF COMMERCE AND ADMINISTRATION OF THE PARTY OF

All Adjusted in the State of the State of the

to among the first programme and maying a secretary that and a country that was the programme to the

Stander & technological and all of the contract of the section of the standard of the section of the section

I so were than tome to be the transfer of the transfer of

En este caso de rotaciones pequeñas, así como para rotaciones finitas, esvpalida y útil la definición de vector ya que para el primer caso obedece las leyes de la suma vectorial, mientras que en el segundo caso todos los vectoresson perpendiculares a un plano dado, es decir, tienen magnitud y dirección.

Por lo tanto, se restrigiran las rotaciones vectoriales a ángulos infinite simales, a menos que las rotaciones se encuentren todas en el mismo plano.



DIRECCIÓN GENERAL D

AND SON DE LA COMPANION DEL COMPANION DE LA COMPANION DE

En conclución, se obtiene que para considerar como vectores las velocidades y aceleraciones angulares, deben estar definidas en función de rotaciones pequeñas.

5.- Relación entre la cinemática lineal y la cinemática angular para una - partícula que se encuentre en movimiento circular. Forma escalar y forma vectorial.

Forma escalar:

En la sección 1-2 se estudió la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria circular. Cuando un cuerpo rigido gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto del cuerpo describirá una circunferencia cuyo centro esta sobre el eje. Por lo tanto, hay algunas relaciones sencillas y útiles entre la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo en rotación, y la velocidad y la aceleración lineales de sus puntos.

En la figura 1-11, suponer que Y es la distancia al eje de un punto P delcuerpo, al girar el cuerpo la partícula se mueve en un círculo de radio Y.

Cuando la partícula se desplaza una distancia S situada sobre la trayectoria circular, el radio formará un ángulo θ con el eje de referencia Ox, encontrando que:

Ecuación 1-14

si θ esta medida en radianes.

Sabiendo que γ es constante, y derivando la ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = \gamma \frac{d\theta}{dt}$$

Si $\frac{ds}{dt}$ es el valor de la velocidad lineal V del punto P, y $\frac{d\theta}{dt}$ es **la** velocidad angular w del cuerpo en rotación, la ecuación qued**ará**:

Ecuación 1-15

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} = \gamma \frac{dw}{dt}$$

Donde $d\sqrt[4]{dt}$ es el valor de la componente tangencial Q_7 de la aceleración - del punto P, y $\frac{dw}{dt}$ es la aceleración angular $\mathcal L$ del cuerpo que gira, de modo que-

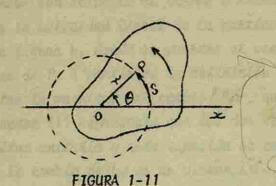
$$a_7 = \gamma \propto$$

Ecuación 1-16

La componente normal de la aceleración en el punto P, se expresa como: --- $QR = \frac{V^2}{P} = w^2 P$.

En la figura 1-12, se representan las componentes de la aceleración de un-

punto P cualquiera del cuerpo en rotación.



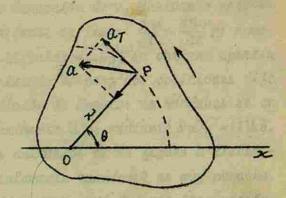


FIGURA 1-12

Conclusión:

La descripción angular ofrece una ventaja clara sobre la descripción lineal cuando hay que considerar varios puntos del mismo cuerpo en rotación.

Va que diferentes puntos del mismo cuerpo en rotación no tienen desplaza-miento, velocidad, o aceleración lineal, y en cambio, todos los puntos de un -cuerpo rigido que gira en torno de un eje fijo tienen el mismo desplazamiento,velocidad, o aceleración angulares en un instante cualquiera.

Forma vectorial:

Para encontrar la relación que hay entre las variables lineales y angula-res en su forma vectorial se hace uso de la figura 1-13, en donde se muestra -una partícula P que gira en forma de un eje fijo que pasa por 0, en los tiempos t y t + Δ t. En la figura 1-13a, la partícula gira un ángulo Δ θ en el tiempo Δ t, mostrándose los vectores unitarios en coordenadas polares para cada punto.

En los cambios que presentan los vectores unitarios up y ua en el tiempo -At, se nota que bup tiene la misma dirección de up cuando At tiende a cero y -que lug tiene la dirección de up cuando la tiende a cero, como se muestra enlas figuras 1-13b y c.

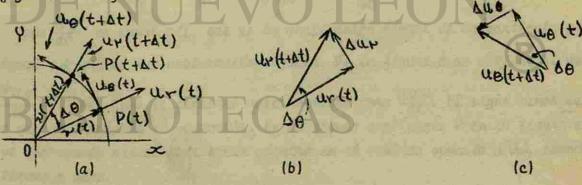


FIGURA 1-13 Sabiendo que el radio es constante, se obtiene la expresión: r= U+7

ka ernekiejša, te jektene ega prije onasidoma oppo pretoka čas velocida-

gide gigs all released in the city pair

sincultioneral auto exects as some

s struction, y in vibración y la capitalista

COUNTY OF THE PARTY OF THE PART

donde Up es un vector unitario que esta en la dirección de γ . Derivando esta -ecuación con respecto al tiempo y siendo p constante se tiene: $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du\,\gamma}{dt}\,$; como- $\frac{dr}{dt}$ es la velocidad lineal de la partícula \overline{V} , el valor de $\frac{du\,\gamma}{dt}$ se obtiene apartir
de la figura b, donde se muestra el vector unitario \overline{V} para dos posiciones diferentes de \overline{P} . A partir de la definición de medición de ángulos en radianes se en
cuentra la magnitud del cambio \overline{V} , que experimenta \overline{V} , mediante \overline{V} \overline{V} = (1) \overline{V} 0.
El factor (1) representa que los dos vectores unitarios de la figura \overline{V} 0 tienen longitud unitaria y esta ecuación se cumple solamente cuando \overline{V} 0 es muy pequeña.

El cambio de U_{n} es un vector, ΔU_{n} , cuya magnitud está dad por la ecuación-anterior, su dirección se dá por el vector unitario U_{0} siempre y cuando $\Delta \theta$ sea muy pequeña. Esto es, si ΔU_{n} en la figura b se traslada al punto P de la figura a se vé que apunta en la dirección de U_{0} , cuando $\Delta \theta \rightarrow 0$.

E montrando que:

ΔUγ≅ UγΔθ

Dividiendo entre δ t y haciendo que δ t tienda a cero, se obtiene:

 $\frac{d \, Ur}{dt} = U_{\theta} \, \frac{d\theta}{dt} = U_{\theta}w$ sustituyendo este valor en la ecuación $\frac{dr}{dt} = \frac{d \, Ur}{dt}$, se encuentra que:

V = Ugwr

Ecuación 1-17

Encontrando que la relación escalar correspondiente a esta ecuación es: $V = w \gamma$ Ecuación 1-17a

Para encontrar la relación entre las aceleraciones angular y lineal, se de riva la ecuación 1-17 con respecto al tiempo, recordando que r es constante -- aún cuando varíen q y w; se encuentra:

 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{U}_{\theta} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{v} + \mathbf{w} \frac{d\mathbf{U}_{\theta}}{dt} \mathbf{v}$ Ecuación 1-18

Como $\frac{dV}{dt}$ es igual a Q, que es la aceleración lineal de la partícula y $\frac{dw}{dt}$ es igual a Z que es una aceleración angular. De la figura c se obtiene el valor de $\frac{dQ}{dt}$ = - $\frac{Q}{Q}$ Como se demostró anteriormente para $\frac{dQ}{dt}$. El signo menos se de be a que al trasladar el vector $\frac{Q}{Q}$ en la figura c al punto P en la figura a, se vé que apunta radialmente hacia adentro en el sentido opuesto a Q, cuando - Q tiende a cero.

 Pero sabiendo que α tiene un cial α , la relación escalar con α .

Las ecuaciones 1-17 y 1-19 lineales en forma vectorial y la Para obtener relaciones en forma vectorial y la para obtener y la

TALERE FLAMMAM TO THE RESIDENCE OF THE PARTY OF THE PARTY

A CONTRACT OF THE PARTY OF THE

The state of the s

The sum as a sum of the sum of the state of

VERSIDAD AUTONOM

DIRECCION GENERA

to be quie applied indicembe and a distilla and sewithin a color a life and the and a color

Sustinguido está unitados en Un temberón 1-11, se entreban ere:

Pero sabiendo que Q tiene una componente radial Q R y una componente tangen cial Q, la relación escalar correspondiente a esta ecuación será:

at = ar y a = w2+

Las ecuaciones 1-17 y 1-19 son relaciones entre las variables cinmáticas - lineales en forma vectorial y las angulares en forma escalr.

Para obtener relaciones en las cuales cada grupo de variables queden expresadas en forma vectorial se hará a continuación y quedará limitado para los casos en que el eje de rotación este fijo.

Se demostrará que las relaciones que buscamos son:

en la cual, $Q_7 = \mathcal{K} \times \mathbf{r} \qquad y \qquad Q_R = W \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$ $V = W \times \mathbf{r} \qquad y \qquad Q_R = W \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$ $V = W \times \mathbf{r} \qquad y \qquad Q_R = W \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$ $V = W \times \mathbf{r} \qquad y \qquad Q_R = W \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$ $V = W \times \mathbf{r} \qquad y \qquad Q_R = W \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$

El producto vectorial de dos vectores a y b se escribe así, a x b y es o-tro vector c, siendo c= a x b. La magnitud de c se define como:
c = abSen f, siendo ó el ángulo entre a y b.

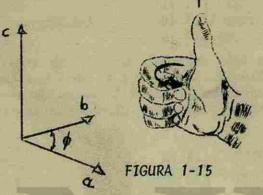
Aplicando está definición a las ecuaciones 1-20 y 1-20a, y observando quew y r, w y v, y x y r en la figura 1-14 son mutuamente perpendiculares, se encue ntra que el ángulo ó para cada uno de estos tres pares de vectores es de 90°. -Por lo tanto, las magnitudes serán:

 $V = wy Sen 90^\circ = wy$ $\alpha_R = wy Sen 90^\circ = w(wy) = w^2 y$ $\alpha_T = 4y Sen 90^\circ = 4y$

Para saber si las direcciones de las ecuaciones 1-20 y 1-20a están correctas, se hará uso de la regla de la mano derecha que se muestra en la figura --- 1-15.

El producto vectorial c= axb, muestra que la dirección de c se encuentra - moviendo a hacia b haciendole describir el ángulo entre ellos con los dedos de-la mano derecha; encontrando que el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de c.

Comprobando de esta manera que las direcciones de los vectores $\mathbf{V}, \mathbf{A}_{\mathbf{I}}$ y $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}$ en la figura 1-14, están correctas.



Resumen.

En la tabla 1-1 se muestran las ecuaciones que rigen el movimiento circular, así como la relación que tienen con las ecuaciones del movimiento lineal.

MOVIMIENTO LINEAL (dirección fija)	MOVIMIENTO DE ROTACION (eje fijo)
x = y t	$\theta = \frac{5}{4}$
$V = \frac{dx}{dt}$	$w = \frac{d\theta}{dt}$
$\alpha = \frac{d}{dt}$	$\mathcal{L} = dw$ \overline{dt}

Movimiento con aceleración lineal o angular constantes

$$V = V_0 + 4t$$

$$x = \frac{V_0 + V_0}{2}t$$

$$x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$V^2 = V_0^2 + 2a.x$$

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$\theta = \frac{w_0 + w}{2} t$$

$$\theta = w_0 t + 1 \alpha t^2$$

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha \theta$$

The state of the section of the sect

Para Sapanno-us & tions was any particle unitable to successful the successful to th

W-1

Le panellada versioniado de mela, mesadore que do dirección de e se encapacida BULL GRACE LEVE

PROBLEMAS

1.- a) ¿Qué ángulo en radianes corresponde a un arco de 90 cm. de longitud situado sobre una circunferencia cuyo radio es 60 cm? b) Quéángulo en radianes-corresponde a un arco de longitud 78.54 cm, situado sobre una circunferencia de diámetro 100 cm?. ¿Cuál es el valor de este ángulo en grado? c) El ángulo comprendido entre dos radios de una circunferencia es 0.60 rad. ¿Cuál es la longitud del arco correspondiente en una circunferencia de radio 200 cm?.

R:

a) 1.5 rad

b) 1.57 rad; 90°

c) 120 cm.

2.- Un cilindro de 15 cm de diámetro gira en un torno a 150rpm. a) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la superficie del cilindro? b) La velocidad tangencial adecuada para trabajar el hierro fundido es 60 cm/seg, aproximadamente. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe girar en un torno, una pieza de 5cm. de diámetro?

a) 5.89 mt/seg; b) 230 hpm.

3.- Una rueda de 90 cm de diámetro parte del reposo y va aumentado uniformemente su velocidad hásta alcanzar una velocidad angular de 100 rad/seg. en 20 seg. Calcular: a) la aceleración angular; b) el ángulo girado en ese tiempo.

a) 5 rad/seg²; b) 1000 rad.

4.- La velocidad angular del motor de un automóvil se aumenta de 1200 a -- 3000 rpm en 12 seg. a) ¿Cuál es su aceleración angular, suponiéndola uniforme?-b) ¿Cuántas revoluciones efectúa el motor durante este tiempo?

a) 15.7 rad/seg²; b) 420 rev.

5.- Un plano giratorio de fonógrafo que se está moviendo a razón de 78 --rev/min reduce su velocidad y se detiene a los 30 seg después de desconectar el
motor. a) Encontrar su aceleración angular (uniforme). b) ¿Cuántas revoluciones
hizo en ese tiempo?.

a) -0.272 rad/seg²; b) 20 rev.

6. - Una rueda tiene una aceleració nangular constante de 3 rad/seg². En un intervalo de 4 seg describe un ángulo de 120 radianes. Suponiendo que la rueda-comenzó a partir del reposo, ¿Cuánto tiempo había estado en movimiento al comenzar ese intervalo de 4 seg?.

a) 8 seg.

7.- Un volante pesado que gira alrededor de su eje va disminuyendo su velo cidad debido al rozamiento sobre sus chumaseras. Al terminar el primer minuto, su velocidad angular es 0.90 de la velocidad angulas wo que tenía al principio. Suponiendo que las fuerzas de rozamiento son constantes, encontrar su velocidad angular al terminar el segundo minuto.

a) 0.80 wo

i is vested tans LEAD TO THE WAY OF THE WAY

VERSIDAD AUTÓNON

green. The Allies of the distribution of the control of the contro

DIRECCION GENERAL

niku na pinangkapanih na sig sa din primi adar ming pan minang minang minang man na mi Lordang magang in atminangka id panggan bahasa manggan na din 1983, an anggangan inik makin bahin ndanggangkap na magan dina kalanggan bahasa na man na din 1983, an anggangan inik makin na loranggangan na pinanggan panggangan mak maka magangan na din anggang ang dinanggan na manggan na man man na man man

8.- El ángulo que gira el volante de un generador durante un intervalo detiempo t está dado por la ecuación θ = at + bt 3 - ct 4 ,

R: a) 6bt - 12 ct².

9.- La órbita de la tierra en torno del sol, aunque elíptica, es casi un -círculo. a) Calcular la velocidad angular de la tierra (considerada como partícula) en torno del sol y su velocidad lineal media en su órbita. b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la tierra con respecto al sol?.

a) 2x10-7 tad/seg;

3x10⁴ mt/seg; b) 6 mt/seg².

10.- ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un punto de la periferia de un - disco de 30 cm que gira a 33 1/3 rev/min.?

R: a)1.84 mts/seg².

11.- ¿ DE qué magntiud deberá ser una fuerza para mantener un automóvil de-1,450 kg en un arco de 6 mt de radio cuando el automóvil de la vuelta en una es quina a 50 KM/HR? ¿Se dispondrá de una fuerza de esta magnitud en la mayor parte de casos?.

a) 4750 kg; no

12.- ¿Qué aceleración angular promedio se requiere para obtener una velocidad de 1 rev cada 20 seg para que una rueda de la fortuna o noria arranque del reposo y alcance esta velocidad en 1/2 min? ¿Cuál tendría que ser el radio de la rueda para que la fuerza centrípeta que actúa sobre una persona en la rueda-sea un décimo del peso de la persona cuando la rueda haya alcanzado la velocidad indicada?.

a) 1.65 x 10 - 3 rev/seg²; 10 mt.

13.- Un automóvil que va a 96.6 km/hr tiene ruedas de 0.762 mt de diámetro.
a) ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas alrededor del eje? b) Si las rue das se detienen uniformemente en 30 vueltas, ¿Cuál es la aceleración angular? c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este período de frenado?.

R: a)70 rad/seg; b)-13 rad/seg c) 73.2 mt.

14.- a) Si la hélice de un avión de radio 1.52 mt gira a 2000 rpm y el a---vión vuela a 161 km/hr con respecto al suelo, ¿Cuál es la velocidad de un punto de la punta de la hélice? b) ¿Qué clase de trayectoria describe ese punto?.

R:
a) 319.4 mt/seg; espíral.

15.- ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que en una carretera dauna vuelta de 110 mt de radio con una velocidad de 48.3 km/hr?

R: a) 0.12 rad/seg.



CAPITULO II DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION

1.- Introducción. Momento de rotación obrando sobre una partícula.

En este capítulo se estudiarán las causas que probocan la rotación de partículas y cuerpos rigidos, aplicando las leyes de la mecánica para este movimie

DN igual forma, que en el capítulo anterior no se tomaron en cuenta situaciones fundamentalmente nuevas, ya que los parámetros de rotación θ , w yol se relacionaban con los parámetros de translación x, y y a para las partículas enrotación; en este capítulo también se omitirá todo fundamento nuevo. Sin embargo; es muy útil refundir los conceptos del movimiento de translación en una nue va forma, escogida especialmente por ser conveniente para describir sistemas en rotación.

Para estudiar la dinámica del movimiento de rotación se partirá desde elpunto de vista fundamental, de una sola partícula vista desde un marco de referencia inercial y posteriormente se analizarán sistemas de muchas partículas, incluyendo el caso especial de un cuerpo rigido que gira en torno de un eje fi-

Momento de rotación obrando sobre una partícula.

Supóngase una partícula de masa mosobre la cuál actúa una fuerza F como se indica en la figura 2-1. En virtud de que se trata de rotación, es convenienteutilizar coordenadas polares para situar la partícula.

Si se restringen el movimiento y las fuerzas a un plano, la posición de la particula se puede describir en forma completa por el vector de radio r y el án gulo ø como se muestra en la figura 2-2 resultando conveniente definir un vec-tor unitario /r en la direccion de p, y un vector unitario / perpendicular a v y en la dirección de ø.



FIGURA 2-1

Las componentes de la velocidad de la partícula se pueden tomar como Up/p y Volo de manera:

V = V+ / 7+ V \$ 16

fruides or europeas relacides, audiented des dinuis de la morrales, paras

DIMENTOR OF MEMBERS OF ROTACION

is - lauterdagentin, themesto as notinglis observe ear northcale.
In matel engittals at tacadagents the causes que protectes la notación de car

The file of parties of the control o

ALDREND AMMAN TO THE STATE OF T

g es mais fibre automobil and companyons to the mobile of transcription and may the same and the

ends at come any cut to our cuerty of the out guine or the

Homenico de entroción des uno sobre de sente entrocer de contracto de

card the first to the second of the second o

ala ar ment tercentur en kvint comadute par les velsam de entre por es da.

' eann de encentre en Es higner 1-2 neugliterele complaniente Achtech tie vec
' eann de encentre en Es higner 1-2 neugliterele complaniente Achtech tie vec-

IVERSIDAD AUTÓNC

DIRECCIÓN GENERA

las concentation de la vellacided de la partitoura su produt como una UPP

V = The Posts

V = (dx) | + + w 16

Ecuación 2-1

En este punto se restringirá este descripción a el caso especial en que -- \mathcal{V}_{P} = o, siendo + constante. Por lo tanto,

= 1001 p

Ecuación 2-2

Encontrando que la situación se reduce ahora al movimiento de una particula en un círculo, movimiento que ya se estudió en el capítulo anterior.

Como ya antes se vió cuando una partícula se mueve sobre una trayectoria - circular con velocidad constante experimenta una aceleración radial -ap. El -- signo (-) representa que la aceleración radial es hacia adentro. Además la partícula puede aumentar su velocidad como resultado de una aceleración tangencial que es ra. Para encontrar el vector aceleración de una partícula que se mueve - en un círculo, basta sumar vectorialmente estas dos componentes de aceleración:

a = - arty + roclo Ecuación 2-3

Estas aceleración es resultado de una fuerza que actúa sobre la partícula, y según la ley de Newton se debe tener,

F=ma

descomponiendo la fuerza en sus componentes radial y angular como se muestra en la figura 2-1 y utilizando la ecuación 2-3 se obtiene:

F+ + Fp/0 = m1-ap/+ + 20 61.

Con objeto de que esta ecuación sea cierta, las dos ecuaciones componentes deben ser válidas y por lo tanto,

Fr = - Way

FØ = m7'00

Ecuación 2-4

La ecuación 2-4, indica como esta relacionada la aceleración angular de -- una partícula con la fuerza aplicada, por razones que se acelerarán; multipli-- quese la ecuación 2-4 por P y hágase F θ como F sen θ , donde θ es el ángulo entre-F y P como se muestra en la figura 2-1, encontrando que:

Y Fseno = m 2 oc

Ecuación 2-5

de donde.

T=mroc

Ecuación 2-6

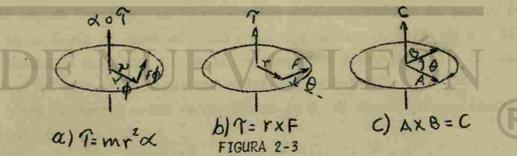
Siendo T el momento de rotación que obra sobre la partícula con respecto a el origen 0, donde las unidades del momento de rotación son: NT-MT, dina-cm o 16-fT.

Haciendo una comparación entre la ecuación 2-6 y F = Ma se observa que son similares ya que la aceleración lineal a ha sido reemplazada por la aceleración angular K. En el movimiento de rotación el momento de rotación sustituye a las fuerzas, en virtud de que F es reemplazada por F. Además, el efecto de inercia de la masa en la rotación no es solo M, sino M significando esto, que entremas alejada se encuentre la partícula de su eje de rotación será mas difícil—darle una aceleración angular específica.

Conviene representar la ecuación 2-6 como una cantidad angular en forma --vectorial, en virtud de que no se ha decignado dirección al momento de torsión- $\mathbf{7}$. Las relaciones entre los vectores de la ecuación 2-6 y el eje de rotación - se muestran en la figura 2-3a, donde la dirección de \mathbf{x} esta dada por la regla - de la mano derecha. (La aceleración de rotación es provocada por \mathbf{F} y por lo -- tanto se debe tomar el eje con los dedos circundándolo en la dirección de \mathbf{F}).

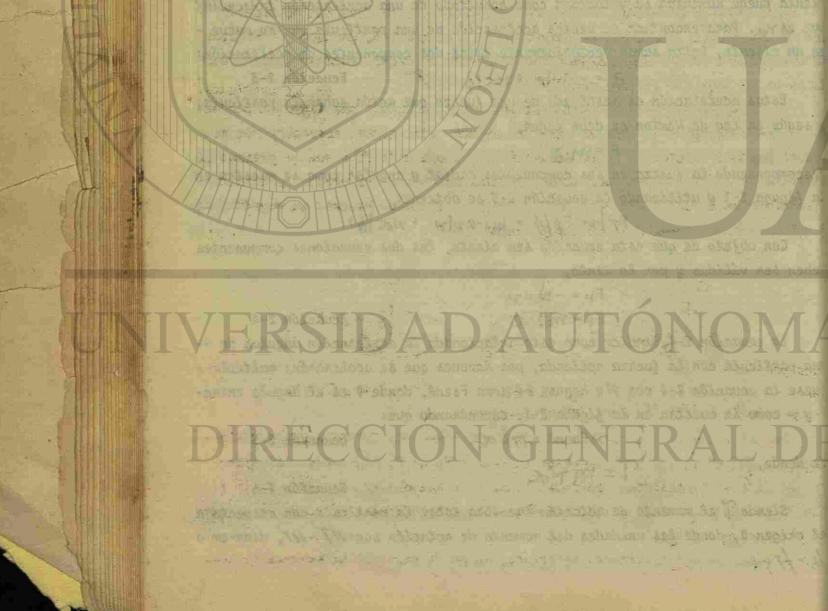
Para asignar un vector al momento de rotación, este debe ser de acuerdo -- con la definición previa que se obtuvo en la ecuación 2-5, es decir, $\Upsilon \Rightarrow \mathsf{Fsen}\theta$. Esto significa que se debe asignar una dirección a $\mathsf{Fsen}\theta$. Mostrando estos vectores en la figura 2-3b, así como la dirección de Υ .

La dirección de Υ es un vector perpendicular al plano que forma el producto de los vectores Υ y F con el seno del ángulo entre ellos, comprobandose esto con el producto vectorial de la figura 2-3c y a que este dice que si giramos el vector A un ángulo pequeño que señale la dirección de B; el vector resultante - C señalará en la dirección dada por la regla de la mano derecha. La magnitud de A x B es ABseno, donde o es el ángulo entre A y B.



En la figura 2-4 se muestra el plano que forma r y F. Así como la direc--ción que deverá tener T, al invertir la dirección de F, r o ambas. Las direc--ciones de T se representan mediante \odot (si es perpendicular al plano de la figura y saliendo de ella) y mediante \otimes (si es perpendicular al plano de la figura y entrando a ella).

Resumiendo los resultados obtenidos, se puede expresar el momento de rota-



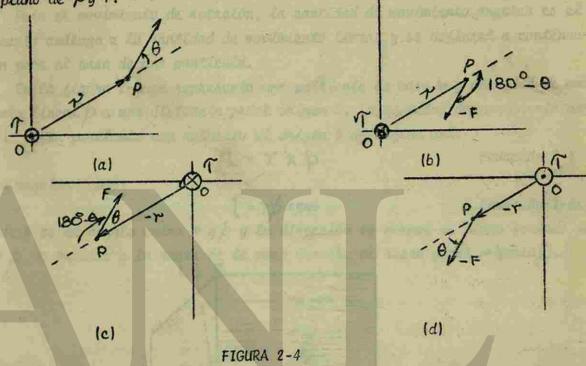
ción debido a una fuerza F que actúa sobre una partícula que se encuentra a una distancia radial 7 del eje, por medio de:

Ecuación 2-7

donde la magnitud esta dada por:

T = 7 Fseno.

siendo θ el ángulo entre 7 y F e indicando la dirección de 7 como perpendicular al plano de py F.



Ejemplo 2-1.

Una partícula de masa 40 grs. está unida a un eje por una barra muy ligerade 70 cm. de longitud, en forma similar a la mostrada en la figura 2-1. La partícula es libre de girar alrededor del eje en la dirección de ø. Sí se aplicauna fuerza de 0.20 nt. a la masa en dirección perpendicular a la barra. ¿Cuánto tardará la masa en alcanzar una velocidad de rotación de 4 $\frac{\text{rev.}}{\text{seg.}}$?

Como la fuerza actúa en la dirección ϕ , es decir, perpendicular a la barra

se usará la ecuación 2-4.

B | 0.20 nt = (0.040 kg) (0.70 mt)
$$\propto$$
 = 7.14 $\frac{rad}{16002}$

Para encontrar el tiempo que se requiere en alcanzar una velocidad de ----871 rad se utiliza la ecuación de movimiento.

 $t = \frac{8\pi - 0}{7.14} = 3.52 \text{ seg.}$

2.- Cantidades de movimiento angular de una partícula.

Como se recordará la cantidad de movimiento se presenta cuando una partícu lade masa m se mueve con una velocidad V. Para una sola partícula, la cantidadde movimiento lineal es $p = \mu V$, y para un sistema de partículas es P = MVcmdonde M es la masa total del sistema y Vingla velocidad del centro de masa.

Para el movimiento de rotación, la cantidad de movimiento angular es el -concepto análogo a la cantidad de movimiento lineal y se definirá a continua--ción para el caso de una partícula.

En la figura 2-5 se representa una partícula de masa he y cantidad de movimiento lineal p a una distancia p del origen 0. La cantidad de movimiento angular L de la partícula con respecto al origen 0 se define así:

L= Txb

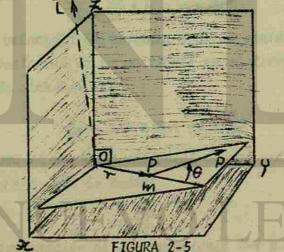
Ecuación 2-8

y su magnitud como:

1 = 76 seno

Ecuación 2-8a

donde o es el ángulo entre v y p y la dirección es normal al plano formado porry p de acuerdo a la regla de la mano derecha al hacer girar » hacia p.



A continuación se encontrará una relación importante entre la cantidad demovimiento angular y el movimiento de rotación. Newton en su segunda ley del mo vimiento hizó intervenir la cantidad de movimiento quedando definida como; "Larápides con la cuál cambia la cantidad de movimiento de un cuerpo, es proporcio nal a la fuerza resultante que obra sobre el cuerpo y se encuentra en la dirección y sentido de esa fuerza". En forma simbólica se expresa así:

como este sistema es una partícula de masa y esta expreción de la segunda leyequivale a la forma F = ma de donde:

town in justin acidin on in discosión is, as deals, prancipilisation i fa

his diside a day justed F que actie deste una partigula que se enegentar a mia

detention and all y dut of a part medica las

ing that the lutinger of his

(a)

Para encorbair of Ecogo equipment, see beguiere en alcanage una or l'ocala e de

ten = Wil the state of the teneral of the population of

A-R ASURTA

time previouse do made aligno, spike uppide a unicide pon ung voter

· 如此一位

 $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m a.$

encontrando que las relaciones F = Ma y $F = \frac{dp}{dt}$ para partículas solas son equiva lentes en mecánica.

Si se toma el producto vectorial de p para ambos miembros de la expresión- $F = \frac{dp}{dt}$ se obtiene:

アXF=アX葉

como 7 x F es el momento de rotación se puede escribir,

T=rxdp

Ecuación 2-9

Si ahora se deriva la ecuación 2-8 con respecto al tiempo se obtiene:

 $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma \times \beta)$

como la derivada de un producto vectorial se toma de la misma forma que la deri vada de un producto ordinario con la excepción de que no se debe cambiar el orden de los términos la expresión quedará:

dt = dr xp +rxdb

Como $\frac{dP}{dt}$ es la velocidad instantánea V de la particula, debido a que dP esel desplazamiento vectorial de la partícula en el tiempo dt y p es igual a mV.-La ecuación se puede escribir así:

dt = IV x mv + x dp

Ahora bien, como el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero,la expresión VXMV = 0, por lo tanto:

Ecuación 2-10

Haciendo una comparación de las ecuaciones 2-9 y 2-10 se encuentra que:

Ecuación 2-11

A partir de lo cuál se puede establecer que "la rápidez con que cambia lacantidad de movimiento angular de una partícula con respecto al tiempo es igual al momento de rotación que obra sobre ella."

Como la ecuación 2-11 es una ecuación vectorial, entonces será equivalente a tres ecuaciones escalares que son:

 $\Upsilon x = \left(\frac{dl}{dt}\right)_x$ $\Upsilon y = \left(\frac{dl}{dt}\right)_y$ $\Upsilon z = \left(\frac{dl}{dt}\right)_z$

Por lo tanto, la componente x del momento de rotación aplicado, esta dado-

. Con 18.0 = 1.70 ang.

de maio a pro servicio con una vectocidad y trata una sociata est procesa de maio de m

Wes la muse seites del sestem y brush vertebens seites

scapito unitingo a la cancidad de novêmbritos expertir o a la lingua a que

5. - Constituency de west conferito anough or de una paracteura.

Come are included the confided the restaurations of exception

be la laura 2-8 se represente und in Illian de la

anto lisabile a sum discunsia so del rolli all de la restallation ens mésociete les pression

à communicate de encontratal una pelación importante entre la contidad de-

a la fuencia neralizante que obia recite el cuelque a se encuentra en la diner-Line & Loutling to one frequent to former Landstone see extends on the

the case accepted on the profittening as a particular of the profit of t

LANGE TO SAME FRANCE AS A SAME

ALERE FLAMMAM
VERITATIS

ALERE STAMMAM
VERITAT

IVERSIDAD AUTÓNOM

DIRECCIÓN GENERAL

enacelones esculares que seur

est to stretch to compensate a day remember to terracides appropriate to the

por la componente x del cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular. Para las direcciones y y z se obtienen resultados similares.

Ejemplo 2-2.

Una partícula de masa 80 grs. se suelta a partir del reposo desde el punto a, como se muestra en la figura 2-6, cayendo paralelamente al eje de las y. Sib = 35 cm y θ = 30°, encontrar: a) El momento de rotación que obra sobre la masa, con respecto al origen 0 y b) La cantidad de movimiento angular de la masacon respecto a ese mismo origen.

$$\rho$$

FIGURA 2-6.

Sabiendo que: $\mathcal{T} = \gamma F sen\theta$ y que para este ejemplo, $\gamma sen\theta = b$ y

F = Mg.
entonces:

 $\mathcal{V} = \frac{b}{sen\theta} = \frac{35}{sen30^{\circ}} = 70 \text{ cm.}$ $\mathbf{F} = \mathbf{M}g = 0.08 \text{kg x 9.8} \frac{\mathbf{M}t}{seg2} = 0.784$ $\mathcal{T} = 0.70 \,\mathbf{M}Tx \, 0.784 \,\mathbf{N}T \times 0.5 = 0.275 \,\mathbf{N}T + \mathbf{N}T$

La regla de la mano derecha pone de manifiesto que T es perpendicular al plano de la figura y penetra en ella.

b) Si $l = r\beta$ sent. y sabiendo que para este ejemplo, p sent = b $y\beta = MV$ se obtiene: $c = r\cos\theta = 70 \times 0.866 = 60.7$ cm.

Haciendo uso de la ecuación de caída libre, se tiene: $V^2 = V_o^2 + 2gy = o + 2 \times 9.8 \frac{MT}{seq^2} \times 0.607 MT.$

$$V = 3.45 \frac{M7}{seg}$$
.
 $p = MV = 0.08 \text{ kg x } 3.45 \frac{M7}{seg} = 0.276 \text{ Nt} - \text{seg}$.
 $l = 0.35 \text{ MT x } 0.276 \text{ NT-seg} = 0.969 \text{ Nt-MT-seg}$.

3.- Sistemas de partículas.

Para calcular la cnatidad de movimiento angular total L de un sistema conn número de partículas con respecto a un punto dado, basta sumar vectorialmente la cantidad de movimiento angular de cada partícula con respecto a ese mismo -punto. Encontrando que para el sistema con partículas se tiene:

$$L = L_1 + L_2 + ... + Ln = \sum_{i=1}^{i=n} L_i$$

Al transcurrir el tiempo puede presentarse un cambio en la cantidad de movimiento angular total L del sistema con respecto a el punto de referencia fijo El cambio dL/dt puede ser debido a dos causas: a) Por momentos de rotación ---

a components a del compais on acaptain of the special de the property of and mountain, days the street of the obsession apparatus a included they payake the works, for you, but register to begate to Note of metaland and the franks that, continued the THE REPORT OF THE PROPERTY OF

VERSIDAD AUTÓNOM

DIRECCIÓN GENERAL

At transcurvely of thempot practs papertrains as and in the confident do not being decided as an expensive a straight the relationary of the confidence of t

ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas internas entre laspartículas y b) Por momentos de rotación ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas externas.

La primera causa se puede despreciar basandose en la tercera ley de Newton ya que las fuerzas entre dos partículas no solo son iguales y opuestas sino que también están sobre la línea que une las dos partículas y por lo tanto el momen to de rotación interno total es cero debido a que el momento de rotación resultante para cada par de fuerzas de acción y reacción es cero.

De la segunda causa se puede escribir:

 $T = xT_0 = dL/dt$ Ecuación 2-13

donde Text. es la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre elsistema. Esto se puede definir también como: "la rápidez con respecto al tiempo con que cambia la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas con respecto al origen de referencia, es igual a la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el sistema".

La ecuación 2-13 es válida, ya sea cuando las partículas que constituyen - un sistema se encuentren en movimiento unas con respecto a otras, o bien que -- tengan relaciones especiales fijas, como el caso de un cuerpo rígido.

La ecuación 2-13 es aplicable solamente cuando \mathcal{T} y \mathcal{L} se miden con respecto a un origen con un marco de referencia inercial. Así como también si se escojecomo centro de referencia el centro de masa del sistema, aún cuando este puntono este fijo en este marco de referencia.

No siendo válida si se trata de medir los vectores T y L con respecto a un punto arbitrario del sistema en movimiento, por ejemplo con respecto a una cier ta partícula del sistema ya que tal punto se moverá de una manera complicada -- cuando el sistema de partículas se translade, de vueltas o cambie su configuración.

4.- Energía cinética de rotación y momento de inercia.

Se ha demostrado que el valor de la velocidad de una partícula de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo, es: V = v, siendo v la distancia de la partícula al eje, v w la velocidad angular del cuerpo.

La energía cinética de la partícula de masa m será, $\frac{1}{2} m_T^2 = \frac{1}{2} m_T^2 w^2$. La energía cinética total del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas-las partículas del mismo:

 $K = \frac{1}{2} |w_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots |w^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) w^2.$

Sabiendo que w en un cuerpo rígido es la misma para todas las partículas.-

El término $\sum_{i} m_{i} r_{i}^{2}$ es la suma de los productos de las masas de las partículas called apiete ties postermules real addings ties the se decision defronce endre talpor los cuadrados de sus distancias respectivas al eje de rotación. El resulta-Agustas u ti Pea momentos de sociación ejenesdos sobre tra mentinunas, del sus do se denomina momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación, y serepresenta por I: pur Las franceas ceixe des pasitiques an sein sa viente Hastella

I = Imiri Ecuación 2-14

Notándose que el momento de inercia de un cuerpo depende del eje con respe cto al cuál este girando, así como de la forma del cuerpo y de la manera como esta distribuida su masa.

Las unidades del momento de inercia pueden ser: kg -M7², gr - cm² o slug-Ft2.

La energía cinética del cuerpo en rotación puede escribirse en función del momento de inercia, esto es:

cuya forma es ángaloga a la energía cinética de translación de un cuerpo, que es, $K = \frac{1}{2} M V^2$. Esto es, para la rotación alrededor de un eje fijo, el momentode inercia I es ánalogo a la masa, o sea, a la inercia de translación M, y la velocidad angular w es ánaloga a la velocidad líneal 75.

Ejemplo 2-3.

En el sistema de la figura 2-7, se muestran tres pequeños cuerpos, que pue den considerarse como masas puntuales, están unidos por barras ligeras rígidas. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema: a) respecto a un eje perpendicularal plano de la figura y que pasa por A; b) respecto a un eje que coincide conla barra B C? c) Si cl cuerpo gira con una velocidad angular $w = 6 \frac{\text{rad.}}{\text{sea.}}$ alrede dor de un eje que pasu por A y es perpendicular al plano de la figura, i Cuál es la energía cinética de rotación?.

inercia es:

a) La partícula que se encuentra en A está sobre el eje. Su distancia al mismo es nula y no contribuje a formar el mo mento de inercia. Por tanto,

 $I = \sum_{i=1}^{2} m_{i} r_{i}^{2} = 20 \text{ grs } (4 \text{ cm})^{2} + 30 \text{ grs } (3 \text{ cm})^{2}$ $I = 590 \text{ grs} - \text{cm}^2$.

b) Ahora las partículas B y C se encuentran ambas sobre el eje, y el momento de

 $I = \sum_{i=1}^{2} m_{i} r_{i}^{2} = 10 \text{ grs } (3 \text{ cm})^{2} = 90 \text{ grs } - \text{ cm}^{2}$.

the equilibries forbid deli perpays on its sugar at the little of the little of the comments of

VERITATIS TO THE SECOND OF THE

The La agginda could be puick of part

Solumbs are in as on agreet which is the party part decig far many

denimolitating and on indicate and the executating not of amount to the factor of the content of mento de tececia, cato car d sobre et eje. Se distencia në misme A mild of no contribute a found of my continued of Car early attended and a space of the [- Low gring - House local a groups - control as

 $K = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{1}{2} \times 590 grs - cm^2 \times (6 \frac{rad}{seg})^2$

K = 10,620 ergios.

Si ahora se concidera un cuerpo que no está constituido por masas puntuales aisladas, sino que es una distribución continua de materia, la suma expresa da en la definición de momento de inercia, $I = \sum_{mir} i$, debe calcularse por los métodos del cálculo integral. Supongase que el cuerpo está dividido en elementos infinitesimales de masa dm, y sea r la distancia de cualquiera de uno de ellos al eje de rotación. El momento de inercia se obtiene multiplicando lamasa dm de cada uno por el cuadrado de su distancia al eje, y hacer la suma de todos los productos r dm correspondientes al cuerpo entero. Así,

 $I = \int r^2 dm$ Ecuación 2-16

Si el cuerpo tiene forma irregular el cálculo de este tipo de integrales - puede presentar dificultades considerables; pero para cuerpos de forma sencilla la integración resulta sencilla.

Como ejemplo, calcular el momento de inercia de un cilindro macizo homógeneo respecto a su eje de simetría.

En la figura 2-8, se ha seleccionado como elemento de masa mas conveniente un tubo cilindrico infinitamente delgado, de radio r, espesor dry altura L.

-dr

Si se representa la densidad del mate rial por la letra griega P, esto es,la masa por unidad de volumen, resulta:

dM = P dVsiendo dV el volumen del tubo cilín-drico, esto es:

 $dV = (2\pi r dr) L$ por lo tanto,

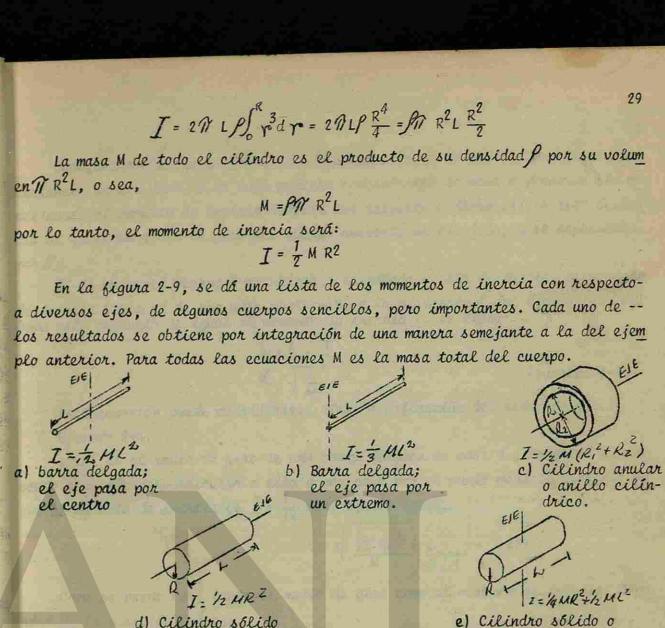
FIGURA 2-8

dm = 20 Lfrdr

El momento de inercia con respecto al eje cilindrico, sera:

 $I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_0^2 \rho_T^3 d\tau.$

Si el cuerpo no tubiera una densidad constante, se debería conocer ρ en -- función de γ para poder efectuar la inegración. Pero para un sólido homógeneo,- ρ es constante, e

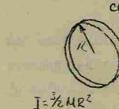


d) Cilindro sólido

I=MRZ

6) Aro o tubo cilíndrico de paredesdelgadas. con respecto al eje del cilindro. g) Es fera sólida con respecto a un diá metro cualquiera.

I= 7/3 MR2 h) Cascarón es fé rico delgadocon respectoa un diámetro cualquiera.



disco.

con respecto a un diámetro central.

il Aro con respecto a una línea tangente cualquiera.

I- 4 MR2 il Aro con respecto a un diámetro -cualquiera.

FIGURA 2-9

The first water the state of th

po en torno del eje. Las componentes del momento de rotación perpendiculares al eje, tienden a hacerlo girar. Ahora bien, se ha conciderado que el eje concerva una dirección fija. Por ejemplo, el cuerpo puede estar fijo a un eje que esta-sostenido en una posición fija, por medio de apoyos en cada extremo, al aplicar un momento de rotación que tenga una componente perpendicular al eje que pueda-hacerlo girar, automaticamente los apoyos aplican al eje un contramomento de rotación igual y opuesto, anulando el efecto de esta componente.

En la figura 2-10, se ha considerado un cuerpo rígido que puede girar libremente en torno del eje Z. Una fuerza F, obra sobre una partícula que se encuentra en el punto P del cuerpo situado a una distancia V del eje, el momentode rotación que obra sobre la partícula, actúa sobre el cuerpo rígido como un todo y se representa por:

T=TX F

Como τ y F son paralelos al plano de la figura, aplicando la regla de la -mano derecha el momento de rotación τ , apuntará perpendicularmente al plano de-la figura y saliendo de ella.

La magnitud de 7 esta dada por la ecuación:

FIGURA 2-10

Ejemplo 2-5.

Una rueda de vagón puede girar libremente en torno de un eje horizontal -- que pasa por 0. SE aplica una fuerza de 50 Nt a un rayo en el punto P que está- a 0.305 m del centro. OP forma un ángulo de 30° con la horizontal (eje x) y la-fuerza se encuentra en el plano de la rueda y forma un ángulo de 45° con la horizontal (eje x). ¿Cuál es el momento de rotación aplicado sobre la rueda?.

FRSIDAD AUTÓNO

TRECCIÓN GENERAL

edo, como focilis dos parellecidas foi cuerque será is promina com necimento, emia

o deserte contrate dutentiales del contrate del contrate de la contrate del la contrate de la contrate del la contrate de la c

between the country on the discontinuous city, not note the cast increase prints of entry

an decire dat ein Las communica del assessin de untresión conquesticulares as Alledon a haceala giant. About biest, se ha considerade ous et eie armenten descretion elfa. For elemelo, el cuerro quarte carer file a un chi utanide en wen posición difa, por medio de apogos en ente THE PER ME CONTROL OF AUTHORITIES AND ADMINISTRATION OF THE PERSON OF TH weaks girds, authoriticamente las apoyee agling (ive) with that a nower anatomic of elector THE ELECTION OF THE CONTRACTOR OF CONTRACTOR mente en toune det aje ? . Our fuenen l' ten antite une mutiteur edution on all yourse P dol another Extracte of the tenesists the age. of movemen e hacheston que obra sobre la parcheula, costa sebre de mano el pola como ndo e se dependanta not: Como w y F son paracelos as pienes to sa deputa, noi lando en region delivered at mouseur de patrición of comentant mons material tenant in manifold de l'easte dade pou le renacion Bugal 4 =

ERSIDAD AUTÓNOMA TENTRAL DE COMPANION DE CO

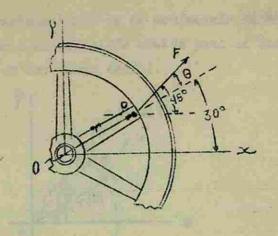


FIGURA 2-11

El ángulo que forma el vector de desplazamiento r y la fuerza aplicada --- F (figura 2-11 es θ , donde

 $\theta = 45^{\circ} - 30^{\circ} = 15^{\circ}$

Por consiguiente, la magnitud del momento de rotación es:

T=rF sen 0

= (0.305 M) (50NT) (sen 15°) = 3.96 NT-MT

Analizando ahora la relación que existe entre el momento de rotación aplicado al cuerpo rígido de la figura 2-10 y la aceleración del mismo. Observese el cuerpo un tiempo infinitesimal dt, durante el cuál gira un ángulo infinitesimal d θ .

Se ha visto que se puede describir la rotación de un cuerpo rigido girando en torno a un eje fijo, analizando el movimiento de un punto cualquiera fijo en el cuerpo, como P en la figura 2-10.

Entonces para una mejor comprención, enfoquese la atención a la figura --2-12, en el punto P del cuerpo que esta girando alrededor de un eje pasa por 0y es perpendicular al plano de la figura. Se ejerce sobre el cuerpo en el punto
P, una fuerza F; cuando este cuerpo gira un pequeño ángulo do, el punto P recorre una distancia dS sobre su trayectoria circular, siendo

ds = r de

El trabajo dw realizado por la fuerza durante esa pequeña rotación es: $dW = F.dS = F\cos\phi dS = (F\cos\phi) (rd\theta)$

Donde Fcosø es la componente de F en la dirección de dS. Pero como (Fcosø) r es la magnitud del momento de rotación instantáneo ejercido por F sobre el cuerpo rígido con respecto al eje perpendicular al plano de la figura que pasa por 0, de modo que

dw = 7 do

Ecuación 2-18

VIEW STEEN W sub-the formal at the restaurance of the solution.

Esta expresión es el trabajo hecho en el movimiento de rotación (en tornode un eje fijo) y es análoga a la expresión dW=Fdx para el trabajo efectuado en la translación (a lo largo de una línea recta).

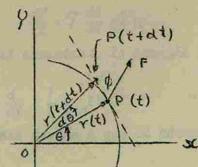


FIGURA 2-12

Para obtener la rapidez con que se hace trabajo en el movimiento de rota-ción (en torno de un eje fijo), dividase ambos miembros de la ecuación 2-18 entre el intervalo infinitesimal de tiempo dt durante el cuál el cuerpo se desplaza do, obteniendo

$$\frac{dW}{dt} = \gamma \frac{d\theta}{DT}$$

Pero como $\frac{dW}{dt}$ es la derivada respecto al tiempo del trabajo realizado, o -- sea, la potencia P, y $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular w, por lo tanto:

siendo esta expresión análoga a P = FV para el movimiento de translación (a lolargo de una línea recta).

Si ahora se aplica un cierto número de fuerzas F_1, F_2 etc; sobre el cuerpoen el plano normal a su eje de rotación, las fuerzas harán un trabajo sobre el cuerpo durante una pequeña rotación d θ que será:

$$dW = F_1 \cos \phi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \phi_2 r_2 d\theta + \dots,$$

$$= (T_1 + T_2 + \dots) d\theta = T d\theta,$$

siendo la \mathbf{r}_1 d θ igual a d \mathbf{S}_1 , el desplazamiento del punto en que está aplicada \mathbf{F}_1 y \mathbf{d}_1 el ángulo entre \mathbf{F}_1 y d \mathbf{S}_1 , etc. Por lo tanto \mathbf{T} será la magnitud de la componente del momento de rotación resultante con respecto al eje que pasa por 0. Al calcular esta suma, cada momento de rotación se considera positivo o negativo-según sea el sentido en que él solo tendería a hacer girar el cuerpo en torno-de su eje.

No existe movimiento interno de las partículas dentro de un cuerpo verda-deramente rígido, sólo se mueven con el cuerpo como un todo. Por lo tanto, no puede haber disipación de energía dentro de un cuerpo verdaderamente rígido. --

DIRECCIÓN GENERALE

All fustes for emobile eath current paint we request diagrafs die al

und the incident of select an inquestoria elecular, election

police is the elementation of an ile disception of the interpolice of the interpolation of the elements of the

STEE STANDING

threatenable in its height the langual live makes es: course of civile adapted it has been been properly

engite teach, side to respense and a country to the to the tenters as

Batter distinguished to previous for the telephone with internal fillers.

Por consiguiente, se puede igualar la rapidez con que se esté haciendo trabajosobre el cuerpo con la rapidez con que está aumentando su energía cinética. Larapidez con que se está haciendo trabajo sobre el cuerpo rígido es:

dw = 7 de = Tw

Ecuación 2-19

La rapidez con que está aumentando la energía cinética del cuerpo rígido -

 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \overline{I} w^2 \right)$

Pero como I es constante devido a que el cuerpo es rígido y el eje está 6ijo. Entonces, se tiene:

 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_w^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} w^2 = I_w \frac{dw}{dt} = I_w \infty$

Ecuación 2-20

Igualando las ecuaciones 2-19 y 2-20, se obtiene: Tw = Ixw

o sea.

T=IX

Ecuación 2-21

Está ecuación se refiere al movimiento de rotación en torno a un eje fijo. El momento de rotación 7, la velocidad angular w y la aceleración angular \sim , actúan solo a lo largo del eje en un sentido o en el otro. El caso de transla-ción equivalente es aquel en el cuál la fuerza F que obra sobre un cuerpo, su velocidad v, y su aceleración a apuntan todas sobre una línea recta dada, en un sentido o en otro.

Las seis cantidades anteriores son vectores, pero cuando están actuando alo largo de una línea fija, sólo pueden tener dos sentidos, positivo o negativo Se pueden analizar estos vectores algebraicamente y ocuparse solamente de sus magnitudes. Así, al derivar la ecuación 2-21, se habrá transformado solamente la segunda ley de Newton (F = ma), escrita en forma escalar adecuado para describir el movimiento rectilíneo, a terminos rotacionales. Es decir, así como se puede asociar una fuerza con la aceleración lineal de un cuerpo, de la misma ma nera se puede asociar un momento de rotación con la aceleración angular de un cuerpo en torno de un eje dado.

La inercia de rotación I es una medida de la resistencia que un cuerpo o-frece a cambiar su movimiento de rotación como consecuencia de un momento de ro tación dado, así como la inercia de translación, o masa, M, es la medida de laresistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de translación bajo la acción de una fuerza dada.

En la tabla 2-1 se hace una comparación del movimiento de translación de -

un cuerpo rigido en una trayectoria rectilinea, con el movimiento de rotación de un cuerpo rígido en torno de un eje fijo.

TABLA 2-1

MOVIMIENTO RECTILINEO		ROTACION EN TORNO DE UN EJE FIJO	
Desplazamiento Velocidad Aceleración	$v = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt}$	Pesplazamiento angular Velocidad angular Aceleración angular	$\theta = \frac{d\theta}{dt}$ $\infty = \frac{d\omega}{dt}$
Masa Fuerza	M F = Ma	Inercia de rotación Momento de rotación	I T=I&
Trabajo Energía cinética	$W = \int F dx$ $\frac{1}{2} M V^2$	Trabajo Energía cinética	$w = \int \int d\theta$ $\frac{1}{2} I_w^2$
Potencia Cantidades de movimiento Lineal	P = FV M V	Potencia Cantidad de movimiento angular	P=Tw Iw

La expresión T=Ioc que es la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, no es la clase más general de movimiento rotatorio en donde el cuerpopuede ser o no rigido y el eje también puede o no estar fijo en un marco de referencia inercial. Para este caso general se aplica la ecuación 2-13, o sea, --Text. = dL/dt. Según se había ya indicado, esta expresión equivale a la segunda ley de Newton del movimiento general de translación de un sistema de partículas o sea, Fext. = dP/dt.

Ejemplo 2-6.

Un disco uniforme de radio R = 0.20 m y masa M = 3kg está montado en un -eje sostenido en unos apoyos fijos sin rozamiento, como se muestra en la figura 2-13. En el borde de la rueda se enrolla una cuerda ligera y se aplica una fuer za constante T = 4.5 N/ hacia abajo sobre la cuerda. Encontrar la aceleración angular de la rueda y la aceleración tangencial de un punto del borde.

El momento de rotación en torno del eje central es ?= TR y el momento de inercia del disco con respecto al eje central es $I = \frac{1}{7} MR^2$. De la ecuación

T=Ioc

Tenemos:

 $TR = \frac{1}{2}MR^2 \propto$

de donde,

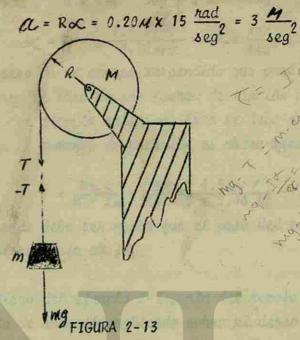
-chadast chargings that the aux medications at Astrony thing it. Copy is of the state con the supplied and many plants are applied to the supplied of t the philippe continue do makes, or chair abuseant lates of the notes of

the instructed the enterior source, in the late of the fire-

in la tabla 7-1 as heca una compresentar del meriminale la reggerinación de -

 $\infty = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \times 4.5}{3 \text{kg}} \times 0.20 \text{ M} = 15 \frac{\text{nad}}{\text{seg}} 2$

La aceleración tangencial de un punto del disco está dada por



Ejemplo 2-7.

Supóngase que ahora se suspende un cuerpo de masa M de la cuerda del ejemplo anterior. Encontrar la aceleración angular del disco y la aceleración tangencial de un punto de lo periferia.

Si T es la tensión de la cuerda. Puesto que el cuerpo suspendido acelerará hacia abajo, la magnitud de la fuerza de la gravedad, mg, que obra hacia abajosobre ella deberá exceder a la magnitud de la tensión ascendente de la cuerda sobre el cuerpo, que será T. La aceleración a del cuerpo suspendido es la misma que la aceleración tangencial de un punto en la periferia del disco. De la segunda ley de Newton se tiene,

m9 - T = ma

El momento de rotación del disco es TR y su momento de inercia es $\frac{1}{2}$ MR 2 . A partir de la ecuación

7=Ix

ae tiene: BLIOTETR - 1 MR 2 C

de la relación a = ROC, se puede escribir esta última ecuación así: 2T = Ma

desarrollando por simultáneas la primera y última ecuación, se tiene:

$$a = \left(\frac{2 m}{M + 2 m}\right)g \qquad y \qquad T = \left(\frac{M m}{M + 2 m}\right)$$

× = 27 - 2x4.5 eV = 15 tall

to acclusación tangeneial de un punto del disec estil dede por

ONOA ALERE FLAMMAM VERITATIS

Supérgas que alian, se suspende un august de ense de contra en con

is they a law against de et fueren de la geocht. A de constant eingeng elle étens execlet à la negalitait de la constan ascentures de la constant nt et giunges, que sent T, le acclanación a del cuerge langendide es la misma

a hould said in the almost the law sunte on in marketers the factor. In the se-

S. T as he consider to be enough, inserte and to enter successive we have

NIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

bin becauting a = 105, as expets expetitely make distance commanded 256; 27 = 101, bearentlesselv not biomitherns in coincer a distant charleson, as those

Si M = 3kg y R = 0.20 MJy considerando que el cuerpo suspendido pasa ---- Mg = 4.5 Mt, se obtiene:

$$a = \frac{2Mg}{M + 2M} = \frac{2 \times 4.5 \text{ NT}}{3kg + 2 \times 0.46kg} = 2.3 \frac{\text{MT}}{8eg^2}$$

$$\propto = \frac{a}{R} = \frac{2.3 \frac{\text{MT}}{8eg^2}}{0.20MT} = 11.5 \frac{\text{rad}}{8eg^2}$$

Nótese que para el caso de un cuerpo suspendido que pesa 4.5 N 7 las aceleraciones son menores que para el caso de una fuerza de tensión constante de 4.5 N 7 aplicada sobre la cuerda del ejemplo anterior. Esto se debe a que la tensión en la cuerda que proporciona el momento de rotación es ahora menor que 4.5, siendo su valor

$$T = \frac{Mmg}{M + 2m} = \frac{3kg \times 4.5 NT}{3kg + 2 \times 0.46 kg} - 3.45 NT$$

La tensión en la cuerda debe ser menor que el peso del cuerpo suspendido - para que este cuerpo acelere hacia abajo.

Ejemplo 2-8.

Suponiendo que el disco del ejemplo 2-7 parta del reposo, calcular el trabajo hecho por el momento de rotación aplicado sobre el disco en 2 seg. Calcular también el incremento de energía cinética rotacional que experimenta el disco.

Como el momento de rotación aplicado es constante, la aceleración angularresultante es constante. El desplazamiento angular total, en el caso de aceleración angular constante, se obtiene a partir de,

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \propto t^2$$

en la cual,

$$w_0 = 0$$
 $\propto = 11.5 \frac{rad}{seg^2}$ $t = 2 seg.$

por lo tanto

$$\theta = 0 + \frac{1}{2} (11.5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}) (2 \text{ seg})^2 = 23 \text{ rad}.$$

Para un momento de rotación constante, el trabajo hecho en un desplazamien to angular finito es:

donde

$$R = TR = (3.45 \text{ NM}) (0.20 \text{ M}) = 0.69 \text{ M} - 147$$
 $\theta_2 - \theta_1 = \theta = 23 \text{ rad}$

Por consiguiente,

El trabajo dá lugar a un aumento de energía cinética de rotación del disco A partir del reposo, el disco adquiere una velocidad angular w.

St. M. Sing to R. S. 2004 in constitutional the secretarial constitution of the state of the secretarial constitution of the s

UNIVERSEDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

consequents, with the constant series of the series of the

id strangio di lugar a un agrecolo de esconção cinistina de repturible del disco

wife dell repoter, of differendiation and reincidial argument in

La energía de rotación es $\frac{1}{2}Iw^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)w^2$. w se obtiene a partir de,

w = wo + x t

de manera que,

$$w = o + 11.5 \frac{rad}{seg^2} (2 seg) = 23 \frac{rad}{seg}$$

entonces,

$$\frac{1}{2}Iw^2 = \frac{1}{4}(3 \text{ kg.})(0.2\text{M})^2(23 \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}}) = 15.9 \text{NT-MT}$$

El aumento de energía cinética del disco es igual al trabjo efectuado porla fuerza resultante que obra sobre el disco.

6.- El movimiento cambiando de traslación y de rotación de un cuerpo rígido.

Cuando un cuerpo está rodando, experimenta un movimiento de translación yla vez gira en torno de un eje. Es de esperarse que al analizar el movimiento de los cuerpos que ruedan debiera tratarse como una combinación de un movimiento de translación y de uno de rotación Sin embargo, sería posible considerar el problema de un cuerpo que rueda como si su movimiento fuera de rotación pura.

En la figura 2-14, se muestra un cilindro que rueda en una superficie horizontal. En un instante dado, la parte del cilindro que esta en contacto con lasuperficie se encuentra en reposo debido a que no se deliza. El eje normal al plano de la figura que pasa por el punto de contacto P se le llama eje instanta neo de rotación. La velocidad lineal de toda partícula del cilindro, en este instante tiene una dirección perpendicular a la línea que une la partícula con-P y su magnitud es proporcional a esa distancia. Esto equivale a decir que el cilindro gira en torno de un eje fijo que pasa por P con una velocidad angularw, en ese instante. Por lo tanto, en un instante dado, el movimiento del cuerpo es equivalente a una rotación pura. Así, la energía cinética total se escribe:

$$K = \frac{1}{2} I_{p w^2},$$

Ecuación 2-22

donde p es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por P.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos, que dice,

Tp = Icm+ MR2,

donde I cm es el momento de inercia del cilindro de masa M y de radio R con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa. De la ecuación 2-22 se-obtiene:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} MR^2 w^2$$
, Ecuación 2-23

Rw es la velocidad con que se mueve el centro de masa del cilindro con respecto

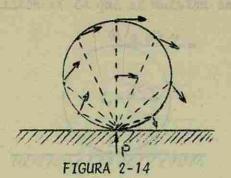
al punto fijo P. Si Rw = VcMla ecuación 2-23 queda:

A MANAGERIAN MARKED BLOCK

standard 2.20 ft 12 Est attatat attent to beginn at the land the second by the lands elicit at a

K = 1 I I CM W2 + 1 M V2M.

Ecuación 2-24



La velocidad del centro de masa con respecto a P es la misma que la velocidad de P con respecto al centro de masa.

Cualquier línea de referencia del cilindro gira el mismo ángulo en tiempodado, ya sea que se observe desde un marco de referencia fijo con respecto a la superficie sobre la cuál está rodando el cilindro o desde un marco que tenga un movimiento de translación con respecto a ese marco fijo.

Esto es, la velocidad angular w del centro de masa con respecto a P tal como la vería alquien que estubiera en P es la misma que la velocidad angular deuna partícula colocada en P con respecto a C, tal como la vería alquien que estubiera en C (moviéndose con el cilindro).

La ecuación 2-24, que fué obtenida a base de un movimiento de rotación pura se puede interpretar de otra manera; esto es, el primer término, $\frac{1}{2} I_{\text{CM}} w^2$, es la energía cinética que tendría el cilindro si solamente girára en torno deun eje que pasará por su centro de masa, sin movimiento de translación; y el se gundo término, $\frac{1}{2}$ M V_{CM}^2 , es la energía cinética que tendría el cilindro si tuviera un movimiento de translación con la velocidad de su centro de masa, sin estar girando.

Como se puede observar la ecuación 2-24 se puede aplicar a cualquier cuerpo que se mueva y gire en torno de un eje perpendicular a su movimiento, ya sea que esté rodando o no sobre una superficie.

Combinados los efectos de la rotación en torno de un eje que pase por elcentro de masa y de la translación del centro de masa son equivalentes a una rotación pura con la misma velocidad angular con respecto a un eje que pase por el punto de contacto de un cuerpo que va rodando.

Si la velocidad del centro de masa es $V \in M$, la velocidad angular instantánea con respecto a un eje que pasa por P es $W = \frac{V \in M}{R}$. Por lo tanto, un punto Q,-

situado en la parte superior del cilindro, tendrá el doble de la velocidad V_{CM} en ese instante o sea 2 WR = 2 V_{CM} . El punto de contacto P se encuentra instantáneamente en reposo. Por lo tanto, desde el punto de vista de la rotación pura en torno de P, la situación es la que se muestra en la figura 2-15.

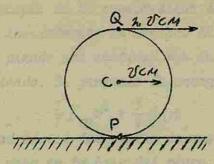


FIGURA 2-15

Considerando el rodamiento como una combinación de una translación del --centro de masa y de una rotación alrededor del eje del cilindro que pasa por C.
Si sólo se considera la translación, todos los puntos del cilindro tienen la -misma velocidad Vc mque el centro de masa, como se muestra en la figura 2-16a.
En la figura 2-16b, se considera solamente la rotación, el centro se encuentraen reposo, mientras que el punto Q en la parte superior tiene una velocidad --+ WR en la dirección de las x y el punto P en la parte inferior del cilindro -tiene una velocidad - WR en la dirección de las -x.

Combinando estos dos resultados y recordando que $W = \frac{\sqrt{C_M}}{R}$, se obtiene:

on respective of the eye one made not P ex at a CEN Post in twister our states of

$$V = V_{CM} - WR = V_{CM} - \frac{V_{CM}}{R}R = 0.$$

Este resultado, se muestra en la figura 2-16c, y es exactamente igual al - que se obtuvo desde el punto de vista puramente rotacional en la figura 2-15.

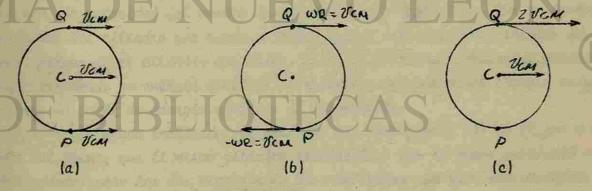


FIGURA 2-16

Ejemplo 2-9.

En la figura 2-17 se representa un cilindro macizo de masa M=3kg. y de radio R=020 MJque baja rodando por un plano inclindado sin deslizar. Encontrar la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega a la base del plano.

Aplicando el principio de la conservación de la energía y sabiendo que elcilindro se encuentra inicialmente en reposo. Al bajar rodando por el plano inclinado, el cilindro pierde una cantidad Mgh de energía potencial, siendo h la altura del plano inclinado. Su ganancia de energía cinética es igual a

 $\frac{1}{2}I_{\rm CM}w^2+\frac{1}{2}\,{\rm M}\,{\rm V}^2,$ donde V es la velocidad lineal del centro de masa y w la velocidad angular conrespecto al centro de masa en la base del plano.

A partir de la relación. Mgh = 1/2 Icmw2 + 1/2 M 2/2. en donde, $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ $y w = \frac{V}{R}$ FIGURA 2-17 se tiene, $Mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{V}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) M V^2$ $U = \sqrt{\frac{4}{3}} gh$ sustituyendo valores se obtiene $U = \sqrt{\frac{4}{3}} \times 9.8 \frac{MT}{8692} \times 1.5 MT$ V = 4.42 M

Si el cilindro hubiera deslizado bajando por el mismo plano inclinado sinrozamiento, la velocidad del centro de masa hubiera sido V = V2gh. Por lo tanto, la velocidad del cilindro que rueda es menor que la velocidad del cilindro quedesliza, porque en el cilindro que rueda, parte de la energía potencial perdida se ha transformado en energía cinética de rotación, dejando menos energía dispo nible para la parte de energía cinética de translación.

En el mismo plano inclinado, el cilindro que rueda tarda más en llegar a la base del plano, que El mismo cilindro deslizandose por el plano inclinado -sin rozamiento; pero los dos llegan a la base del plano con la misma cantidad de energía.

Ejemplo 2-10.

section as an advisor de main countries e estadas escala a ta baile abi Applicable of the selection of the conditionable

the entry of the contract of the desire the second of the

both tune the first the space of the books of the state o

Resolver el ejmplo 2-9 usando métodos dinámicos.

En la figura 2-18 se muestra el diagrama de fuerzas. Mg es el peso del cilindro que actúa verticalmente hacia abajo y que pasa por el centro de masa, Nes la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y f es la fuerza de rozamiento estático que obra a lo largo del plano inclinado en elpunto de contacto.

My SEN 6

FIGURA 2-18

El movimiento de translación de un cuerpo se obtiene considerando que todas las fuerzas externas obran en su centro de masa.

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

 $N = Mg\cos\theta = 0$ para el movimiento normal al plano inclinado, y $Mg\sin\theta - f = Ma$ para el movimiento en el plano inclinado.

Para el movimiento de rotación en torno del centro de masa se aplica la -- expresión

T= Icma

Ni N ni Mg pueden producir rotación en torno de C porque sus líneas de acción pasan por C, y tienen brazos de palanca nulos.

La fuerza de rozamiento tiene un brazo de palanca R con respecto a C, de - manera que

fR=ICMOX,

pero

 $1 cm = \frac{1}{2} MR^2 \qquad y \ll = \frac{a}{R} \qquad \qquad \boxed{ }$

por lo tanto,

 $f = \frac{I_{CMX}}{R} + \frac{Ma}{2}$

Sustituyendo está expresión en la segunda ecuación de la translación, se - tiene,

La aceleración del centro de masa del cilindro que rueda $(\frac{2}{3} gsen\theta)$ es menor que la aceleración del centro de masa del cilindro que baja deslizando por el plano inclinado $(gsen\theta)$.

El centro de masa se mueve con aceleración lineal constante.

La velocidad del centro de masa, a partir del punto de reposo, se obtieneaplicando la relación.

T2 = 2015

de manera que

 $g^2 = 2 \left(\frac{2}{3} \text{ gsen}\theta\right) S = \frac{4}{3} \text{ g} \frac{h}{S} S = \frac{4}{3} \text{ gh.}$

 $V = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}gh$

sustituyendo valores se obtiene,

V = 4.42 MT seg.

Ejemplo 2-11.

Una esfera y un cilindro, que tienen la misma masa y el mismo radio, parten del punto de reposo y bajan rodando por el mismo plano inclinado. ¿Cuál delos dos cuerpos llegará primero a la base del plano?.

Para una esfera, Ich es igual a $\frac{2}{5}$ MR 2 . Por el método dinámico, se tiene:

Mgsen θ - f = Ma, translación del cM, f R = I cu α = $(\frac{2}{5}$ MR²) $(\frac{a}{R})$, rotación en torno del cM,

o sea,

 $f = \frac{2}{5}$ Ma

y $a = \frac{5}{7}$ gsen θ , esfera

Para el cilindro, del ejemplo 2-10,

 $a = \frac{2}{3} gsen\theta$, cilindro.

Como la aceleración del centro de masa de la esfera es en todo momento mayor que la aceleración del centro de masa del cilindro. Puesto que ambos parten del reposo en el mismo instante, la esfera será la primera que llegue a la base del plano.

INIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERAL

BOOKER IN THE SECOND OF THE SE

ogede skart over tala. I take

-pour la leuren et chour due recheste dels glam et batter del missagnetare pl - pour la leuren et chour due recheste del glam et batter del missagnetare del mi

GENERAL DE BIBLIOTECAS

Et estado de mant de mires ans anadomisers aliment de table. La vérmetdad del senera de milla, a confin del page de hastra, se detrevie-被表现的证明的是由 计图图的比较级 五基 经

INIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCION GENER

1.- a) Demostrar que el momento de inercia de una varilla delgada de longitud ℓ con respecto a un eje que pasa por su centro y que es perpendicular a sulongitud es I=1 M ℓ^2 . b).- Utilizar el teorema de los ejes paralelos para de--

mostrar que $I=\frac{1}{3}$ Ml² cuando el eje de rotación pasa por un extremo perpendicularmente a la longitud de la varilla.

2.- a) Demostrar que un cilindro sólido de masa M y de radio R es equivalente, para la rotación en torno de un eje central, a un aro delgado de masa M-y de radio $\frac{R}{}$. b).- La distancia radial a un eje dado, a la cuál podría consi

derarse consentrada la masa de un cuerpo sin alterar el momento de inercia delcuerpo con respecto a ese eje se llama su radio de giro. Represente con k el ra dio de giro y demuestre que $K=\sqrt{\frac{\mathbf{I}}{M}}$. Este valor da el radio del "aro equivalente"

en el caso general.

3. La molécula de oxígeno tiene una masa total de 5.30 x 10^{-26} kg y un momento de inercia de 1.94 x 10^{-46} kg- $\mu\gamma^2$ con respecto a un eje que pasa por el-centro y que es perpendicular a la línea que une los átomos. Supóngase que talmolécula en un gas tiene una velocidad media de 500 M//seg y que se energía cinética de rotación es los $\frac{2}{3}$ de su energía cinética de translación. Encontrar su $\frac{1}{3}$

velocidad angular media.

R: 6.75 x 10¹² rad seg.

4.- Un aro de radio 3.05 MT pesa 1425 NT. Rueda por un piso horizontal de - manera que su centro de masa tiene una velocidad de 0.152 MT ; Qué cantidad - seg.

de trabajo tiene que hacerse para detenerlo?

R: -3.35N7 -MT

5.- Supóngase que la tierra es una esfera de densidad uniforme. a) ¿Cuál-es su energía cinética de rotación? Tómese como radio de la tierra 6.4 x 10³km-y como masa de la misma 6 x10²4kg. b).- Supóngase que esa energía pudiera ser-aprovechada por el hombre. ¿Durante cuánto tiempo podría proórcionar la tierra-una potencia de 1 kw a cada una de las 3.5 x 10° personas que hay en la tierra?

R: a) 2.6×10^{29} joules b) 2.4×10^{9} años.

6.- Una varilla delgada de longitud l y masa m está suspendida librementepor su extremo. Se jala lateralmente y se le da un impulso en torno de un eje horizontal, haciéndola pasar por su posición más baja, con una velocidad angular w ¿A qué altura con respecto a su posición más baja, se levanta su centro de masa? No tomar en cuenta el rozamiento ni la distancia del aire.

$$R: h = \frac{\ell^2 w^2}{6a}$$

7.- El motor de un automóvil desarrolla 100 NP al estar girando con una velocidad de 1800 RPM. ¿ Qué momento de rotación produce?.

R: 396 joules.

FIGURA 2-19

the state of the second second of the second of the second of the second second

nas que fe l un cuande es cée de nomentant de la la companie de la constant de la

ALTRE FLAMMAM.

WERITATIS

STORES OF THE STO

The state of the s

o substance and an element is the engine do desirabled unadopes. A linke a company of the engine of the substance of the engine of the engine

IVERSIDAD AUTÓN

b) 1,4 × 107 silve.

wine Tob IR To Color of the Col

P= 3 = 62-4

1.- El marci de un autochte domenella 1992 el seten giernic con ana ve ides de 1869 en 1 Juli escopio de nasación encest. 8.- Una rueda de masa M y de radio de giro k está girando sobre un eje honizontal fijo que pasa por su cubo. El cubo frota contra el eje, de radio a, en
un solo punto, siendo el coeficiente de rozamiento µ. Se comunica a la rueda -una velocidad angular inicial w. Considerando una deceleración uniforme, encon
trar el tiempo que pueda la rotación y el número de revoluciones que da la rueda hasta detenerse.

 $t = \frac{w_0 k^2}{Mga}$ $\theta = \frac{u_0^2 k^2}{2Maa}$

9.- En una máquina de Atwood (figura 2-19) un bloque tiene una masa de 500 grs. y el otro una masa de 460 grs. La polea, que está montada en unos apoyos horizontales sin roza miento, tiene un radio de 5 cm. Si se suelta el = bloque más pesado a partir del punto de reposo, - se observa que cae 75 cm. en 5 seg. Explicar cómo se puede determinar el momento de incercia de lapolea a partir de estos datos.

 $I = 1.62 \times 10^{-2} \text{kg} - \text{MHz}$

10.- Un bloque de 26.8 NT se coloca en un plano inclinado 30° con respecto ala horizontal y mediante una cuerda paralela al plano y que pasa por una poleaque está en la parte superior va unido a un bloque colgante que pesa 80. La polea pesa 8.9 NT y tiene un radio de 0.10 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es de 0.10. Encontrar la aceleración del bloque
que está suspendido y la tensión en la cuerda a cada lado de la polea. Supóngase que la polea es un disco uniforme.

R:
a) 5.79 Myseg²
b) 32.5 NT
29.8 NT

11.- Una caja de 1.83m de alto por 1.22 m de ancho y por 0.95m de profundidad, que contiene un refrigerador, está colocado en el fondo de un camión en posición vertical. El peso del refrigerador más el de la caja es de 1335N/y se supone uniformemente distribuido en todo el volumen de la caja. La caja se voltea al acelerar el camión. ¿Cuál es el mínimo valor que tuvo que tener esta ace leración.

 $R: a = \frac{1}{2} g.$

12.- Demostrar que un cilindro resbalará sobre un plano que forma un ángulo θ con la horizontal, si el coeficiente de rozamiento estático entre el plano y-el cilindro es menor que $\frac{1}{2}$ tg θ .

13.- Una esfera rueda subiendo un plano inclinado de ángulo 30°. En la basedel plano inclinado, el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de tran slación de 4.87 mt/seg. a) iHasta donde sube la esfera por el plano? b);Cuántotiempo tarda en regresar a la base?.

R:

a) 3.36 MT

b) 1.4 seg.

til ainande soort un et for the character of the complete characters. and a tomobal administration of Carlo day to the cash to the contract one of the HUA JA ONT DO SAF AC KNOWN A The appearance of the same of the appearance and the substitute of the second entral and second second of the second second THE CONTRACT OF THE PROPERTY O Market of I washing it more the peach of ina mase di are its man admine to admend belauna if he extended made its less and I'm portie spiration of the second of the spiration s capian de cates cutos MERCHANICAL SECTION abacton, and chotach

are and the control of the control o

14.- Un yo-yo de masa M tiene un eje de radio p alrededor del cuâl esta enredado el hilo. Un muchacho deja que se desenrolle el yo-yo, sosteniendo en una
posición fija el extremo libre. El yo-yo acelera hacia abajo, llega al extremo,
y comienza a subir, enrollándose el hilo alrededor del eje en sentido contrario
Encontrar la tensión el hilo durante la bajada y la subida, suponiendo que psea lo suficientemente pequeño para considerarse que el hilo se conserva vertical en todo momento. Llame I al momento de inercia del yo-yo con respecto a sueje central.

 $= Mg \frac{I}{I + Mr^2}$

15.- Una cuerda esta enrollada en un cilindro de masaM, y radio R. La cuerda se jala verticalmente hacia arriba para impedir que descienda el centro de masa conforme el cilindro esta desemollando la cuerda. a) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? b) ¿Qué cantidad de trabajo se ha hecho sobre el cilindro una vezque ha alcanzado una velocidad angular w? c) ¿Cuál es la longitud de cuerda que se ha desenrollado en un momento?

 $R: a \mid T = Mg$ $b \mid W = \frac{MR^2w^2}{4g}$ $c \mid L = \frac{R^2w^2}{4g}$

OMA DE NUEVO LEÓN

DE BIBLIOTECAS

14. the on-yo to make in them will ofe do haddo to articlated doc interesta on and all helps of the standard of an and of the standard of an and of the standard of the standa

15. Inc enchác esta coñactada a su selectivi de ministra de la conscienció del la conscienció de la conscienció del la conscienció de la c

JNIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERAI

CAPITULO III

DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION. Y LA CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

1.- Introducción. El trompo.

Este capítulo tratará del estudio de la rotación de un cuerpo rígido en -- torno de un eje que no esta fijo en un marco de referencia inercial. A partir - de la relación vectorial del movimiento de rotación $\gamma = \frac{dl}{dt}$, se resolverán los - problemas dinámicos para este caso. Posteriormente se considerará nuevamente la rotación del cuerpos rígidos y de partículas en torno de ejes fijos. Sin embargo, para este caso solamente se analizará el efecto de los momentos de rotación que tengan componentes perpendiculares al eje. Y finalmente se estudiarán los - sistemas en los cuales no intervienen momentos de rotación externos, pero se to mará en cuenta el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

El trompo:

En la figura 3-1a se representa un trompo que gira en torno de su eje de simetría, la punta del trompo se encuentra fija en el origen 0 de un marco de referencia inercial. Al girar el trompo rápidamente su eje se mueve en torno de
el eje vertical, describiendo un cono. A este movimiento se le llama precesión.

Para determinar la velocidad angular del movimiento de precesión wp, considerese el instante mostrado en la figura 3-1a donde el trompo tiene una velocidad angular w alrededor de su propio eje y una cantidad de movimiento angular L con respecto a este eje; o es el ángulo que forma este eje con la vertical.

Sobre el trompo actúa una fuerza hacia arriba sobre el pivote en 0, y otra devida al peso de este, que obra en el centro de masa hacia abajo. La primera-fuerza no proboca momento de rotación con respecto a ese punto devido a que subrazo de palanca es cero, mientras que la segunda fuerza si proboca un momento-de rotación con respecto a 0 y, está dado por,

7 = rx F = rx mg,

donde r es la distancia del centro de masa al origen. La dirección de r se encuentra aplicando la regla de la mano derecha y es la que se muestra en la figura 3-1a. Tanto r, como r, r, giran alrededon del eje con una velocidad angular wp.

THE OWNER OF

SPANICA DEL AUVINITATA DE ROTACION. Y LA CAMPIENA LE AUTORITA DE LA CAMPINAZION DE RESENTA DE RESEN

in testrecteers encount det constra e constra

1 SEMBAT

En 22 figura 2014 se reprotegats an frompa que gars de feuna de la la especie de la rectata. La punta del trampa de contrata filh en el contrata de la rectata de la recta

nose et inochats merënade en la dispris i-fi konda ta dispris di tripica. L'anguiar u alradicion de du morsio eja y una ilindich di pulamenta angulor i n'aspecte a nore ejas o eo et lingula que funar este ere en religiolo.

Sobre el trompo actila una (porta bacia estriba sobre el minite en 0, y pigo vida el pero de este, que obre en el centro de maja hacia ebejo, la stimeta -

are so prosper mangueto de roscordo con response a estados tractos e que en estados e que en estados e que estados estados estados en estados en estados en estados en estados en en en estados en estados en en en estados en en en en entractor en entract

Torrerende

where it is a statement of the scarce of water at boulests, in dispersión de 17 se que se contrat de 17 se que se contrat de 17 se partir de 17 se contrat de 1

Mg o y

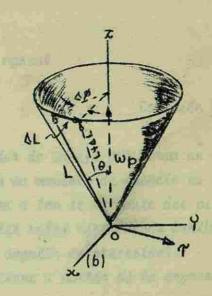


FIGURA 3-1

Cuando en un cuerpo rígido obra un momento de rotación, la cantidad de movimiento angular del cuerpo cambia de acuerdo con la relación $\Upsilon=\frac{dL}{dt}$.

La relación anterior muestra que el cambio de L (o sea, dL) debido a la acción del momento de rotación, apunta en la dirección y sentido de 7 y deberá ser perpendic ular a L.

Durante un intervalo de tiempo Lt, el trompo presenta un cambio de L, de - magnitud,

ΔL -TΔt.

En la figura 3-16 se muestra el cono descrito por el eje del trompo en precesión y se representa este cambio ∆ L. Al terminar el intervalo de tiempo ∆ t la cantidad de movimiento angular del trompo se encuentra sumando vectorialmente - L y ∆ L. Como la magnitud de ∆ L es muy pequeña en comparación con L y a la vez - es perpendicular a L, el nuevo vector de cantidad de movimiento angular tiene - la misma magnitud que el anterior, pero con diferente dirección. Por lo tanto, - al transcurrir el tiempo la punta del vector de cantidad de movimiento angular-se mueve en un círculo horizontal (figura 3-16). Como este vector siempre está-a lo largo del eje de rotación del trompo, de esta manera queda explicada la -- precesión del trompo.

A partir de la figura 3-16 se encuentra la velocidad angular de precesiónwp. Esto es.

Lwp= It ECA

Como & L <<< L,

 $\Delta \phi \cong \frac{\Delta L}{Lsen\theta} = \frac{\widehat{T} \Delta t}{Lsen\theta}$

por lo tanto,

$$wp = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{T}{Lsen\theta}$$

Ecuación 3-1

Postelo on the Swattle being hadis the internate wheather the state of sides To the state of the state of the state of the Control of the Annual Contract of the state of the last trained of as a constitution of the second of the secon which is the state of the state

De la figura 3-1a se tiene que:

1 = p mgsen (180°-0) = p mgsen0

por consiguiente,

$$wp = \frac{m g r^{\circ}}{L}$$

Ecuación 3-2.

Ejemplo 3-1.

un trompo está girando a 30 $\frac{\text{rev}}{\text{seg}}$ alrededor de un eje que forma un ángulo - de 30° con la vertical. Su masa es de 0.50kg y su momento de inercia es de ---- $5 \times 10^{-4} \text{kg-mpt}^2$. El centro de masa se encuentra a 4cm de la punta del pivote. Si la rotación es en sentido de las manecillas del reloj vista desde arriba, ¿Cuál será la magnitud y dirección de la velocidad angular de precesión?.

La velocidad angular de precesión se obtiene a partir de la expresión:

$$Wp = \frac{m g \gamma^{\circ}}{L} ,$$

donde la cantidad de movimiento angular es, $L = I w = 5 \times 10^{-4} \text{ kg-MT}^2 \left(30 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} \times 2 \% \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \right) = 0.0942 \frac{\text{kg-MT}^2}{\text{seg}}.$

por lo tanto,

$$wp = \frac{0.50 \text{kg} \times 9.8 \text{ M/seg}^2 \times 0.04 \text{M/}}{0.0942 \frac{\text{kg} - \text{M/}^2}{\text{seg}}}$$

 $wp = 2.06 \frac{rad}{seg}.$

La dirección de la velocidad angular de precesión es en el sentido de lasmanecillas del reloj, visto desde arriba.

2.- Cantidad de movimiento angular y velocidad angular.

Para encontrar la relación entre la cantidad de movimiento angular y la velocidad, para el caso de partículas y cuerpos rígidos que giran en torno de uneje fijo en un marco de referencia inercial, considere la partícula de masa m-de la figura 3-2, moviendose con una velocidad V en torno del eje z de un marco de referencia inercial. La velocidad angular w se encuentra sobre el eje z y apunta en la dirección de él. La cantidad de movimiento angular L de la partícula con respecto al origen 0 está dada por:

Para este caso el vector L no es paralelo a w, por ser este perpendicularal plano que forma ψ y p. Sin embargo, aunque L no sea paralela a w, la rela--ción $\Upsilon = \frac{dL}{dt}$ para un momento de rotación que obra sobre una partícula si es aplicable para este caso, ya que al moverse la partícula el vector L cambia de di-rección al transcurrir el tiempo, sin cambiar su magnitud.

Al estarse moviendo la partícula en un círculo, actúa sobre ella una fuerza centrípeta F, como se muestra en la figura 3-2b. Se puede imaginar que F es-

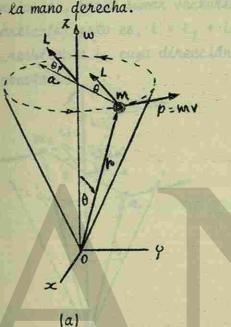
The ties of the set there each Taylander 1940 at all managers alking as constituted to have also the object to the matter of the property of the state of

ta aplicada por la tensión de una cuerda que une la partícula que gira con el - eje z.

La fuerza centrípeta F proboca un momento de rotación con respecto a 0 que está dado por:

7 = +XF

Donde T es perpendicular al plano formado por Py F y es tangente al circulo; su dirección se representa en la figura 3-2b y se obtiene aplicando la regla de la mano derecha.



(b)

FIGURA 3-2

En la figura 3-2b se vé que el vector L tiene una componente L≥ paralela a w, y una componente L⊥ perpendicular a w.

Para encontrar una relación entre Lz y w para la partícula de la figura -- 3-2b; se tiene a partir de la figura 3-2a que:

 $L = \Psi \times p = \Psi psen90^\circ = \Psi (mv) = \Psi m [w(\Psi sen0)] = m \Psi^2 wsen0.$ De la figura 3-26 se tiene que:

Lz = Lseno = mw y 2 seno.

Como v seno = a, el radio del círculo a traves del cuál se mueve la partícula, se obtiene que:

Lz = ma^2w , Ecuación 3-3. donde ma^2 es el momento de inercia I de la partícula con respecto al eje z. Por lo tanto:

Lz = Iw

Ecuación 3-4.

Si ahora en el sistema de la figura 3-2 se introduce otra partícula de masa m en la misma órbita y moviendose con igual velocidad, pero en un punto diametralmente opue cula, la clantida tud igual a la duna dirección di el vector L2 que Los vectores L1.

Para encont dos pariículas, cada partícula; vector resultant nitud constante.

NIVERSIDADAUTÓN

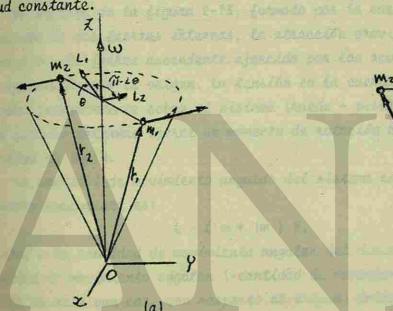
ty o the standed and the standard of the stand

DIRECCIÓN GENERA

the additional state of the administration of the following the state of the state

metralmente opuesto al otro lado del eje de rotación. Para está segunda partícula, la clantidad de movimiento angular L_2 con respecto a 0, tendrá una magnitud igual a la de L_1 y formará el mismo angulo $(90^\circ-\theta)$ con el eje Ξ , pero conuna dirección diferente con respecto a ese eje. En la figura 3-3a se representa el vector L_2 que se encuentra en el lado opuesto del eje Ξ con respecto a L_1 . Los vectores L_1 y L_2 forman entre si un ángulo de $180^\circ-2\theta$.

Para encontrar la cantidad de movimiento angular total L del sistema de -dos pariículas, basta sumar vectorialmente la cantidad de movimiento angular de
cada partícula; esto es, $L = L_1 + L_2$. En la figura 3-3b, se representa este -vector resultante L, cuya dirección es a lo largo del eje z y además es de mag-



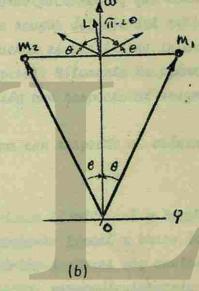


FIGURA 3-3.

La razón de que el vector resultante L sea constante para este sistema dedos partículas, significa que $\frac{dL}{dt}$ = 0; por lo tanto, \tilde{I} = 0 para este sistema. Esto es, devido a que el momento de rotación con respecto a 0 de cada partícula tiene la misma magnitud, pero con dirección opuesta. Por lo tanto, el momento de rotación que obra sobre el sistema de dos partículas es cero.

El hecho de que w u L tengan la misma dirección se debe a que las dos partículas tienen igual masa y se encuentran diametralmente opuestas a la misma -- distancia del eje de rotación.

Si ahora se considera que el sistema es un cuerpo rígido, que es simétrico con respecto al eje de rotación, entonces para cada elemento de masa en el cuer po corresponderá otra elemento idéntico en posición diametralmente opuesta y ala misma distancia del eje de rotación; por lo tanto, se puede considerar que -

estante cerca es ata esta ést del cie de refacilia. Par callo de referir In countdied to marketistic measures I, and reasons a finishment in contract the countries of respect or to the first of meteor angula 120 - 61 car of views, pero con Blacegión di formite con reaperio e cas cie. En le fectes 3-or de an median L, our se encurences en el lado encest vertoace L. u.L. (comm. cotte & undirecting and concentral is contical de new sixta auman alle the same direction and a least deal A Langue discount

FIGURA 3-5.

non ringhapor aga i signifirma

east with and auto or other address of the course has the this and

at est de hotseide, estantes sant cede chemosto de sale en al cent kannagondeta etka elomente eldenken en porteida discuttabetata opuetita e sincome decounters are all the restability out to turbe the smede considered que

el cuerpo está formado por grupos de pares de partículas. Por consiguiente, W u L son paralelos para todos estos pares así como también para cuerpos rigidos -que sean simétricos con respecto a su eje de rotación. Por lo tanto, para cuerpos rigidos simétricos se puede escribir en forma vectorial,

Ecuación 3-5 L = I w

donde L representa la cantidad de movimiento angular total. La ecuación 3-5 se aplica solamente a cuerpos simétricos con respecto al eje de rotación.

Ejemplo 3-2.

Resolver el problema del ej.2-7, cap.2, aplicando directamente la ecuación

El sistema de la figura 2-13, formado por la rueda M y la masa m, recibe la acción de dos fuerzas externas, la atracción gravitacional mg que obra sobre la masa m y la fuerza ascendente ejercida por los apoyos del eje del cilindro,que se tomará como el origen. La tensión en la cuerda es una fuerza interna yno obra exteriormente sobre el sistema (rueda + peso). Solamente la primera deesas fuerzas externas ejerce un momento de rotación con respecto al origen y su magnitud es (mg)R.

La cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al origen en un instante cualquiera es:

siendo I w la cantidad de movimiento angular del disco (dimétrico) y (mv)R la -cantidad de movimiento angular (=cantidad de movimiento lineal x brazo de pla-cal de la masa que cae, con respecto al origen. Ambos factores que contribuyena Lapuntan en la misma dirección y sentido, a saber, perpendicularmente al pla no de la figura 2-13 y saliendo de ella.

Aplicando $T = \frac{dL}{dt}$ (en forma escalar) resulta.

$$(mg)R = \frac{d}{dt} (Iw + mwR)$$

$$= I(\frac{dw}{dt}) + mR (\frac{dU}{dt})$$

$$= I \propto + mRa.$$

Puesto que a = $\propto R$ y $T = \frac{1}{7}$ MR², lo anterior se reduce

$$mgR = \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{a}{R}\right) + mRa$$

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

sustitiuyendo valores se obtiene:

$$a = \frac{2 \times 4.5 \text{ NT}}{3\text{kg} + 2 \times 0.46\text{kg}} = 2.3 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2}$$

whise ext describ on dates of march is particular. The continuent their said as new year respectit or he said the selections and the Beatle, reach corner the sistement of the simulated by the second of the second the state of the s AND EXCLUSIONALLY LONGE OF ANALOGY PRINTED + 1955/ . TO WINNESS AN ORIGINAL A MARKET OF MODERNICOTO CONTRACTOR AND ASSESSED AS ASSESSEDADAS AS ASSESSEDADAS AS ASSESSEDADAS AS ASSESSEDADAS AS who is a contided do movimiento avaidan de enere limitante la lance which do morphococca appropriate forcestates as colonidaded a factor of the forces to be man one one, one reason to unique, maded to the same to colored on in misser discreping a deposition of Annies, solding supplied the first

NIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERA

ingespie sa executas cipospie

3.- Conservación de la cantidad de movimiento angular.

El principio de la conservación de la clantidad de movimiento angular dice que, "cuando el momento de rotación externo resultante que obra sobre un sistema es cero, el vector de cantidad de movimiento angular total del sistema se -- conserva constante". Esto es, si se considera que a partir de la expresión --- γ ext. = $\frac{dL}{dt}$ la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre un sistema de partículas es cero (ext.= o); por lo tanto, $\frac{dL}{dt}$ = o, de manera que L =- una constante.

La cantidad de movimiento angular total Lpara un sistema con n partícula -

 $L = L_1 + L_2 + \dots + Ln$

Si el momento de rotación externo resultante que obra sobre el sistema escero, se tiene:

L = una constante = Lo, Ecuación 3-6.

donde Lo es el vector de cantidad de movimiento angular total constante. Como - la ecuación 3-6 es una cantidad vectorial, entonces será equivalente a tres e-cuaciónes escalares, una para cada eje de coordenadas que pase por el punto de-referencia.

Para un cuerpo rigido que gira en torno del eje z que se encuentra fijo en un marco de referencia inercial, se tiene que:

La = Iw,

donde Lz es la componente de la cantidad de movimiento angular según el eje derotación e I el momento de inercia con respecto a ese eje. Cuando no obra ningún momento de rotación externo, $L_{\underline{z}}$ debe permanecer constante, y si se presenta rá un cambio de I, debería haber también un cambio de w para poder compensar este cambio de . Para este caso, el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular se expresa así:

 $Iw = I_{owo} = una constante.$ Ecuación 3-7.

La ecuación 3-7 es aplicable a la rotación alrededor de un eje fijo, asícomo también alrededor de un eje que pase por el centro de masa del sistema y que se mueva conservándose siempre paralelo a sí mismo.

En la figura 3-4 se muestra un clavadista, que en el momento de dejar el trampolin tiene una velocidad angular wo con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de masa, tal que lo haría girar la mitad de una vuelta antes de llegar al agua. Si en ese instante deseará dar vuelta y media, debería triplicar su velocidad angular.

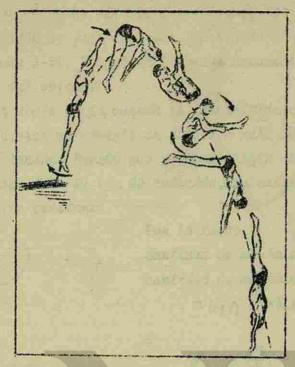


FIGURA 3-4.

Como en este caso no existen fuerzas externas obrando sobre él, excepto -- la gravedad que no provoca ningún momento de rotación con respecto a su centro-de masa. Por lo tanto, su cantidad de movimiento angular permanece constante, e $I_{\text{o}\text{w}} = I_{\text{w}}$. Como w = 3 wo, el clavadista debe cambiar su momento de inercia conrespecto al eje horizontal que pasa por su centro de masa del valor inicial $I_{\text{o}\text{-}}$ a un valor $I_{\text{o}\text{-}}$ que es igual a $\frac{1}{3}$ o. Esto lo podra lograr encogiendo sus brazoa y-piernas hacia el centro de su cuerpo.

Entre mas grande sea la velocidad angular inicial que lleve el clavadistay cuatro más pueda reducir su momento de inercia, mayor será el número de revoluciones que pueda dar en un tiempo dado.

La energía cinética de rotación del clavadista no es constante.

Va que hay un aumento de Esta proporcionado por el clavadista, quien hacetrabajo al encoger las diversas partes de su cuerpo. Esto se debe a que,

Tw = Iowo

DE BIBLIQUE LE CAS

Ejemplo 3-3.

Un pequeño objeto de masa m = 80 grs. está fijo a un cordón ligero que pasa por un tubo hueco. El tubo se sostiene con una mano y el cordón con la otra.

El objeto se pone a girar en un círculo de radio y = 30 cm con una velocidad - $1/1 = 630 \frac{\text{cm}}{\text{seq}}$. El cordón se jala entonces, acortando el radio de la trayecto-ria a vo = 15cm (figura 3-5). Encontrar la nueva velocidad lineal Vo y la nueva donde. por lo tanto.

velocidad angular w, del objeto. La tensión hacia abajo en la cuerda es transmitida como fuerza radial alobjeto. Esta fuerza ejerce un momento de rotación nulo sobre el objeto con resnecto al centro de rotación. Puesto que no obra ningún momento de rotación so-bre el objeto con respecto a su eje de rotación, su cantidad de movimiento angu lar en esa dirección es constante. Por lo tanto.

FIGURA 3-5.

cantidad de movimiento angular inicial = cantidad de movimiento angular final.

$$V_2 = V_1(\frac{r_1}{r_2}) = 630 \frac{cm}{seg} (\frac{30 cm}{15 cm}) = 1260 \frac{cm}{seg}$$

puesto que V1 es igual a w1 r1 y V2 es --igual a worn, se tiene,

$$mr_1^2 w_1 = m r_2^2 w_2$$

$$w_2 = w_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 ,$$

 $w_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \frac{630 \frac{\text{cm}}{\text{$\lambda eg.}}}{\# \text{$1$ CM.}} = 21 \frac{\text{rad}}{\text{$\lambda eg.}}$

 $w_2 = 21 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \left(\frac{30 \text{cm}}{15 \text{cm}} \right)^2 = 84 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}.$

Ejemplo 3-4

Un estudiante está sentado en un banquillo que puede girar libremente alre dedor de un eje vertical. Sostiene sus brazos extendidos horizontalmente con -una pesa de 35.6 47 en cada mano. El instructor lo pone a girar con una veloci-dad angular de 0.50 rev sea. Supóngase que el rozamiento es insignificante y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje vertical. Supóngase tam-bién que el momento de inercia del estudiante permanece constante con un valorde 5.43kg-mt² al acercar sus manos a sus costados y que el cambio del momento de inercia se deba solamente a que las pesas aproximan al centro. tómese como distancia original de las pesas al eje de rotación 0.915MTy como su distanciafinal 0.152mt. Encontrar la velocidad angular final del estudiante.

INIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

La única fuerza externa es la gravedad que obra pasando por el centro de masa, y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje de rota--ción. Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular con respecto a ese eje se
conserva y cantidad de movimiento angular inicial = cantidad de movimiento angular final

1 000 = I w

se tiene que,

I = I estudiante + I pesas, $I = 5.43 + 2 \left(\frac{35.6}{9.8}\right) (0.915)^2 = 11.51 \text{ kg-M7}^2.$ $I = 5.43 + 2 \left(\frac{35.6}{9.8}\right) (0.152) = 5.6 \text{ kg -M7}^2.$ $w_0 = 0.50 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} \times \text{LW} = \frac{\text{rad}}{\text{seg.}}$

Por lo tanto, $w = w_0(\frac{I_0}{I}) = \widehat{\mathcal{U}} \frac{rad}{seg} (\frac{11.51}{5.6}) = 2\widehat{\mathcal{U}} \frac{rad}{seg} = 1 \frac{rev}{seg}.$

4.- Algunos otros aspectos de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular es más fundamental que las leyes de Newton, ya que mientras la primera se aplica en física atómica y nuclear así como en las regiones celestes y macroscópicas; las de-Newton no se aplican a estas regiones atómicas y nucleares.

Para establecer el principio de la conservación se utilizó la tercera leyde Newton para demostrar que la suma de los momentos de rotación internos eracero. Se tubo que afirmar que las fuerzas de acción y reacción eran iguales yopuestas y que estaban dirigidas sobre la línea que une las dos partículas.

Para un sistema de cuerpos que se pueden considerar como partículas, la -ley de la conservación es aplicable siempre y cuando los efectos debidos a la rotación de los cuerpos individuales se puedan despreciar. Cuando los cuerpos individuales estpan en rotación, el principio de la conservación es validó si se incluye la cantidad de movimiento angular debida a esa rotación.

Cuando aplicamos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento an gular total a la física atómica y nuclear se encuentra que los electrones, protones, mesones y neutrones, tienen cantidad de movimiento angular debida a algún movimiento de rotación intrínseco y a un movimiento orbital alrededor de algún punto externo, que debe ser incluida al calcular la cantidad de movimiento angular total.

Las cantidades de movimiento angulares para los sistemas atómicos, molecu-

lares y nucleares tienen valores definidos.

Si se considera que el sol, los planetas y satélites sean partícular que no tienen movimiento de rotación intrínseco, la cantidad de movimiento angulardel sistema solar no sería constante. Pero esto no sucede así ya que estos cuer
pos si tienen rotaciones intrínsecas probocadas por las fuerzas de marea que -convierten una parte de esa cantidad de movimiento angular de rotación intrínse
ca en cantidad de movimiento angular orbital de los planetas y satélites.

La conservación de la cantidad de movimiento angular total es importante - para valorizar las teorías del origen del sistema solar, de la contracción de - estrellas gigantes y de otros problemas en astronomía.

Esta forma simple de analizar la cantidad de movimiento angular total de los sistemas atómicos o astronomicos, es un teorema de que la cantidad de movimiento angular total L de un sistema cualquiera con respecto al origen de un -marco de referencia inercial se puede calcular sumando la cantidad de movimiento angular con respecto a su centro de masa con la cantidad de movimiento angular que proviene del movimiento del centro de masa con respecto al origen.

Las leyes de la conservación de la energía total y de la cantida de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular son fundamentales en física, y son válidas para todas las teorías de físicas modernas.

5. - Resumen.

En la tabla 3-1 se han reunido todas las ecuaciones que tratan de la dinámica de los movimientos de rotación y se ha hecho un comentario acerca de las condiciones bajo las cuales se pueden usar.

TABLA 3-1

RESUMEN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE ROTACION

ECUACION

NOTAS

IADEN

r=pxF

Text. = [TL = [(rixfi)

L = r xp

 $L = \sum L_i = \sum (r_i x p_i)$

ALLE VIEW TO SEE THE RESERVE

I.- Ecuaciones de definición

Momento de rotación de una partícula con - respecto a un punto 0, debido a una fuerza resultante F

Momento de rotación externo resultante sobre un sistema de partículas con respectoa un punto 0

Cantidad de movímiento angular de una partícula con respecto a un punto 0

Cantidad de movimiento angular resultantede un sistema de partículas con respecto a

 $\hat{I} = \frac{dL}{dt}$

fext. = $\frac{dL}{dt}$

T=Ix

un punto 0

11.- Relaciones generales

Ley de movimiento de una sola partícula sobre la que está aplicado un momento de rotación. Es válida solamente si γ L se miden con respecto a un punto cualquiera 0 - fijo en un marco de referencia inercial. Y es el análogo rotacional de $F = \frac{dp}{dt}$

Ley del moviniento de un sistema de particulas sobre el que obra un momento de rota ción externo resultante \widetilde{I} ext. Es válida so lamente si \widetilde{I} ext. y L se miden con respecto a (a) un punto cualquiera 0 fijo en un marco de referencia inercial, o bien, (b) con respecto al centro de masa del sistema. Es la ley rotacional análoga de $F = \frac{dP}{dt}$

111.- Caso especial de un cuerpo rígido girando alrededor de un eje en un marco de referencia inercial

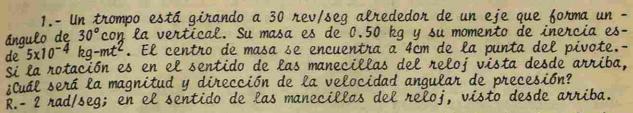
∞ está obligada a conservarse a lo largodel eje; I debe referirse también a este eje y 7 debe ser la componente escalar de-Text. dirigida sobre ese mismo eje. Es laley rotacional análoga de F = Ma del movimiento rectilíneo.

w está obligada a conservarse a lo largo - del eje; y debe referirse también a este - eje y L debe ser la componente escalar de-la cantidad de movimiento total sobre ese-mismo eje. Si el eje de rotación tiene alguna simetría especial (esto es, si es uneje principal), entonces L y w estarán ambos dirigidos sobre el eje. Está ley es la análoga rotacional de P = M V para el movimiento rectilíneo.

NIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NI

and the terminal specification of the

IRECCIÓN GENERAL DE BIBLIC



2.- a) Suponiendo que el electrón se mueve en una órbita circular alrede-dor del protón en un átomo de hidrógeno, si la fuerza centrípeta sobre el electrón es producida por una fuerza eléctrica $\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \gamma^2}$, siendo e la magnitud de la

carga de un electrón y de un protón, r el radio de la órbita, y ¿ una constante, demostrar que el radio de la órbita es

siendo m la masa del electrón y v su velocidad.

b) Supóngase ahora que la cantidad de movimiento angular del electrón alrededor del núcleo puede tener solamente valores que sean múltiplos enteros n de h/217siendo h una constante que se llama constante de Planck. Demostrar que las unicas órbitas electrónicas posibles son aquellas de radio

c) Combinar estos resultados para eliminar a $\neg y$ demostrar que las únicas órbitas para las cuales se cumplen ambos requisitos son las que tienen radios

por consiguiente los radios permitidos son proporcionales a los cuadrados de -- los números enteros n=1,2,3, etc. Cuando n=1, r tiene el valor más pequeño po sible que es de $0.528 \times 10^{-10} m$.

3.- Determinar a) la cantidad de movimiento angular de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje, b) la cantidad de movimiento angular de movi--miento orbital de la Tierra alrededor del Sol.

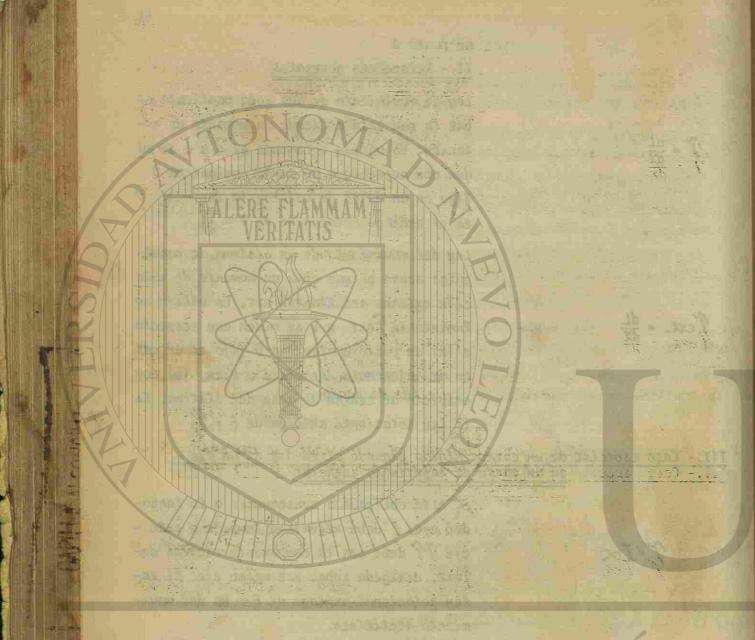
R: a) $6.94 \times 10^{33} \text{kg-mt}^2/\text{seg}$ b) $2.61 \times 10^{40} \text{kg-mt}^2/\text{seg}$.

4.- En un parque de juegos hay un pequeño carrousel de 1.22m de radio y -- 175kg de masa. El radio de giro es de 0.915m. Un muchacho de masa 43.8kg correcon una velocidad de 3.05 m/seg en dirección tangente a la periferia del carrou sel cuando éste se encuentra en reposo y salta al carrousel. No tomando en cuen ta el rozamiento, encontrar la velocidad angular del carrousel y del muchacho.

0.77 rad/seg; 2.5 rad/seg.

5.- Una regla tiene una masa de 4.38kg y una longitud de 1.22m. Se encuentra inicialmente en reposo en una superficie plana horizontal sin rozamiento yrecibe un golpe perpendicularmente de una fuerza impulsiva cuyo impulso es de-13.3nt-seg a una distancia 1=0.46m del centro. Determinar el movimiento que toma a partir de ese momento.

R: 11.2 rad/seq.



6.- Una rueda está girando con una velocidad angular de 500 rev/min en uneje cuyo momento de inercia es insignificante. Una segunda rueda identica a laprimera, y que inicialmente está en reposo, repentinamente se acopla al mismo eje. ¿Cuál es la velocidad angular de la combinación que resulta al acoplar eleje y las dos ruedas?

R: 26.25 rad/seg.

7.- Un hombre está de pie en una plataforma giratoria sin rozamiento, queestá girando con una velocidad de 1 rev/seg; sus brazos están estirados y sostiene una pesa en cada mano. Con sus manos en esta posición, el momento de iner
cia total del hombre y de la plataforma es de 6kg-mt². Si al acercar las pesasal cuerpo, el hombre disminuye el momento de inercia a 2kg-mt², a) ¿Cuál es lavelocidad angular resultante de la plataforma? b) ¿Cuánto aumenta la energía ci
nética?

R: 18.9 rad/seg; 236.6 joules.

8.- Una cucaracha, de masa m, corre en sentido contrario a las manecillasdel reloj por el borde de un platillo giratorio montado sobre un eje vertical de radio R y momento de inercial I sobre apoyos sin rozamiento. La velocidad de
la cucaracha con relación a la tierra es V, mientras que el platillo gira en el
sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular Wo. La cucarachaencuentra una migaja de pan en el borde y, por supuesto, se detiene. ¿Cuál esla velocidad angular del platillo después de que se detiene la cucaracha?

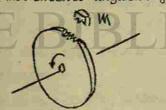
$$R: \omega = \frac{RW_o - 2V_o}{3R}$$

9.- Una partícula se dispara horizontalmente a lo largo del interior de un cazo semies férico de radio r que está en reposo figura 3-6. Queremos encontrar-la velocidad inicial V o que se requiere para que la partícula llegue apenas alborde del cazo. Encontrar a V o como función de θ o, la posición angular inicialde la partícula

 $R: \mathcal{V}_o = \frac{2 g r}{\cos \theta_o}$

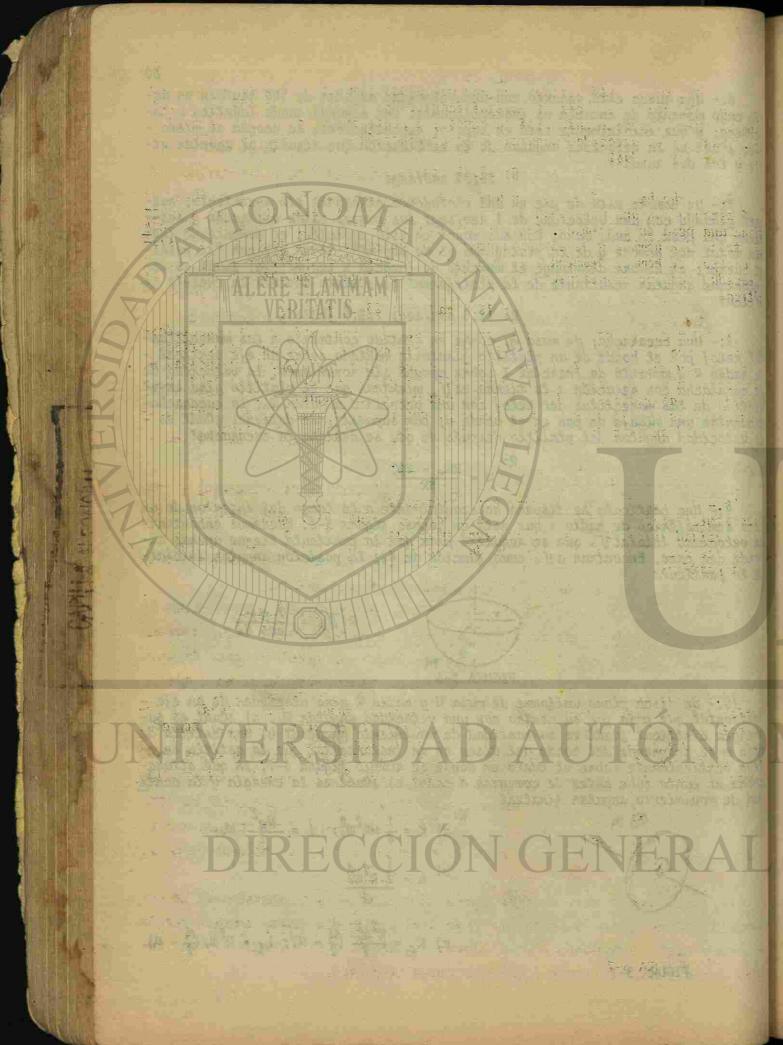
FIGURA 3-

10.- Un disco plano uniforme de masa M y radio R gira alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro con una velocidad angular Wo. a) ¿Cuál es suenergía cinética? ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular? b) Una astilla de
masa m se desprende del borde del disco en un instante tal que la astilla se eleva verticalmente sobre el punto en donde se rompió figura 3-7. ¿A qué alturasobre el punto sube antes de comenzar a caer? c) ¿Cuál es la energía y la canti
dad de movimiento angular finales?



R: a) $K = \frac{1}{4} MR^2 w_o^2$; $L = \frac{MR^2}{2} w_o^2$ b) $h = \frac{1}{2} R^2 w_o^2$

c) $K_{f} = \frac{R^{2}w_{o}^{2}}{2}(\frac{M}{2} - M); L_{f} = R^{2}w_{o}(\frac{M}{2} - M)$



CAPITULO IV O S C I L A C I O N E S

1.- Introducción. Oscilaciones.

En el presente capítulo se estudiará el movimiento de un cuerpo cuando laquerza resultante que actúa sobre él no es constante, sino que varía durante el
movimiento. Como esta fuerza puede variar de infinitas maneras, no se pueden -dar expresiones generales para el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza
variable, excepto que la aceleración en un instante cualquiera es igual a la -fuerza en dicho instante, dividida por la masa del cuerpo. Un caso partícular de variación que se presenta en la práctica con mucha frecuencia, es la fuerzaelástica recuperadora que se origina al deformarse un cuerpo, abandonado en estado de deformación.

Algunos ejemplos de esta clase de movimiento son la vibración hacia arriba y hacia abajo que se presenta cuando se estira hacia abajo un cuerpo suspendido de un resorte y se abandona a sí mismo; las vibraciones de las cuerdas de los instrumentos musicales; las oscilaciones del balancín de un reloj; los átomos en las moléculas, etc.

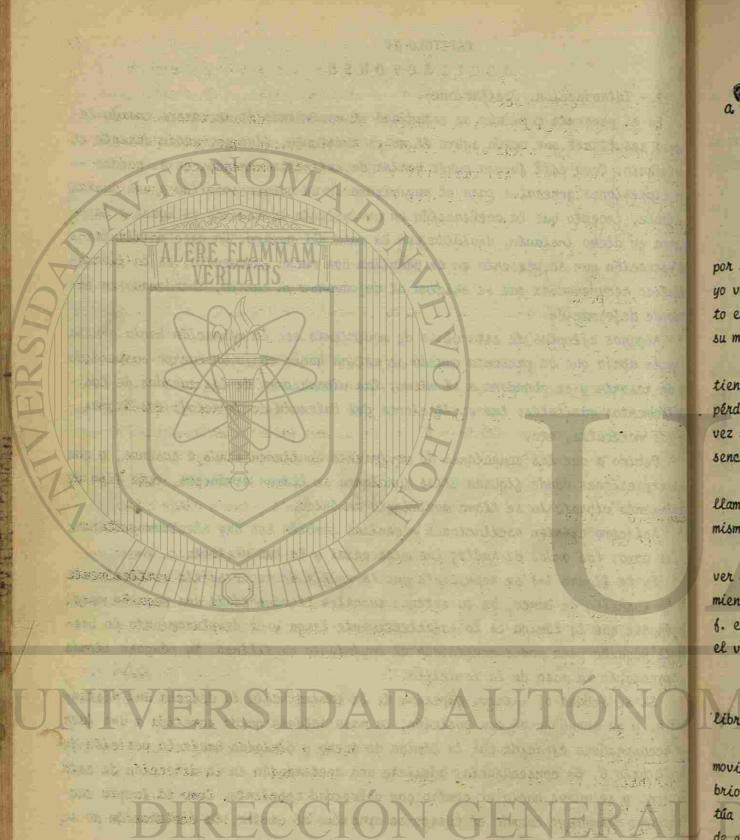
Debido a que las ecuaciones de movimiento contienen senos o cosenos, y que las expresiones donde figuran estas funciones se llaman armónicas, este tipo de movimiento vibratorio se llama movimiento armónico.

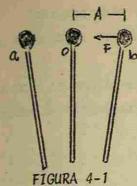
Así como existen oscilaciones mecánicas también las hay electromagnéticas, tales como, las ondas de radio, las microondas y la luz visible.

En la figura 4-1 se representa una laminilla de acero sujeta verticalmente en un tornillo de banco, en su extremo superior lleva soldada una pequeña masa. Supóngase que la lámina es lo suficientemente larga y el desplazamiento lo bastante pequeño para poder considerar el movimiento rectilineo. Su póngase además despreciable la masa de la laminilla.

Si se separa el extremo superior de la lámina hacia la derecha una distancia A, y se abandona en esa posición, la masa soldada queda sometida a una fuer za recuperadora ejercida por la lámina de acero y dirigida hacia la posición de equilibrio 0. En consecuencia, adquiere una aceleración en la dirección de esta fuerza, y se mueve hacia el centro con velocidad creciente. Como la fuerza aceleradora disminuye cuando el cuerpo se aproxima al centro, la aceleración no se rá constante.

En este ejemplo, despues de iniciada la oscilación y al transcurrir el --- tiempo la elongación A, la velocidad y la aceleración del cuerpo cambian periódicamente tanto en magnitud como en sentido, y debido a la relación F = ma, enigual forma cambia la fuerza F que obra sobre el cuerpo.





Cuando el cuerpo alcanza la posición de equilibrio, se anula la fuerza recuperador; pero, acausa de la velocidad adquirida, el cuerpo sobrepasa la posición de equilibrio y continúa su movimiento hacía la izquierda.

En cuanto ha pasado la posición de equilibrio, entra en juego de nuevo la fuerza recuperadora, dirigida ahora hacia la derecha, y, --

por lo tanto, el cuerpo va perdiendo velocidad con una aceleración negativa cuyo valor absoluto aumenta al aumentar la distancia del cuerpo a 0. Debido a esto el cuerpo se detendrá en algún punto situado a la izquierda de 0, y repetirá su movimiento en sentido opuesto.

Cada movimiento de vaivén tiene lugar en el mismo tiempo, y el movimientotiene un alcance + A a cada lado de la posición de equilibrio. Si no existierapérdida de energía por rozamiento el movimiento continuaría indefinidamente una vez iniciado. Al movimiento bajo la acción de una fuerza recuperadora y en ausencia de todo rozamiento, se le llama movimiento armónico simple.

El tipo de movimiento que se repite en intervalos de tiempos iguales se le llama periódico, y si el movimiento es hacia adelante y hacia atrás sobre la --misma trayectoria, se le llamo oscilatorio.

Una oscilación o vibración completa es el movimiento efectuado hasta volver al punto de partida, esto es, de \underline{a} a \underline{b} y volver a \underline{a} . El período T del movimiento, es el tiempo empleado en realizar una vibración completa. La frecuencia f. es el número de vibraciones completas realizadas en la unidad de tiempo g es el valor recíproco del período, o sea:

f = 1

Ecuación 4-1

La elongación x en un instante dado es la distancia a la posición de equilibrio, en dicho instante. La amplitud A es la elongación máxima.

Si la masa de la figura 4-1 oscila entre los límites fijos x_1 y x_2 con un-movimiento armónico, experimenta un vaiven con respecto a su punto de equili-brio en el cuál su energía potencial es mínima. La fuerza recuperadora que actúa sobre la masa en un instante cualquiera se obtiene a partir de la función de energía potencial,

 $F = -\frac{dU}{dx}$

siendo nula en la posición de equilibrio 0. Cuando la masa se encuentra a la iz quierda de 0 la fuerza apunta hacia la derecha y vicebersa. Esto se muestra enla figura 4-2.

Para una masa que oscila la energía mecánica total E será igual a la sumade su energía cinética y su energía potencial, esto es,

Ecuación 4-2

donde E se mantiene constante, si no obra ninguna fuerza conservativa, como lafuerza de rozamiento.

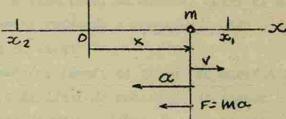


FIGURA 4-2

2.- El oscilador armónico simple.

Cuando una partícula de masa m oscila entre límites iguales, a ambos lados de su posición de equilibrio, tales como -x y x, se le llama oscilador armónico simple y su movimiento se le conoce con el nombre de movimiento armónico simple figura 4-3a.

En la figura 4-3b se representa gráficamente la energía potencial de la -partícula, la cuál varía de acuerdo con la ecuación,

$$u(x) = \frac{1}{2} Kx^2,$$

Ecuación 4-3

donde k es una constante, además se muestra la energía mecánica total. La fuerza que obra sobre la partícula está dada por la ecuación,

$$F(x) = -\frac{du}{dx} = -\frac{d(2 kx^2)}{dx} = -kx$$
, Ecuación 4-4

y se representa gráficamente en la figura 4-3c.

DRECCIÓNICENERALDE

SAME OF THE STREET, SOME THE PROPERTY OF

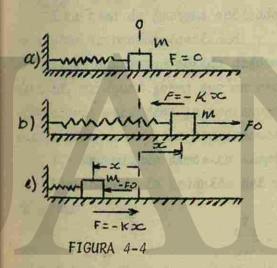
DE BIBLIO FE CAS

FIGURA 4-3.

En el movimiento armónico simple la energía potencial varía proporcional—mente al cuadrado de la elongación, y la fuerza que obra sobre la partícula esproporcional a la elongación pero con sentido opuesto.

La ecuación 4-3 es la expresión de la energía potencial para un resorte ideal, que se estira o comprime una distancia x. El resorte ideal es aquél en el cuál la fuerza ejercida por el resorte estirado o comprimido está dada por ---- F9x) = - kx, siendo k la constante de fuerza.

Un ejemplo de un oscilador armónico símple es el que se muestra en la figura 4-4, el cuál consiste de un resorte ideal de constante de fuerza k en cuyo extremo se encuentra unido un cuerpo de masa m libre de moverse sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Cuando el resorte se deja libre toma la posición que se muestra en la figura 4-4a, donde la fuerza ejercida por el resorte es nula.



DIRECCIÓN GENERA

Si se aplica una fuerza Fo, el resorte se estira una distancia x, hacia la derecha, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda yestá dada por F = - kx, (difura 4-4b). Bajo la acción de una fuerza -Fo, el resorte se comprime hacia la izquierda una distancia -x, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la derecha y se dá por F = - kx, figura 4-4c.

El movimiento de la masa que oscila -

es un movimiento armónico simple y la fuerza que ejerce el resorte sobre el --- cuerpo es una fuerza restauradora.

Como ya dijo antes k es una constante de proporcionalidad llamada constante del resorte. Sus unidades son newtons por metro y es una medida de la fuerza requerida para producir estiramiento unitario si el resorte fuera completamente extensible.

Si se aplica la segunda ley de Newton, F=ma, al movimiento de la figura -- 4-4, y sustituyendo -kx en lugar de F y escribiendo la aceleración a como $\frac{d^2x}{dt^2}$ (= $\frac{dV}{dt}$), se obtiene:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

The state of the s as allocated of the biorgardent in the factor one aske hear in the factor of estange at la elemente fin pero con servició operation t ecuación 1-5 es la expresión de sa energia as estados les es estados s out to asking a constinue and a formation of the ALARI STAMMAN IN THE STATE OF T A THE COLD WELL AND AND THE PROPERTY OF THE ORIGINAL ENGINEERS THE REAL PROPERTY OF THE PROPE que as nucatra en la service se dente se trente de mara en contrata A A TOTAL STATE OF THE STATE OF - This are seen all to come paying to

Al desarrollar está ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación x con el tiempo t y de esta manera se conocerá el movimiento del cue rpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los -problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, ó ptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se leconoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad,vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si lasvibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, sepueden considerar como osciladores armónicos simples.

3. - Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en - la forma:

 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$ Ecuación 4-6

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función x(t) que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que x sea una función de t, tal que su segunda deriva da respecto a t, sea igual al valor negativo de la función misma (-x), multiplicada por una constante $(\frac{R}{m})$.

Esta circunstancia sugiere que x es una función trigonométrica de t. De do nde se encuentra que por cálculo, la función seno o la funcion coseno poseen es ta propiedad. Por ejemplo, $\frac{d}{dt}$ cost = - sent y $\frac{d^2}{dt^2}$ cost = - $\frac{d}{dt}$ sent = - cost.

Si esta función se multiplica por una constante A, la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como - solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

 $x = A \cos (\omega t + d)$

Ecuación 4-1.

- This is a fight of the second of the secon as allocated of the biorgardent in the factor one aske hear in the factor of estange at la elemente fin pero con servició operation t ecuación 1-5 es la expresión de sa energia as estados les es estados s out to asking a constinue and a formation of the ALARI STAMMAN IN THE STATE OF T A THE COLD WERE AND SHEET THE PRINCE OF THE ORIGINAL ENGINEERS THE REAL PROPERTY OF THE PROPE que as nucatra en la santa s-la donte se topas destas ana el actual A A TOTAL STATE OF THE STATE OF - This are seen all to come paying to

Al desarrollar está ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación x con el tiempo t y de esta manera se conocerá el movimiento del cue rpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del -movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los -problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, ó ptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se leconoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad,vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si lasvibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, sepueden considerar como osciladores armónicos simples.

3. - Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en - la forma:

 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$ Ecuación 4-6

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función x(t) que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que x sea una función de t, tal que su segunda deriva da respecto a t, sea igual al valor negativo de la función misma (-x), multiplicada por una constante $(\frac{R}{m})$.

Esta circunstancia sugiere que x es una función trigonométrica de t. De do nde se encuentra que por cálculo, la función seno o la funcion coseno poseen es ta propiedad. Por ejemplo, $\frac{d}{dt}$ cost = - sent y $\frac{d^2}{dt^2}$ cost = - $\frac{d}{dt}$ sent = - cost.

Si esta función se multiplica por una constante A, la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como - solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

 $x = A \cos (\omega t + \delta)$

Ecuación 4-1.

Para determinar las constantes A, W y f, y saber si la ecuación 4-1 es la-solución de la ecuación 4-6, es necesario encontrar la segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación 4-1. Esto es, $\frac{dx}{dt} = -W$ A sen $\{wt + f\}$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2A \cos(wt + 6).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 4-6, se tiene: $- w^2 A \cos (wt + \sigma) = -\frac{k}{m} A \cos (wt + \sigma),$

si se supone que la constante w es, $w^2 = \frac{k}{m}$

Ecuación 4-8

se encuentra que,

$$x = A\cos(wt + \sigma),$$

que es la solución adecuada para la ecuación de un oscilador armónico simple.

Como las constantes A y f siguen siendo arbitrarias, para cualquier valorde las mismas quedará satisfecha la ecuación 4-6 y se podrá determinar una gran variedad de movimientos para el oscilador, o sea, que ésta ecuación describe un grupo de movimientos posibles con algunas características comunes.

Si en la ecuación 4-7, el tiempo t se aumenta en $\frac{2\pi}{w}$, la función resulta, $x = A\cos\left[w(t = \frac{2\pi}{w}) * d\right] = A\cos\left(wt = 2\pi * + d\right)$ $x = A\cos\left(wt + d\right).$

Significando esto, que la función simplemente se repite exactamente igualdespues de un tiempo $\frac{2\pi}{w}$. Como $\frac{2\pi}{w}$ es el período T del movimiento y sabiendo que $w^2 = \frac{k}{m}$ se tiene:

 $T = \frac{2\sqrt{n}}{w} = 2\sqrt{n}\sqrt{\frac{m}{k}}.$

Ecuación 4-9.

El período de oscilación es el mismo para todos los movimientos dados porla ecuación 4-6 y se determina por la masa m del cuerpo o partícula que vibra y por la constante de fuerza k. La frecuendia f del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, y se obtiene por:

La frecuencia angular
$$w$$
 se encuentra a partir de:
 $w = 2 \pi f = \frac{1}{2 \pi}$, Ecuación 4-10.
Ecuación 4-11.

Al utilizar las ecuaciones 4-9 o 4-10, m debe estar en slugs, kilogramos - o gramos y k en $\frac{kg}{mt}$, $\frac{nt}{mt}$ o $\frac{dinas}{cm}$. La frecuencia f, se expreza en $\frac{ciclos}{seg}$, y el - período T, en $\frac{seg}{ciclos}$. Las unidades de la frecuencia angular w son $\frac{radianes}{seg}$.

La elongación x con respecto al punto de equilibrio, tiene un valor máximo A, que es la amplitud del movimiento. Puesto que A no ha sido determinada por -

la ecuación diferencial, son posibles movimientos con diferentes amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y período. La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.

El término (wt *f) se le llama fase del movimiento, y a la constante f,-constante de fase. Si dos movimientos tienen la misma amplitud y frecuencia pe-

 $x = A \cos (wt = 0) = A \cos (wt - 90) = A \sin wt$.

no differente fase. Por ejemplo, $sio = -\frac{71}{3}$. La ecuación 4-7 resulta:

Esto es, la elongación es cero para el tiempo t = 0. Sid = 0, la elongación-x = A coswt tiene un valor máximo para el tiempo t = 0.

La amplitud A y la constante de fase f de la oscilación se determinan porla posición y la velocidad iniciales de la partícula. Sin embargo, una vez quese inicia el movimiento, la partícula sigue oscilando con una amplitud constante y una constante de fase para una cierta frecuencia fija, a menos que otrasfuerzas alteren el sistema.

En la figura 4-5, se representa gráficamente la elongación x en función -del tiempo t para diferentes movimientos armónicos simples. La figura 4-5a, representa los movimientos 1 y 2 que tienen igual amplitud y frecuencia, pero defase diferente cuyo valor es $f = \frac{27}{4} = 45$ °. La figura 4-5b, muestra los movimientos 1 y 3 con igual frecuencia y constante de fase, pero con amplitud diferente
que difiere en un factor de 2. La figura 4-5c, representa los movimientos 1 y 4
con igual amplitud y constante de fase, pero con diferente frecuencia, que difiere por un factor de 1 o en período por un factor de 2.

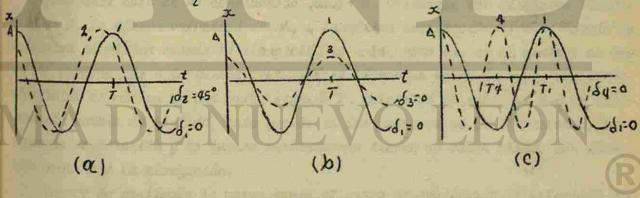


FIGURA 4-5

Para comprender mejor lo que es el movimeinto armónico simple, es converniente representar la elongación, velocidad y aceleración de la particula que oscila por medio de gráficas en función del tiempo, como se hace en la figura -4-6; donde se han representado estas cantidades para la curva 1 de la figura -4-5.

Estas cantidades pueden considerarse como representaciones gráficas de las

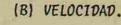
$$x = A \cos (\omega t + d)$$

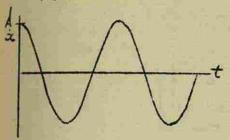
$$U = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin (\omega t + d)$$

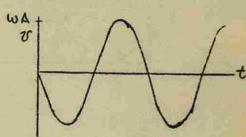
Ecuación 4-12.

$$a = \frac{d^2x}{dt} = \frac{d \mathcal{V}}{dt} = -w^2 A \cos (wt = 6).$$

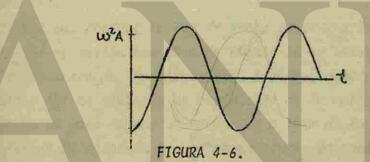
(a) ELONGACION.







(C) ACELERACION.



Para este caso se ha considerado que f=0. Obsérvese que la máxima elongación es A, la máxima velocidad es wA, y la máxima aceleración es w^2 A. Además la velocidad es máxima cuando la elongación es nula, esto es, en el centro; en don de la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor de cero. Cuando la elongación es máxima en cualquier sentido la velocidad es nula, ya que en esteinstante cambia de sentido, esto sucede en los extremos de la trayectoria, en donde la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor máximo con dirección opuesta a la elongación.

Cuando la partícula se mueve hacia el punto de equilibrio la velocidad aumenta y disminuye al acercarse a la máxima elongación.

En la figura 4-7, se muestra el movimiento de una partícula que oscila enel extremo de un resorte, y se representan los valores instantáneos de x, v y - a, para cuatro instantes.

NIVERSIDAD AUTÓN

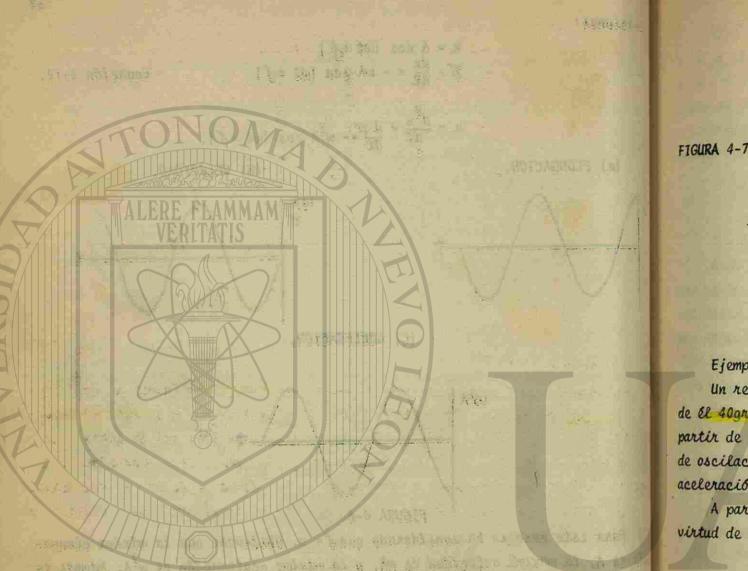
The test that the work of the beauty some some stands of the second of t

· to start appropriate the military and the first term will be appropriate the same of the same to be said to the

DIRECCIÓN GENERA

tage at your resolvery to fine any resolvery beauty of the friends of the friends and the friends

and on electrical representative event terms the properties and the contract of the contract o



T=27/m=27/26=1.09 (======1) Un resorte que obedece la Ley de Hooke se estira 20 cm cuando se cuelgan de él 40 grs. Si se cuelga una masa de 60 grs. en su extremo, y se tira 20 cm. apartir de su posición de equilibrio y se suelta, encontrar: (a) la frecuencia de oscilación; (b) la ecuación de movimiento de la masa; (c) la velocidad y laaceleración de la masa cuando se encuentra a 10cm de la posición de equilibrio.

A partir de la relación $k = \frac{1}{x}$, se encuentra la constante k del resorte; en virtud de que 40grs. lo alarga 20cm:

$$K = \frac{F}{x} = \frac{0.040 \text{kg x } 9.8^{\text{mt/seg}^2}}{0.20 \text{mt}} = 1.96 \frac{\text{NT}}{\text{Mt}}.$$

Utilizando las ecuaciones 4-9 y 4-10 se encuentra el período T, y la fre-cuencia f. De esta manera,

a)
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.060}{1.96}}$$
 seg = 1.1 seg.

 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.1} = 0.91 \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \text{ (o hertz)}.$ La amplitud del movimiento es 0.20mt, y tiene su desplazamiento máximo ... ent=o. Por lo tanto, x es una función coseno y es,

o) x = Acos wt = Acos 2 14 t = 0.20 cos 211 x0.91t,

 $x = 0.20 \cos 5.7t \text{ mts.}$ que da.

Ejemplo 4-1.

Para encontrar las ecuaciones de velocidad y aceleración, se obtienen la primera y segunda derivada de x con respecto a t. Esto es,

C)
$$V = \frac{dx}{dt} = 0.20 \ (-5.7 \text{sen } 5.7 t) = -1.14 \text{sen } 5.7 t. \frac{\text{mt}}{\text{seg}}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -1.14 \ (5.7 \cos 5.7 t) = -6.5 \cos 5.7 t. \frac{\text{mt}}{\text{seg}}^2$$

UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

Company of the Compan

Para evaluarlas cuando x = 0.10mt, se sustituye este valor en la ecuaciónx, y se obtiene,

 $0.10 = 0.20 \cos 5.7t \delta \cos 5.7t = 0.50$,

donde se ve que el ángulo 5.7t es 60° . Utilizando este ángulo para 5.7t en las - ecuaciones para y a, se producirán estas cantidades cuando x = 0.10mt. Obteniendo:

$$V = -1.14 \text{ sen } 60^{\circ} = -1.0 \frac{\text{mt}}{\text{seg}}.$$

 $a = -6.5 \cos 60^{\circ} = -3.25 \frac{\text{mt}}{\text{seg}}.$

4.- Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple.

Para una masa que oscila la energía mecánica total E = K + U se conserva - constante, siempre y cuando no obren fuerzas disipadoras. Como la elongación y-velocidad de la masa que oscila cambian constantemente, las energías cinética y potencial también varían, pero la suma conserva su valor para cada instante.

La energía potencial U en un instante cualquiera, para el movimiento armónico simple, está dada por:

$$U = \frac{1}{2} kx^2,$$

si la elongación se da por $x = A \cos (wt + d)$, resulta:

$$U = 1 KA^2 \cos^2 (wt + 6)$$
,

la energía potencial varía desde un valor mínimo de cero, hasta un valor máximo de $\frac{1}{7}$ KA 2 .

La energía cinética K en un instante cualquiera es: $K = \frac{1}{2} m \gamma^2$, aplicando las relaciones,

$$V = \frac{dx}{dt} = -w \text{ A sen } (wt + \delta) \quad y \quad w^2 = \frac{k}{m}, \text{ se obtione:}$$

$$K = \frac{1}{2} m w^2 A^2 \text{sen}^2 (wt + \delta)$$

$$K = \frac{1}{2} K A^2 sen^2 (wt + 6),$$

Ecuación 4-14.

La energía cinética varía desde un valor mínimo de cero hasta un valor máximo - de $\frac{1}{2}$ k A^2 .

Para obtener la energía mecânica total E, basta sumar las ecuaciones 4-13y 4-14.

DE BIE = K + U =
$$\frac{1}{2}$$
 K A^2 sen² (wt + δ) + $\frac{1}{2}$ K A^2 cos² (wt + δ)

E = $\frac{1}{2}$ K A^2 . Ecuación 4-15.

En el punto de equilibrio, la energía potencial es cero, mientras que la - energía cinética es máxima. Cuando la elongación es máxima la energía potencial alcanza su máximo valor, mientras que la energía cinética se reduce a cero.

En otras posiciones, en la cuales la energía cinética aumenta (o disminu--

Ecuación 4-16

ue); la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estasdos energías debe dar siempre un valor constante de 7 K A2. La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple-

es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

 $K + U = \frac{1}{2} m \partial^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2$ $v^2 = (\frac{K}{m}) (A^2 - x^2), o sea,$ y obtener $\mathcal{U} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{+}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \left(A^2 - x^2 \right),$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto deequilibrio x=0, y que es nula en la posición de máxima elongación x= A.

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1,para la posición que indica la pregunta c; así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máx

Para esta posición x = 0.10mt, $V = -1\frac{MT}{seg}$ y $a = -3.25 \frac{MT}{seg}^2$ por lo tanto:

 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.060)(-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT}.$

 $u = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT}.$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier etapa del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

E = K+U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398 nt-mt. (masa en x=0.10m). $\lim_{X \to \infty} x = \frac{1}{2} (1.96) (0.20) = 0.0392 \text{ nt-mt. (masa en x=A)}.$

 $U \max = WA = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg.}$ Kmax = $\frac{1}{2}$ m v^2 max. = $\frac{1}{2}$ (0.060) (1.14)² = 0.039 nt-mt. (masa en x=0).

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y pédulo físico.

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio. --Que el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma sendidal depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de anglunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-

THE REPORT OF THE PARTY OF THE

Ecuación 4-16

ue); la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estasdos energías debe dar siempre un valor constante de 7 K A2. La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple-

es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

 $K + U = \frac{1}{2} m \frac{2}{2} + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2$ $v^2 = (\frac{K}{m}) (A^2 - x^2), o sea,$ y obtener $\mathcal{U} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{+}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \left(A^2 - x^2 \right),$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto deequilibrio x=0, y que es nula en la posición de máxima elongación x= A.

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1,para la posición que indica la pregunta c; así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máx

Para esta posición x = 0.10mt, $V = -1\frac{MT}{seg}$ y $a = -3.25 \frac{MT}{seg}^2$ por lo tanto:

 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.060)(-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT}.$

 $u = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT}.$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier etapa del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

E = K+U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398 nt-mt. (masa en x=0.10m). $\lim_{X \to \infty} x = \frac{1}{2} (1.96) (0.20) = 0.0392 \text{ nt-mt. (masa en x=A)}.$

 $U \max = WA = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg.}$ Kmax = $\frac{1}{2}$ m v^2 max. = $\frac{1}{2}$ (0.060) (1.14)² = 0.039 nt-mt. (masa en x=0).

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y pédulo físico.

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio. --Que el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma sendidal depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de anglunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-

THE REPORT OF THE PARTY OF THE

The series of the state of the second of the

Prosto fue to conserve to envious totale of with firefulat as the contex e-

del movimiento, tide tendo uso de ton nessotate anessocates, se titura

E = EH = 6.030 + 0.0001 = 6.0405 at art. (adam on red. 10m).

Pichula sampe, adadato de tensula, y pódeta distac.

El pindese comite is un ilatena litigo que auta, novembente oscilatatula, --

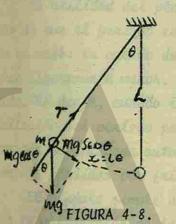
tie de be et et fastema obselee la telbeckéh sefelsekobe i de de se suce. A continuación se basé ya estudio de anglunos sistemas físicos que se mis ten movimiento annonico comité.

el studuch bangler.
El rebellet bangle consiste en sing mass de requisits l'ésentitones auxpondedis

de un hilo inextensible y sin peso. Cuando se separa hacia un lado de su posición de equilibrio y se abandona a sí misma, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad, con un movimiento periódico y oscilatorio.

La condición para que un cuerpo realice un movimiento armónico es que se encuentre sometido a una fuerza recuperadora F, directamente proporcional a laelongación x, y con dirección opuesta. La trayectoria de la masa del péndulo no es una recta, sino un arco de circunferencia de radio L, donde L es la longitud de la cuerda soporte. La elongación se refiere a distancias medidas a lo largode este arco (figura 4-8). Por lo tanto, si F=-kx el movimiento será armónico - simple, o bien, como x= $L\theta$, la condición se escribe F=-k $L\theta$.

En la figura 4-8 se representa un péndulo de longitud L, una partícula de-



masa m, formando un ángulo θ con la vertical en el instante en que su elongación es x. Las fuerzas que se ejercen sobre la masa del péndulo son mg, la fuerza gravitacional, y la tensión en la cuerda T.

Elínjase dos ejes, uno en la dirección dela tangente y otro en la dirección del radio y descompongase el peso en sus componentes según estos ejes. La componente ra-

dial de la fuerza mg es la magnitud mg cos θ y la componente tangencial es la magnitud mgsen θ . Las fuerzas que provocan la aceleración centrípeta necesaria para conservar la particula moviendose en el arco del círculo son las componentes radiales. La componente tangencial es la fuerza recuperadora que obra sobre m y que tiende a regresarla a su posición de equilibrio y es,

F = - mgsen0. Ecuación 4-17

Por lo tanto, la fuerza recuperadora no es proporcional de desplazamientoangular θ , sino a sen θ , y, en consecuencia, el movimiento no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es aproximadamente igual a θ en radianes y la ecuación 4-17 se convierte en,

$$F = -mg\theta$$
,

a lo large del arce es $x = 1.0$

sabiendo que el desplazamiento a lo largo del arco es $x = L\theta$, se obtiene:

$$F = -mg \frac{x}{T} = -\frac{mg}{T} x .$$

Por lo tanto, la fuerza recuperadora es entonces, para elongaciones pequeñas, proporcional a la elongación y de dirección contraria a ella; que es exactamente el criterio que determina el movimiento armónico simple. La fracción $\frac{mg}{L}$ representa la constante k en F=-kx. El período de un péndulo simple cuando su -

- 1.1. condităță contra que une compre noutre e que e ministratită e remisirante de la contra del la contra de la contra del la contra de la contra de la contra de la contra de la contra del la contra de la contra del la contra de la contra del la contra de la contra de la contra del la contra de la contra del la contra del

The state of the s

de cresció socientes ca econgarada escalación de contratada a contratada de contratada escalación de contratada escalació

in the facilities of the temporal of the constance of the

Accepted production of the contract of the con

- No. of the contract of the c

to de durant so as ao moontant ma out to high domine to tredució de constituto de cons

NIVERSIDADAUTÓN

And E. 2260 of 1250 P. U. en consecuential, et mocinismis at at anticominate entra examinate example.

Let extende . At al digner of its propositio, and 8 et approximationale example of P.

it tishede a reconstant or an accreation it, and above it ex.

DIRECCION GENER

Pon lo kainta, ka (menen mengerindaka ak undangsa, gelai elemakatan pagusdi entopedistantak a ka elemanishi pake detenengin namentaka a eliza gun ol name dangk el alikulah ent delemana el menentinda annimisher binga ol la pancaida entopedistanta de comenta de entopedistanta de en amplitud es pequeña está dado por,

$$T = 2 \Re \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \Re \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2 \Re \sqrt{\frac{L}{g}}$$
 Ecuación 4-18

Se puede demostrar que la ecuación general del período de una oscilación,para la elongación angular máxima α , es:

 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\infty}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \operatorname{sen}^4 \frac{\infty}{2} + \dots \right).$

El período se puede calcular con toda la aproximación que se desee tomando suficiente número de términos en la serie infinita. Cuandox = 15° (a cada ladode la posición central), el período exacto difiere en menos de 0.5% del período calculado por la ecuación 4-18.

La utilidad del péndulo para la medición del tiempo, está basada en el hecho de que el período es prácticamente independiente de la amplitud. Así, cuando se acaba la cuerda de un reloj, y por tanto, la amplitud de la oscilación se hace ligeramente menor, el reloj indicará todavía un tiempo aproximadamente exacto. Es decir, cuando las fuerzas amortiguadoras reducen la amplitud de la oscilación, el período permanece casi inalterado. En un reloj de péndulo, la ---energía es aplicada automáticamente mediante un mecanismo de escape para compensar las pérdidas por fricción.

El péndulo simple es, también, un dispositivo preciso y adecuado para medir la aceleración de la gravedad g, sin acudir a la caída libre en un cuerpo, puesto que L y T pueden medirse fácilmente.

Ejemplo 4-3.

Un péndulo simple de 2 mts. de longitud oscila con amplitud de 40cm. a) -- Calcúlese su velocidad en el punto más bajo. b) Calcúlese su aceleración en los extremos de la trayectoria. Primeramente se calcula el período de oscilación apartir de la ecuación 4-18, resultando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9.8}} = 2.85 \approx 3 \frac{\text{ciclos}}{\text{seg.}}$$

La velocidad en el punto más bajo, es cuando x = 0, y corresponde a la posición de equilibrio donde la velocidad es máxima. Aplicando la ecuación 4-12,-se obtiene:

 $V_{\text{max}} = W A = \frac{2\pi}{T} A = (\frac{2\pi}{3}) 0.40 = 0.837 \frac{\text{mt}}{\text{seg}}$

La aceleración en los extremos de la trayectoria, es cuando x=A, y son los puntos donde la aceleración es máxima. De la ecuación 4-12, se obtiene:

$$\alpha \max = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 0.40 = 1.75 \frac{\text{mt}}{809}$$

1 - 12 - 12 - 17 - 17 - 17 - 17 e ravide abnorant que en comedan aement del de mes el período es pelétricamente deringendresses la cuma de the agapte (a cuenta de un agent of theto servicina de percentil many at not the tribut today to a tier and the A free may be set the first the second of the second of while it will not well that the think in a secret in the property of the property of made to movement his Antida & state of Shirton 1871 the west was subjected to acele are the to accorded to see contact the color nchille stimple de l'orda, de songratur carelle une ambient que bissi di nebecidad en el parte mis bajo, es comedo s = e, a consesponde a

aceigandión en dan extramos de la tragactación, es consido x=4, y son dos

unde la aceloración es estima. De la desección i-is, se abitenes

El péndulo de torsión:

El péndulo de torsión se representa en la figura 4-9 y consiste en un disco supendido de un alambre fi jo al centro de masa del disco. La línea Op es la posición de equilibrio del disco. Al hacer girar el disco hasta el punto Q, el alambre se tuerce y ejerce un momento de rotación sobre el disco, tendiendo a regresarlo al punto P.

El péndulo de torsión obedece a la ley de Hooke, ya que para pequeñas torsiones el momento restaurador es proporcional a la torsión, o sea, al desplazamiento angular. Por lo tanto, para el momento restaurador se escribe. $\widehat{T} = -k\theta$.

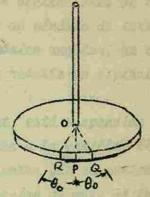


FIGURA 4-9

Ecuación 4-19

donde k es la llamada constante de torsión del sistema, y depende de las propiedades del alambre. El signo menos se debe a que el momento de rotación tiene di rección opuesta al desplazamiento angular 0. La ecuación 4-19 es la condición del movimiento armónico angular simple.

La ecuación del movimiento para este sistema es: $\widehat{T} = I \propto = I \frac{d^2 \theta}{dt^2},$

sustituyendo la ecuación 4-19 se tiene: $-k\theta = \int \frac{d^2\theta}{dt^2}$ o sea,

angular.

 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I} \, \theta$

Ecuación 4-20

La solución de la ecuación 4-20 es una oscilación armónica simple. En virtud de que la ecuación 4-20 para el movimiento armónico angular simple es similar en forma a la ecuación 4-6 del movimiento armónico lineal, de inmediato sepuede escribir la solución para la vibración de torsión, teniendo como coordena da el ángulo 0, se tiene:

 θ = θ ocos (wt + σ), Ecuación 4-21 siendo θ o el máximo desplazamiento angular, o sea, la amplitud de la oscilación

Por analogía con la ecuación 4-9, el período de oscilación es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$
 Ecuación 4-22

Obiamente, puede usarse el período de un péndulo de torsión para medir momentos de inercia, o para determinar la constante de torsión k de cualquier ---

all maters of countries e charle de consulta se arriver una en in Arauna g' miniatic an un décide numerabilité ets et alconting q a castro do meso dot asser, in Ener (a ca la sa do equilibração del diseco. At himen obliga early of mixture to all mixture are increased anto de motaveitos seines el delses. L'alises de Fit streeting its relation whether La ecianción des interioritats 65-1 AND SENSO sociación de la contestán della es aña escillades de la conscienta descripto en un securidad de conscienta de cons THE RESIDENCE OF THE PROPERTY OF THE PROPERTY

to the control of the control of the state o

DIRECCIÓN GENERA

es analogia con ea connecida d-e, es predicto de esciliosión est:

T = ell V +

Oblamente, priede agans of politicle at an péndate de tabledh eans nedich mitab de l'astria, e pena detibules de constante de tabledh à de cialquier --

alambre.

o sea.

Algunos instrumentos de laboratorio que funcionan por oscilaciones de torsión son, el galvanómetro, la balanza de Cavendish que es un péndulo de torsión El balancín de un reloj es otro ejemplo de movimiento armónico angular, en este caso el momento de rotación restaurador lo proporciona un resorte en espiral.

Ejemplo 4-4.

Una varilla delgada, de masa 0.10kg y longitud 0.10mt, está suspendida mediante un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. El -- alambre se tuerce y la varilla se pone a oscilar. Se encuentra que el período - es de 2seg. Cuando se suspende en la misma forma por su centro de masa un cuerpo plano de figura de triángulo equilátero, se encuentra que el período es de - 6seg. Ecnontrar el momento de inercia del triángulo con respecto a ese eje.

El momento de inercia de la varilla es $\frac{ML^2}{12}$. Por consiguiente, I varilla = $\frac{(0.10kg)(0.10m)^2}{12}$ = 8.3 x $1\bar{0}^5$ kg-mt².

De la ecuación 4-22, se tiene,

Tvarilla
Ttriángulo = (Ivarilla
I triángulo)

T + 2

Itriángulo = I varilla $(\frac{Tt}{Tv})^{2}$,

Itriângulo = $(8.3 \times 10^5 \text{ kg-mt}^2) \left(\frac{68\text{eg}}{28\text{eg}}\right)^2 = 7.5 \times 10^4 \text{kg-mt}^2$.

El péndulo físico.

El péndulo físico es cualquier péndulo real que no tiene toda la masa concentrada en un punto, puede ser cualquier cuerpo rígido que oscile en un plano vertical en torno de un eje que pasa por elcuerpo. La figura 4-10, representa un cuerpo de -- forma irregular que puede girar alrededor de un -- eje horizontal sin rozamiento que pasa por P y que se ha separado un ángulo θ de su posición de equilibrio. La posición de equilibrio es, cuando el -- centro de masa del cuerpo C, se encuentra abajo de P, o sea, en la vertical que pasa por ese punto.

FIGURA 4-10

La distancia del eje al centro de masa es L, el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación es I, y la masa del péndulo m.

El momento restaurador en la posición representada en la figura es:

 $T = - mgLsen\theta$,

fremts instrumented de tempotetorie que landidone con esclientado de torthe son, of miludely-the to balance do Carondish and as us phillips do toughte Asternation in about as over elements in marintarity and after annulars, on code up at memerico de notación restaunadon la intercelente un nestat con escalado. The wall Con decreate at most of the wall and the same of the same The desirant one plan not be proposed to manufacture to the stand THE AL DICKE IN LE VILLERE A MOONE A GREEKE, SCHRAPHOLDING IL de fisig. Ciumdo se suspende qu' la mant fortant por su centre de mesa un a lane de figure de tribiegal e esti catarer, se encretra de la suriede proceedings of momento de Complete del traditional con the delicational con El gemento de inexe la de la statillat TURKER ! And Branching L thinkney = 18:5 x 18 1 El péndulo Walco it vindulo clasico es cuertares regidula nact wino clone toda ta main concentrada en un muto Bush Com all deservado un dieguen à de du poetestin de equila distanción del ene al contro do mora es L, es menesca do incheia del pen in heappeats at eje de novaceión es I, y la mesa del péndulo m. El memento restauraden en la posteción representada en la ligara da:

f = - malbens.

y se debe a la componente tangencial de la fuerza de gravedad.

El movimiento del péndulo no es armónico angular simple, puesto que $\hat{\gamma}$ esproporcional a sen θ , y no a θ .

Si θ es pequeño se puede reemplazar sen θ por θ , y $\widehat{f} = -mal\theta.$

Por lo tanto, el péndulo esta sometido a un par recuperador elástico, conuna constante k=mgL.

El período de oscilación de un péndulo físico que oscila con pequeña amplitud es:

 $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$ Ecuación 4-23.

Cuando el péndulo físico, oscila con amplitudes mayores, sigue teniendo un movimiento armónico, pero no simple.

Esta forma de resolver el problema se aplica a un cuerpo de espesor uniforme de forma cualquiera y que el eje de rotación puede estar colocado en un punto cualquiera.

El péndulo físico se utiliza para determinaciones exactas de g. Ejemplo 4-5.

Supongase que el cuerpo de la figura 4-10 sea una varilla de 1mt de largoque puede girar alrededor de uno de sus extremos. Si la masa de la varilla es \pm de 1kg, determinar; a) el período T, y b) el momento de inercia J de la varilla

El momento de inercia \overline{I} , esta dado por, $\overline{I} = \frac{1}{3} \text{ m } \ell^2$, de la ecuación 4-23 se obtiene:

$$T = 2 i \sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2 i \sqrt{\frac{1/3 \text{ m } \ell^2}{\text{m } g \text{ } \ell/2}} = 2 i \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\ell}{g}}$$

$$T = 2 i i \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{9.8}} = 1.65 \text{ seg.}$$

Despejando el valor de I en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$I = \frac{T^2 mgL}{4 \tilde{n}^2} = \frac{(1.65 \text{seg})^2 \times 1 \text{kg} \times 9.8 \text{mt/seg}^2 \times 0.5 \text{mt}}{7 = 0.338 \text{ kg-mt}^2}$$

Ejemplo 4-6.

En la figura 4-11, se muestra un péndulo físico formado por un disco articulado en la periferia (P), junto a él se encuentra un péndulo simple equivalen te que tiene el mismo período.

El poetido esta comenzo de la Azura (-16 as una unicida de las se lango de la contra del la contra de la contra del la contra de la contra de la contra de la contra de la contra del la contra de la contra de la contra del la contra de la contra del la

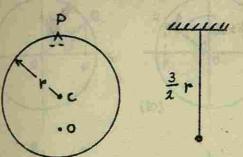
The second state of the se

i la escuación d-25 de electronic.

INIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENER

th is liques 4-17, so mucetra un piniulo fisico fonntia pot un disco antiair en es penifonia iPl, junto e él se encuentes en péndulo simple equivalen que teuns el mismo peniode. Encontrar su período para oscilaciones pequeñas y hallar la longitud del - péndulo simple equivalente.



El momento de inercia de un disco con -respecto a un eje que pasa por su centro
es $\frac{1}{2}$ M Υ^2 , siendo Υ el radio Υ M la masa
del disco. El momento de inercia con res
pecto al eje que esta en la periferia es

 $I = \frac{1}{2} M \rho^2 + M \rho^2 = \frac{3}{2} M \rho^2$

FIGURA 4-11

sustituyendo pen lugar de L en la ecua-ción 4-23, se obtiene:

$$T = 2\widehat{n} \sqrt{\frac{I}{Mg}} = 2\widehat{n} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{Mr^2}{Mgr} = 2\widehat{n} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r}{g},$$

El péndulo simple que posee el mismo período tiene una longitud,

$$L = \frac{Z}{Mr} = \frac{3}{2}r,$$

o sea, las tres cuartas partes del diámetro del disco. El centro de oscilacióndel disco articulado en P está, por consiguiente, en O, a una distancia $^{3/}2$ $^{\prime}$ - abajo del punto de apoyo.

Ejemplo 4-7.

El período de un disco de radio 0.102mt que ejecuta oscilaciones pequeñasalrededor de un eje que pasa por su periferia se ha medido y es de 0.784seg. --Encontrar el valor de g, la aceleración de la gravedad en ese sitio.

De
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r}{g}$$
, se obtiene: $g = \frac{6\pi^2 r}{\tau^2}$

$$g = \frac{6^{2} \times 0.102}{(0.784)^{2}} \frac{\text{mt}}{\text{seg}^{2}} = 9.8 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^{2}}.$$

6.- Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circularuniforme.

El movimiento circular uniforme es una combinación de movimientos armónicos simples, fenómeno que ocurre con frecuencia en el movimiento ondulatorio.

La relación entre el movimiento armónico simple en una línea recta y el movimiento circular uniforme, es de importancia ya que describe algunas características del movimiento armónico simple. Ademas da un significado geométrico - sencillo de la frecuencia angular w y de la constante de fases.

Haciendo uso de un método geométrico sencillo, considerese el tipo de movimiento determinando en la figura 4-12; en donde Q, es un punto que se mueve en-

Becommune se praction come at a residual requirem a factor to construct del AND THE PROPERTY OF THE PARTY O El montesero de l'especia de un desen est :-PICTURE TO THE el platedo comple aux potes el miso the day country grades for diswife and hines. By farmer to I disno socionista un P acte, este sérvidades o la la men distriction St willing as an exact of rather than the property as the prop auticion de un vie que veus por su coridorio de les missifes es del les secono innitian of each de a, in necleanners de la encount en sie kiest.

NIVERSIDADAUTÓN

El monimiento electria uniforme el una concenección de monimiento elmónimica.

La concentra concentra en el composita de la monimienta de manimiente el manimiento del ma

(a) P a (b) ax o (d)

FIGURA 4-12

una circunferencia de radio A, con una velocidad angular cons-tante w (rad/seg), y P la proyección
de Q sobre el diámetro horizon-tal. Cuando el punto Q gira en torno del circulo, el punto P se
mueve hacia adelante y hacia a-trás sobre una recta horizontal,
encontrándose siempre en la misma vertical que Q.

Por consiguiente, la elongaciónde P es siempre igual a la absci sa de Q (figura 4-12b); la velocidad de P es igual en todo instante a la proyección sobre el -

diâmetro horizontal de la velocidad de Q (figura 4-12c); y la aceleración de Pes igual a la componente sobre el mismo diâmetro de la aceleración de Q (figura 4-12d).

Si los puntos P y Q coinciden en el instante t = 0, el ángulo formado porel radio 0Q y el diámetro horizontal es igual af. Al transcurrir un tiempo --cualquiera t, el ángulo que forma ahora 0Q con el diámetro horizontal es (wt+5) si el punto Q se mueve con velocidad angular constante.

Por lo tanto, la elongación de P en cualquier instante t (véase figura 4-12 b) es,

 $x = A \cos (wt + 6)$. Ecuación 4-24

El punto P se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje lasx. Es por esto que, el movimiento armónico simple se puede describir como la -proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

La frecuencia angular w del movimiento armónico simple del punto P es la misma que la velocidad angular del punto Q. La frecuencia del movimiento armónico simple es la misma que el número de revoluciones por unidad de tiempo del --punto Q.

Esto es $f = \frac{w}{2\eta\gamma}$, o bien, $w = 2\eta f$. El punto P efectúa una vibración completa por cada revolución de Q. Por lo tanto, $T = \frac{2\eta\gamma}{W}$, o bien, $w = \frac{2\eta\gamma}{T}$.

El ángulo (wt = f) se denomina ángulo de fase o, sencillamente, fase del movimiento armónico simple, y es el ángulo que forma 00 con el diámetro horizon
tal en un tiempo cualquiera t. La amplitud del movimiento armónico simple es --

ing official decided de ladio f. . cons una velacidad anguedic consdente a first, or the inducation E TOWN THE LOW TRIES MANAGE PARTY NEW TARK REDICTION OF THE PROPERTY OF THE PAST Step have contact de la verpet to Mind of the state with a to empenente solità of mille elimetro de la dell'elimin l to be stated to be supported as a literature of the Wild Be Likewith his kind as heard and the total and the t THE CORE E. S. CHERLES SLIC COMMIT WHITE SI GAY BY PROPERTY STATES mante a se meque est recorded miller contact The State of Control of the Control t a K cos los val. de Abordona de de la del moduniones dundhiel espeia del maide Portugue We obe in vilocidad aspectos due conte O. La l'Accident les souties into others

Actor ed 4 apres o bitem; m = 2/1 f . El sundo P edentific una uclosación com-

Et daques lut = 1 se denomina disputo de faise o, somellimente, lase det -

a an elemen confidence it in superior as a notification of its institutes consist our

district electe u es ab-lindule que luem el con el dillectro honizet

the post and weightered to a forthe tenter to the or other in a har .

igual al radio de la circunferencia.

La velocidad instantânea de P puede hallarse con ayuda de la figura 4-12c. La velocidad tangencial del punto Q es W A; por lo tanto, la componente de esta velocidad sobre el eje de las x es la velocidad de P. Esto es:

$$\sqrt{x} = -WA sen (wt + d)$$
.

Esta velocidad es negativa cuando Q y P se mueven hacia la izquierda y positiva cuando Q y P se mueven hacia la derecha. Cuando Q se halla por debajo -- del diámetro horizontal, la velocidad de P está dirigida hacia la derecha, pero por ser el seno negativo en tales puntos, se precisa anteponer también el signo menos. La velocidad Vx es nula en los puntos extremos del movimiento armónico - simple, en donde $wt \in \mathcal{S}$ es cero y W.

La aceleración de Q es su aceleración normal w^2A (véase figura 4-12d). Para encontrar la aceleración del punto P se utiliza de nuevo el hecho de que P - está siempre debajo o encima de Q, por lo que su aceleración es igual a la componente sobre el eje de las x de la aceleración del punto Q (figura 4-12d). Por lo tanto,

$$ax = -w^2 A \cos (wt + 6)$$
.

La aceleración ax es nula en los puntos medios del movimiento armónico simple, en donde wt $\neq d = \frac{\widehat{H}}{2}$, o bien, $\frac{3\widehat{H}}{2}$.

En conclusión se obtiene que la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro cualquiera da un movimiento armónico simple. Ademas, el movimiento circular uniforme se puede describir como la combinación de dos movimientos armónicos simples que se efectúan sobre rectas perpendiculares, que tie nen la misma amplitud y frecuencia pero dificren en fase 90° . Esto significa que el punto Q se puede proyectar también sobre el eje y, obteniendo los mismos resultados con la diferencia de que d será $d-\frac{M}{2}$ y entonces cos d0 se tran d0 soma en send0, quedando la elongación como:

$$y = A sen (wt + d)$$

Ecuación 4-2!

Cuando una componente se encuentra en el punto de máxima elongación, la otra componente se encuentra en el punto de equilibrio. Combinando las componentes de las ecuaciones 4-24 y 4-25, se obtiene:

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

De igual forma se puede hacer una relación entre las componentes de la velocidad y las componentes de la aceleración, obteniendo las siguientes relaciones:

Correspondiendo estas relaciones a las magnitudes del desplazamiento, la -velocidad y la aceleración del movimiento circular uniforme.

Ejemplo 4-8

En el ejemplo 4-1 se considero un cuerpo que ejecutaba un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento era:

$$x = 0.20 \cos 5.7t$$

Este movimiento se puede representar también como la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro horizontal.

(a) Dar las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente. La componente sobre el eje de las x del movimiento circular está dada por, $x = A \cos (wt + d)$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio A=0.20mts, la fase inicial o constante de fase debe serf=0, y la velocidad angular debe serw= $5.7 \frac{rad}{seg}$, para obtener la ecuación $x=0.20 \cos 5.7t$ para la proyección horizontal.

(b) Mediante el movimiento del punto Q determinese el tiempo requerido para que el cuerpo llegue al punto situado a la mitad de la distancia al centro del movimiento a partir de su posición inicial.

Al moverse el cuerpo la mitad de la distancia hacia adentro, el punto Q se mueve un ángulo $wt = 60^{\circ}$ (véase figura 4-13). La velocidad angular es constante-y de un valor de $5.7 \frac{rad}{seg}$, de manera que el tiempo que se requiere para que semueva 60° es:

 $t = \frac{60^{\circ}}{w} = \frac{n/3 \text{ radianes}}{5.7 \text{ rad/seg.}} = \frac{n}{17.1} \text{ seg.}$

t = 0.183 seg.

El tiempo se puede calcular también di rectamente a partir de la ecuación del movimiento. Así,

 $x = 0.20 \cos 5.7t$ y $x = \frac{A}{2} = \frac{0.20}{2} = 0.10$ de donde.

0.10 = 0.20 cos 5.7t, o sea, 5.7t = cos⁻¹ $(\frac{1}{2}) = \frac{27}{3}$ $t = \frac{27}{17.1} = 0.183$ seg.

7.- Combinaciones de movimientos armónicos.

the at eather de La cinage Action that In voltabled delications for Present Welling can read the first in the state of the introduct tangencial tel guard to as a see in about, in comparate de char elecated subject to are at the size wolldowing Late velocided es neteriou enterla se la latera estada est Lead seconds if or Parts must be heard a facility of difference of the section of the with the acceptance acted water on the section and the section of not to recorded to co seem to toy metric ele, en tonde me d'es cert l'el in acceptanción de C es sa acceptada conece a a l'el de desta deled. encontran la aceleración de grante e de utiliza a Ango Albert el ano of stempore deba jo e encines to the at one su ne commit a come a sis the which solves of a contraction of the solvest of the 7255 to accionación en en mera en en en enten mercon der meneren

En conceus un stamerno enalquiera da un movembre a mondula entre la unique de sobre un siamerno enalquiera da un movembre a ambina entre la conceuta uniforma se meste deservibre como la este de movembre de ambina arménicos simples que se afectiva sobre deservibre de este de este de movembre de ambina conceitad y secuencia para distincia en una servicia de este de

the misme complicate y frequencie para differencie des 191 free diametrica que successo en partir o company production de mismos ne-

TIVERSTEN A MONTH OF THE STATE OF THE STATE

Comments in a components as everywhere on at place is educate elements of components in a component of equilibrial combined to a supplication of equilibrial combined to a supplication of the equilibrial com

DIRECCION GENERAL

We ignal form an production on relación entre les emperentes de la verifier y las composition de la acutención, obtantemás las signientes securios

To Valuation Who

FIGURA 4-13

Con the Comment of Consequentiate estas relaciones e insurantimes, del carcinamiento attactivamente en decided y la decleración del mendecede cinacion anidomic Elemptas 4 - 48 the clicionala 4-1 so considera un euclina den single. In cenación de esa marinder East moviniento se puede accora anto to tours, at about a male translate Augustu o consainada de los callos son a sur es-The contract of the purch substitute of the material of the little of th Al evidence of more to method & in distances because II were are coming us = out before coming with (2 to be the coming d un water de 5. ! ... de mouere oue es elemb me se avalend

NIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GEN

5.12 = cos 1 (2) = 12.2

表本45 特別的工事

Combienceldings the movimization as annihisans.

El movimiento que resulta al combinar dos movimientos armónicos simples -perpendiculares es una suma de dos oscilaciones independientes. Si se considera
el caso en el cuál las frecuencias de las vibraciones son iguales, tales como,

$$x = Axcos (wt + 6)$$

y = Aycos (wt +x).

Ecuación 4-26

Los movimientos sobre cada eje tienen diferentes amplitudes y constantes - de fase.

Cuando las constantes de fase son iguales, esto es que $J = \mathcal{L}$, el movimiento resultante es una línea recta. esto se comprueba analíticamente, haciendo -- uso de las ecuaciones 4-26.

x = Axcos (wt + 6)

y = Aycos (wt + o),

despejando el valor del coseno en la ecuación de x, y sustituyendolo en la ecuación de y, se obtiene:

 $y = (\frac{Ay}{Ax}) X$

que es la ecuación para una línea recta, de pendiente $\frac{Ay}{Ax}$.

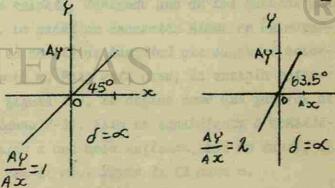
En la figura 4-14 a y b se muestran los movimientos resultantes para los - casos en que, $\frac{Ay}{Ax}$ = 1 y $\frac{Ay}{Ax}$ = 2. En estos casos, las amplitudes de x y de y alcanzan un máximo al mismo tiempo, así como también alcanzan un mínimo al mismo --- tiempo y sus constantes de fase son iguales, es decir, están en fase.

Cuando las constantes de fase no son iguales, el movimiento que resulta no es una línea recta, por ejemplo, si difieren en 11/2, la máxima elongación de x ocurrirá cuando la elongación de y sea cero y viceversa. Si las amplitudes soniguales, el movimiento que resulta es circular y si las amplitudes son diferentes, el movimiento que resulta es elíptico. En la figura 4-14c y d, se muestran los casos en los cuales $\frac{Ay}{Ax} = 1$ y $\frac{Ay}{Ax} = 2$, para $\int = \infty + \frac{11}{2}$. En la figura 4-14 e y $\int_{1}^{1} \sin x \, dx = 1$ y $\int_{1}^$

Todas las combinaciones que se puedan hacer de dos movimientos armónicos - simples perpendiculares de igual frecuencia, corresponden a trayectorías elípti

cas, siendo la línea recta y el circulo casos especiales de una elipse.

la dirección del movimiento resultante puede ser en el sentido de las manecillas del relojo en sentido contrario, todo de pende de la componente que lleve la fase adelantada.

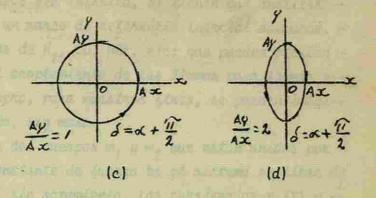


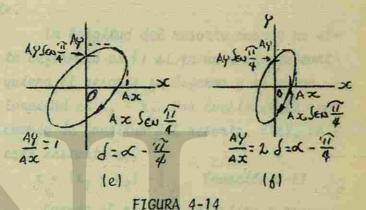
(a)

(6)

H empermission our respiration combines due were interest deministration among the mandinglaces es una summide dos oscilaciones independientes. Si an considura was on al cudicular histocometas de las vibbaciones con lauxica, falla como. A TABLELLAND EXPERIENCE SIZE SIZE SIZE SIZE SOTILIANDON SEL Canndo Ens constituites de las sas xintes Server all ment of the best of the server is a server in the server in t With our cape, the first the state of the st SELLE WELLES TO MELON CLOSED CASE CON CONTROL OF THE WILLIAM OF TH THE PLANT OF THE PARTY OF THE P Sudate les constantes de aute no con constant la regulation de la la la regulation de la la regulation de la la la regulation de la la regulation de la la regulation de la la regulation de la r reactioned raches you expense, is discovered by first later the la West curious to change the do a sea const which do as to the seal of the season TO TOWN OUR PROPERTY OF A TOWN OF THE PROPERTY the mouse course one restricted one endersion. He is known delice with an encestran

For el osciloscopio se puede for mar estas figuras. En este aparato, los electrones son desvia dos mediante dos campos eléctri cos perpendiculares entre si. -Las intensidades de campo tie-nen alternaciones senoidales de ional frecuencia, pero se puede variar sus fases y amplitudes .-De esta manera los electrones trazan sobre una pantalla fluor escente las diversas figuras in dicadas. Otra manera de formar estas figuras es a partir de un péndulo que oscile con una am-plitud pequeña pero que no este confinado a un plano vertical.-Estas combinaciones de dos movi





mientos armónicos simples perpendiculares con igual frecuencia son muy importantes en el estudio de la luz polarizada y de los circuitos de corriente alterna.

Las combinaciones de movimientos armónicos simples con igual frecuencia en la misma dirección, pero con diferentes amplitudes y fases, son importantes en-el estudio de la difracción e interferencia de la luz, sonidó y radiaciones ---electromagnéticas.

8.- O scilaciones de un cuerpo doble.

El oscilador armónico simple de la figura 4-4, consiste en una masa m queesta unida a una pared firme mediante un resorte de constante de fuerza k. La pared se encuentra rígidamente ligada a la Tierra, por lo tanto, es un sistemade cuerpo doble, unido por medio de un resorte, teniendo uno de los cuerpos una
masa que se puede considerar infinita. La pared se encuentra firme en un marcode referencia inercial, por lo tanto, el cambio de longitud que sufra el resorte será igual al desplazamientode la masa m. Para este caso, la energía potencial U(x) del sistema oscilante de la figura 4-4, se define como una función de
la elongación x de la masa m (véase figura 4-3). Esto es equivalente a considerar que un extremo del resorte está unido a una masa infinita, por lo tanto, el
alargamiento del resorte se determina por el movimiento de la masa m.

Para el sistema oscilante de un cuerpo doble, en el cuál no se puede consi

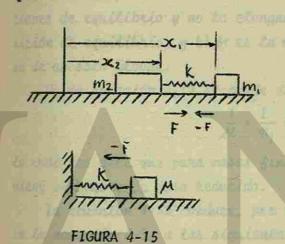
the resolution of state that - and Araunati, in distriction though and amortonics and makenith of the company chilecolor - Ekit general de sebelikansahil a sh ankingense generalisassa at Principality come we sucho with sur fitter is animically. n wer manghe flow eleginewes all allaforny man refere some tentes day diseases disease egine, Other merces de demont Manufact of the manual ventions. with an entiring a process constant with the constant and the constant and the second and the se the constant of the production of the constant tics entrinciones de marchientes expérient lorgalists de l'une factories de Xeiser diesecte, one ese discussitat especialists is lifera bela decisionica esreación de la diferención e interjerencia de la der mai el maistre en de maistre en el maistre en la we d'acétacianes de un enexas dolace. El osociados escéncios simple do la figura 1-1, constate en una 1913 m que-

The encuency respectively expends on the rest of the contract of the states of the states.

The encuency respectively also as the rest of the states of the

derar que la masa de uno de los cuerpos sea infinita, se tienen que analizar --los movimientos de ambos cuerpos en un marco de referencia inercial adecuado. - Por ejemplo, las moléculas diatómicas de H_2 , CO, HCI, etc; que pueden oscilar - a lo largo de su eje de simetría. El acoplamiento de los átomos para formar estas moléculas es electromagnético, pero, para nuestros fines, se pueden imaginar unidos por un resorte muy pequeño, sin masa.

En la figura 4-15a, se muestran dos cuerpos m_1 y m_2 que estan unidos por - medio de un resorte (sin masa) de constante de fuerza k; el sistema es libre de oscilar en una superficie horizontal sin rozamiento. Las coordenadas $x_1(t)$ y -- $x_0(t)$ indican los extremos del resorte.



La longitud del resorte cuando no esta deformado es \int ; si en un instante cualquiera el resorte se deforma y su nueva --longitud es $x_1 - x_2$. Por consiguiente, elcambio de longitud del resorte, x(t), en -este instante es,

 $x = (x_1 - x_2) - \int Ecuación 4-27$

Cuando el resorte se estira x es po-sitiva cuando tiene su longitud normal x=0
y x es negativa cuando el resorte se com--

prime.

En la figura 4-15a se supone que el resorte esta estirado, y se muestra la fuerza F que ejerce el resorte sobre m_2 y la fuerza F que obra sobre m_1 . Estas dos fuerzas son iguales y opuestas y tienen la misma magnitud F =kx.

Aplicando la segunda ley de Newton, F=ma, a las masas m_1 y m_2 , se tiene:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx \quad y \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx$$

multiplicando la primera ecuación por m_2 , la segunda por m_1 y restando, se obtiene:

$$m_1m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2kx - m_1kx,$$

que también se puede escribir así:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -kx.$$
 Ecuación 4-28

Si la llama masa reducida del sistema a la cantidad $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, y si se re-representa por $\mathcal H$; esto es;

marque La mana de uno de les euerros sea-legista, se lienen que antilizan -generalistate de embre cultres estat mance de arrecenta increial adecidas. we despite, lan not business the thican de Hy, CO, Hot, clay one purter excitor els dango di dancifude senettia: Et, acepitraconte de les dimess para fonça esunalleulas esseleationignétias, pour passonistis liter l er unidos por um neagate musicadado sa mase, to to finance 1502, or may than he was a more than the finance of The de un research (seasons) de contre de de TO THE REPORT OF THE PROPERTY distribeam the extremes del negocito Light Street and an Poly to Tex 45 openson the pl MARKE ME MERCHAN SE COMMENT Bela films 1-15a so tigane par et social et e (co) et | Adeste e THE PARTY OF HE APPROPRIES OF STREET AND THE STREET, T AND A PROPERTY OF THE PARTY OF करिया थीर में में अनुसार के देश है के महिला है कि साथ है है कि साथ है है कि महिला है है कि महिला है

It is those more audicated that aparent a in probited with a graph of the

 $\mathcal{H} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ Ecuación 4-29

Como l es constante, $\frac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2)=\frac{d^2}{dt^2}$ y la ecuación 4-28 se transforma

n:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0$$
 Ecuación 4-30

Esta ecuación es igual a la ecuación 4-5 que se obtuvo para la oscilacióndel cuerpo solo de la figura 4-4. Las diferencias son que a) x en la ecuación -4-30 es el desplazamiento relativo de los dos bloques con respecto a sus posiciones de equilibrio y no la elongación de un bloque solo con respecto a su posición de equilibrio, y b) M es la masa reducida del par de bloques y no la masa de un solo bloque.

De la ecuación 4-29 se puede escribir,

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$
,

lo cuál nos dice que para masas finitas, μ es siempre menor que m_1 o m_2 ; de ahíviene el nombre de masa reducida.

La ecuación 4-30 conduce, por el mismo proceso de derivación que se siguió en la ecuación 4-5, a las siguientes fórmulas:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$
, o bien, $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$, Ecuación 4-31

que determinan la frecuencia y el período de oscilación del sistema de la figura 4-15a. Este sistema tiene la misma frecuencia y período que un solo bloque - de masa µ, unido por medio de un resorte similar a una pared rígida, como se -- muestra en la figura 4-15b. Por lo tanto, la oscilación del cuerpo doble de la figura 4-15a es equivalente a la oscilación del cuerpo solo de la figura 4-15b. El concepto de masa reducida tiene bastante aplicación en la física cuántica y- en la física del estado sólido.

Resolviendo la ecuación 4-30, como en el artículo 3, se obtienen las si--guientes relaciones:

$$x = A \cos (wt + \delta)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -w A \sin (wt + \delta)$$

$$\alpha = \frac{d}{dt} = -w^2 A \cos (wt + \delta)$$

Estas ecuaciones son iguales a las ecuaciones 4-12 solo que para este caso x. V y a son valores relativos de la elongación, la velocidad y la aceleración,

 $x = (x_1 - x_2) - l$, and the second description of the second descr $\mathcal{V} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2,$ Ecuación 4-32 $a = \frac{dv}{dt} = a_1 - a_2.$

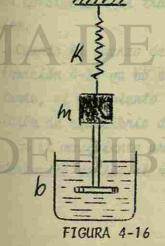
en las cuales los subindices se refieren a los dos bloques.

La energía potencial del oscilador armónico simple de cuerpo doble está da da por $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ y es una característica del sistema en conjunto, puesto que x depende de las posiciones de ambos bloques.

9.- Movimiento armónico amortiguado.

En las secciones precedentes se estudió la oscilación de varios sistemas,considerando que las fuerzas de rozamiento se encontraban ausentes, en la práctica esto no es cierto, porque si así fuera, un péndulo suspendido de un resorte oscilaría indefinidamente. Se sabe que si el sistema oscilatorio se deja libre, oscilará con amplitud descreciente y finalmente se detendrá, debido al rozamiento. Se dice que el movimiento está amortiguado por el rozamiento y recibe el nombre de movimiento armónico amortiguado. En la mayoría de los casos prácti cos, la fuerza de rozamiento se debe a la resistencia del aire y al rozamientointerno del resorte. La fuerza de rozamiento por lo general depende de la velocidad. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento no es constante, sino proporcional a la velocidad del cuerpo y de sentido opuesto a esta.

En la figura 4-16 se muestra un ejemplo de un oscilador armónico amortigua do, en el cuál un disco se encuentra fijo a la masa y ahogado en un fluído queejerce una fuerza amortiguadora - $b \frac{dx}{dt}$ La fuerza elástica restauradora es -kx.



A partir de la segunda ley de Newton. F = ma, se determina la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple amortiguado, siendo F la suma de la fuerza restauradora -kx y la fuerzaamortiguadora -b $\frac{dx}{dt}$. Esto es,

o sea, $-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$ o bien. $m \frac{d^2x}{dt} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ Ecuación 4-33

tono i es annetances de les estes e les y en consecta e-the transfolmes unitation of the contract of the state of the contract of the win the continuous a star is a selection of the basicaline the manufacture of the continues of the continues of THE CONTRACTOR OF STREET, STRE TO LEGATION OF SEASONS IN A STREET AND ASSESSMENT AND ADDRESS OF THE PARTY OF THE P tid. Edde skedenii telida (u nicheka kirelicaledii ii majinda neg un keke kiringa = a en la letante de l'ille for la destin, la biantanda del contra delles de la

Posnellisade de comesión de 50, como en el children 3, se elbásico de deser-

1 1 100 con A to 6 = 2 to 6 1 1 file star name big slock fire tendricands int a deviction on itmitigates intel The ide vertical destribute de via exploración, la viable de la declaración,

the curious to a subfinities so securious and he constanting postuncial del cace los of constanting interpoli not blue = - car up es una consecuencia del un del un ogenia de las sonagenos de misos labradas. 4 - Marcintenato constante deba Mandalia. to tak recuired acceptance in adults to an italian to we recuired to water president our les fiscants de la thieren se one comme en contraction the cale no es cleade, sorque dell'inter in single mandais e research enteringuests. Septile on it as addent productions in, we flow an implicat description a discussion of interpolar confidence of SMELLETO SE CHARLE CALL SE MENTAL LANCE OF THE REPORTED AND ADMINISTRATION OF THE LANCE OF THE L transaci de nousembrete mondacion compatinate, en la manue de los los los cosos principales the fucural de lovamiento se chie a transmission de la salada de la sa stand will keleate. It seems do actionism men in agreeful depend by the Pot to land, in furta do consequent to de unitarion algorithms diversional del caerge a de sessido opposes le l'ilde. tion to 15 as maked un recoming to me en ex cuit un disco se cacuentar siro a la resa y chegade en na fluido que denoral and - b 👙 La Appres el Rabbee xoa Banadalona es ismole amountiquado, signio F la suma da to account to the section of the section

La solución de esta ecuación diferencial se dará sin demostrar (ya que elestudiante hasta este nivel no tiene experiencia con ecuaciones diferenciales)—
y es válida cuando b es pequeña.

$$x = Ae^{-bt} \cos (w't + 6)$$

Ecuación 4-34

siendo

$$W' = 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}$$
. Ecuación 4-35

En la figura 4-17 se representa gráficamente la ecuación 4-34, en ella seha trazado la elongación x en función del tiempo t para el movimiento oscilatorio de poca amortiguación.

Cuando existe rozamiento, la frecuencia es más pequeña y el período es mayor. Debido al rozamiento el movimiento se hace mas despacio. Cuando no existerozamiento, b = o y $w' = \sqrt{\frac{k}{m}}$ que viene siendo w, la frecuencia angular del movimiento no amortiguado. Cuando hay rozamiento, w' es menor que w.

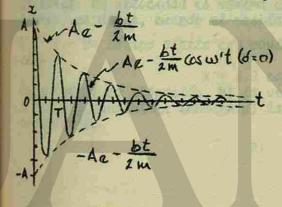


FIGURA 4-17

En el movimiento armónico amortiguado,la amplitud del movimiento va disminu-yendo continuamente hasta llegar a un valor cero.

Al intervalo de tiempo 7, en el cuál la amplitud se reduce a la fracción $\frac{1}{e}$ delvalor inicial, se le llama vida media de la oscilación. Como el factor de amplitud Ae^{-bt} , por consiguiente, $\Upsilon=\frac{2m}{b}$

Si no existiera rozamiento b sería igual a cero y la amplitud tendría unvalor constante A al transcurrir el tiempo y la vida de la oscilación sería in finita.

Cuando la fuerza de rozamiento es muy grande, b también es muy grande y - la Ecuación 4-34 ya no es solución válida de la ecuación del movimiento. Por - lo tanto, el movimiento ya no es periódico y el cuerpo simplemente vuelve a su posición de equilibrio después de soltarlo de su posición inicial A.

En el movimiento armónico amortiguado la energía del oscilador se disipagradualmente debido al rozamiento y se reduce a cero al cabo de un tiempo. la redución de esta conación diferencial es dest sin denostrat lua que el-HARATE FACTO CALC ROOK OF CLARE CAMPAGEMENT OF SECURIOR CALCADES us will die caande b es pequeña. . Debido al commicción de menosco de los sensimos de chidos de out no anarciquado, Cuancia ner baranticolho, a levent el THE SE WOUSDAY DE WASHINGTON SO THE wide will be no in tolerably afficial do la councide del modificator timete, el monimiento on no es peniditac u vi

1.- La posición de una masa de 200 g al extremo de un resorte está dada --

x = 30 sen(0.63t + 77/2) cmEncontrar: a) la amplitud, b) el período, c) la frecuencia, d) el ángulo de fase de la vibración, así como, e) la constante del resorte.

R: 30cm; 10 seg; 0.10 ciclos/seg; W/2; 0.079 nt/mt.

2.- Para la vibración descrita en el problema 1, encontrar las expresiones de velocidad y de aceleración de la masa. Utilizando las expresiones de aceleración, encontrar la constante del resorte.

R: 18.9 cos (0.63t + 71/2); -11.9 sen (0.63t + 11/2); 0.079 nt/mt.

3.- La ecuación de movimiento de un objeto es $y = 2.0 \cos(0.5t + 77/4) \text{ mt.}$ Encontrar: a) su aceleración máxima, b) su velocidad máxima. ¿Dónde se encuentra el objeto en el momento de estos máximos? c) ¿Cuál es la velocidad del objeto

tra el objeto en el momento de estos máximos? c)¿Cuál es la velocidad del objeto cuando se encuentra a 1.20m de su posición de equilibrio?

R: 0.50 mt/seg²; 1.0mt/seg (la aceleración es máxima en los extremos de la tra-

R: 0.50 mt/seg^{*}; 1.0mt/seg (la aceleración es máxima en los extremos de la trayectoria; la velocidad es máxima cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando el desplazamiento es mínimo); 0.8 mt/seg.

4.- Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

 $x = 6.0 \cos (3 \% t + \%/3)mt$. Calcular A) la elogación, b) la velocidad y c) la aceleración para el tiempo -- $t = 2 \sec$. Encontrar también d) la fase, e) la frecuencia f, y f) el período de movimiento.

R: a) 3 mt; b) -49mt/seg; c) -267mt/seg; d) M/3 rad; e) 1.5 ciclos/seg; h) 2/3 seq.

5.- Un bloque de 4.0kg estira un resorte 16cm a partir de su posición no -deformada. Se quita el bloque y se suspende un cuerpo de 0.50kg del mismo resorte. Si entonces se suelta el resorte, ¿Cuál es su período de movimiento?

R: 0.28seg.
6.- Una masa de 2.0kg se suspende de un resorte. Un cuerpo de 300g, suspen dido abajo de la masa, estira el resorte 3.0cm más de lo que estaba. Si se quita el cuerpo de 300g y se pone a oscilar la masa, encontrar el período del movimiento.

R: 0.728seg.

7.- Una bola de 2.0Kg sostenida en el extremo libre de una barra metálicaflexible ligera sujeta en un extremo, sufre movimiento armónico simple de frecuencia 3.0cps. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere para desplazar la bola 1.0cm a partir de su posición de reposo? ¿Cuál sería la velocidad máxima de la bola si se librara a partir de esta posición? ¿Cuál sería su velocidad si se encontrase a 0.50cm a partir de su posición de equilibrio? (ignore los efectos de la gravedad).

R: 3.2nt; 0.126mt/seg; 0.11mt/seg.

 $1_{\rm eff}$ is governoon to una quea de 200 g of cubicon do un resource execution v = 20 sent $0.432 + \sqrt{12}$ on

tentrativa at la maritani, di el rendado, at la laconnecto di da decida de da da da de la victanicia, ast como, at la constant de COST

ALERE FLAMMAM

AUTO DE SENERA DE SEN

The constant of the constant o

of the method of the market of the present of the method of the market o

The suggest of the su

Manager Al Consumer Semblen to Consumer Consumer Section of the Se

American de formation de survivers de survivers de survivers de la formation de la formation de survivers de

Le line and le religion de la reporte filtem man de la contractante filtem man ammandante el puntant de la contractante de la contra

The state of the s

Rt Eight 1, (Restaur) 0, (Inches)

1.- La posición de una masa de 200 g al extremo de un resorte está dada --

x = 30 sen(0.63t + 77/2) cmEncontrar: a) la amplitud, b) el período, c) la frecuencia, d) el ángulo de fase de la vibración, así como, e) la constante del resorte.

R: 30cm; 10 seg; 0.10 ciclos/seg; 71/2; 0.079 nt/mt.

2.- Para la vibración descrita en el problema 1, encontrar las expresiones de velocidad y de aceleración de la masa. Utilizando las expresiones de aceleración, encontrar la constante del resorte.

R: 18.9 cos (0.63t + 11/2); -11.9 sen (0.63t + 11/2); 0.079 nt/mt.

3.- La ecuación de movimiento de un objeto es $y = 2.0 \cos(0.5t + 7i/4) \text{ mt.}$

Encontrar: a) su aceleración máxima, b) su velocidad máxima. ¿Dónde se encuentra el objeto en el momento de estos máximos? c); Cuál es la velocidad del objeto cuando se encuentra a 1.20m de su posición de equilibrio?

R: 0.50 mt/seg²; 1.0mt/seg (la aceleración es máxima en los extremos de la trayectoria; la velocidad es máxima cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando el desplazamiento es mínimo); 0.8 mt/seg.

4.- Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecua ión

 $x = 6.0 \cos (3 \% t + \%/3) mt$. Calcular A) la elogación, b) la velocidad y c) la aceleración para el tiempo -- t = 2 seg. Encontrar también d) la fase, e) la frecuencia f, y f) el período de movimiento.

> R: a) 3 mt; b) -49mt/seg; c) -267mt/seg; d) M/3 rad; e) 1.5 ciclos/seg; f) 2/3 seg.

B- Un bloque de 4.0kg estira un resorte 16cm a partir de su posición no -deformada. Se quita el bloque y se suspende un cuerpo de 0.50kg del mismo resorte. Si entonces se suelta el resorte, ¿Cuál es su período de movimiento?

6.- Una masa de 2.0kg se suspende de un resorte. Un cuerpo de 300g, suspendido abajo de la masa, estira el resorte 3.0cm más de lo que estaba. Si se quita el cuerpo de 300g y se pone a oscilar la masa, encontrar el período del movimiento.

R: 0.728sea.

7.- Una bola de 2.0Kg sostenida en el extremo libre de una barra metálicaflexible ligera sujeta en un extremo, sufre movimiento armónico simple de frecuencia 3.0cps. ¿Qué magnitud de fuerza se requiere para desplazar la bola 1.0cm a partir de su posición de reposo? ¿Cuál sería la velocidad máxima de la bola si se librara a partir de esta posición? ¿Cuál sería su velocidad si se encontrase a 0.50cm a partir de su posición de equilibrio? (ignore los efectos de la gravedad).

R: 3.2nt; 0.126mt/seg; 0.11mt/seg.

The literature of the contraction of the first of the contraction of t 1 1 - 1 (5/10) + 1/10 (1) K(1) + 1/10 (1) LESSON A) LA CARRACIENA EL LA * A seq. Encretery Sambles of tale de 22 made, cafalat et houeste à l'est mis de ce que labable. Si warfs de 1994 le su pous a casallat la serad. Chronitat el fonicido del moud AND S. Dept., 19th manikard do exchang to the about safet taken in the the marker the are constituted as presented adult and the constitution as the first

with an indicating a process to a safe was elected and a large to a safe as an

adjuste a c. blos a santin de ja dockelón de catilitation lighene les electes de

· R 3. PRES G. 12 decident Const. Con

8)- Entre dos postes largos se tiende una cuerda. Cuando se cuelga un objeto de 1.0kg del punto central de la cuerda, ésta se comba 10.0cm; y 20.0cm ba jo una carga de 2.0kg. Si únicamente está colgado la carga de 1.0kg y se tira = del objeto hacia abajo 5.0cm más y a continuación se suelta, encuentre la frecuencia de la vibración y la velocidad del objeto y medida que pasa por la posición de equilibrio.

R: 1.59hz; 50 cm/seg.

9.- Determinar resorte se estirará 20cm bajo la acción de una fuerza de - 5.0nt. Supongase que ahora el resorte cuelga verticalmente con una masa de 300g en su extremo. ide qué magnitud será la fuerza requerida para estirarlo 20cm -- mís?

R: 5 nt.

10. - Un bloque se encuentra en una superficie horizontal que se está mo-viendo horizontalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia dos oscilaciones por segundo. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y - el plano es de 0.50. ¡Hasta de qué valor puede ser la amplitud para que el bloque no deslice sobre la superficie?

R: 3.1cm.

11.- Un bloque se encuentra sobre un émbolo que se está moviendo verticalmente con un movimiento armónico simple de período 1.0seg. a) ¿Para qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo? b) Si el émbolo tiene -- una amplitud de 5.0cm, ¿cuál será la frecuencia máxima para la cuál el bloque - y el émbolo estarán en contacto continuamente?

R:

a) 0.25mt

b) 2.24 ciclos/swg.

12.- Las frecuencias de vibración de los átomos en los sólidos, a temperaturas normales , son del orden de 10^{13} ciclos/seg. Imagínese que los átomos estavieran conectados entre sí mediante resortes. Supóngase que un solo átomo deplata vibra con esta frecuencia y que todos los otros átomos se encuentran en reposo. Calcular entonces la constante de fuerza de un solo resorte. Una mol de plata tiene una masa de 108g y contiene 6.02 x 10^{23} átomos.

R: k = 710 nt/mt.

13.- El extremo de una de las ramas de un diapasón que ejecuta movimientoarmónico simple de frecuencia 1000 ciclos/seg tiene una amplitud de 0.40mm. Notomando en cuenta el amortiguamiento, encontrar a) la máxima aceleración y la máxima velocidad de la punta de la rama, y b) la velocidad y la aceleración dela punta de la rama cuando tiene una elongación de 0.20 mm.

R: a) $1.6 \times 10^4 \text{ mt/seg}^2$; 2.5 mt/seg. b) 2.2 mt/seg; $7.9 \times 10^3 \text{ mt/swg}^2$

14.- Un resorte de constante de fuerza 19.6nt/mt se encuentra suspendido - verticalmente. De su extremo libre se suspende un cuerpo de 0.20kg de masa y se suelta. Supóngase que el resorte estaba sin estirar antes de que el cuerpo se - soltara, y encuentrese que cantidad bajará el cuerpo a partir de la posición inicial. Hallar también la frecuencia y amplitud del movimiento armónico simple-resultante.

R: 0.1 mt; 1.57 ciclos/seg; 0.1 mt.

In the links det punte contrar de ce cuenda, ésta se emata l'hiens u eulige un object l'hiens u el l'en ba o un ennge de 2.000. Et antermente està corrado la ennge de 1.000 u se tina o el object haria abajo è den més y a consinuación se suelta, anteritar la l'ueamest de la vibración y la velocidad del object y medida que para por la post

1.54kg 18 19/19 19

of the entires readed at action item only to dell to me for the contract of th

10. - Un bloque de encuentad en une duret inter monecontais que de estil en consendante de conse

11. - the because as encircular above in babado sur versión usacidade alla considerate usacidade de considerate considerate de mouda esta oculoso de considerate de conside

The Los Inemperated to vilable sign do the confidence of the confi

The Control of the Co

Addestronde. De su estuamo Eitho is subpende un cuentro de d'Ethy de made a so diventro de de made a so diventronde. De su estato de made a subpende de cuentro que el nedante estato de cuentro de cuentro de continuo de con

o, i mt. 1,57 elekos/segr 0,1 mt.

15.- Un automóvil se puede considerar como montado sobre un resorte por lo que toca a oscilaciones verticales. Los muelles de cierto vehículo se ajustan - de manera que las vibraciones tengan una frecuencia de 3.0 ciclos/seg. ¿Cuál es la constante se fuerza del muelle si el automóvil pesa 14,200nt? ¿Cuál será la-frecuencia de vibración si en el auto van cinco pasajeros, que en promedio pesan cada uno 712nt?

R:

515,000 nt/mt; 2.7 ciclos/seg.

16.- La escala de una balanza de resorte que lee de 0 a 142nt es de 0.102mt de longitud. Se encuentra que un paquete suspendido de la balanza oscila ver ticalmente con una frecuencia de 2.0 oscilaciones por segundo. ¿Cuánto pesa elpaquete?

R: 84.6nt.

17.- Un péndulo simple de 1.0mt de longitud hace 100 oscilaciones completas en 204seg en cierto lugar. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad en ese punto?

R: 9.5mt/seg².

18.- ¿Cuál es la longitud de un péndulo simple cuyo período es exactamente de 1 seg. en un lugar en donde g = 9.81 mt/seg²?

R: 0.248 mt.

19.- Se tiene un péndulo formado por una regla de un metro articulada en - su extremo de manera que puede girar libremente alrededor de un eje horizontal. ¡Cuál es el período del péndulo así formado? Si el eje de rotación pasa por lamarca de 75cm, ¡Cuál será su período? ¡Cuál será si el eje está en la marca --- 60cm?

R: 1.64seg; 1.82seg; 2.1seg.

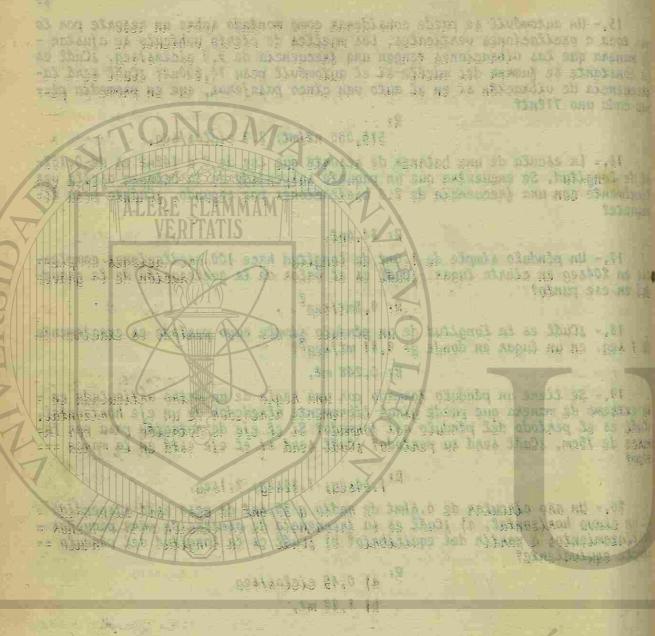
20.- Un aro circular de 0.61mt de radio y 35.6nt de peso está suspendido - de un clavo horizontal. a) ¿Cuál es su frecuencia de oscilación para pequeños - desplazamientos a partir del equilibrio? b) ¿Cuál es la longitud del péndulo -- simple equivalente?

R: a) 0.45 ciclos/seg

b) 1.22 mt.

MA DE NUEVO LEÓN

DE BIBLIOTECAS



JNIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERAI

CAPITULO V

ESTATICA DE LOS FLUIDOS

1.- Fluidos. Presión y densidad.

En este capítulo se tratará del estudio de los fluidos en reposo. Defini-do un fluido como una sustancia que puede fluir. Por lo tanto, está denomina--ción de fluido incluye tanto a los líquidos como a los gases, pero mientras que
un líquido tiene un volumen definido, al adoptar la forma de la vasija que lo contiene, un gas llena completamente el volumen del recipiente que lo contenga.

Algunos fluidos, tales como el vidrio o la brea se comportan como sólidosya que fluyen lentamente, otros como el plasma que es un gas muy ionizado, no se sabe fácilmente sí es líquido o gas; a menudo se le llama "cuarto estado dela materia" para poderlo distinguir.

Los líquidos y los gases se pueden diferenciar por sus coeficientes de com presibilidad; ya que mientras un líquido es prácticamente incompresible, un gas puede ser fácilmente comprimido.

Para el estudio que se haga, se despreciará la pequeña variación de volu-men que experimenta un líquido por la acción de una presión.

Los fluidos difieren también unos de otros por su viscosidad, que es la facilidad con que pueden fluir. La viscosidad de un gas es pequeña en comparación con la de los líquidos, tales como el agua, el petróleo y la glicerina yaque poseen viscosidades mayores. La densidad de un material homogéneo se define
como su masa por unidad de volumen, y se expresa en gramos por centímetro cúbico, kilogramos por metro cúbico, o slugs por pie cúbico.

La expresión que define la densidad es:

 $p = \frac{m}{V}$

La densidad relativa de una sustancia es la relación de la densidad de esta sustancia, con la del agua y es, por tanto, un número abstracto.

Presión y densidad:

La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura, así como también al aumentar la distancia al fondo de un lago o un océano. Generalizando el concepto de presión para un fluido que se encuentra en reposo, una fuerza en la su perficie siempre debe estar dirigida perpendicularmente a la superficie, así co mo las fuerzas ejercidas por el fluido contra la pared y las ejercidas por la pared sobre el fluido son normales a la pared.

Esto resulta evidente cuando se comprueba que un fluido no puede soportarpermanentemente es fuerzos cortantes, ya que cualquier fuerza tangencial ejercida sobre el fluido probacaría que las capas del fluido resbaláran unas sobre -las otras y por lo tanto se presentaría el deslizamiento del fluido. Por otra --

Estimated the service of the service

NIVERSIDAD AUTONICAN AND AUTON

e peratin armos forica disminuya at aumenton in altura, ast como también vitir la distancia at fondo de un lage o un naturo. Veneralizando at cenle presión cara un iluido que se excuentas en repose, una fuerra en la su

de presión como un fluido que as exemples en reconso, una fluores en la sur de presión con la company de la company de la conscient por ca en reconstruction de la conscient por casa de la conscient po

el sobre el fonció son normales a la poned.

Leco Associa evidente cennis se comphueba que un finado no puede importanresentemente esfuencos contantes, ya que cualquier fuenza imparación elemendirec al finicio electratia que las capas del finiso restalidaden unas sobra -colore a por la turio electro de prosentacia el lesticamiente del finido. Per elma-

parte, es precisamente la incapacidad de los fluidos de resistir tales fuerzastangenciales (esfuerzoas cortantes) lo que les dá su propiedad característica de cambiar su forma, o sea, de fluir.

La presión en un fluido se define como la magnitud de la fuerza normal que obra sobre el fluido por unidad de área y se transmite a todos los límites sólidos en todos sus puntos.

La presión es una cantidad escalar y sus unidades comunes son:

$$\frac{Lbs}{In^2}, \frac{NT}{MT^2}, \frac{Dina}{cm^2}, \frac{Kg}{MT^2},$$

atmósferas (1 atm. = $14.7 \frac{Lbs}{In^2}$) y milímetros de mercurio (760 m m - HG = 1 atm).

Al considerar una superficie cerrada que contiene un fluido, el valor de la presión en un punto se define como la razón de la fuerza dF ejercida sobre una pequeña superficie dA que comprenda este punto, por lo tanto:

$$P = \frac{dF}{dA}$$
 Ecuación 5-1

La densidad p de un fluido homogéneo puede depender de varios factores, tales como la temperatura y presión a que esté sometido. Para los líquidos, la --densidad varía muy poco dentro de grandes límites de presión y temperatura, por lo tanto se le puede tratar como constante para nuestros fines. En cambio la --densidad de un gas es sensible a los cambios de temperatura y presión.

En seguida se muestran las variaciones de densidad para el agua y el airecuando están sometidos a las condiciones de presión y temperatura indicadas:

2.- Variaciones de presión en un fluido en reposo.

Un fluido se encuentra en equilibrio, cuando todas las partes del mismo es tán en equilibrio. A continuación se deducirá la relación existente entre la -- presión y la altura de un fluido. Considerese un pequeño cubo del volumen de -- bluido, sumergido dentro de la masa del fluido que se encuentra en equilibrio - bajo la acción de las fuerzas dirigidas hacia su interior, ejercidas sobre sus-

The street of th

WERITATIS

THE THE STATE OF THE

UNIVERSIDAD AUTÓN

Ear way o

DIRECCIÓN GENERA

the plains to enquented on equilibrie, examing today the whole for mises of mises of the entire of t

caras por el fluido que lo rodea y por su peso, como se muestra en la figura -- 5-1.

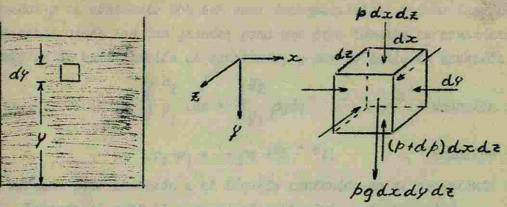


FIGURA 5.

Las fuerzas horizontales ejercidas sobre las caras opuestas, son igualesy opuestas, pero la fuerza hacia arriba que actúa sobre la cara inferior del cu bo debe ser mayor a la fuerza ejercida sobre su cara superior, para equilibrarel peso del fluido contenido en el cubo.

Representese por p y p + dp las presiones sobre las caras superiores e inferior, y sea dx, dy y dz las dimensiones del cubo. La densidad del fluido se representára por p. Puesto que el cubo está en equilibrio.

dp = pgdy

Ecuación 5-2

Que es la ecuación general que relaciona la variación de presión con la altura. (La coordenada "y" se considera positiva cuando se mide hacia abajo). Observese que el producto pg es el peso por unidad de volumen del fluido, o sea, su peso específico. Conforme aumenta la altura en el recipiente, disminuye la presión.

Por consiguiente, la ecuación 5-2 se convierte en:

 $\frac{dp}{dy} = -pg$

Ecuación 5-2a.

Si se analiza un punto sumergido en un líquido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera como el de la figura 5-2.



FIGURA 5-2

LEY KAN BROSEPHON ACOU Los sonot de (101) /209 Por consiguiente, la ceunción 5-2 se conviente ent

Ponde p_1 y p_2 son las presiones a las alturas y_1 e y_2 contadas por encimade un cierto plano horizontal, al integrar la ecuación 5-2a y sabiendo que paralos líquidos p es constante por ser casi incompresibles; y como las diferencias de nivel raras veces son tan grandes para que deba tomarse en consideración algún cambio en g, está también es constante, y por lo tanto la ecuación quedará:

$$\int_{P_1}^{P_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} pg dy$$
 Ecuación 5-3
$$p_2 - p_1 = -pg (y_2 - y_1)$$
 Ecuación 5-3a

Al aplicar está ecuación a el líquido contenido en el recipiente de la figura 5-2. Tomando el punto 1 a un nivel cualquiera y representado por p la presión en este punto; el punto 2 se encuentra en la superficie donde la presión es la atmosférica, po. Entonces,

Como $(y_2 - y_1)$ es la profundidad h bajo la superficie. La ecuación quedará

$$p_o - p = -pgh$$

$$p = p_o + pgh$$

Ecuación 5-4

Obsérvese que la presión es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad, y que la forma del recipiente no afecta a la presión.

Para los gases p es muy pequeña y de ordinario la diferencia de presión en tre dos puntos es insignificante. Así se puede admitir, que un depósito que con tenga un gas, la presión es la misma en todos los puntos. Sin embargo cuando -- $y_2 - y_1$ es muy grande esto no sucede así, ya que la presión del aire varía -- continuamente cuando nos elevamos a grandes alturas en la atmósfera. En tales - casos la densidad p varía con la altitud y para poder integrar la ecuación 5-3-debe conocerse a p en función de "y".

Ejemplo 5-L.

Un tanque abierto contiene 2 metros de agua cubiertos con 1 metro de aceite de densidad relativa 0.83. Calcular la presión en la superficie de separa-ción agua-aceite y en el fondo del tanque.

En la superficie de separación, h = 1 mt y Prelativa aceite = $\frac{Paceite}{Pagua}$.

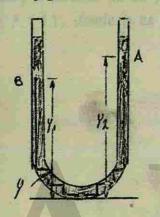
Paceite = 0.83 x 1000 = 830 $\frac{kg}{mt^3}$.

$$p = ph = 830 \times 1 = 830 \frac{kg}{mt^2}$$

En el fondo del tanque la presión es la de la superficie de separación mas ph para el agua, o sea:

La ecuación 5-3a relaciona las presiones entre dos puntos cualesquiera enun fluido, no importando la forma del depósito que lo contenga. Cualquiera quesea la forma del depósito dos puntos en el fluido se pueden unir mediante una trayectoria formada por escalones horizontales y verticales.

Considerese los puntos A y B en el líquido homogéneo contenido en el tuboen U de la figura 5-3.



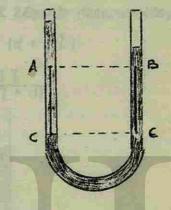


FIGURA 5-3

FIGURA 5-4

Siguiendo la trayectoria desde A hasta B, se encuentra que hay una diferencia de presión pgy^1 para cada segmento vertical y^1 , en tanto que para los segmentos horizontales no hay cambio de presión. Por lo tanto, la diferencia de presión $p_B - p_A$ es pg veces la suma algebraíca de los segmentos verticales de A hasta B, o sea pg $(y_2 - y_1)$.

Si el tubo U contiene líquidos diferentes, supongase un líquido denso en el tubo de la derecha y uno menos denso en el tubo de la izquierda, como se --- muestra en la figura 5-4, la presión puede ser diferente al mismo nivel en diferentes lados. En el tubo de la izquierda la superficie del líquido está mas alta que en el de la derecha, por lo tanto la presión en A será mayor que en B. - la presión en C es la misma en ambos lados, pero la presión se reduce menos de- C a A, que de C a B, ya que una columna de líquido de sección transversal de área unidad, que una al punto A con C pesará menos, que una columna que una al punto B con C.

Ejemplo 5-2.

En la figura 5-5. se muestra un tubo en U, inicialmente lleno de agua.

Otro líquido, que no se mezcla con el agua, se vierte por uno de los lados hasta quedar a una altura d sobre el nivel del agua en el otro lado, el cual, - mientras tanto, se ha elevado una altura ?

to an exception planes mondrouted at integrate the accuracy in 5-th as articlerate one prina Manadot of an constante per sea cast discoveredibles; a const les littlesendes t diver north veces son the estandis sinc one did tomer or cortalistically at of combine and g. will combine as constructs a section. At applicant estal equación had literativo applicantes un la goccontrate da da The state of the sector of a unfailed healthicker of the state of the sector of the se who are easter genetics at proceed to be executive, an in supported a factor to some the a de describación por fertades. SOME THE A SECRETARY WAS BUILDING WHITE HE HERE Source of the Obition of the probable of the probate we know the section of the section moderate a que la losse del recinente en abore la preside Pana Los gasos of an only request, or it is a distributed to the course the relation of instance with the stand of the contract of the THE REAL PROPERTY AS THE PROPERTY OF THE PROPE the mile extends that we sucked and, we see he increde del cine north -Continue mante mande non el comer a chanter eltieres en la conference in enter Mos in decessari p ugain our in actions a come reduce infraver in concession 5-3anous ablenso constront I method to agua euclientos com i metho de acci de duraidad nelazioa d. 83. Calculan ca papaión en la superficia de acoura-he agua-acetic y or at fonde det tanque. Ed 088 1 1 088 = 40 0 0

In st hande dut tanger la presede us to de sa superside de secretación mas

Books up to both late epithenics a date children is the confined to the confin

1 = 850 + 2 × 1000 + 2500 12

to connector 5-30 extactions has president and president and prairies confinencial as finite; no important of formation to formation to the formation of the formation of the first of the formation of the formation of the formation of the formation of the first of t

TALERE FLAMMAM VERITATIS

FIGURA 5+3

Signiendo la trayectaria aside à atala de continue en anco de part in interessión par part in antico de continue en anco de continue en anco de continue en contin

He et tubo il conthene Elquidos digenentes, supengase un Esquido dento en u bubo de la deserba y uno menos denso en et tubo de la Xiquienda, como se

Presión en C es la mient en ambas tados, peta la presión se rigido menos de-A, ede de C a B, un que una chlumon de l'apoldo de secolón thansventar de de-

DIRECCIÓN GENERA

In it figure to be meritin an tubo on a largetiments lieno de land.
Other identia, que no se meritin con el asper, de vienze por uno de los lades antis que par una alterna d'active el nevel del apen en el etip lode, el eurit, d'active tanto, de ma elevado una elleva .

Encontrar la densidad del líquido con relación a la del agua. (Densidad relativa del líquido).

Como los puntos C estan a igual presión, la caída de presión desde C hasta cada superficie será la misma, debido a que cada superficie se encuentra a la presión atmosférica.

La caída de presión en el lado del agua es, $p_{agua}g^2$; el 2 \overline{l} proviene de que la columna de agua se elevó una altura \overline{l} de un lado y bajo una altura \overline{l} del otro lado, a partir de su posición inicial. La caída de presión en el otro lado es $pg(d \neq 2 \ l)$, donde p es la densidad del líquido desconocido, por lo tanto:

 $P_{agua}^{g2} = pg (d + 2l)$ $P_{agua} = \frac{2l}{(2l + d)}$ $P_{agua} = \frac{2l}{(2l + d)}$

FIGURA 5-5

3.- Principio de Pascal y principio de Arquimedes.

De la ecuación 5-4 se deduce que sí la presión po se aumenta de algún modo por ejemplo, ajustando un pistón sobre la parte superior como se muestra en lafigura 5-6, y ejerciendo una presión hacia abajo, la presión p a determinado -profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. Este hecho fué enunciadopor el científico francés Blas Pascal (1623-1662) en 1653, y se conoce con el nombre de Principio de Pascal, que se enuncia así: "La presión aplicada a un -fluido encerrado se transmite sin diminución a cada punto del fluido y de las paredes del recipiente".

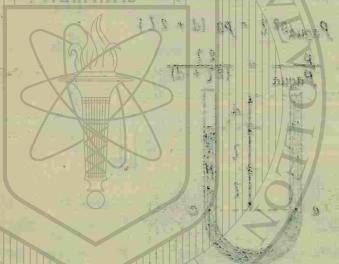
Este resultado es consecuencia necesaria de las leyes de la mecánica de -los fluidos, y por lo tanto no se trata de un principio independiente.

En realidad los líquidos son ligeramente compresibles, ya que al aplicar - un cambio de presión a una porción de un líquido, se propaga por este como unaonda, a la velocidad del sonido en ese líquido. Una vez terminada la perturbación y establecido el equilibrio, se encuentra que el principio de Pascal es válido para los gases, con pequeñas complicaciones de interpretación debidas a --

Encounter to densited het thousan our nothering a sa det agua; (Densited ne

Como tos puntos C estan a lavat presión, ta calda de presión desdo C hasta
min superfiche sent la misma, debido a que en la superficie se estrentre a ta «
sestán abnositrica.

to column de aqua ex eleva and elevant el production de column de accident el production de acci



A ASSURE

3 - Principlo de Pascal u primeiodo de Shalimeta

To to conacton 5-0 so deduce que et les presión po so concerta de algún nodo

somalo, aquatencie un piatón acono la parte superior como se marites en las

alta 5-6, y ejelector una presión hacia abajo, la presión o la determinado -
levillad exemple es comente en la milima consider testa hacia for encoracio en

levillad esta parte de la ferent, que se enuncia asía "la presión apriserta a un -
levilla de Painoisión de ferent, que se enuncia asía "la presión apriserta a un -
uide encorrado se transmite sin seriamento a cada presión in lituado y de las

Act Salation of Interest of the stand of the Countries of

En minerial des elquidos son ilgeremente compresibles, qui que es apricaen en comitio de prasiden a una poneión de un ilaquido, se propaga por como una suit, a la referendad del senido en ese liquido. Una vez terminada la perturba-ción y establecido el equilibrio, se encuentas que el principio de vatant en un diserporta los como requeñas como lesciones de interpretalita abbidas e en

los grandes cambios de volumen que pueden ocurrir cuando se hace variar la presión de un gas encerrado.

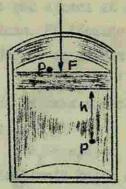


FIGURA 5-6

El principio de Pascal se aplica en el funcionamiento de la prensa hidráulica, que se representa esquematicamente en la figura 5-7.

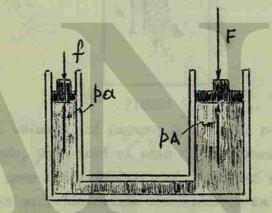


FIGURA 5-7

Un pistoón de sección transversal pequeña a, se utiliza para ejercer directomente una pequeña fuera sobre un líquido, tal como aceite. La presión p = $\frac{1}{a}$ es transmitida a lo largo de un tubo, hacia el cilindro mas ancho que tiene también un pistoón mas ancho, de área A. Como la presión es la misma en los dos cilindros.

$$p = \frac{f}{a} = \frac{f}{A}$$

$$F = \frac{A}{A} \int$$

Como se verá la prensa hidráulica es un dispositivo para multiplicar la -- buerza con una ventaja mecánica ideal igual a la razón de las áreas de los pistones.

Principio de Arquimedes.

Es un hecho experimental conocido que un cuerpo sumergido en un fluido esempujado hacía arriba por él. La figura 5-8 muestra un cuerpo que tiene formaALERE FLAMMAM
VERITATIS

FIGURA 5-7

Un pietofa di sección indusvensai requeña a, sa atilian pesa ejences discritante una requesta fuena sobne un liquida, ial como seccitan la massión o el

INTERSIDADA DA TOTA

1 = 1 = 4

DIRECCIÓN GENERA

All con una ventaja necămica ideal igual a la mazăm de las frens le las pis-

Parinoupic do Augulmodes.

to un hecho expendental conocido que un oucapo sumangido en un divido es-

de cilindro recto, de altura h y sección A, sumergido en un fluido de densidadp. Las fuerzas horizontales que ejerce el fluido sobre el cilindro dan una resultante nula, y no se indican. El líquido ejerce una fuerza hacia abajo sobrela cara superior del cilindro, y se dá por:

 $F_1 = p_1 A = (p_0 + pgx)A,$

donde x es la profundidad de la cara superior del cilindro.

Para la cara inferior;

 $F_2 = p_2A = [p_0 + p_3(x + h)] A$ El empuje, o fuerza resultante hacia arriba es:

 $F_2 - F_1 = pghA$

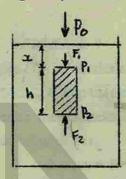


FIGURA 5.8

Como hA es el volumen del cuerpo, y pg es el peso por unidad de volumen de fluido, por lo tanto, pghA será el peso de un volumen de fluido igual al volumen del cuerpo o, como suele decirse, el "peso del fluido desplazado". Por lo cual se puede decir que: "un cuerpo sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del fluido desplazado".

Este es el principio de Arquimedes.

Cuando el cuerpo no está totalmente sumergido en el fluido, el empuje es igual al peso de un volumen de fluido igual al volumen de la porción sumergidadel cuerpo. Si un cuerpo puede desplazar un peso de fluido igual al suyo antesde estar sumergido, flotará, y en caso contrario se undirá en el fluido.

Ejemplo 5-3.

Un depósito lleno de agua es colocado sobre una balanza de resorte, que se ñala un peso total W.

Una piedra de peso W está suspendida de una cuerda y se introduce en el agua sin tocar las paredes ni el fondo del depósito [figura 5-9 (a)].

¿Cuál será ahora la indicación en la escala de la balanza?

Primeramente se ha considerado la piedra aislada, y se han representado -- las fuerzas en la figura 5-9b, donde B es el empuje, y T la tensión de la cu $^{-1}$ da. Como Σ Fy = 0.

T + B = W

de estimados cercia, de estreva h y recruiba da aquerardo com um Aduerio de demadacin los facerras honizantales que estreve sa finados sebras ad cidinates descuena nemitante nula, y no no intiacom. El Manico especa pou fuenza braia abaja coburla cara aurendos del cidinato, y es de nom

Series & es la gradualidad de la capación de la cap

VERITATIS DE LA DESTRUCCIÓN DE

Come hi as it restants the come of the come of the contract of

Three es el principlo de Asquimente managidos en el fluido, el produjeres.

entred S us cuenty seek there include a frequency of an entred to the season and and anter-

Establish Season Committee Committee

the depositive escape de agua es coloquio intere una basanza de reinter, que ca

DIRECCION GENERA

one Nor facer tal parades at al four dest deposito (figura 5-4 fal) ...

icult sent unua la indiametin en la escala de la balanza!

Palmeramento se ha consideracio la piedra alstada, y se han representado ...

Institucion en la sigura 5-95, donde 8 es el emprio, y I la tensión de la eque-

(b) FIGURA 5-9

Considerando ahora el depósito aisladamente, con el agua y la piedra dentro de el; las fuerzas que actúan se representan en la figura 5-9c, donde S esta fuerza ejercida por la balanza de resorte sobre el sistema aislado. La condición de equilibrio conduce a la ecuación:

Restando la primera de la segunda ecuación, se obtiene:

Que representa, que la indicación de la balanza de resorte ha aumentado en una cantidad igual al empuje.

4.- Medida de la presión.

En 1643 Torricelli ideó un método para medir la presión atmosférica, inventando el barómetro de mercurio. El barómetro de mercurio es un tubo largo de vidrio que se llena de mercurio y se invierte despues en una cuba que contiene -- también mercurio. Como se indica en la figura 5-10. El espacio situado en la -- parte superior de la columna de mercurio solo contiene vapor de mercurio, cuya-presión, a la temperatura ambiente, es tan pequeña que puede despreciarse. Demostrándose fácilmente a partir de la ecuación 5-3a que la presión atmosférica-es:

po = pgh

La mayor parte de los aparatos empleados para medir presiones utilizan lapresión atmosférica como nivel de referencia, y miden la diferencia entre la -presión real y la presión atmosférica, llamandose a este valor presión manométrica.

En un fluido la presión real en un punto se llama presión absoluta. La presión manométrica se dá sobre la presión atmosférica o debajo de ella.



UNIVERSIDADAUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

sig filmentaleista legislator imitat yll igram eto ay back ultricio ili ibilate inc

dedu itseen in oceanita and in or or or other as all the side of the city

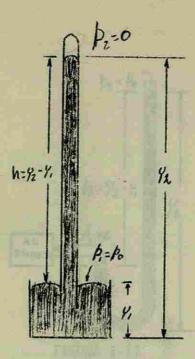


FIGURA 5-10

Un manométro que lee presiones debajo de la atmosférica se le llama manométro de vacío. La presión atmosférica en un lugar disminuye con la altitud y varia de un día a otro debido a que la atmósfera no se encuentra en reposo.

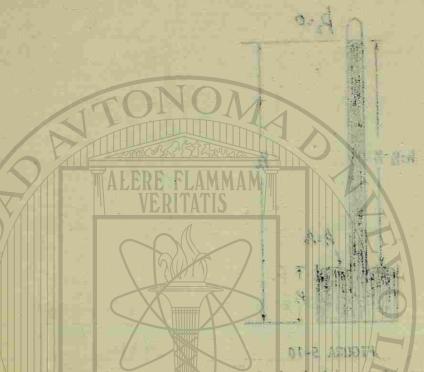
La columna de mercurio del barómetro tiene una altura de 76cm al nivel del mar, pero varía con la presión atmosférica.

La presión equivalente a la que ejercen los 76cm de mercurio, a 0°C y bajo condiciones normales de la aceleración de la gravedad, $g=32.174 \frac{ft}{ft} = 980.665 - \frac{cm}{2}$, se llama una atmósfera. A la temperatura de 0°C, la densidad del mercurio $\frac{gg}{ft}$ 3.5950 $\frac{grs}{cm}$, por lo tanto una atmósfera equivale a:

1 atm. =
$$(13.5950\frac{grs}{cm^3})$$
 $(980.665\frac{cm}{seg^2})$ $(76cm)$
= $1.013 \times 10^5 \frac{Nt}{mt^2}$
= $2116\frac{1b}{ft^2}$
= $14.7\frac{1b}{2}$

El tipo mas sencillo de manómetro es el tubo abierto representado en la $\underline{6i}$ gura 5-11, que sirve para medir la presión manométrica.

Se trata de un tubo en forma de U que contiene un líquido; un extremo deltubo se conecta al sistema Itanque cuya presión p se desea medir, mientras queel otro extremo esta en comunicación con la atmósfera.



to de vacée, la presión aomosfériax en un lugar disminuse con in eltitud y vatia de un dea de de con in eltitud y vatia de un dea de con en esposo.

La columna de metruncio del traducto de truca que acrecarina en reposo.

la columna de mencunto del tenémetro trens una altant de 750m al vivel de aut, pero vanta con la presión atmosférico.

la presión toutratente a la que ciracón los tem el moneurya, a a y najor electores normales de la acelénación de la gravella.

To be alient and administered, in he hempeterana destact, he dentified del mencario 13.5050 and por lo heart and atmit and constant as

NIVERSIDADIAUTÓN

2116 15

DIRECCIÓN GENER

El cipo mas sencilio de concinto es el tubo ablecto aconescatado en la 41 ma 5-11, que situe para medit la presión manométrica.

Se trata de un tube en forma de U que contiene un Elquidos un extremo dexuto se conecta al vistema litançae caya pressión o se desen metin, micritas quel atro extremo esta en comunicación con la atmósfera.

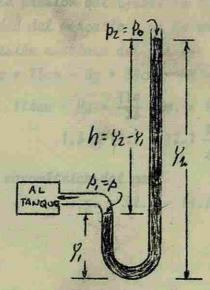


FIGURA 5-11

La presión debida a la columna de la izquierda es:

p + pgy1

mientras que la debida a la columna de la derecha es:

po + pg (y1 + h)

(p es la densidad del líquido del manómetro). Como las dos presiones están referidas al mismo punto, son iguales; por lo tanto:

$$p + pgy_1 = p_0 + pg (y_1 + h)$$

 $p - p_0 = pgh$

La diferencia de alturas h entre las dos columnas líquidas es proporcional a la diferencia de presiones p - po.

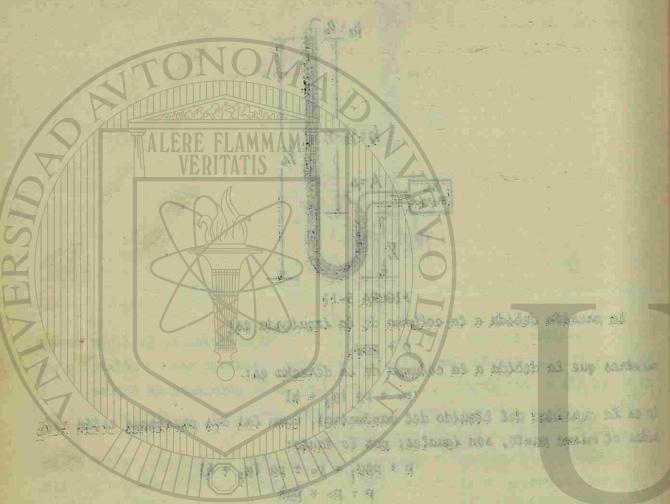
A la diferencia de presiones p - po, se le denomina presión manométrica, - mientras que a la presión p se le llama presión absoluta.

Si el recipiente contiene un gas con una presión grande, en el tubo se usa un líquido denso como el mercurio; cuando se miden pequeñas presiones de gas se puede emplear agua.

Ejemplo 5-4.

El manômetro abierto de mercurio de la figura 5-11, se conecta a un tanque de gas. La diferencia de alturasentre las dos columnas que contienen mercurio - es de 39cm, cuando un barômetro cercano marca 75cm de mercurio. ¿Cuál es la presión absoluta del gas? en cm-Hg, atm, $\frac{1b}{in^2}$.

La presión del gas es la que se encuentra en la parte superior de la colum na de mercurio de la izquierda. Y a la vez es igual a la presión que obra al --



to discounts do addition is guited for his policy administra on proposeconne

A da defenencie de presidenci p - 10, se de denomina prazida mangalizion :

UNILOUNDE RESIDENCE DE LES PER PROPRIES PRINCES PRINCE

eliquido dense como el mesegnijo; egando su miden percueñas passiones de qui se

Ejempie 5-4.

suppose the Dolandar sup assumation and and activation and and activation activation and activation a

e de Biom, enante un benéssian cencana moner Asyr de conque de 18 parte en Co parte en en-Me, adm Astronomia des parte en en-Me, adm, Astronomia de conque de la conque del la conque del la conque del la conque del la conque de la conque de la conque de la conque de la conque del la conque de la conque del la conque del la conque de la conque de la conque del la conq

la prabible de la laquierda. Y a la vez en falar e la pente tupenden de la estant

mismo nivel en la columna de la derecha. La presión en este punto es igual a la presión atmosférica mas la presión que ejerce la columna extra, bajo condiciones normales de la densidad del mercurio y de la gravedad.

Por lo tanto, la presión absoluta del gas es:

p = 75cm - Hg + 39cm - Hg = 114cm - Hg. $114cm - Hg = \frac{114}{76} atm. = 1.5 atm.$ $1.5 \times 14.7 = 22.1 \frac{1b}{in^2}.$

¿Cuál es la presión manométrica del gas?

 $p - p_0 = 22.1 - 14.7 = 7.4 \frac{15}{in^2}$

MA DE NUEVO LEÓN

DE BIBLIOTECAS

uses alvel en la codurna da la decedes. La presión en volt punto es liquat a la modifici atmosférica mas la presión que ejente la columna extra pisaje condicion.

In nomales de la depredició del policion o do la convental.

Pot la tanto, la pressión absolute del gra

114cm - H

VERITATIS STATE OF THE STATE OF

JNIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERA

1.- El pistón de un elevador hidráulico de automóviles tiene $30\,\mathrm{cm}$ de diáme tro. ¿Qué presión en kg/cm² se requiere para levantar un coche que pesa $1200\,\mathrm{kg}$?

R: 1.7 kg/cm²

2.- A) encontrar la presión, en nt/mt^2 , a 152.5mt bajo la superficie del océano. La densidad relativa del agua del mar es de 1.03 \star 16^2 kg/mt³. b) Obtener la presión en la atmósfera a 16.1km sobre el nivel del mar.

R: a) $1.65 \times 10^6 \text{ nt/mt}^2$ b) $15.8 \times 10^3 \text{ nt/mt}^2$

3.- Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se echan 13.6cm de a-gua en la rama derecha, ¡Hasta qué altura sube el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?

R: 0.5cm.

4.- En 1654 Otto von Guericke, burgomaestre de Magdeburgo e inventor de la máquina neumática, presentó una demostración ante la Dieta Imperial, en la que, dos tiros de ocho caballos no pudieron separar dos hemisferios de latón en loscuales se había hecho el vacío. a) Demostrar que la fuerza F que se requiere pa ra separar los hemisferios es F = NR²P, siendo R el radio exterior de los hemisferios y P la diferencia de presiones exterior e interior de la esfera (figura-5-12). b) Tomando a R igual a 30.5cm y la presión interior igual a 0.1atm, ¿Qué fuerza hubiera tenido que ejercer el tiro de caballos para separar los hemisferios?

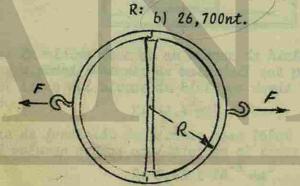


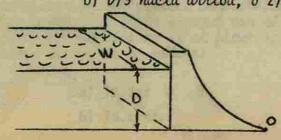
FIGURA 5-12

5.- Detrás de la cara vertical de una presa, el agua se encuentra a una -profundidad D en el lado de aguas arriba, como se ve en la figura 5-13. Llámese
W la anchura de la presa. a) Encontrar la fuerza resultante ejercida por el a-gua sobre la presa y el momento de rotación ejercido por esa fuerza con respecto al punto O. b) ¿Cuál es la línea de acción de la fuerza resultante equivalen
te?

R: a) $1/2pgD^2w$; $1/6pgd^3w$.

b) D/3 hacia arriba, o 2/3 D hacia abajo.

FIGURA 5-13



THE STREET SELECTION OF THE SECOND It is a faction of an elevation hardinalised the automorphistics are stored for after provide an engine at requeste, pose equences us ones, que pass troops 2 - Al ancienter la previous de nimes, or The della deal relation and agua les and the present on the court are as as a second in the title on it sendelles and an arrest of man neuman inc. meeryate the length market and MISOREM RESS ASSESS CONTROL OF ENTERN The distribution of the state o The state of the s phase y at monerty se notación ejuspido con esa pagaca con accoro-

the court of the fluer strategies de la fuerca resultanta aquanc

FIGURA 5-15

6.- Un estanque de natación tiene de dimensiones 24.4m por 9.15m por 2.44m Cuando se encuentra lleno de agua, ¿Cuál es la fuerza total en el fondo? ¿En -los extremos? ¿En los lados?

R: 2.76 x 10⁷nt; 2.67 x 10⁵nt; 6.51 x 10⁵nt.

7.- Un tubo en U está lleno de un solo líquido homogéneo. Temporalmente se comprime el líquido en una de sus ramas mediante un embolo. Se quita el emboloy el nivel del líquido en ambas ramas oscila. Demostrar que el período de oscilación es T (21/g, siendo L la longitud total del líquido en el tubo.

8.- En la prensa hidráulica se usa un embolo de pequeña sección transver-sal a para ejercer una pequeña fuerza f en el líquido encerrado. Un tubo de conexión conduce a un embolo más grande de sección transversal A (figura 5-14). a) iqué fuerza F podra sostener el émbolo mayor? b) Si el émbolo menor tiene undiâmetro de 3.8cm y el émbolo grande un diâmetro de 53.3cm, ¿Qué peso colocadoen el embolo pequeño podrá sostener un peso de 2.0 toneladas cortas en el embolo grande?

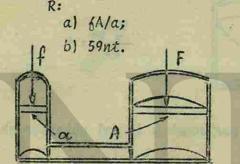


FIGURA 5-14

9.- ¿Cuál es la mínima área de un bloque de hielo de 0.305m de espesor que flotando en el agua podrá sostener un automóvil que pese 11,100nt? ¿Tiene alguna importancia el sitio del bloque de hielo en donde se coloque el automóvil?

R: 47.3 mt2

10.- Un trozo de fundición de fierrro pesa 267nt en el aire y 178nt en el a gua. ¿Cuál es el volumen de las cavidades en el trozo de fierro?

R: 5.66 x 10⁻³ mt³

11.- Un cascarón esférico hueco de fierro flota casi completamente sumergido en el agua. Si el diâmetro exterior es de 0.61m y la densidad relativa del hierro es de 1.8, encontrar el diámetro interior.

R: 0.58int.

12.- Un bloque de madera flota en el agua con las dos terceras partes de su volumen sumergidas. En aceite tiene 0.90 de su volumen sumergido. Encontrar ladensidad de la madera y del aceite.

R: 0.67 gr/cm3; 0.14 gr/cm3.

13.- Un bloque de madera pesa 35.6nt y tiene una densidad relativa de 0.60. Se va a cargar con plomo de manera que flote en agua con el 0.90 de su volumensumergido. ¿Qué peso de plomo se necesita a) si el plomo se pone sobre la madera? b) ¿Si el plomo se coloca debajo de la madera?

a) 17.8nt

6) 19.51nt.

克拉克 the state of the section of conditions described to the state of the sta 30 01 x 18 4 31 01 x 18 5 31 11 - 41 3 18

14.- a) Considerar un depósito de fluído sometido a una aceleración vertical ascendente a. Demostrar que la variación de presión con relación a la profundidad está dada por

p = ph (g + a), siendo h la profundidad y p la densidad. b) Demostrar también que si el fluido- en conjunto experimenta una aceleración vertical descendente a, la presión a -- una profundidad h está dada por

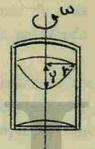
c) 200mo ocurren las cosas en la caída libre?

15.- a) Una masa fluída está girando on una velocidad angular constante w alrededor del eje vertical central de un depósito cilíndrico. Demostrar que lavariación de presión en la dirección radial está dada por

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = p \omega^2 r.$$

FIGURA 5-15

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$



b) Tomar p = pc en el eje de rotación (r = 0) y demostrar que la presión p en un punto cualquiera r es: $p = pc + \frac{1}{2} pw^2 r^2.$

c) Demostrar que la superficie del líquido tiene forma de paraboloide (figura - 5-15); esto es, una sección vertical de la superficie es la curva $y = \frac{w^2}{2g}$

d) Demostrar que la variación de presión con la profundidad es dp = pgdh.

UNIVERSIDAD AUTÓNO

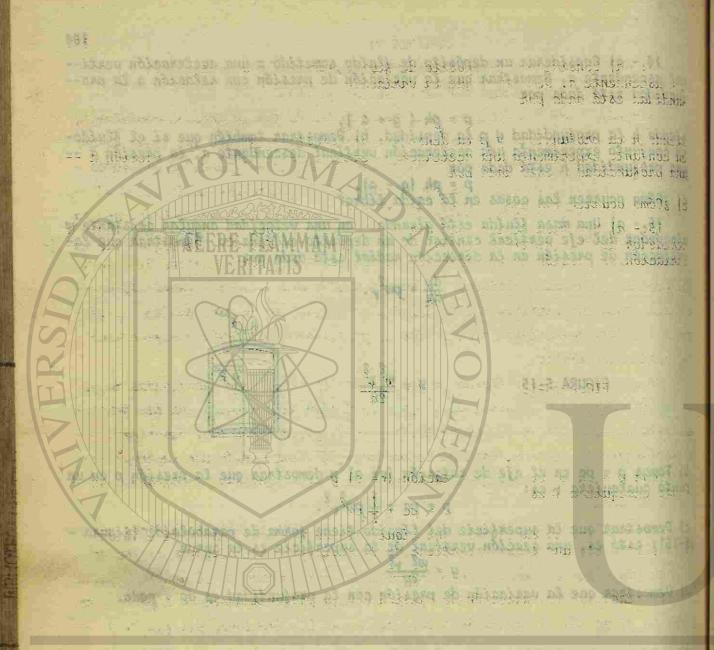
DIRECCIÓN GENERA

Od d sh missedak kahikirah kan anust y kucust kera katika di suposid ali - 145. Mara a cakanil ese pilana da sanarin dali 12000 ca adili kan kan ali 0.20 da su makingali Mara a cakanil isa ak isana da mara ali ak ali ak anara da para katika kan katika kan katika ka mula

Ell Eller Eller

MA DE NUEVO LEÓN

DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓN DIRECCIÓN GENERA

CAPITULO VI

DINAMICA DE LOS FLUIDOS

1.- Conceptos generales del flujo de los fluidos.

La dinâmica de los fluidos trata del estudio de los fluidos en movimiento; constituyendo una de las ramas mas complicadas de la mecânica. Una forma de ana lizar el movimiento de un fluido podría ser dividiendo el fluido en elementos - de volumen infinitesimales, llamadas partículas de fluido y estudiar el movi--- miento de cada una de estas partículas. Como se verá resulta un trabajo muy gra nde, por ejemplo; si se analiza la corriente de agua de un río desbordado, o -- los remolinos de humo de un cigarrillo. Aunque se cumple la ecuación F=ma en to do instante, para cada partícula de humo, o cada gota de agua, resultaría com-- plicado tener que escribir las ecuaciones de movimiento de cada partícula, ya - que se tendría que asignar coordenadas x, y, z a cada partícula y expresarlas - en función del tiempo.

Si una partícula de fluido en el instante to tiene como coordenadas xo, yozo, en un tiempo t las coordenadas x, y, z quedarían determinadas por las funciones x(xo, yo, zo, to, t), y (xo, yo, zo, to, t) y z (xo, yo, zo, to, t), que describirían el movimiento del fluido. Este procedimiento fué desarrollado por Lagrange ---[1736-1813] y es una generaización directa de los conceptos de la mecánica de las partículas.

Otra forma de analizar el movimiento de un fluido es la desarrollada por -Euler (1707-1783), la cual específica la densidad y la velocidad de un fluido en cada punto en el espacio, en cada instante, Este método es el que se seguirá

La densidad y la velocidad en un punto (x,y,z) en el instante t para el movimiento de un fluido, quedarán determinadas por las funciones p(x,y,z,t) y --- v(x,y,z,t).

Que determinarán lo que ocurre en cierto punto en el espacio en un determinado momento, más bien que lo que ocurre a una partícula de fluido determinada. Toda cantidad empleada para describir el estado del fluido tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo.

Como esta forma de analizar el movimiento de un fluido enfoca la atenciónen un punto en el espacio y no en una partícula del fluido, no se puede evitarseguir a las partículas mismas, aunque sea durante cortos interválos de tiempodt. Ya que es a las partículas y no a los puntos del espacio a las que se aplican las leyes de la mecánica.

A continuación se analizarán algunas características generales del flujo - de los fluidos.

El flujo de un fluido puede ser estable (estacionario) o inestable (turbu-

The second secon

a carrier and country of home or can go and go a do and and and statements at an and statements of a statement of the statement of a statemen

Si can particula do gouça os est continto do seas un estada en la continta do seas una en la continta de la continta del continta de la continta de la continta del continta de la continta del continta del continta de la continta de la continta del continta de

nevirolento del filado. Este piere la concuenta de concuenta de la mastiglia de estado de la mastiglia de estado de la mastiglia de estado de esta

COLL SORIE SE CHICLES SE MOVEMENTO CO LE SE LA SESSIO DE LA LA SESSIO DE LA LA SESSIO DE LA SESSIO DEL SESSIO DE LA SESSIO DEL SESSIO DEL SESSIO DE LA SESSIO DEL SESSIO DE LA SESSIO DEL SESSIO DEL

to dear for a velocified on an partic (x,d,z) of controls a port of me

the determinands to the course of cierto minte as of caracio in a ference of the course of the cours

en enda punto en el especió y en cada instante de tíempo.

Como esta forma de analitist el movimilaria de un finido enfocs la acención.

- Marie 26 200 and a mineral deb solver and a man a solvening and a second of the

the legen in in mechanica.

A sociemente de encreante algunis caracteristicas generales del fiujo

all delige de un filmete dest estable lettredomentelle emakette thurbu-

lento). El movimiento de un fluido es de tipo estable siempre que la velocidadno sera demaciado grande, y las obstrucciones, estrechamientos o curvas del tubo que conduce el fluido no sean tales que obliquen a las líneas de corriente a
modificar su dirección bruscamente. También es estable cuando la velocidad v en
un punto cualquiera, es constante al transcurrir el tiempo.

Esto es, que cada partícula que pasa por este punto, tiene la misma velocidad y sigue exactamente la misma trayectoria que las partículas precedentes que pasaron por dicho punto. Una partícula puede tener una velocidad diferente en algún otro punto, pero todas las demás partículas que pasen por este segundo -- punto se conportan de igual manera que la primera partícula que paso por este - punto. Estas condiciones se logran cuando la velocidad del fluido es pequeña.

El flujo inestable se presenta cuando la velocidad es grande y hay obstrucciones, estrechamientos o curvas en el tubo que conduce el fluido; así como -- también cuando las velocidades varían irregularmente de un punto a otro, ya que las lineas de corriente modifican su dirección bruscamente. En el flujo inestable las velocidades v son funciones del tiempo. El flujo de los fluidos puede - ser rotacional o irrotacional.

El flujo de fluido rotacional se presenta cuando el elemento de fluido encada punto tiene una velocidad angular neta con respecto a ese punto y cuando - no es así el flujo de fluido es irrotacional. Un ejemplo de esto puede ser, si-se coloca una pequeña rueda con aspas en el fluido que se esta moviendo. Si la-rueda gira el movimiento es rotacional y si solamente se mueve sin girar el movimiento es irrotacional.

El flujo irrotacional es importante ya que conduce a problemas matemáticos relativamente simples. En este caso, la velocidad v es relativamente simple yaque la cantidad de movimiento angular no interviene.

En el flujo rotacional esta incluido el movimiento en que el vector velocidad varía en dirección transversal; así como también incluye el movimiento de - vortice, como cuando se forman remolinos.

El flujo de los fluidos puede ser compresible o incompresible. En los liquidos se puede considerar que tienen un flujo incompresible, ya que los cam--bios de densidad son mínimos y por lo tanto no se consideran. Un gas altamentecompresible puede experimentar algunas veces cambios de densidad de poco valor, cuando esto sucede el flujo es prácticamente incompresible.

En los vuelos a velocidades muy inferiores a la velocidad del sonido en el aire, el movimiento del aire con relación a las alas es de fluido casi incompre sible. En estos casos, la densidad p es constante, e independientemente de x,y,

with the newbritiness the ten filledge as do they detailed example, one to velocited

nomicate del cies con secución a las alas es se lincido con l

the in these ceres, its exection p of expansio, y find and and the transfer of the transfer of

z y t, el estudio del flujo de este fluido se simplifica considerablemente.

El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso. La viscosidad, enel movimiento de los fluidos, puedeimaginarse como el rozamiento interno de unfluido. En muchos casos, tales como en problemas de lubricación es muy importan te, mientras que en otros casos es insignificante.

Tanto los líquidos como los gases presentan viscosidad, aunque los líqui-dos son mucho mas viscosos que los gases. La viscosidad introduce fuerzas tan-genciales entre las capas de fluido en movimiento relativo y dá lugar a pérdida
de energía mecánica.

2.- Lineas de Corriente.

Como se dijo anteriormente para el flujo estable la velocidad v, en un pun to dado, es constante.

En la figura 6-1, conciderese este punto P dentro de una porción de un tubo en el cuál un fluido se mueve de izquierda a derecha. Si el movimiento es de tipo estacionario, cada partícula que pasa por el punto P, pasa por este puntocon la misma velocidad y sigue la misma trayectoria que las partículas preceden tes que pasaron por dicho punto. Debido a que v en el punto P no cambia al tran scurrir el tiempo. Lo mismo sucede en los puntos 2 y R, ya que la partícula que se encontraba inicialmente en P, estará un momento mas tarde en Q, moviendose en dirección distinta con velocidad diferente, y un momento todavía posterior estará en R, habiéndose cambiado de nuevo su velocidad. Por consiguiente, al -trazar la trayectoria de la partícula, como se ha hecho en la figura, está curva será la trayectoria de toda partícula que llegue a P. A está curva se le lla ma linea de corriente y debe ser siempre perpendicular a la velocidad de las -partículas de fluido en todo punto. Si se cruzáran dos lineas de corriente, una particula de fluido que llegará ahí, seguiría ya fuera por una línea o por la o tra y entonces el fluido no sería de tipo estable. En el fluido de tipo estable el mapa de las líneas de corriente, en una corriente, permanece inalterado altranscurrir el tiempo.

DE BIBLICITAS

FIGURA 6-1

En la figura 6-2 se ha considerado un fluido de tipo estable, en la cuálse selecciona un número finito de líneas de corriente formando un haz. A la re-

with of eatherly det fluid de erte fluid ac simplifica courilounisments. El player de los (lucidos guedo set estrenes o no relegan en el colagandes en A ANGELLA CONTRACTOR ANGELLA CAMPAGE CONTRACTOR CONTRAC a minimal out en abros cases es instantification Tomic Est Elegidos cono Los cenes estentes estentes Internet Z - Mucht de fextionte the state of the state of the state of a catterioranto, codo esta con contrata con contrata de secon con contrata de secon con contrata de secon con contra The miles or desided a since is when it were not and an in the d the parameter and dictio exacts. Canada a cue y en el munte p en comita a with at though to miner success so, the marked of the sec to matter. monstance intellation to be by the street me treets Live de conflicer a debe sea sheere perpondecutar a la notandece de Casto que l'entred une, sentiere na dates per una l'eren o con la c

DIRECCIÓN GENERAL

En la fligura 6-2 se ha conciderato un l'enido de cigo estable, en la conficial Ricciona un résuera finicto un linea de conficiere (ormanio-un hier e la ce co gion tubular se le llama tubo de flujo. El límite de uno de estos tubos esta -formado por líneas de corriente y siempre es paralelo a la velocidad de las par
tículas del fluido. Por consiguiente, nada de fluido puede cruzar los límites de un tubo de flujo y entonces el tubo se comporta como si fuera una tubería de
la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

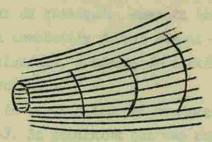


FIGURA 6-2

3.- La ecuación de continuidad.

La figura 6-3, representa un tubo por el cuál circula un fluido de izquier da a derecha. La velocidad del fluido en su interior, aún cuando es paralela al tubo en un punto cualquiera, puede tener diferentes magnitudes en distintos puntos.

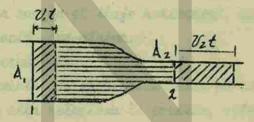


FIGURA 6-3

Sea A_1 el área de la sección transversal en el punto 1 y V_1 la velocidad. Durante el tiempo t las partículas de fluido que se encuentran inicialmente en 1 abanzán una distancia V_1 t y atravezará la sección A_1 un volumen de fluido i-gual a A_1V_1 t. Por lo tanto, el volumen de fluido que atravieza por unidad de -tiempo es igual a A_1V_1 . De igual forma el volumen de fluido que atravezará por-unidad de tiempo la sección A_2 es A_2V_2 . Si el fluido es incompresible las cantitades que fluyen por unidad de tiempo atravez de ambas secciones serán iguales, y por consiguiente:

 $A_1V_1 = A_2V_2 = AV = constante$ Ecuación 6-1 Donde A y V son el área de la sección y la velocidad en cualquier punto.

Está es la ecuación de continuidad para el movimiento estacionario de un fluido incompresible. Notese que en esta ecuación, la velocidad del flujo varía en razón inversa al área de la sección transversal, y una consecuencia de está relación es que la velocidad aumenta cuando la sección transversal disminuye, y

viceversa.

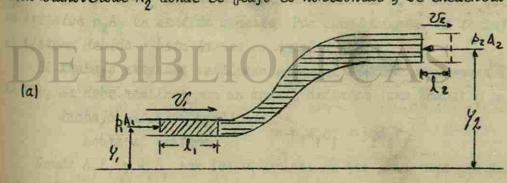
El hecho de que el producto A V permanece cte. a lo largo del tubo de flujo, permite dar una interpretación al mapa de líneas de corriente. En la parteangosta del tubo las líneas de corriente están mas próximas entre sí, mientrasque en la parte ancha están mas espaciadas. Por lo tanto, conforme disminuye la
distancia entre las líneas de corriente, aumenta la velocidad del fluido. Apartir de esto se llega a la conclusión de que líneas de corriente muy próximas in
dican regiones de alta velocidad, y líneas de corriente muy espaciadas represen
tan regiones de baja velocidad.

Así pues, aplicando la segunda ley del movimiento al flujo de un fluido en tre 1 y 2 de la figura 6-3. Se encuentra que una partícula de fluido que tiene-una velocidad V_1 en el punto 1 debe de aumentar su velocidad conforme avanza al adquirir la velocidad de avance V_2 . Por consiguiente, el fluido aumenta su velocidad al ir de 1 a 2. El aumento de la velocidad puede ser debido a una diferencia de presión que obra sobre la partícula de fluido que va de 1 a 2.

En un tubo de flujo horizontal, la fuerza gravitacional no cambia. Por lotanto, podemos concluir que en el flujo horizontal, de tipo estable, la presión es máxima donde la velocidad es mínima.

4.- Ecuación de Bernoulli.

La Ecuación fundamental de la hidrodinámica es la correspondiente a la ecuación de Bernoulli, en ella relaciona la presión, velocidad y altura en los puntos situados a lo largo de una línea de corriente, y se deducirá a partir del teorema del tabajo y la energía. La figura 6-4 representa una porción de tubo en el cuál se mueve, con movimiento estable, un flujo incompresible y no visco-so. La parte del tubo representada en la figura tiene una sección transversal - A_1 en la izquierda. En este lugar el flujo es horizontal y se encuentra a una altura Y_1 sobre un nivel de referencia; a la sección A_1 le sigue una región cuya sección transversal va aumentando y levantandose y finalmente tiene una sección transversal A_2 donde el flujo es horizontal y se encuentra a una altura Y_2



une enducine de Le leime tener de ferfo. Di cimie de carro de ciscos maios esta de mentals and blooms of the contract of the cont strates del Marito, Por constructure, and de Marido productiones de Maritica. The street of the sensons is often the delication of the state of the sensons in the sensons of to the course of the the part was not seen and the course of the course diente sia abiandana di edi E-S ASSESSED AS So at their de in execute pressure on a grown i of it we concerted

THE RESIDENCE OF THE PROPERTY OF THE PROPERTY

DIRECCION GENERA

Esti es in commenta de cressessidal esta el movimiento catacomanio de un mide decomptestible. Velese que en sait ecutesta, en velenint del finso venta
tazia encomma de data de la receila transcressió, e una generalmente de para
decida en que la recomptio en contain en tración en tración en que la recompte transcressió.

At history due out phoducts A V promining are, and lange day hube de flus and to the and interiorestacion at many de renois de considera, en la LEGICLA CHARL LEL CENTRE de Considera America en la legione de considera de Conside THE THE PLANT OF THE STATE OF THE PARTY OF T

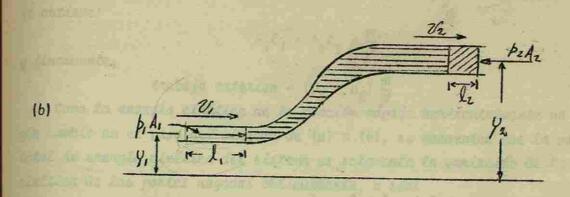


FIGURA 6-4

Fijândo la atención en la porción del fluido representada por las dos partes rayadas oblicua y horizontalmente y llamando a este fluido el "sistema". -- considerese el movimiento del sistema desde la porción representada en (a) hasta la indicada en (b). En todos los puntos que se encuentran en la parte angosta del tubo, la presión es p_1 y la velocidad V_1 mientras que los que se encuentran en la parte ancha, la presión es p_2 y la velocidad V_2 .

El teorema del trabajo y la energía establece que: "El trabajo efectuado : por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio de la -- energía cinética del sistema".

En la figura 6-4 las fuerzas que producen trabajo sobre el sistema, son -- las fuerzas de presión p_1A_1 y p_2A_2 que están obrando sobre los extremos izquier do y derecho del sistema así como la fuerza de la gravedad.

Cuando el fluido se mueve por el tubo el efecto requerido es llevar la can tidad de fluido, representada por la zona rayada diagonalemente en la figura --6-4a, a la posición mostrada en la figura 6-4b.

Cuando la parte izquierda del sistema avanza una distancia l_1 paralela a - la fuerza exterior p_1A_1 , se encuentra que el trabajo realizado sobre el sistema por está fuerza es igual a $p_1A_1l_1$.

La parte de la derecha avanza una distancia l_2 mientras que actúa una fuer ra exterior p_2A_2 en sentido opuesto. Por consiguiente, el trabajo realizado por el sistema debido a esta fuerza es igual a $p_2A_2l_2$.

El trabajo exterior realizado sobre el sistema para mover la poción (a) a-la (b), se debe realizar por un agente exterior (una bomba) y es igual a;

trabajo exterior realizado

sobre el sistema = $p_1A_1l_1 - p_2A_2l_2$

Ponde A_1l_1 y A_2l_2 son los volumenes de las porciones rayadas diagonalmente las cuales son iguales puesto que el fluido es incompresible.

in partie de la déreche avança una distancia la mientras que activi una fuor tor pake on scatido opuesto. Ton gensigniente, el thabajo heatignio pon

an agente catelater (unc bishba) à ca inual a:

orde Agl, y Agl, son les veliciones de les peneienes tajades diagonalments

miles son impact presto que el fenire as incomprestite.

Si m es la masa de cada una de estas porciones y p la densidad del fluido, se obtiene:

 $A_1\ell_1 = A_2\ell_2 = \frac{m}{p}$

y finalmente,

trabajo exterior = $(p_1 - p_2) \frac{m}{\rho}$

Como la energía cinética de la porción rayada horizontalmente no tiene nin gún cambio en el paso del sistema de (a) a (b), se encuentra que la variación - total de energía cinética del sistema es solamente la variación de la energía - cinética de las partes rayadas oblicuamente, o sea:

variación de energía cinética = $\frac{1}{2}$ mV₂² - $\frac{1}{2}$ m V₁²

El trabajo realizado por la gravedad sobre el sistema, esta relacionado -- con elevar el fluido rayado diagonalmente, de la altura y_1 a la altura y_2 y esigual a:

variación de energía potencial gravitatoria $= m g y_2 - m g y_1$

A partir de la definición del teorema del trabajo y la energía, se tiene-que,

W = AK

igualando entonces el trabajo neto realizado sobre el sistema a la suma de losincrementos de esas energías, cinéticas y potencial gravitatoria, se obtiene:

$$(p_1 - p_2) \frac{m}{g} = (\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2) + m g y_2 - m g y_1)$$

$$P_1 + \frac{1}{2} p V_1^2 + p g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} p V_2^2 + p g y_2 \quad \text{Ecuación } 6-2$$

puesto que los subindices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera situadosa lo largo del tubo, se puede escribir:

 $p + \frac{1}{7} p V^2 + p g y = constante.$ Ecuación 6-2a a está ecuación se le conoce con el nombre de ecuación de Bernoulli, y es aplicable a un flujo de tipo estable, no viscoso, incompresible.

En la ecuación 6-2a, p es la presión absoluta y se expresa en $\frac{kg}{mt^2}$, $\frac{NT}{mt^2}$, $\frac{dinas}{cm^2}$, o $\frac{1b}{ft^2}$. La densidad p debe de estar en $\frac{kg}{mt^3}$, $\frac{grs}{cm^3}$, o $\frac{slugs}{ft^3}$.

Hecho esto, cada término de la ecuación de Bernovlli tiene dimensiones depresión. La presión p + pgh, que habría aún cuando no hubiera flujo (V = 0), se se llama presión estática; al término $\frac{1}{2}$ p V se le llama presión dinámica.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinâmica - de la misma, de igual forma, la estática de los fluidos es un caso especial de-la dinâmica de los mismos. Por lo tanto, la ley de los cambios de presión con -

st n es la masa de cada una de calità peneriones y p la domidad del fluido. trabajo estantos a (p. + p.) Como La caerque ciabtica de la nono and combine on all party as a citizent de la cidente min that de energia cinética del sistem es A suction de las prates agradas objectiones untiación de energía centil de 1 mil El trabació realizado son de laparedad sobre acceptant de describando a eleven of fluido rayado dinametracate, de la exaral gold a femin es u t variación de corenald potencial quevitationia cartle to sa declaración tol ten AND PRINCIPAL CANESCOCE & POSTERY LAS

IVERSIDAD A UTÓNO

o the dentified o dete de carat on his lone, a study of the

TO THE ECONOS I CONTACTO THE ROAD TO THE PORT OF THE PROPERTY OF THE PARTY OF THE P

tema prosión estápica: at timeno y n V se te tiom caesión distinica.

Así como la estátion de una portacuón es un esso especial de la distinica e la misma, de igual forma, la catifica de los fluidos es un esto especial de distinica de los sentidos es un esto especial de distinica de los distinica de exerción con se

respecto a la altura de un fluido en reposo, puede quedar incluida en la ecua-ción de Bernoulli como un caso especial.

Considerando que el fluido se encuentra en reposo, entonces $V_1=V_2=o$ y-la ecuación 6-2 se transforma en:

$$p_1 + p g y_1 = p_2 + p g y_2$$

 $p_2 = p_1 = -pg (y_2 - y_1)$

5.- Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de Continuidad.

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar para encontrar las velocidades - de un fluido mediante mediciones de presión. Generalmente en tales dispositivos medidores establece que la velocidad del fluido aumenta en la parte mas angosta de un tubo; mientras que la ecuación de Bernoulli indica que en este sitio debe disminuir la presión. Por ejemplo, para un tubo horizontal $\frac{1}{2}p V^2 + p$ es iguala una constante. Esto es, que si V aumenta y el fluido es incompresible, la presión p disminuye.

La variación de presión con la profundidad de un fluido incompresible puede encontrarse aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 de la figura 6-5.

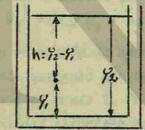


FIGURA 6-5

teniendo que:

 $p_2 = p_0$ (atmosférica) $y V_1 = V_2 = 0$

$$p_{1} + \frac{1}{2} p v_{1}^{2} + p g y_{1} = p_{2} + \frac{1}{2} p v_{2}^{2} + p g y_{2}$$

$$p_{1} = p_{0} + p g (y_{2} - y_{1})$$

$$p_{1} = p_{0} + p g h$$

El medidor de Venturi.

Este aparato sirve para medir la velocidad de flujo de un líquido. Está -representado en la fugura 6-6 y conciste en un estrechamiento producido en un tubo y proyectado de tal forma que mediante una disminución gradual de la sección en la entrada y un aumento también gradual en la salida, se evite la produc

specifi e es altura de un tiuido en necesa, medo quedan incluida en la regasija de beauculli como un caso espacial.

Considerando que el flacido se encuentra en sepaso, entences V - a V - a V - a V -

TO TALERD FLAMMAM TOTAL STATE OF THE STATE O

the Market moderation replaced to the state of the state of the state and the state and the state of the stat

the new course is retailed by the condition of an interest of a do to the company of the converse of a do to

NIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCION GENERA

Fire appears along pasa medig se nelected to this distinct in its exists of a surface of an an a surface of an an a surface of the control of the surface of

ción de remolinos y quede asegurado un movimiento estacionario. A travéz de latubería cuya sección transversal tiene una area A, fluye un líquido de densidad p. En el angostamiento de la sección es a y se conecta un tubo manométrico, como se indica en la figura.

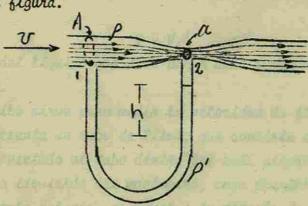


FIGURA 6-6

Ejemplo 6-1

Si el líquido del manómetro, es mercurio cuya densidad es p^1 ; aplicando -- la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad a los puntos 1 y 2, demos trar cuál es la velocidad de flujo en A.

A partir de la ecuación de Bernoulli que dice:

$$p_1 + \frac{1}{2} p v_1^2 + p g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} p v_2^2 + p g y_2$$

se encuentra que como no hay variación de energía potencial ya que se esta analizando una línea de corriente que pasa por el centro del tubo, en la cuál el punto 1 esta a igual nivel que el punto 2. Por lo tanto, $y_1 - y_2 = 0$. Y sabiendo que la ecuación de continuidad establece que:

 $A V_1 = \alpha V_2 \quad donde \quad V_2 = \frac{A}{\alpha} V_1$

se obtiene,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} p v_2^2 - \frac{1}{2} p v_1^2$$

 $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} p \left[\left(\frac{A}{\alpha} v_1 \right)^2 - v_1^2 \right] = \frac{1}{2} p v_1^2 \left(\frac{A^2}{\alpha^2} - .1 \right) = \frac{1}{2} p v_1^2 \left(\frac{A^2 - a^2}{\alpha^2} \right),$ analizando el manômetro para la misma línea de corriente se encuentra que:

 $p_1 + p g y_1 = p_2 + p'gh + pgy_2$ $p_1 + pgh = p_2 + p'gh$

p1 - p2 = gh(p' - p)

sustituyendo esta expresión en la anterior se tiene,

gh $(p'-p) = \frac{1}{2} p v_1^2 (\frac{A^2 - a^2}{a^2})$

por lo tanto,

TONO

ALERE FLAMMAM

VERITATIS

ALERE STAMMAM

VERITATIS

ALERE STAMMA

NIVERSIDAD AUTÓNO

the standards parameter along it would be the standards are considered for the

DIRECCION GENERA

ele entre esta especialda en la anterior de legae.

ga (p'-p' = g p v (c) - g

. citati

$$V_1 = a \frac{2 g h (p' - p)}{p(A^2 - a^2)}$$

Para encontrar el flujo de volumen o gasto que pasa por A, simplemente secalcula,

Q = V,A

Ecuación 6-3

que es el volúmen del líquido que pasa por A cada segundo.

Tubo de Pitot.

Este dispositibo sirve para medir la velocidad de flujo de un gas. En la figura 6-7 se representa un tubo de Pitot, que conciste en un tubo manométricoabierto que esta conectado al tubo dentro del cuál circula el gas. La presión en la columna de la izquierda del manómetro, cuya abertura es paralela a la dirección del movimiento del gas, es igual a la presión de la corriente gaseosa.la abertura en la rama de la derecha es perpendicular a la corriente y la presión en esta rama se puede calcular aplicando la ecuación de Bernoulli a los -puntos a y b.

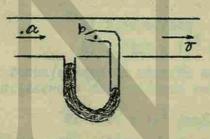


FIGURA 6-7

Si V es la velocidad de la corriente, p la densidad del gas y pa la pre--sión en el punto a, y como la velocidad en el punto b es nula, se obtiene:

 $p_b = p_a + \frac{1}{2} \rho V$

Como p_b es mayor que p_a , el líquido del manómetro se desplaza como se indidica en la figura. Analizando el manómetro y sabiendo que p_o es la densidad del líquido contenido en el, y h, la diferencia de alturas del líquido en sus ramas se tiene:

combinando estas dos ecuaciones, resulta: $p_0 = p_a + p_o g h$ $p_0 = p_a + p_o g h$

a partir de la cuál se puede calcular la velocidad V del gas.

1.- Se practica un orificio circular de 1.5cm de diâmetro en la pared late ral de un gran depósito, y a una altura de 6mt por debajo del nivel del agua en el mismo. Calcular: a) La velocidad de salida; b) el volumen que sale por uni-dad de tiempo. Despréciese la contracción de las líneas de corriente después de salir del orificio.

> a) 10.84mt/seg b) 5.32 lts/seq.

2.- Una manguera de jardín tiene un diámetro interior de 0.019mt y está -conectada con un rociador de césped que consiste simplemente en una caja con 24 agujeros, cada uno de 0.0013mt de diâmetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 0.915mt/seg, ja que velocidad saldrá por los agujeros del rociador

R: 8.84 mt/sea.

3.- Algunas veces se prueban modelos de torpedos en un tubo por el que flu ye agua, en forma semejante a como se usa un túnel de viento para probar mode-los de aviones. Considere un tubo circular de diámetro interior de 0. 254mt y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diametro de-0.05mt. Se va a probar el torpedo con agua fluyendo junto a el con una veloci-dad de 2.44 m/seg. a) iA qué velocidad deberá fluir el agua en la parte del tubo no estrecha b) ¿Cuál será la diferencia de presiones entre la parte estrecha y la no estrecha del tubo?

R: a) 2.54 mt/seg b) 0.0025 x 105 nt/mt2

4.- i Qué cantidad de trabajo hace la presión al forzar 1.42mt de agua por un tubo de 0.013mt si la diferencia de presiones entre los dos extremos del tu bo es de 1.11 atm?

R: 1.49 x 105 joules

5.- Está cayendo agua desde una altura de 18.3mt a razón de 0.238mt /seg e impulsa una turbina. ¿Cuál es la máxima potencia que se puede obtener con esta-

R: 41.7 kwatts.

6.- Aplicando la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad a lospuntos 1 y 2 de la figura (6-6), demostrar que la velocidad de flujo a la entra da es:

7.- Un medidor de Venturi tiene un diâmetro de tubo de 0.254mt y un diâmetro en el cuello de 0.127mt. Si la presión del agua en el tubo es de 27.2x 103 hg/mt2 y en el cuello de 20.4 x 103 kg/mt2, calcular el gasto del agua en mt3/-

R: 0.074 mt /sea.

8.- Considérese el tubo de Venturi de la figura (6-6) sin el manômetro. -- sea a igual a 5a. Supóngase que la presión en A es de 2.0atm. Calcular los valo les de v en A y de v' en a para los cuales la presión p' en a es igual a cero.= Calcular el gasto correspondiente si el diametro en A es de 5.0cm. El fenómenoque ocurre en a cuando p' se reduce casi a cero se llama cavitación. El agua se vaporiza en pequeñas burbujas.

R: u=4.1mt/seg; u'=21mt/seg; Q=8.1 x 10-3mt3/s

"是如此的"。 in velocidad de la coexiente, o la densidad del gas y un la

. And the section of the section of the man and the section and the section of th

The standard of the standard o

- Algana 1 S. Alga

5. - Beth carrents ages desire and script (1) to "the stack to "risting" (1) eg e rather was kuntikeen. Oute as at winder when in the be prede interes con colaability.

JNIVERSIDAD AUTO

6. - Additionary to very collect to design the in the contract

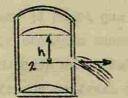
7. - Un medidor de Veneral elona les définetion de tabo de 0.25 mm g. Un. alda tro en el enello de 0.127 mm. Si la paralle del agen en es tabo es en 17.23 14 telaste u en el enello de 20 M x 103 tapos. entantes el gasto del agua en mi

t. Constituent of the de Verbust de 40 (soute 1878) the 21 nandmetro Sout signal of So. Sandagnas que és enastáin 28 e s 30 ? Colon Calculan 186 yalo
ses de vera e de vera esta suales sa distribue o en a of saidle de colon Calculan 186 yalo
calcular es grado contantente sé es dismitis en é os de 5.00; es calcular
calcular es grado pour la levele (seis a ceso de 5.00; es dans leveles de colon de

9.- La figura (6-8) muestra el líquido que está saliendo por un origicio - en un gran tanque a una profundidad h bajo el nivel del agua. a) Aplique la e-cuación de Bernoulli a la línea de corriente que une los puntos 1, 2 y 3, y demuestre que la velocidad de salida es $v=\sqrt{2}gh$. Esta ecuación se conoce como ley de Torricelli. b) Si el orificio estuviera encorvado directamente hacia arriba, ihásta que altura se elevaría la corriente del líquido? c) i Cómo afectaría la viscosidad o la turbulencia los resultados -

FIGURA (6-8)

del problema?

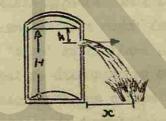


10.- Un tanque está lleno de agua hasta una altura H. Tiene un orificio enuna de sus paredes a una profundidad h bajo la superficie del agua figura [6-9] a) Encontrar la distancia x a partir del pie de la pared de la cual el chorro llega al piso. b) iPodría hacerse un orificio a otra profundidad de manera queeste segundo chorro tuviera el mismo alcancd? Si es así, ia qué profundidad?

a) $x = 2 \sqrt{h(H-h)}$

b) Si, a una distancia h arriba del fondo.

FIGURA (6-9)



11.- La superficie libre del agua en un tanque se encuentra a una altura Hsobre el piso horizontal. ¿A qué profundidad h habría que hacer un pequeño orificio para que el chorro horizontal de agua que saliera llegar al suelo a la -máxima distancia de la base del tanque? ¿Cuál sería esta distancia máxima?

R: h = H/2; x = H.

12.- Un tubo de Pitot está instalado en el ala de un avión para determinarla velocidad de éste con relación al aire. El tubo contiene alcohol e indica -una diferencia de nivel de 0.124mt. ¿Cuál es la velocidad del avión en km/hr
con respecto al aire?

BIBLE 139 km/hr. ECAS

---;i--sca-

147

oxila-

in-

ierera-

ante

DIRECCIÓN GENER

CAPITULO VII

EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

1.- El calor, una forma de la energía.

Cuando dos cuerpos que tienen diferentes temperaturas se ponen en contacto la temperatura final que alcanzan tiene un valor comprendido entre las dos temperaturas iniciales. Hasta principios del siglo XIX admitían que en todos los - cuerpos existía una sustancia material, llamada clórico.

SE creía que el calórico era el calor que se presentaba en forma de fluido invisible e imponderable, que se producía cuando una sustancia se quemaba, y -- que podía transmitirse por conducción de un cuerpo a otro. Creían que cuando un cuerpo tenía una temperatura elevada contenía mas calórico que otro que tubiera una temperatura mas baja. Y que si estos dos cuerpos se ponían en contacto, elde mayor calórico cedía algo de esta sustancia al otro, hasta que ambos cuerpos tubieran la misma temperatura. La teoría del calórico podía describir muchos -- procesos, como la mezcla de sustancias en un calorímetro o la conducción del calor, de una manera satisfactoria. Sin embargo, el concepto de calor como sustancia, cuya cantidad total permanecía constante, a la larga no resistio la prueba de los experímentos.

Aún así, todavía se describen algunos cambios de temperatura como el pasode "algo" de un cuerpo que se encuentra a mayor temperatura al que se encuentra a menor temperatura, y a este "algo" se le llama calor.

Una definición de calor que es útil pero no operacional, es la siguiente: "Calor es aquello que se comunica entre un cuerpo y su medio ambiente como resultado unicamente de la diferencia de temperaturas".

Con el tiempo se llegó a comprender que el calor es una forma de energía y no una sustancia. La primera prueba de que el calor no podía ser sustancia fuédada por Benjamín Thompson (1753-1814), un norteamericano que mas tarde llegó a ser el Conde de Rumford de Baviera. Rumford hizo su descubrimiento cuando fué co misionado por el gobierno de Baviera para dirigir el taladrado de los cañones.—Para evitar un exceso de calentamiento, el taladro del cañón se mantenía llenode agua, pero como durante el proceso del taladro el agua hervía, el alma del cañón tenía que llenarse continuamente. SE admitía que para hervir el agua habí a que suministrarle calórico, y la producción contínua de calórico se explicaba admitiendo que cuando la materia se dividía finamente (como sucede en el proceso del taladrado) disminuía su capacidad para retener el calórico, el cuál, des prendido de esa forma motivaba que el agua hirviera.

En experimentos específicos Rumford observó, que el agua de refrigeracióncontínuava hirviendo aún cuando la herramienta quedaba tan roma que no cortaba. EL CALOR V SA TRIBURA LEV ME LA TRIBUDONARION

1. - El catot, una forma de la tuengita. Cuando dos cuespos que tienem diferentes temperaturas se pouca en controto

to comparative plant one recovers tions of the contract the extraction of the contract of the

SE exerta que el exercica ya la proposición de la proposición del la proposición del la proposición de la proposición de la proposición de la proposición del la proposición de la proposición d

que podía transmidirse por confueción de HIATIGA otali Calladore des formanos entre en abiena energo tenía una temperatura elevada contenía una contenía por esta de abiena una temperatura esta ball. E que el calos infecios de contenías en entre el contenías en el cont

to meyor contrict and also the extra september of the track of the september of the septemb

est, de una mamera satisfacturia. Sin imbanga let concepto de calon como nastru cia, como cantilad estal permanecia como cantales a la tenga no rivilito con mucha to sos experimentos.

Aun asi, todavia se electron alquaes combios de foncesa de procesa de la concesa de la

a menor temperatura, y a site "ata" of land ellar ella

The second acqueste que se comunida entre lux quents y su mesto minimite como ne -

Con el tiempo se leggó a commender que el calor de uni filma is inclair y no una sustancia. La premera prueba de que el calor no podía ser sustancia (o le

to per serious themes en (1753-1814), un nortemens our mas tande l'édet i les les conte de landoid du l'autra, Runkord l'est de testa chilente suande las co desionade per et gebleron de Saviena rine dividuét la taladade de les carones e

to a evitar un exessa le entertamiente, el falsero del caliba se mintenir l'étabe

that suga to Aswari To ropties Color of the Color of the

admixionio que cuanda la meteria de dividio (inamente (com sucéde en el processo del fuendando) disminuis de capacidas para recener el cultido, el cult, del presedido de esa forma motivaba que el coma historia.

En expenimentos especificas lumboni discreó, que es agen de fantigenación continua hieratendo ago cuanto la heradulenta medito tan new que no contaba.

Esto es, que la herramienta roma constituía todavía aparentemente un depósito - inextinguible de calórico mientras se realizará trabajo para hacer girar la herramienta.

De Esta manera se vió que se creaba calor debido al trabajo mecánico gasta do en el proceso de taladrado.

En el caso citado se estaba en presencia de un proceso que no obedecía alprincipio de conservación ya que no había la contínua desaparición de energía mecánica, y la contínua creación de calor, entonces todo el proceso se vió como
una transformación de energía de una forma o en otra, Conservandose la energíatotal.

La idea de conservación condujo a los hombres a nuevos descubrimientos. Yfué Joule, en el intervalo de 1843 a 1878, quién demostró que siempre que una cantidad de energía mecánica se transforme en calor, se obtiene la misma cantidad de éste, y así fué como quedó definitivamente establecida la equivalencia del calor y el trabajo como dos formas de energía.

Helmholtz fué el primero que exprezó la idea de que no solo el calor y laenergía mecánica son equivalentes sino que todas las formas de energía lo son,y que no puede desaparecer una cantidad dada de una forma de energía sin que aparezca una cantidad igual en alguna de las otras formas.

2.- Cantidad de calor y calor específico.

La unidad de cantidad de calor Q que interviene en un proceso, se define - en función de un cierto cambio producido en un cuerpo durante el proceso, y es- el calor necesario para producir alguna transformación de tipo convenida.

Las unidades mas usuales de calor son; la caloría kilogramo, la caloria gr amo, y la unidad termica britanica (BTU).

La caloria kilogramo o kilocaloría es la cantidad de calor que debe suministrarse a un kilogramo en agua para elevar su temperatura en un grado centígrado.

La caloría gramo es la cantidad de calor que debe suministrarse a un gramo de agua para elevar su temperatura en un grado centígrado.

El BTU es la cantidad de calor que debe suministrarse a una libra de aguapara elevar su temperatura en un grado Fahrenheit.

La caloría se usa también como unidad de calor y es igual a 10^{-3} kilocalorías.

Generalmente, la cantidad de calor y la temperatura suelen confundirse; un ejemplo de que estas dos expresiones son diferentes es el siguiente. Si dos recipientes, uno de ellos cantiene una pequeña y el otro una gran cantidad de ---

UNIVERSIDADAUTO

Alab.

Gyrinimensi, da eintédel de carot y én tempesatata trolen confunitatel un jonete di que elemente de carot pon d'élection de l'élection de l'étre une partie d'étre une de l'étre une de l'étre

agua, se colocan sobre mecheros de gas iguales y se calientan durante el mismotiempo es evidente que, transcurrido este tiempo, la temperatura de la cantidad mas pequeña de agua se habrá elevado más que la de la grande. Así pues, se veque se ha suministrado la misma cantidad de calor a cada recipiente de agua, pero el incremento de temperatura no es el mismo en los dos casos.

La relación que hay entre las unidades de cantidad de calor es la siguiente:

1 keal = 1000 cal = 3.968 BTU = 4186 joules

Las sustancias difiere entre si en la cantidad de calor que se necesita para producir una elevación determinada de temperatura sobre una masa dada.

Al aplicar una cantidad de calor Q a un cuerpo, produce una elevación ∆t - en su temperatura. La razón de la cantidad de calor aplicada al incremento de - temperatura se le llama capacidad calorífica del cuerpo:

 $C = \text{capacidad calorifica} = \frac{Q}{4t}$

Esta expresión lo que trata de dar a entender, es solamente la cantidad de calor agregado por unidad de elevación de temperatura y no la cantidad de calor que puede contener un cuerpo.

Para encontrar una cifra que sea característica de la sustancia de que está hecho el cuerpo; se define el calor específico de una sustancia, como la capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo formado por dicha sustancia. Si se representa por la letra c, el calor específico, se obtiene:

 $c = \frac{\text{capacidad calorifica}}{\text{masa}} = \frac{2/\Delta t}{m} = \frac{2}{\text{mat}}$ Ecuación 7-1

tanto la capacidad calorífica de un cuerpo como el calor específico de la sustancia de que esta hecho, dependen solo de la situación del intervalo de temperaturas y por lo tanto no son constantes.

La ecuación 7-1, define el calor específico medio correspondiente al intervalo de temperaturas é t.

Por lo tanto, la cantidad de calor que se debe suministrar a un cuerpo demasa m, cuyo material tiene una capacidad calorífica específica c, para elevar-su temperatura de t_1 a t_2 , es:

 $Q = m \int_{t_1}^{t_2} c dx$

Ecuación 7-3

A PART ON ON ON THE PROPERTY OF THE PROPERTY O

UNIVERSIDADAUTÓI

DIRECCIÓN GENER

Donde c es función de la temperatura y previamente a de conocerse esta función para poder realizar la integración. A temperaturas ordinarias, y en intervalos no muy grandes, los calores específicos se pueden considerar constantes.

Las ecuaciones 7-1 y 7-2 no definen el calor específico en forma única. Si no que hay que específicar las condiciones bajo las cuales se agrega calor al cuerpo; se a dejado entendido que la condición es que el cuerpo se conserve a la presión atmosférica normal, que es una condición común, pero hay algunas otras posibilidades y cada una de ellas conduce a un valor diferente de c. Paraencontrar el valor único para c se deben especificar las condiciones, tales como el calor específico a presión constante cp, el calor específico a volumen - constante cv, etc.

En la tabla 7-1 se dan los calores específicos de algunas sustancias a presión constante. Observando que a partir de la definición de la caloría y el BTU se tiene, que 1 $\frac{\text{cal.}}{\text{gr. "c}}$ = 1 $\frac{\text{kcal}}{\text{gr. "c}}$ = 1 $\frac{\text{BTU}}{\text{1b "F.}}$

El calor específico del agua, bajo condiciones normales de temperatura y - presión es igual a $1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} - \text{c}}$; cuyo valor es grande comparado con el de la mayo ría de las sustancias.

TABLA 7-1.

SUSTANCIA	CALOR ESPECIFICO cal/gr.°c	PESO MOLECULAR gr/ _{mol}	CAPACIDAD CALORIFICA MOLAR cal/mol °c
aluminio-	0.215	27.0	5.82
carbono	0.121	12.0	1.46
cobre	0.0923	63.5	5.85
hierro	0.113	55.85	6.3
mercurio	0.033	200.61	6.62
plata	0.0564	108.0	6.09
plomo	0.0305	207.0	6.32
wolframio	0.0321	184.0	5.92

Ejemplo 7-1.

Un bloque de cobre de 80 grs, se saca de un horno y se echa en un depósito de vidrio de 350grs. que conticne 250gramos de agua. La temperatura del agua se eleva de 15 a 30°C. ¿Cuál era la temperatura del horno?.

Este es un ejemplo de dos sistemas que se encontraban inicialmente a diferentes temperaturas y que alcanzaron el equilibrio térmico después de ponerse en contacto. No interviene energía mecánica, solo hay un intercambio de energía calorígica. Por consiguiente, calor perdido por el cobre = calor ganado por el depósito + calor ganado por el agua.

UNIVERSIDAD AUTÓI

DIRECCIÓN GENER

To not provide agree recovery to not the last to not the last to the recovery to the recovery of the first to the recovery to

Mcu Ccu (Tcu-Te) = Mucu (Te-Th20) + W(H20CH20 (Te - TH20).

Mcu Ccu (Tcu-Te) = (Te-TH20) (MvCv+1/H20CH20).

La temperatura inicial del cobre es Tcu, la temperatura inicial del agua - del depósito es $T_{H2}o$, y la temperatura final de equilibrio es Te. Si Ccu=0.093 $\frac{cal}{gr-c}, \ cv = 0.12 \frac{cal}{gr-c} \ y \ c_{H2}o = 1 \frac{cal}{gr-c}, \ se \ obtiene:$

80 grs. x 0.093 $\frac{\text{cal}}{\text{gr} - {}^{\circ}\text{C}}$ [Tcu - 30°C] = (30°C - 15°C) (350grs.x0.12 $\frac{\text{cal}}{\text{gr} - {}^{\circ}\text{C}}$ + 250grs x 1 $\frac{\text{cal}}{\text{gr} - {}^{\circ}\text{C}}$)

Tcu = 620°C.

3.- Capacidad calorífica molar de los sólidos.

En la tabla 7-1 se vé que en la segunda columna los calores específicos de los sólidos varían bastante de un material a otro. Sin embargo, si se comparanmuestras de materiales que contengan el mismo número de moléculas y no muestras que tengan la misma masa se obtienen resultados muy diferentes.

Esto se puede ver si se expresan los calores específicos en $\frac{\text{cal}}{\text{mol} - \text{°C}}$ y no-en $\frac{\text{cal}}{\text{gr} - \text{°C}}$. En 1819, Dulong y Petit encontraron que las capacidades caloríficas morales de todas las sustancias, tienen valores cercanos a $6 \frac{\text{cal}}{\text{mol} - \text{°C}}$, conalgunas excepciones (ver el carbono en la tabla 7-1). La capacidad calorífica -molar que se encuentra en la cuarta columna de la tabla 7-1 se obtiene multiplicando el calor específico (segunda columna) por el peso molecular (tercera columna). Donde se observa que la cantidad de calor requerida por molécula para ele var la temperatura de un sólido es aproximadamente la misma para casi todos los materiales.

Esta es una prueba sorprendente de la teoría molecular de la materia.

En realidad, las capacidades caloríficas molares varían con la temperatura aproximandose a cero cuando $T \rightarrow 0^{\circ} K$ y acercándose al valor de Dulong y Petit cuando $T \rightarrow \infty$. Debido a que es el número de moléculas mas bien que la clase de --- ellas lo que parece ser importante para determinar el calor que se requiere para aumentar la temperatura de un cuerpo en una cierta cantidad, es de esperarse que las capacidades calorígicas molares para diferentes sustancias varían con - la temperatura de una manera muy parecida.

En la figura 7-1 se muestra que las capacidades caloríficas molares para diversas sustancias se pueden hacer caer en la misma curva mediante un ajuste empírico simple de la escala de temperaturas. La escala horizontal en la figura es la relación $\frac{T}{T_D}$ sin dimensiones, donde T es la temperatura Kelvin y T_D una --

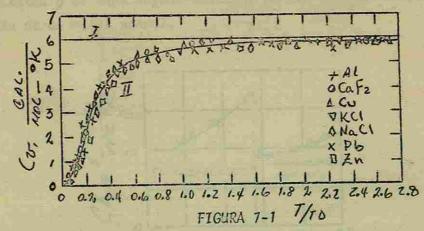
STATE OF THE CONTRACTOR OF THE CONTRACTOR WITHOUT WITHOUT WITH THE RESERVE OF THE PROPERTY OF

UNIVERSIDAD AUTÓI

DIRECCIÓN GENER

AND AND THE CONTRACTOR OF THE PARTY OF THE P

temperatura característica, llamada temperatura Debye, la cuál tiene un valor - constante para cada material.



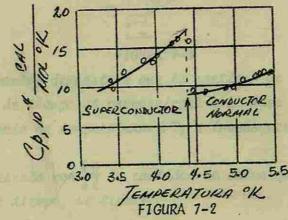
Por ejemplo para el plomo T_D tiene el valor empírico de 88°K y para el carbono, T_D = 1860°K. A partir de estos datos se puede comprobar que un valor de la escala T/T_D = 0.600 corresponde a T = 53°K para el plomo. y T = 1120°K para el carbono. En cambio, la temperatura ambiente ($\approx 300^{\circ}$ K) corresponde a $\frac{T}{T_D}$ = 3.4 para el plomo y a $\frac{T}{T_D}$ = 0.16 para el carbono. De esta manera, a partir de la figura 7-1 se ve que en los primeros tiempos, cuando solo se disponía de caloresespecíficos a la temperatura ambiente, el plomo se ajustaba a la regla de Dulong y Petit, pero el carbono parecía ser una excepción.

En la figura 7-1, la línea recta I es el valor de Dulong y Petit de 1819; - concuerda con el experimento a elevadas temperaturas pero falla a bajas tempera turas. Está dentro de la suposición de que cada átomo de un sólido vibra independientemente, como un oscilador clásico. La curva II se debe a Debye (1912). - De la teoría de Debye se puede obtener una temperatura característica Tp, que está directamente relacionada con una frecuencia de vibración característica - del material, independiente de los experimentos de calor específicos.

Para analizar las vibraciones acopladas de los átomos en un sólido se usan principios cuánticos y se obtiene una formula para el calor específico que, enfunción de la relación sin dimensiones $\frac{T}{TD}$, es la misma para todas las sustancias. La excelente concordancia de esta formula (curva II) con el experimento es un triunfo de la física cuántica. Los materiales mostrados en la figura 7-1-son normales desde el punto de vista de que no se funden, ni hierven, ni cambian su estructura cristalina, entre los limites de temperatura indicados. Las mediciones de calores específicos, que dicen la forma como absorve energía un sólido cuando se eleva su temperatura, constituyen un método de exploración sensible para percibir tales rearreglos moleculares, atómicos o electrónicos. Por --

ejemplo en la figura 7-2 se muestra el calor específico del tantalio cerca de 4.30°K. Abajo de esta temperatura de transición, el tantalio pierde su resistencia electrica y se hace superconductor. Arriba de esta temperatura tiene la resistencia de un metal normal.

1937



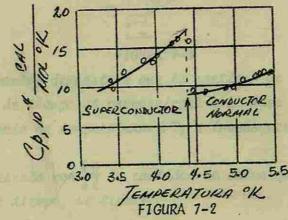
4.- Conducción del calor.

Si el extremo de una barra metálica se coloca en una llama, fluye energíaen forma de calor de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura. Este proceso de transferencia de calor se lleva acabo por medio de colisiones moleculares, que aumentan cuando crece la temperatura de dicho extremo.Cuando las moleculas que se encuentran en la región de mayor temperatura chocan
con sus vecinas que se mueven mas lentamente, parte de su energía cinítica es compartida con ellas, las cuales, a su vez, la transmiten a las que se encuentran mas alejadas de la llama. Por consiguiente, la energía de la agitación tér
mica se transmite a lo largo de la barra de una molécula a otra, si bien cada una de ellas permanece en su posición inicial.

En la figura 7-3, se muestra una lámina de sección transversal A, y espessor Δx , cuyas caras se conservan a diferentes temperaturas. Si la cara izquier da de la lámina se mantiene a la temperatura T_2 , y la cara derecha a una tempe ratura inferior T_1 ; el calor fluirá a través de la lámina de izquierda a derecha. Cuando las caras de la lámina se mantienen durante un tiempo a las tempera turas T_1 y T_2 , se comprueba que la temperatura en los puntos interiores de la lámina disminuye uniformemente con la distancia, desde la cara caliente a la fría, permaneciendo constante la temperatura en todo momento en cada punto. Seconsidera que la lámina se encuentra en un estado estacionario.

ejemplo en la figura 7-2 se muestra el calor específico del tantalio cerca de 4.30°K. Abajo de esta temperatura de transición, el tantalio pierde su resistencia electrica y se hace superconductor. Arriba de esta temperatura tiene la resistencia de un metal normal.

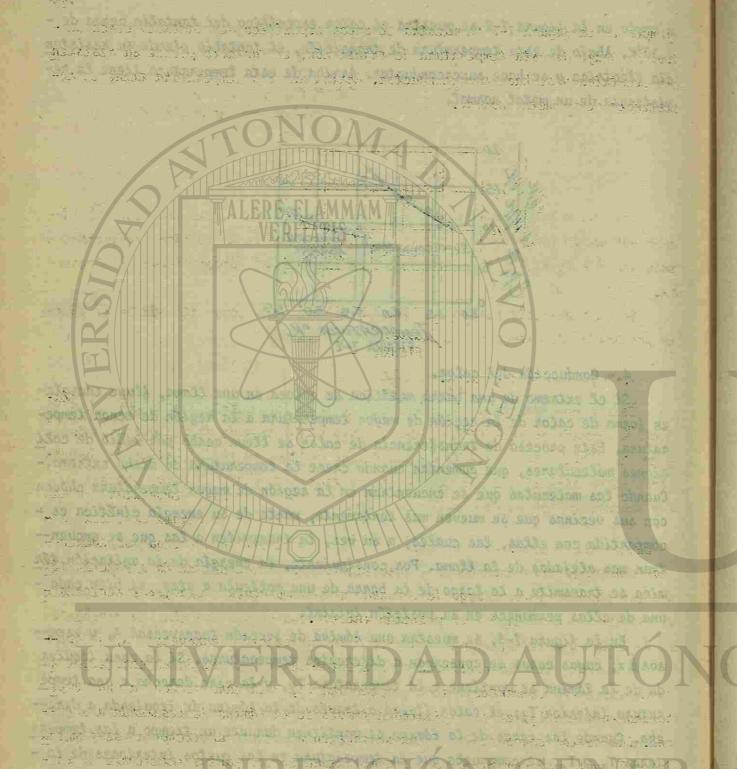
1937



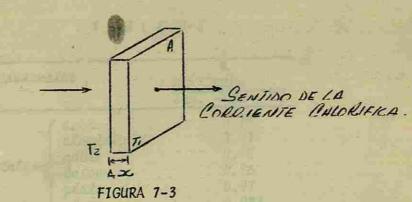
4.- Conducción del calor.

Si el extremo de una barra metálica se coloca en una llama, fluye energíaen forma de calor de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura. Este proceso de transferencia de calor se lleva acabo por medio de colisiones moleculares, que aumentan cuando crece la temperatura de dicho extremo.Cuando las moleculas que se encuentran en la región de mayor temperatura chocan
con sus vecinas que se mueven mas lentamente, parte de su energía cinítica es compartida con ellas, las cuales, a su vez, la transmiten a las que se encuentran mas alejadas de la llama. Por consiguiente, la energía de la agitación tér
mica se transmite a lo largo de la barra de una molécula a otra, si bien cada una de ellas permanece en su posición inicial.

En la figura 7-3, se muestra una lámina de sección transversal A, y espessor Δx , cuyas caras se conservan a diferentes temperaturas. Si la cara izquier da de la lámina se mantiene a la temperatura T_2 , y la cara derecha a una tempe ratura inferior T_1 ; el calor fluirá a través de la lámina de izquierda a derecha. Cuando las caras de la lámina se mantienen durante un tiempo a las tempera turas T_1 y T_2 , se comprueba que la temperatura en los puntos interiores de la lámina disminuye uniformemente con la distancia, desde la cara caliente a la fría, permaneciendo constante la temperatura en todo momento en cada punto. Seconsidera que la lámina se encuentra en un estado estacionario.



Changiantas ciptas ma la principal de la participa de la principal de la princ



Los experimentos demuestran que la cantidad de calor que atravieza la lámina por unidad de tiempo es proporcional a el área de la sección transversal A para una diferencia de temperaturas & T, e inversamente proporcional al espesor-&x.

Si se representa por $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ la cantidad de calor que fluye através de la lámina por unidad de tiempo, se tiene:

Esta proporción se puede convertir en igualdad, multiplicando por una constante K llamada conductividad térmica, cuyo valor depende de la sustancia que forma la lámina. En el límite de una lámina de espesor infinitesimal dx, cuyascaras estan sometidas a una diferencia de temperatura dT, se puede obtener la ley fundamental de la conducción de calor.

$$\frac{dQ}{dt} = - KA \frac{dT}{dx}$$
 Ecuac

Donde $\frac{dQ}{dt}$ es la rapidez de transmisión de calor por unidad de tiempo a travéz del área A, $\frac{dt}{dx}$ se llama gradiente de temperatura. El signo menos se introduce de debido a que si la temperatura aumenta de izquierda a derecha, la direcciónde la corriente calorífica es de derecha a izquierda.

La unidad del flujo calorífico por unidad de tiempo, es una caloría por se gundo, donde la temperatura debe estar en °C.

Si una sustancia tiene gran conductividad termica será buen conductor delcalor, mientras que otra que tiene una pequeña conductividad termica será malconductor del calor, o un buen aislador termico.

En la tabla 7-2, se muestran los valores de K para diversas sustancias; se vé que los metales son mejores conductores del calor que los no metales, y que-los gases son malos conductores del calor.

Sustanc	ias seg.	cal sea cm - °C	
metales	acero aluminio cobre laton plata plomo	0.12 0.49 0.92 0.26 0.97 0.083	
varios solidos	amianto corcho fieltro hielo hormigón ladrillo aislante ladrillo refrac. ladrillo rojo madera vidrio	0.0001 0.0001 0.0001 0.004 0.002 0.00035 0.0025 0.0015 0.0002	
gases <	aire argon helio hidrógeno oxigeno	0.000057 0.000039 0.00034 0.00033 0.00056	

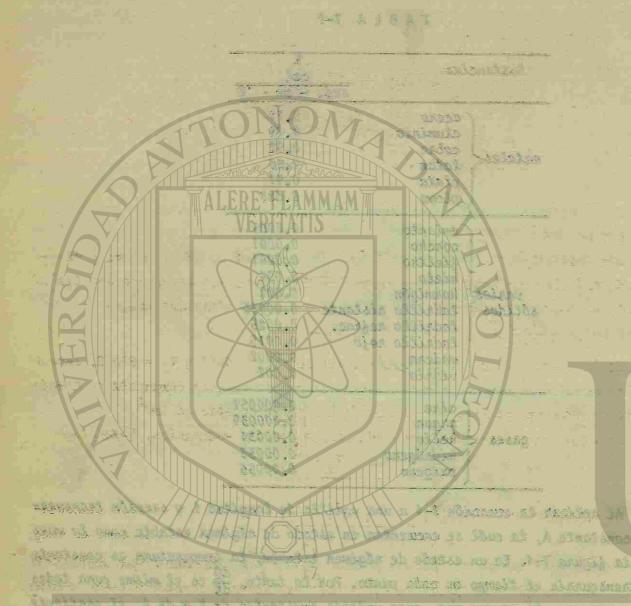
Al aplicar la ecuación 7-4 a una varilla de longitud L y sección transversal constante A, la cuál se encuentra en estado de régimen estable como lo mues tra la figura 7-4. En un estado de régimen estable, la temperatura es constante al transcurrir el tiempo en cada punto. Por lo tanto, $\frac{dQ}{dt}$ es el mismo para todas las secciones. De manera que, para valores constantes de K y de A, el gradiente de $\frac{dT}{dx}$ es el mismo en todas las secciones. Por lo tanto, T disminuye linealmente a lo largo de la varilla, de modo que $-\frac{dT}{dx} = \frac{(T_2 - T_1)}{L}$.

Así pues, el calor ΔQ transmitido en el tiempo Δt , es: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA \frac{T_2 - T_1}{L}$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = KA \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Ecuación 7-5.

La conducción de calor muestra que los conceptos de calor y temperatura -son diferentes. Por ejemplo, dos varillas que tengan la misma diferencia de tem peratura entre sus extremos, pueden transmitir cantidades totalmente diferentes de calor en el mismo tiempo.



UNIVERSIDADAUTÓN

R-V nthomast

DIRECCIÓN GENER

de celos en la miamo despe

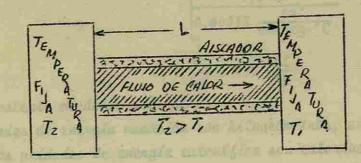


FIGURA 7-4

Ejemplo 7-2.

Una losa compuesta, esta formada por dos materiales, uno de cobre y el --otro de ladrillo aislante como se indica en la figura. Sus espesores son $L_1=2.5$ cm y $L_2=5$ cm, las conductividades térmicas de estos materiales son, $k_1=0.00035 \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-°C}} \text{ y } k_2=0.92 \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-°C}}$

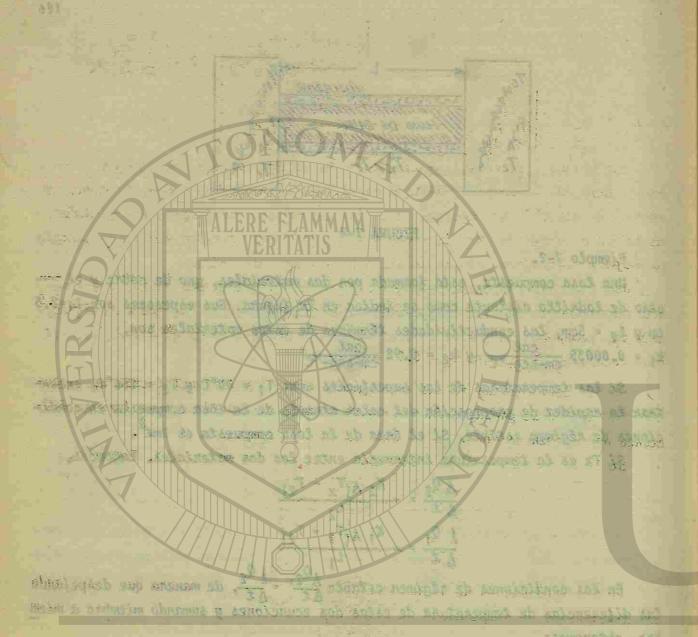
Si las temperaturas de las superficies son: T_1 = 40°C y T_2 = 250°C, encontrar la rapidez de propagación del calor através de la losa compuesta en condiciones de régimen estable. Si el área de la losa compuesta es $1mt^2$.

Si Tx es la temperatura intermedia entre los dos materiales. Entonces,

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{K_2 A(T_x - T_2)}{L_2}$$

$$\frac{L Q_1}{\Delta t} = \frac{K_1 A(T_1 - T_2)}{L_1}$$

En las condiciones de régimen estable $\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}$, de manera que despejando las diferencias de temperatura de estas dos ecuaciones y sumando miembro a miem bro, obtenemos:



UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENER

 $\begin{bmatrix}
2.5 \text{ cm} & + & 5 \text{ cm} \\
0.00035 & \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-C}} & 0.92 & \frac{\text{cal}}{\text{cm-seg-C}}
\end{bmatrix}$ $\frac{10}{\text{A} \cdot \hat{t}} = 290 \frac{\text{cal}}{\text{seg}}$

5.- Equivalente mecánico del calor.

Las unidades de energía mecánica son kilográmetros, ergios, julios o limboras - pie; las unidades de energía calorífica son calorías o BTU. Se puede encontrar la relación de magnitud entre las unidades caloríficas y las unidades - mecánicas a partir de una experiencia en la cuál una cantidad medida de energía mecánica se transforma en una cantidad determinada de calor.

Las primeras experiencias precisas fuerón realizadas por Joule, quién midió cuidadosmantz el equivalente en energía mecánica de la energía calorífica, esto es, el número de joules equivalente a una caloría, o el número de pies-libras equivalente a un BTU.

Joule, utilizó un aparato que conciste en unas pesas que al caer hacen girar un conjunto de aspas dentro de un recipiente que contiene agua (figura 7-5)

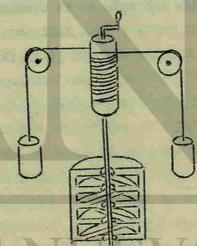


FIGURA 7-5

La pérdida en energía mecánica se calculaba, conociendo el peso de los --- cuerpos y la altura de los cuales caían y la ganancia de energía calorígica, co nociendo la masa de agua y su elevación de temperatura.

Joule deseaba demostrar que al consumir una cierta cantidad de trabajo independientemente del método para producirlo, se obtenía la misma cantidad de energía calorífica. Producía calor agitando mercurio; convirtiendo energía eléctrica en calor mediante un alambre sumergido en agua; y de otras formas. Coinci
diendo simpre la constante de proporcionalidad entre la cantidad de calor producido y la cantidad de trabajo ejecutado dentro de un error experimental de 5%.

The second of th

The second secon

THE STREETS OF STREET, WHITH TO BE RECEIVED THE SECOND OF THE

THE STATE OF THE S

UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENER

ningle entined from Phintocke comments were expensively and another entire their parties of the control of the

cale a an contalea de trabejo e centafo dentir de co en entre estantar de 1844.

Sus experimentos son notables por la influencia que tubieron para convenser a los hombres de ciencia, de lo correcto del concepto de que el calor es una forma de energía. Los mejores resultados obtenidos son:

1 K cal = 1000 cal = 4186 joules = 427.1 kgm. 1 BTU = 252 cal = 7781b - pie.

Esto es, cuando se convierten en calor 4186 joules de energía mecánica, e-levan la temperatura de 1 kg de agua en 1° C.

6.- Calor y trabajo.

Se ha visto que el calor es una forma de energía que fluye de un cuerpo aotro debido a la diferencia de temperatura que hay entre ellos. Si el calor fue
ra cierta clase definida de energía o una sustancia que al estar contenida en un sistema conservará su identidad, no sería posible extraer calor indefinida-mente de un sistema que no cambia. Sin embargo, Rumford demostró que era posi-ble. De hecho, si en el aparato de Joule se sigue realizando trabajo mecánico se puede detener una cantidad indefinida de calor del agua, conectandola con un
sistema más frío, sin cambiar las condiciones del agua.

De igual forma, el trabajo no es algo del cuál un sistema contenga una cantidad definida. Se puede comunicar a un sistema una cantidad indefinida de trabajo sin cambiar sus condiciones, como lo ilustra el aparato de Joule. Tanto el trabajo como el calor, requieren una transmisión de energía. En la mecánica, se trata de trabajo desarrrollado cuando hay transmisiones de energía, sin intervenir la temperatura. La energía calorígica se transmite por diferencias de temperatura, a partir de lo cuál se puede distinguir el calor y el trabajo.

El termino trabajo incluye a partir de la expresión dW = Fdx todos los procesos de transmisión de energía, en donde F puede provenir de fuentes eléctricas, magnéticas, gravitacionales y otras; pero excluye toda transmisión de energía que provenga de diferencias de temperatura.

En la figura 7-6 se representan cuatro casos donde se realiza trabajo o -transmisión de calor. En (a) el sistema esta compuesto de agua y una rueda de aspas, que está obligado a girar y agitar el agua por la acción de un peso quecae. En (b) el sistema esta formado por agua y una resistencia eléctrica introducida en ella. La corriente eléctrica que pasa por la resistencia es producida
por un generador accionado por un peso que cae. En ambos casos se modifica el estado del sistema y debido a que el agente que provoca este cambio es un pesoque desciende, ambos procesos implican la realización de trabajo.

En los casos (c) y (d) el sistema es agua contenida en un recipiente conductor del calor. En (c) el sistema esta en contacto con los gases en combus---

THE COUNTY BATE AND DESCRIPTION OF STREET ASSESSMENT ASSESSMENT AND ASSESSMENT AND ASSESSMENT AND ASSESSMENT AND ASSESSMENT AND ASSESSMENT ASSE AFF THE PROPERTY OF CLARGE, IN STRUCTURE AND ARRESTED BY THE SECURITY OF THE the definite of prince to the party of the party in - The second of The section and the section of the s we see ded not not not the term of the see of Street mis to the North the Contract of the Co AND THE COURT OF THE CO. A COURT OF THE PARTY CONTINUES. THE RESIDENCE OF THE PARTY OF T STATE OF THE STATE THE SE SHAPE PRODUCE OF THE PRODUCE SE SECURIOR SE THE RESIDENCE OF THE PARTY OF T **数外部 40000 共主主要,随此共享)。这个共和国企业,而政治的一种政治的** early religiously appropriately and the contract of the expense to be the resort of the contract of the contra THE WALL BY THE PARTY OF THE PA and the state of the second of to the case in all the election of continuous surfaces and the property of 是我我生活,我们就是一个人的,我们就是一个人的人的人,我们就是我们的人,我们就是一个人的人。

tión de un mechero de Bunsen, es decir, con otro cuerpo a temperatura mas eleva da.

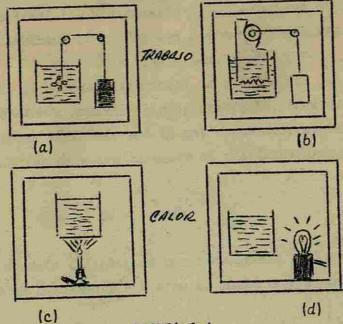


FIGURA 7-6

En (d) el sistema está próximo con una lámpara eléctrica cuya temperatura es mu cho más elevada que la del agua. En abmos casos se modifica el estado del siste ma, sin intervenir ningún agente mecánico que provoque este cambio; solamente - hay una transmisión de calor.

Es importante observar que si hay alguna transformación particular en un - sistema implica la realización de trabajo o la transmisión de calor. Por ejemplo si en la figura 7-6b se considera ahora la resistencia como sistema y el agua como medio exterior hay una transmisión de calor desde la resistencia, envirtud de la diferencia de temperatura. Sin embargo, no obran fuerzas a travézuritud de la diferencia de temperatura. Sin embargo, no obran fuerzas a travézuritud de los límites del sistema que provoquen desplazamiento, y por lo tanto, para este proceso W = 0.

Si ahora el sistema esta formado por el conjunto del agua y de la resisten cia, el medio exterior no contiene ningún objeto cuya temperatura difiera de la del sistema, y por lo tanto no hay transmisión de calor entre este sistema y el medio exterior, y por consiguiente, Q = 0 para este proceso.

Calcular ahora a Q y a W para un proceso termodinâmico específico. Si se - considera un gas en un depósito cilindrico que tiene un embolo móvil. Donde elgas es el sistema que inicialmente se encuentra en equilibrio con el medio ambiente externo a el (que es el depósito de calor y el embolo, que se muestran en la figura 7-7) y tiene una presión pi y un volumen Vi. Si las paredes del recipiente son los límites del sistema, podrá fluir calor al sistema o salir de el por la base del cilíndro y se puede hacer trabajo sobre el sistema o el sistema o el sistema con la sistema del sistema o el sistema del sistema del sistema o el sistema del sistema del

tema puede efectuar trabajo comprimiendo el gas con el embolo o dilatandolo.

En la figura 7-7 se representa a el gas dilatándose contra el embolo alcanzando un estado final con una presión p_f y un volumen V_f . El trabajo realizadopor el gas al desplazar el pistón una distancia infinitesimal dx es:

$$dW = F \cdot ds = pAds = pdV$$
 Ecuación 7-6

Donde dV es el cambio diferencial de volumen del gas. En general, la presión no será constante durante un desplazamiento. Para determinar el trabajo to tal realizado sobre el émbolo por el gas en un desplazamiento grande, se debe conocer la variación de p con respecto al desplazamiento; y se calcula la integral;

$$w = \int dw = \int_{v_i}^{v} p dv$$
.

Ecuación 7-7

El valor de esta integral se puede encontrar graficamente como el área bajo la curva en un diagrama p-V como se muestra para un caso especial en la figura 1-8.

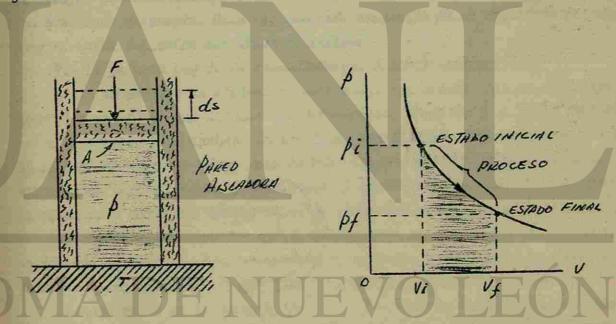


FIGURA 7-7 .

FIGURA 7-8

Tanto el trabajo efectuado por un sistema, como el calor perdido o ganadopor este dependen no solamente de los dos estados inicial y final sino tambiénde los estados intermedios, esto es, del recorrido que siga el proceso. Esto se puede ver en la figura 7-9, al conservar constante la presión de i a a y des—pues conservar constante el volumen de a a f. El trabajo que realiza el gas aldilatarse es igual al área bajo la línea ia. Si ahora el recorrido es ibf, el trabajo efectuado por el gas será el área bajo la línea bf. La curva continua -

de i a f es otra recorrido, en el cuál, el trabajo efectuado por el gas es el - area bajo esta curva.

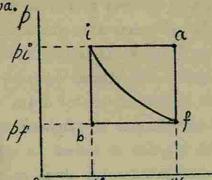


FIGURA 7-9

Para calcular el flujo de calor durante el proceso se llegà a un resultado semejante. A los estados i y f los caracterizan las temperaturas Ti y Tf. Si se realiza el proceso a presión constante pi hasta alcanzar la temperatura Tp y de spues se cambia la presión a temperatura constante hasta llegar al valor finalpf se obtiene cierto resultado. O bien, si primero se reduce la presión a pf ydespues se calienta a esa presión hasta la temperatura final Tf se obtendrá otro resultado diferente. Esto es, que cada recorrido dá un resultado diferente para el valor del calor que fluye al sistema

7.- La primera Ley de la termodinámica. Algunas aplicaciones.

Si en un proceso un sistema se hace pasar del estado inicial i al estado - final f a travéz de una trayectoria determinada, y siendo Q el calor absorbido-por el sistema y W el trabajo desarrollado por el mismo; se puede calcular Q-W. Si se hace de nuevo lo mismo para muchas trayectorias diferentes, entre los mismos estados inicial y final, se obtiene el importante resultado de que Q-W es - la misma para todas las trayectorias que unen los puntos inicial y final. Esto-es, aún cuando Q y W dependen independientemente de la trayectoria seguida, Q-W no depende de como se lleve el sistema del estado i al estado f es decir su trayectoria, sino solamente de los estados inicial y final de equilibrio.

Ahora bien, Q es la energía que se ha suministrado al sistema por transmisión de calor, y W es la energía que se ha extraido de él al efectuar trabajo.—Por lo tanto, la diferencia Q-W tiene que representar la variación de la energía interna del sistema. A partir de lo cuál se deduce que la variación de la energía interna de un sistema es independiente de la trayectoria, y por lo tanto, es igual a la energía interna del sistema en el estado f, Uf, menos la energía interna en el estado i, Ui:

uf - ui = du = 2 - w

Ecuación 7-8

Si se asigna un valor arbitrario a la energía interna en un cierto estadode referencia, su valor en cualquier otro estado queda definido igualmente, ---

puesto que Q-W es la misma para cualquier proceso que lleve de un estado a otro La ecuación 7-8 se conoce como la primera ley de la Termodinámica, y se de be recordar que al aplicar esta ecuación: 1º Que todas las magnitudes deben expresarse en las mismas unidades; 2º Que Q es positivo cuando entra calor al sistema; 3º Que W es positivo cuando el sistema realiza trabajo.

Si el sistema sufre solamente cambios infinitesimales en su estado, es decir, si absorbe una cantidad de cantidad de calor dQ y solo se realiza una cantidad de trabajo dW; el cambio de energía interna será dU. En tal caso, la prim era ley se escribe en forma diferencial así:

dU = dQ - dW

Ecuación 7-9

Algunas aplicaciones.

Se ha visto que al dilatarse un gas el trabajo que realiza sobre su medio ambiente es:

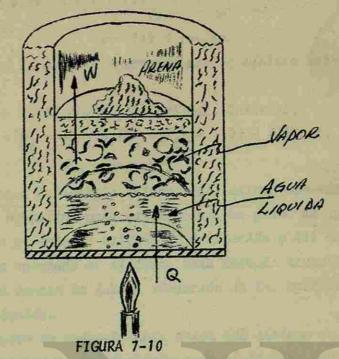
 $W = \int p dV$

Donde p es la presión que se ejerce sobre el gas o por el gas y dV el cambio diferencial de volumen que experimenta el mismo. Si se concidera un caso en que la presión es constante y el volumen cambia una cantidad finita, de Vi a Vf. Entonces, $W = \int_{V}^{V} f \, dV = p \left(V_{f} - V_{i} \right) \qquad \text{Ecuación 7-10}$

Al proceso que ocurre a presión cosntante se le llama proceso insóbarico.—
Un ejemplo de este proceso se muestra en la figura 7-10, donde el sistema es agua en un depósito cilíndrico. Un émbolo impermeable sin rozamiento se carga —
con arena para mantener constante la presión sobre el agua, y se transmite ca—
lor del medio ambiente al sistema por medio de un quemador de Bunsen, hasta que
el agua hierve y algo de ella se convierte en vapor, el sistema se puede dila—
tar muy lentamente (casi estáticamente), pero la presión que ejerce sobre el —
émbolo es siempre la misma, debido a que esta presión debe ser igual a la pre—
sión constante que efectúa el émbolo sobre el sistema. Si se agregara o se quitara algo de arena durante el proceso variaría la presión, y por lo tanto el —
proceso no sería isóbarico.

Las sustancias cambian su fase de líquido a vapor cuando hay una combina-ción definida de los valores de la presión y la temperatura. Por ejemplo, el --punto de ebullición del agua es a 100°C y a la presión atmosférica.

Un sistema experimenta un cambio de fase agregándole o quitándole calor, - independientemente del calor que se necesita para llevar su temperatura al va-- lor requerido.



Si se considera el cambio de fase de una masa m de líquido a vapor que ocu rra a presión y temperatura constante. Siendo Vl el volumen del líquido y Vv el volumen del vapor. El trabajo esectuado por esta sustancia al dilatarse de Vl a

$$w = p (v_v - v_\ell)$$

Si se representa por L el calor necesario por unidad de masa para cambiaruna sustancia de líquido a vapor a temperatura y presión constante. Entonces la cantidad de calor absorbida por la masa m durante el cambio de estado es:

Ecuación 7-11

De la primera ley de la termodinâmica, tenemos:

$$\Delta u = Q - W$$

$$\Delta u = m L - p (v_v - v_\ell)$$

para este proceso.

de manera que

Ejemplo 7-3. A la presión atmosférica, 1 gr. de agua, que tiene un vaolumen de 1 cm³, - 1 se transforma en 1617 cm³ de vapor después de hervir. El calor de vaporizacióndel agua es de 539 cal a 1 atm. Por lo tanto, si m = 1 gr, Q = m L = 539 cal.

Esta cantidad es positiva, ya que representa el calor agregado por el me-dio ambiente al sistema.

Sabiendo que 1 atm = $1.013 \times 10^5 \frac{\text{nt}}{2}$, se encuentra:

UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENERA

tade Coldina es direcco. La cue estapatente el que el constant de grant de constant de con

Addition of a 12 to 12 that is not it our ourselve

$$W = p (V_v - V_\ell) = 1.013 \times 10^5 \frac{nt}{m^2} \left[(1671 - 1) \times 10^{-6} \text{m}^3 \right]^{13}$$

W = 169.5 joules.

Que es la cantidad de trabajo efectuada por el sistema sobre el medio am-biente, y es positiva.

Puesto que 1 cal = 4.186 joules, W = 41 cal. Entonces, $\Delta U = U_V - U_\ell = mL - p (V_V - V_\ell) = (539 - 41)$ cal. $\Delta U = 498$ cal.

Durante este proceso la energía interna del sistema aumenta. Por lo tanto, de las 539 cal que se necesitan para hacer hervir un gramo de agua a 100°C y -- 1 atm; 41 cal producen el trabajo externo de dilatación y 498 cal se transfor-man en energía interna agregada al sistema. Esta energía representa el trabajo-interno efectuado para vencer la fuerte atracción de las moléculas de agua entre sí en el estado líquido.

Cuando en un proceso no entra ni sale calor del sistema se le llama proceso adiabático. Este proceso se logra conservando el sistema sellado, separado de su medio ambiente por un material aislador del calor, o efectuando el proceso rápidamente.

Para un proceso adiabático Q=0, de manera que de la primera ley obtenemos: $\Delta U = U_{i} - U_{i} = -W$

Por lo tanto, para un proceso adiabático la energía interna del sistema se incrementa en una cantidad igual a la cantidad de trabajo efectuado sobre el -- sistema. Si el sistema hace trabajo en un proceso adiabático, su energía interna disminuye en una cantidad igual al trabajo externo que efectúa. Al aumentar-la energía interna se eleva la temperatura del sistema y al disminuir esta se reduce la temperatura.

En la figura 7-11 se muestra un proceso adiabatico simple, donde el sistema es un gas encerrado dentro de un cilíndro hecho de material aislador del calor. Como al sistema no entra ni sale calor de su medio ambiente, y solo se tie ne un embolo sin rozamiento cargado con arena; solo se realizará trabajo entre-el sistema y su medio ambiente. Este proceso ocurre al agregar o quitar arena al embolo, de manera que el gas se puede comprimir o dilatar contra el embolo.

Algunos ejemplos de procesos adiabáticos en ingeniería son, la dilatacióndel vapor en el cilindro de una máquina de vapor, la dilatación de gases calien tes en un motor de comustión interna y la compresión del aire en un compresor de aire. Estos procesos se llevan a cabo con una gran rápidez para que solo pue da entrar o salir del sistema una pequeña cantidad de calor a travéz de sus paTONOMA TONOMA TO

nedes durante ese tiempo.

ARENA

MATERIAL AISLADOR

DE CALOR

GAS

FIGURA 7-11

Un proceso de gran interes teórico es el de la dilatación libre. Se tratade un proceso adiabático en el cual no hace trabajo el sistema ni se efectúa -trabajo sobre el. Este proceso se logra conectando un depósito que contenga gas
con otro en el cuál se le ha hecho vacío mediante una espita de conexión, estan
do todo el sistema aislado como se muestra en la figura 7-12. Si la espita se abre repentinamente, el gas se introduce en el vacío y se dilata libremente.

Debido a que no entra ni sale calor del sistema, y como las paredes de los depósitos son rígidas no se hace trabajo externo sobre el sistema. Por lo tanto, en la primera ley tenemos que Q=0 y W=0, de manera que Ui=Uf para este proceso. Esto es, que las energías internas inicial y final son iguales en la dilatación libre.

UNIVERSIDAD AUTÓN
DIRECCIÓN GENER

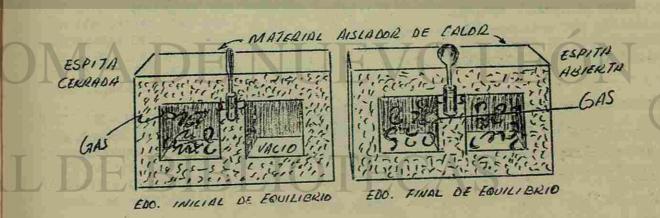


FIGURA 7-12

1.- Si 50g de aluminio a 20°C se dejan caer en 500g de etanol a -40°C, ¿cu ál será la temperatura final cuando se logra el equilibrio?

R: -37.8°C.

2.- Cien gramos de plomo a 100°C se dejan caer en 50g de agua a 20°C confinada en un recipiente de cobre utilizado como calorímetro de masa de 50G. Encue ntre la temperatura resultante. R: 24.3°C.

3.- Un mol de gas helio a 0°C se mezcla con un mol de gas nitrógeno a ---- 100°C al unir los dos recipientes de los gases. ¿Cuál es la temperatura final?

4.- En un experimento de Joule, una masa de 6.0kg cae desde una altura de-50.0mt y hace girar una rueda de aspas que agita a 0.600kg de agua. El agua está inicialmente a 15°C. ¿Cuánto se eleva su temperatura?

R: 1.17°C.

5.- Un atleta de gran energía disipa toda su energía en una dieta de 4000-kcal por día. Si se desprendiera de ese calor de manera uniforme, ¿Cómo se comp araría esa producción de calor con la producción de energía de una lémpara de -100 watts?. R: 190 watts.

6.- Calcular el calor específico de un metal a partir de los siguientes da tos. Un depósito hecho del metal peso 35.6nt y contiene además 133.5nt de agua-Un trozo del metal de 17.8nt, que está inicialmente a una temperatura de 177°C, se arroja en el agua. Esta y el depósito tenían inicialmente una temperatura de 15.5°C y la temperatura final de todo el sistema que de 18.3°C.

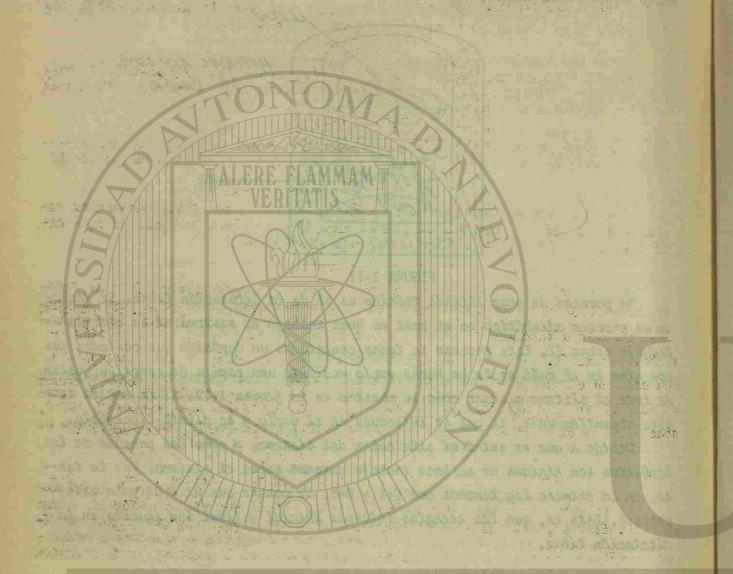
R: 0.13 kcal/kg°C.

7.- Para medir el calor específico de un líquido se utiliza un "caloríme--tro de flujo". SE agrega calor uniformemente, en una proporción conocida, a una
corriente del líquido conforme este va pasando por el calorímetro en una cantidad conocida. Después, midiendo la diferencia de temperatura resultante entre-los puntos de entrada y de salida de la corriente del líquido se puede calcular el calor específico del líquido. Un líquido de densidad 0.85g/cm³ fluye por un calorímetro a razón de 8.0cm³/seg Se agrega calor mediante una resistencia eléctrica que funciona con 250 watts yse establece, en condiciones de flujo estable, una diferencia de temperaturas de 15°C entre los puntos de entrada y de salida. Obtener el calor específico -del liquido. R: 0.59 cal/g°C.

8.- Un trozo de hierro que pesa 13.6kg se saca de un horno de recocido yse templa introduciéndolo en un depósito que contiene 45.5kg de aceite a una -temperatura de 22.2°C. La temperatura del aceite llega a 46.6°C. El calor específico del aceite es 0.45kcal/kg°C. Despréciese la capacidad calorífica del de-pósito y las pérdidas de calor al medio ambiente. Calcúlese la temperatura delhorno de recocido. R: 371°C.

9.- Doscientos gramos de plomo fundido a 327°C se dejan caer en un gran -bloque de hielo a 0°C. ¿Cuánto hielo se funde por el plomo?

R: 40g.



L= 500m

102 40m

1xp de Pared = 2.0mm

1=300e

1=1000

10.- Un tubo de bronce de 50cm de longitud tiene un diâmetro medio de 4.0cm y un espesor de pared de 2.0mm. Si un extremo del tubo se encuentra a 30°C y el otro se encuentra a 10°C, ¡Cuánto calor fluye hacia la parte inferior del tubocada segundo? ¡Cuántos watts de potencia deben suministrarse al extremo que sencuentra a 30°C para que esta situación continúe. Ignore todas las pérdidas de calor a lo largo del tubo.

R: 0.20 cal/seg; 0.84 watts.

11.- Al perforar un agujero en un bloque de latón de 4.45nt se proporcionapotencia a razón de 298 watts durante 2.0min. (a) iQué cantidad de calor se genera? (b) iCuál es la elevación de temperatura del latón si el 75% del calor generado calienta al latón? (c) iQué ocurre con el otro 25%?

R: a) 34 BTU = 36000 joules

Ы 150°C.

12.- Considérese la varilla que se muestra en la figura (7-4). Suponiendoque L=25cm, A=1.0cm², y el material sea cobre. Si T_2 =125°C, T_1 =0°C, y se alcanza una situación de régimen estable, encontrar (a) el gradiante de temperatura, (b) la rápidez de transmisión de calor y (c) la temperatura en un punto de la varilla situado a 10cm del extremo de temperatura elevada.

R: a) 500°C/m;

b) 4.6 cal/seg

c) 75°C.

13.- Una lámina de un aislador térmico tiene $100 \mathrm{cm}^2$ de sección transversaly 2cm de espesor. Su conductibilidad térmica es 2 x $10^{-4} \mathrm{cal/seg-cm^-}^\circ$ C. Si la diferencia de temperaturas entre las caras opuestas es 100° C, ¿Cuántas calorías pasarán a través de la lámina en un día?

R: 86,400 cal/día.

14.- Una barra de 2m de longitud está formada por un núcleo macizo de acero de 1cm de diámetro, rodeado de una envoltura de cobre cuyo diámetro exterior es de 2cm. La superficie exterior de la barra está aislada térmicamente; uno de -- sus extremos se mantiene a 100°C, y el otro a 0°C. a) Calcular la corriente casus extremos se mantiene a 100°C, y el otro a 0°C. a) Calcular la corriente calorífica total en la barra. b) ¿Qué fracción es transportada por cada sustancia lorífica total en la barra. b) ¿Qué fracción es transportada por cada sustancia

y 96% a través del cobre.

15.- Supóngase que la conductividad térmica del cobre sea doble de la del-aluminio y 4 veces mayor que la del latón. Tres varillas de metal, hechas de cobre, aluminio y latón, respectivamente, son cada una de ellas de 15.25cm de largo y 2.54cm de diâmetro. Estas varillas se colocan una a continuación de la otra estando la de aluminio entre las otras dos. Los extremos libres de las varillas de cobre y de latón se conservan a $100 \text{ y a } 0^{\circ}\text{C}$, respectivamente. Encontrar las temperaturas de equilibrio de la junta cobre-aluminio y de la junta aluminio-latón.

R: 86°C (Cu-Al) y 57°C (Al-latón).

16.- Un calentador de alambre de tungsteno trabaja a 3.0kw/m y su diâmetro- es de 5.0 x 10^{-4} m. Está ahogado dentro del eje de un cilindro de cerámica de -- 0.12m de diâmetro. Cuando está operando a la potencia de trabajo, el alambre se encuentra a 1500° C; la cara exterior del cilindro está a 20° C. Encontrar la conductividad térmica de la cerámica.

R: 0.42 cal/m seg °C.

17.- La figura (7-13) a muestra un cilindro que contiene gas y está cerrado mediante un émbolo móvil. El cilindro va dentro de una mezcla de hielo y agua.- El émbolo se mueve rápidamente bajándolo de la posición (1).a la posición (2).- Se detiene el émbolo en la posición (2) hasta que el gas quede nuevamente a 0°C y después se levanta lentamente a la posición (1). La figura (7-13b) es un diagrama p-V del proceso. Si durante el ciclo se funden 100g de hielo. ¿Cuánto trabajo se ha hecho sobre el gas?

R: 8,000 cal.

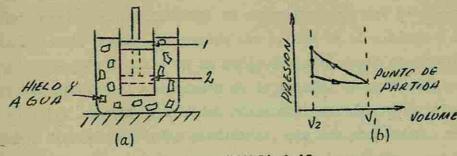


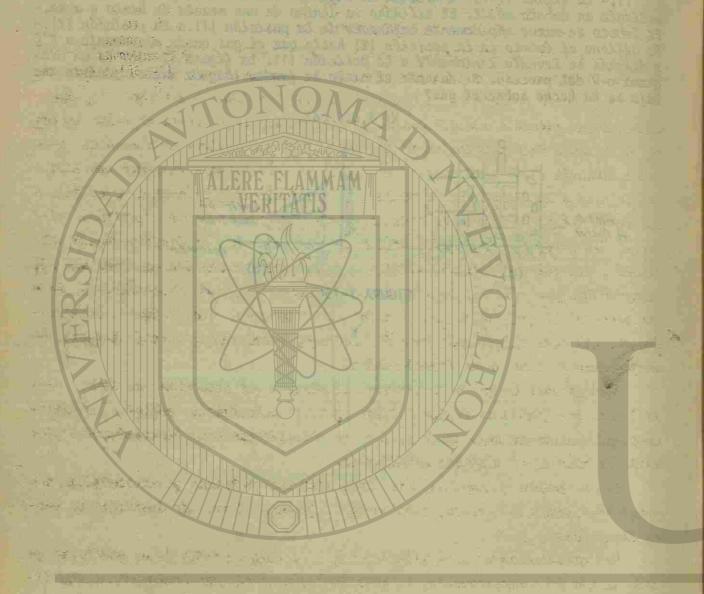
FIGURA 7-13

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

A CONTRACT OF THE PARTY OF THE

The solution of the straint of the solution of

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENER

CAPITULO VIII TEMPERATURA

1.- Descripciones macroscópica y microscópica.

Al estudiar las situaciones físicas, generalmente se enfoca la atención en una porción de materia que imaginariamente esta separada del medio ambiente que la rodea. A esta porción se le llama el sistema y a todo lo externo a él, que - tiene alguna relación directa con su comportamiento se le llama el medio ambien te. Un ejemplo para determinar el comportamiento del sistema al actuar con su - medio ambiente puede ser; cuando una pelota es el sistema y el medio ambiente - sea el aire y la tierra. En la caída libre se trata de averiguar como el aire y la tierra afectan el movimiento de la pelota. En este caso como en algunos otros se deben escoger cantidades adecuadas para describir el funcionamiento del-sistema. Clasificado estas cantidades, que son propiedades del conjunto del sistema medidas por medio de operaciones de la boratorio, como macroscópicas. En elos procesos en que interviene el calor, las leyes que relacionan las cantidades macrosópicas tales como, presión, volumen, temperatura, energía interna, — etc, forman la base de la Termodinámica.

Para el caso en que se consideren cantidades que describan los átomos y — moléculas que forman un sistema, tales como sus velocidades, energías, masas, — cantidades de movimiento angular, etc, se clasificarán como microscópicas y formarán la base de la mecánica estadística.

En un sistema cualquiera, las cantidades macroscópicas y microscópicas sedeben relacionar ya que son, simplemente diferentes formas de describir la misma situación.

Macroscópicamente la presión de un gas se mide a partir de un manómetro yconsiderada microscópicamente, se relaciona con la rápidez media por unidad deárea con que las moléculas del gas comunidad de área con que las moléculas delgas comunican cantidad de movimiento al fluido manométrico al chocar contra susuperficie.

Analogamente la temperatura de un gas se relaciona con la energía cinética media de translación de las moléculas.

2.- Equilibrio térmico.

Cuando se tocan varios cuerpos, el sentido del tacto permite hacer una distinción aproximada entre los cuerpos calientes y los cuerpos fríos. Así con eltacto se pueden ordenar los cuerpos A, B, y C en orden de su grado de calentamiento, diciendo que A está más caliente que B, B más caliente que C, etc, conesto queda definido nuestro sentido de temperatura. Para fines científicos este procedimiento no es útil por se muy subjetivo para determinar la temperatura.

Para comprender el significado de temperatura; considerese un objeto A y uno identico B, que se sienten frío el primero y caliente el segundo al estar en contacto con la mano, los cuales al ponerse en contacto uno con el otro durante un tiempo grande, producirán la misma sensación de temperatura.

Cuando esto sucede se dice que A y B se encuentran en equilibrio térmico. Una prueba lógica del equilibrio térmico es emplear un tercer cuerpo tal como un termómetro. "Si A y B estan en equilibrio térmico con un tercer grupo C (termómetro), entonces A y B se encuentran en equilibrio térmico entre sí". A esta definición se le conoce como la ley de la Termodinámica anterior a la primera.

El concepto anterior dá la idea de que la temperatura de un sistema es una propiedad que a la larga alacanza el mismo valor que la de otros sistemas cuando todos se ponen en contacto.

La idea de temperatura como medida del grado de calor o de frío de un sistema concuerdan con este concepto, porque hasta el punto en que nuestro sentido de temperatura es digno de confianza, el grado de calor de todos los objetos es igual despues de que todos ellos han estado en contacto un tiempo suficientemen te grande.

3.- Medición de la temperatura.

Algunas de las propiedades físicas que varían con la temperatura son: la longitud de una varilla, el volumen de un líquido, la resistencia electrica deun alambre, el color del filamento de una lampara, la presión de un gas que semantiene a volumen constante y el volumen de un gas que se mantiene a presión constante.

Todos estos cambios son utilizados en la construcción de diferentes tiposde termómetros.

La escala de temperaturas se establece escogiendo una sustancia termométri ca especial y una propiedad termométrica especial de esa sustancia. Po r ejem-plo, la sustancia termométrica puede ser un líquido que se encuentra en un tubo capilar de vídrio y la propiedad termométrica puede ser la longitud de la colum na del líquido. Para cada elección de una sustancia y de su propiedad termomé-trica, conjuntamente con la relación supuesta entre la propiedad y la temperatu ra, conducen cada una de ellas a una escala especial de temperatura, cuyas medi ciones hechas con cualquier otra escala de temperaturas independientemente defi nidas. Pero si es recomendable, que una escala de temperaturas particular se --compare con la escala universal que se describirá mas adelante.

Para graduar un termómetro para el cuál se ha escogido una sustancia termo

ALERE FLAMMANT VERITATIS

UNIVERSIDAD AUTÓN

DIRECCIÓN GENER

ar 1904 (1955) is the first special that the first special continues of the continues of th

métrica se hace lo siguiente: Representese por X la propiedad termométrica quese desea utilizar para determinar la escala de temperaturas, en seguida se esco ge una función lineal de la propiedad X tal como la temperatura T que tiene eltermómetro, y un sistema cualquiera en equilibrio térmico con él:

$$T(X) = a X$$
 Ecuación 8

Al escoger esta forma lineal para T(X) se establece que diferencias iguales de temperatura, corresponden a cambios iguales de X. De la ecuación 8-1, ta mbién se deduce que dos temperaturas, medidas con el mismo termómetro, están re lacionadas con sus respectivas X, es decir,

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2}$$

Para encontrar la constante a, y por consiguiente, graduar el termómetro - se debe determinar un punto fijo normal, en el cual todos los termómetros deben marcar el mismo valor de temperatura T. Este punto fijo es aguél en el cual elhielo, el agua líquida y el vapor de agua, estañ en equilibrio y se le llama -- punto triple del agua.

El punto triple del agua es un estado único que se logra únicamente a unapresión definida (figura 8-1). La presión de vapor de agua en el punto triple es de 4.58mm-Hg. y su temperatura a sido designada arbitrariamente llamándola -273.16 grados Kelvin o 273.16°K.

Si tr, son los valores en el punto triple, por lo tanto, para cualquier ter mómetro,

Si
$$T(Xyr) = 273.16^{\circ}K$$
, para todos los termómetros, entonces,

Si $T(Xyr) = 273.16^{\circ}K$, para todos los termómetros, entonces, $T(X) = 273.16^{\circ}K \frac{X}{Xtr}$ Ecuación 8-2

Por lo tanto, cuando la propiedad termómetrica tiene el valor X, la temperatura T, es la escala particular escogida, estará dada en $^{\circ}K$ por T(X), cuando en el segundo miembro de esta ecuación se ponen los valores de X y Xtr.

Aplicando la ecuación 8-2 a varios termómetros se obtiene: a) Para un termómetro de líquido en un tubo capilar en vidrio, X es L, la longitud de la columna de líquido, $y T (L) = 273.16^{\circ} K \frac{L}{Ltr}$.

b) Para un gas a presión constante, XesV, el volumen del gas, y

$$T(V) = 273.16^{\circ} K \frac{V}{Vtr}$$

c) Para un gas a volumen constante, XesP, presión de gas, y

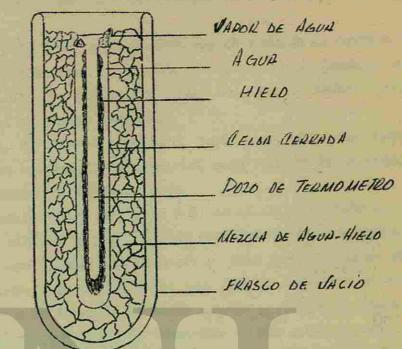
$$T(P) = 273.16^{\circ} K \frac{P}{Pth}$$

la-

era-

ante

d) Para un termómetro de resistencia de platino, XesR, la resistencia eléctrica y $T(R) = 273.16^{\circ} K \frac{R}{Rtr}$



Ejemplo 8-1.

FIGURA 8-1

Un termómetro cuya resistencia es de platino, tiene un valor de 90.350hms. Cuando su bulbo se coloca en una celda de punto triple, como la de la figura 8-1. ¿Qué temperatura queda definida por la ecuación 8-2 si el bulbo se coloca en un medio ambiente tal que su resistencia sea 980hms?

 $T(X) = 273.16^{\circ} K \frac{X}{Xtr}$ = 273.16° K \frac{98}{90.35}

 $T(X) = 294^{\circ}K$.

Ahora resulta la pregunta de que si el valor que se encuentra para la temperatura de un sistema depende del termómetro utilizado para medirlo. Como lasdiferentes clases de termómetros coinciden en el punto fijo patrón, es de esperarse, i que ocurre en otros puntos? Si se mide la temperatura de un sistema con diversos termómetros, cada termómetro dará una lectura diferente, aún cuando sean termómetros de una misma especie, tales como termómetros de gas de volumen constante con diferentes clases de gases, obtenido diferentes mediciones de temperatura para el sistema dado.

Por lo tanto, para encontrar una escala de temperaturas definida, se debeescoger cierta clase de termómetro como patrón. Esta elección se hace determina ndo si la escala de temperatura definida mediante un termómetro especial resulta ser una cantidad útil en la formulación de las leyes de la física. La varia-

would also us the health death to be the sent of the state of the sentence of the single consider a transmit and the fitting of the

tatores exertis risin is town bearing rough anthony tate or or the hand distances to see muc confirm that on it for freederich to the room by to thesia, to make

ción mas pequeña en las lecturas esta entre diferentes termómetros de gas a volumen constante, lo que sugiere que se escoja un gas como sustancia termométrica patrón.

En un termómetro de este tipo, se encuentra que al reducir la cantidad degas usado, y por lo tanto, reducirse su presión, la variación de lecturas entre termómetros de gas fabricados con diferentes clases de gases se reduce también. - 14.- Termómetro de gas a volumen constante.

El termómetro de gas, de volumen constante, emplea como propiedad termométrica la presión a volumen constante, dependiendo esta presión de la temperatu ra, y aumentando continuamente al elevarse esta.

El termómetro se representa en la figura 8-2, conciste en un tubo de vidrio, porcelana, cuarzo o platino (dependiendo de los límites de temperatura entre los cuales se vaya a usar), conectado mediante un tubo capilar con un manôme tro de mercurio. En el bulbo esta contenido el gas, que generalmente es hidroge no o helio; al introducirlo en el medio ambiente cuya temperatura se trata de medir el gas se dilata al ir aumentando la temperatura, obligando al mercurio a descender en la rama de la izquierda y a elevarse en la rama de la derecha.

Para evitar esto o sea mantener el volumen constante, basta elevar el depó sito R para que el mercurio de la rama izquierda del tubo en U coincida siempre con la marca de referencia fija (que es el cero de la escala). Enseguida se lee la altura del mercurio en la rama de la derecha. Donde la presión del gas encerrado en el bulbo es la diferencia de las alturas entre las columnas de mercurio (multiplicada por pg) mas la presión atmosférica, que se mide con un baróme

En la práctica el aparato es algo complicado y se le deben hacer muchas co rrecciones, tales como, (1) tomar en cuenta el pequeño cambio de volumen debido a la ligera contracción o dilatación del bulbo y (2) tener en cuenta que no todo el gas confinado esta sumergido en el baño. Si se supone que las correccio-nes estan hechas y si se llama P al valor corregido de la presión con respectoa la temperatura del baño. La temperatura estará dada provicionalmente por: Ecuación 8-3

 $T(P) = 273.16^{\circ} K \frac{P}{P} = (V \text{ constante})$

147

scade la-

in--

más werrera-

ante

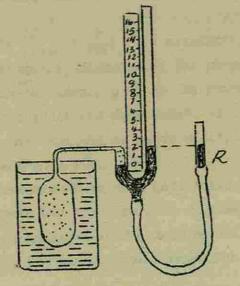


FIGURA 8-2

5.- Escala de temperaturas del gas ideal.

El bulbo de la figura 8-2 que contiene una cierta cantidad de gas, al estar rodeado por agua en el punto triple, la presión Ptr. tiene un valor definido, por ejemplo 80cm-Hg. Si ahora el bulbo se rodea con vapor que se condensa a la presión de una atmósfera y manteniendo constante el volumen en su valor ante rior, se procede a medir la presión del gas Ps, que es la presión en el punto de ebullición, para este caso, Ps80.

Enseguida se calcula la temperatura provicional a partir de la expresión -T(Ps80) = 273.16°K (Ps80 80cm-Hg)

Si ahora se extrae algo de gas al bulbo, hasta que la presión Ptr tenga un valor de 40cm-Hg, de igual forma se mide el nuevo valor de Ps y se calcula otra temperatura provicional a partir de la expresión T(Ps40) = 273.16°K $\left(\frac{Ps40}{40\text{cm-Hg}}\right)$

De igual manera se va reduciendo poco a poco la cantidad de gas encerradoen el bulbo, y para cada nuevo valor de Ptr, se calcula la temperatura para elpunto de ebullición (T(Ps).

En la figura 8-3 se han trazado algunas curvas obtenidas mediante este pro cedimiento para termometros de volumen constante que contienen gases diferentes A partir de estas curvas se encuentra que las lecturas de la temperatura de untermometro de gas a volumen constante dependen del gas utilizado para valores ordinarios de la presión de referencia.

Sin embargo, conforme se reduce la presión, las lecturas se van acercandoal mismo valor. Por lo tanto, el valor extrapolado de la temperatura depende únicamente de las propiedades generales de los gases y no de un gas en especial.

escaproxide lain-o más cuerpera-

cante

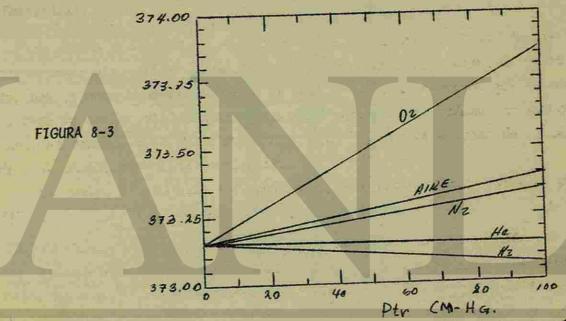
147 2 u-

The state of the s

Por consiguiente, se define la escala de temperaturas de gas ideal a partir dela expresión

 $T = 273.16^{\circ} K \frac{1 \text{ im}}{Ptr} \cdot \left(\frac{P}{Ptr}\right)$. (V constante) Esta escala de temperaturas, dependen de las propiedades de los gases en general (propiedades de un gas ideal) y no de las propiedades de un gas en particular. Por lo tanto, para medir una temperatura se debe usar un gas a esa tem peratura. La temperatura mas baja que se puede medir, con un termómetro cualqui era de gas es aproximadamente de 1°K.

Para obtener esta temperatura se debe usar helio a baja presión ya que elhelio se licua a una temperatura inferior a la de cualquier otro gas. Por lo -tanto, no se puede asignar un significado experimental a temperaturas inferio-res a 1°K aproximadamente, por medio de un termómetro de gas.



6.- Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de temperaturas práctica internacional.

Las escalas de temperatura que se usan comúnmente son la Celsius o Centi-grada y la Fahrenheit. Estas escalas estan definidas a partir de la escala de temperaturas fundamental en la ciencia, que es la Kelvin.

La escala Celsius usa como unidad de temperatura un intervalo de un gradoque es de igual magnitud que el grado de la escala Kelvin. La relación que hayentre la temperatura Celsius Tc (°C) y la temperatura Kelvin T(°K) es la siguiente:

tc = T - 273.15°

Ecuación 8-5

Como el punto triple del agua que por definición es igual a 273.16°K corre

cti-escaproxide la-

147

n u-

o más cuerpera-

cante

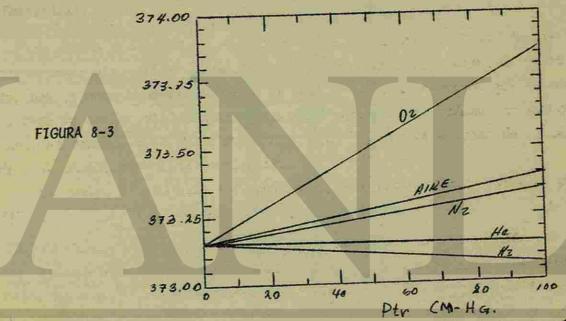
in--

The state of the s

Por consiguiente, se define la escala de temperaturas de gas ideal a partir dela expresión

 $T = 273.16^{\circ} K \frac{1 \text{ im}}{Ptr} \cdot \left(\frac{P}{Ptr}\right)$. (V constante) Esta escala de temperaturas, dependen de las propiedades de los gases en general (propiedades de un gas ideal) y no de las propiedades de un gas en particular. Por lo tanto, para medir una temperatura se debe usar un gas a esa tem peratura. La temperatura mas baja que se puede medir, con un termómetro cualqui era de gas es aproximadamente de 1°K.

Para obtener esta temperatura se debe usar helio a baja presión ya que elhelio se licua a una temperatura inferior a la de cualquier otro gas. Por lo -tanto, no se puede asignar un significado experimental a temperaturas inferio-res a 1°K aproximadamente, por medio de un termómetro de gas.



6.- Las escalas Celsius y Fahrenheit. La escala de temperaturas práctica internacional.

Las escalas de temperatura que se usan comúnmente son la Celsius o Centi-grada y la Fahrenheit. Estas escalas estan definidas a partir de la escala de temperaturas fundamental en la ciencia, que es la Kelvin.

La escala Celsius usa como unidad de temperatura un intervalo de un gradoque es de igual magnitud que el grado de la escala Kelvin. La relación que hayentre la temperatura Celsius Tc (°C) y la temperatura Kelvin T(°K) es la siguiente:

tc = T - 273.15°

Ecuación 8-5

Como el punto triple del agua que por definición es igual a 273.16°K corre

cti-escaproxide la-

147

n u-

o más cuerpera-

cante

in--

. Aber

Come of grade state and some one has been always a state of the companies of the companies

sponde 0.01°C.

La temperatura a la cuál el hielo y el agua saturada de aire estan en equi librio a la presión atmosférica es de 0°C (punto de funsión del hielo) y la tem peratura a la cual el vapor y el agua líquida estan en equilibrio a la presiónatmosférica es de 100°C (punto de ebullición del agua).

La escala Fahrenheit no se usa en trabajos cinetíficos. La relación que -hay entre las escalas Fahrenheit y Celsius es la siguiente:

 $T_F^* = 32^\circ F + \frac{9}{5} T_C$ Ecuación 8-6

A partir de esta relación se obtiene por conclusión que el punto de fusión del hielo es igual a 0°C = 32°F; que eº punto de ebullición del agua es igual a 100° C = 212° F, y que un grado Fahrenheit es exactamente $\frac{5}{9}$ de un grado Celsius.

En la figura 8-4 se hace una comparación de las escalas Kelvin, Celsius y-Fahrenheit.

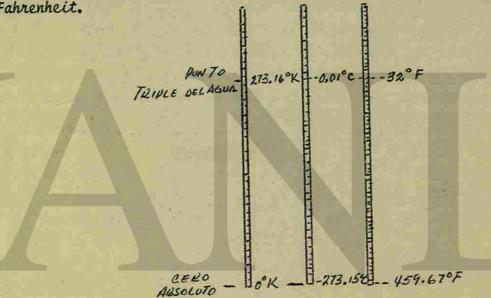


FIGURA 8-4

El punto fijo patrón para los termómetros es el punto triple del agua elcuál tiene un valor arbitrario de 273.16°K. El termómetro de gas de volumen con stante es el termómetro patrón. La escala de gas extrapolada es la que se usa para definir la temperatura del gas ideal a partir de la expresión T = 273.16°K

Esta escala es igual a la Kelvin para los límites entre los cuales se pueda usar un termómetro de gas.

Empleando de esta forma el termómetro patrón, se pueden encontrar experi-mentalmente algunos otros puntos de referencia para medir la temperatura, llama dos puntos fijos. En la tabla 8-1 se indican las temperaturas de fusión y Ebu--

147 n u-

acti-escatoroxide laa in-io más rcuermera-

cante

llición (puntos fijos) para algunas sustancias; estas temperaturas se pueden utilizar para graduar cualquier clase de temómetro.

Sustancia	Designación	Temperatura °C °K	
Oxígeno	Punto de embullición normal	-182.97	90.18
Aqua	punto triple	0.01	273.16
Aqua	punto de embullición normal	100.00	373.15
Azufre	punto de embullición normal	444.60	717.75
Plata	punto de fusión normal	960.80	1233.95
Oro	punto de fusión normal	1063.00	1336.15

TABLA 8-1

En 1927 se adopto una escala Internacional de Temperaturas Prácticas ---[IPTS] para formular una escala que puede usarse fácilmente para fines prácti-cos, como la calibración de instrumentos industriales o científicos. Esta escala conciste en una serie de recetas para prácticamente obtener la mejor aproximación posible a la escala Kelvin. Se escoge el conjunto de puntos fijos de laTabla 8-1 y se específica una serie de instrumentos que se deben usar para interpolar entre estos puntos fijos y para extrapolar mas allá del punto fijo más
alto. Además se tienen fórmulas que corrigen las temperaturas básicas de acuerdo con la lectura barométrica. La IPTS se aleja de la escala Kelvin en temperaturas comprendidas entre los puntos fijos, pero la diferencia es insignificante
La IPTS es el patrón legal en casí todos los países.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

THE RESIDENCE OF THE PARTY OF T

the femocrafiche acut cultived feeld is elicipal anthonia de alle exten in image entre in image.

the guidant follows to be ted to the ted to ted and the temperatures to have been the

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1.- Si la temperatura del gas ideal en el punto de ebullición del agua esde 373.15°K, ¿Cuál es el valor límite de la relación de las presiones de un gas a la temperatura de ebullición del agua y en el punto triple del agua cuando se conserva el gas a volumen constante?

R: 373.15/273.16

2.- Es una observación cotidiana que los cuerpos calientes y los cuerpos - frios se enfrian o se calientan hasta alcanzar la temperatura del medio ambiente. Si la diferencia de temperatura ΔT entre un objeto y su medio ambiente no - es demasiado grande, la rápidez de enfriamiento o calentamiento es aproximada-mente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio -- ambiente; esto es,

 $\frac{d\Delta T}{dt} = K\Delta T$

siendo K una constante. El signo menos es debido a que ΔT disminuye con el tiem po si ΔT es positiva y viceversa. La ecuación anterior se conoce como ley del = enfriamiento de Newton. (a) iDe que factores depende K? iCuáles son sus dimensiones? (b) Si en algún instante la diferencia de temperatura es ΔT_0 , demostrar que en un tiempo t después, su valor sera:

AT = ATo e-Kt

R: Materiales, forma, temperatura absoluta, corrientes de aire. Las dimensiones son-

3.- ¿A qué temperatura coinciden las escalas Fahrenheit y Celsius? ¿A quétemperatura las escalas Fahrenheit y Kelvin?

R: -40°F = - 40°C; 575°F = 575°K.

4.- La temperatura a que se funde cierto metal es de 330°C y la temperatura a que hierve es de 1170°C. Expresar estas temperaturas en la escala Fahren-heit.

R: 626°F; 2138°F.

5.- La temperatura normal del cuerpo humano es de 98.6°F. ¿A qué temperatura equivale en la escala Celsius?

R: 37°C.

en la escala Fahrenheit?

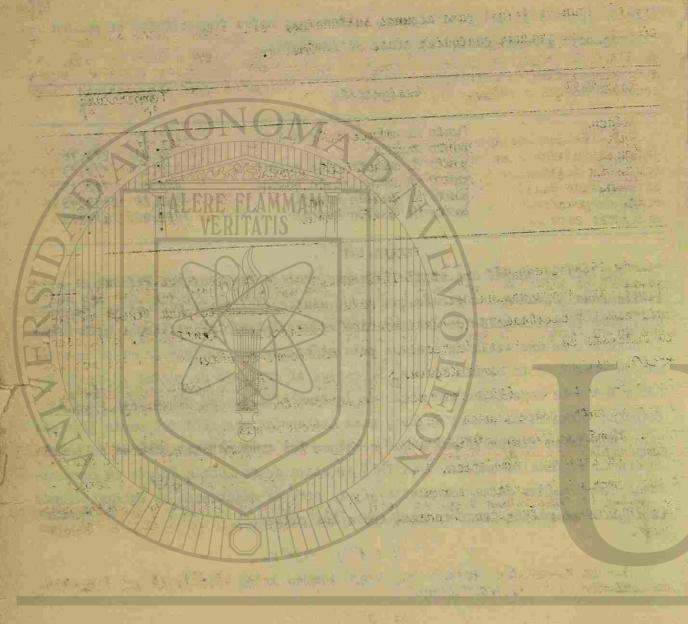
R: -40° C. iQué valor tiene esta temperatura - R: -40° F.

7.- El hielo seco (dióxido de carbono sólido) vaporiza a la temperatura de -112°F. ¿Qué temperatura corresponde en la escala Celsius?

R: -80°C.

8.- El punto de fusión de la plata ocurre a la temperatura de 960.5°C. Elpunto de fusión del oro a la de 1063°C. El punto de ebullición del azufre es --444.6°C. Expresar estas temperaturas en grados Fahrenheit.

R: 1760.9°F; 1945.4°F; 832.28°F.



UNIVERSIDAD AUTÓNO

DIRECCIÓN GENERA

