CAPITULO I

CINEMATICA DE ROTACION

1.- Introducción. Movimiento de Rotación.

En este capítulo se hará un estudio de los cuerpos o partículas que se mueven en una trayectoria circular. Se dará principio a esta primera parte considerando el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo; esto es, movimiento de rotación sin traslación.

El movimiento de rotación se produce cuando actúa una fuerza sobre un cuerpo en ángulo recto con su movimiento, como nunca existe una componente de la fuerza en dirección del movimiento, no habrá aceleración a lo largo de la trayectoria, cambiando la dirección del movimiento mientras permanece constante la celeridad del cuerpo. si la magnitud de la fuerza es constante, la dirección de la trayectoria cambia en igual proporción en cada intervalo de tiempo y la trayectoria es circular.

La fuerza y la aceleración del cuerpo, están dirigidas hacia el centro del círculo, mientras que la velocidad es tangente al círculo en cada punto

Para determinar la posición de un cuerpo que se desplaza a lo largo del arco de un círculo, es necesario conocer el ángulo que se forma entre el centro del círculo al cuerpo y el radio fijo del círculo. Como se muestra en la figura 1-1.

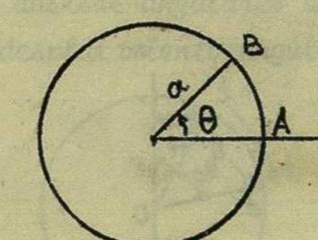

FIGURA 1-1

Para expresar θ se utilizaran tres unidades: grados, revoluciones y radianes.

Como las dos primeras unidades son mas conocidas se dará una explicación de los radianes. Un ángulo expresado en radianes es la longitud del arco girado dividido entre el radio del arco.

Para que θ esté expresada en radianes, basta hacer la relación de; $\frac{AB}{a}$, a partir de la figura 1-1.

Observando con esto que el radian, no es mas que la relación entre dos longitudes y no una unidad propiamente dicha.

Así que las mediciones angulares por los términos θ en radianes, ó θ en grados, son con el objeto de expresar la forma en que se mide el ángulo, sin es perar que estas definiciones se comporten como unidades en las ecuaciones.

Cuando θ es grande hasta llenar el círculo o sea 360°, gira un arco igual - a la circunferencia $2\pi a$. De donde 360° equivale a $\frac{2\pi a}{a}$, o bien 2π radianes.

Además sabiendo que una revolución es igual a 360°, se encuentra que también una revolución es igual a 2π radianes.

2.- Cinemática de la Rotación. Las variables.

La cinemática de la rotación, es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de un cuerpo que se desplaza atravez de un círculo, sin tomar en cuenta las causas que provocan este movimiento.

VELOCIDAD ANGULAR.-

Las dimensiones de la velocidad angular, es la relación de los desplazamiento angular y el tiempo; donde $d\theta$ deverá estar en radianes, dt en segundos y w en rad/seg. Otra forma común de unidad para la velocidad angular son rev/min. De donde:

$$1\,\frac{\text{rev.}}{\text{min.}} = 1\,\frac{\text{rev.}}{\text{MIN.}} \times 2\pi\,\frac{\text{rad.}}{\text{rev.}} \times \frac{1}{60}\,\frac{1}{\text{seg./min.}} = 0.105\,\frac{\text{rad.}}{\text{seg.}}$$

En la figura 1-2, se considerará un cuerpo que gira alrededor de un eje -- que pasa por 0, perpendicular al plano del dibujo. 0a es la posición de cierto radio del cuerpo en el instante t_o, y 0b la posición del mismo radio en el instante t; siendo θ_o y θ, las absisas angulares del radio medidas respecto a la - vertical de referencia. El desplazamiento angular del radio es $\Delta\theta$, o bien $\theta - \theta_o$

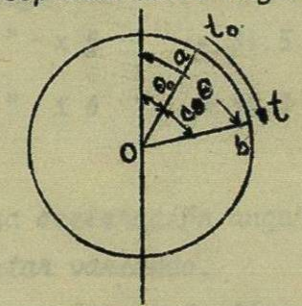

FIGURA-1-2

La velocidad angular media $\overline{w}$, se define como:

$$\text{velocidad angular media} = \frac{\text{desplazamiento angular}}{\text{tiempo transcurrido.}}$$

$$\overline{w} = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{de donde:}$$

la derivada del desplazamiento angular respecto al tiempo, dará la velocidad angular **instantánea, esto** es:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{Ecuación 1-1}$$

Cuando un cuerpo gira con velocidad angular constante, su velocidad angular instantánea es igual a su velocidad angular media, cualquiera que sea el intervalo de tiempo. Siendo la velocidad angular constante se puede escribir:

$$w = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \qquad \text{por lo tanto:}$$

$$\theta - \theta_0 = w\,(t - t_0)$$

considerando que t_0 y θ_0 son infinitamente pequeños, se obtiene:

$$\theta = wt \qquad \text{Ecuación 1-1a.}$$

Ejemplo 1-1.

Se realizan las siguientes lecturas en el tacómetro de un automóvil en los intervalos de tiempo siguientes.

tiempo (seg).	0	2	5	6
velocidad angular (rpm)	20	40	60	80.

a).- Cálculese la velocidad angular en $\frac{rad}{seg.}$ para cada lectura. Así como:

b).- Los desplazamientos angulares para cada lectura.

a) $20 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad./seg.}{rev/min.} = 2.1 \frac{rad.}{seg.}$

40 " $\times 0.105$ " $= 4.2$ "

60 " $\times 0.105$ " $= 6.3$ "

80 " $\times 0.105$ " $= 8.4$ "

b) $\theta_1 = wt = o.$ No hay desplazamiento en la primer lectura.

$\theta_2 = 4.2 \frac{rad}{seg} \times 2$ seg. $= 8.4$ rad.

$\theta_3 = 6.3$ " $\times 5$ " $= 31.5$ "

$\theta_4 = 8.4$ " $\times 6$ " $= 50.4$ "

ACELERACION ANGULAR.-

Para que un cuerpo tenga oceleración angular, la velocidad angular del cuerpo en rotación deberá estar variando.

Siendo w_0 su velocidad angular instantánea en el instante t_0, y w su velocidad angular en el instante t, se obtiene la aceleración angular media $\bar{\alpha}$. La cual se define como la razpon de la variación de la velocidad angular al tiempo transcurrido:

$$\text{aceleración angular media} = \frac{\text{variación de la velocidad angular}}{\text{tiempo transcurrido.}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{w - w_0}{t - t_0} = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Sabiendo que la velocidad angular w esta en rad/seg. y el tiempo en segundos, se obtiene que la aceleración angular estará en $\frac{rad.}{seg^2}$.

La aceleración angular instantánea α es la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo esto es:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}. \qquad \text{Ecuación 1-2.}$$

sabiendo que $w = \frac{d\theta}{dt}$ se puede escribir.

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Ejemplo 1-2.

Un motor que gira a 1800 $\frac{rev}{min}$ sigue haciéndolo libremente hasta el reposo en forma uniforme en un tiempo de 20 seg. Encontrar su desaceleración angular $\frac{rad}{seg^2}$ y $\frac{rev.}{seg^2}$.

$$1800\ \frac{rev}{min} \times 0.105\ \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 189\ \frac{rad}{seg.} \qquad 1800\ \frac{rev}{min} \times \frac{1}{60}\ \frac{1}{\frac{seg}{min}} = 30\ \frac{rev}{seg.}$$

$$\alpha = \frac{w}{t} = \frac{189\ rad/seg.}{20\ seg.} = 9.45\ \frac{rad}{seg^2}. \qquad \alpha = \frac{w}{t} = \frac{30\ \frac{rev}{seg}}{20\ seg} = 1.5\ \frac{rev}{seg^2}.$$

Cantidades tangenciales.

VELOCIDAD TANGENCIAL.-

A medida que una partícula viaja a una velocidad uniforme V, no solo describe un ángulo θ, sino que también cubre una distancia ds. Como se ilustra en la figura 1-3.

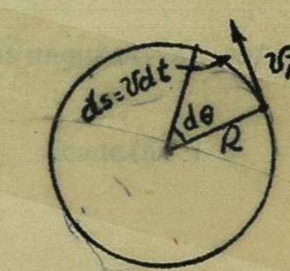

FIGURA 1-3

La distancia que se desplaza la partícula en el tiempo dt, está dada por la ecuación $ds = V\,dt$.

Y el ángulo átravez del cual la partícula se mueve en este tiempo es:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \qquad \text{de donde:}$$

$$ds = R\,d\theta. \qquad \text{Ecuación 1-3}$$

Si la partícula se mueve sobre el arco del círculo tiene una velocidad lineal V_T, que siempre es tangencial al círculo. Está velocidad recibe el nombre de velocidad tangencial de la partícula.

Para encontrarla unicamente se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ecyación 1-3. Recordando que R es constante.

$$\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{de donde:}$$

$$V_T = R\,w \qquad \text{Ecuación 1-4}$$

Aquí también la medida en radianes debe usarse para w.

DE la ecuación 1-4, se encuentra que entre mas lejana este una partícula del eje de rotación mayor será la línea de velocidad V_T. Aunque todas las partí culas de un cuerpo en rotación tienen la misma velocidad angular (excepto las - que estan sobre el eje).

Ejemlo 1-3.

Un fonógrafo con un disco de 18cm. de diámetro, rota a 45 $\frac{rev.}{min.}$ a) Encontrar la línea de velocidad de un punto que se encuentra a 4 cm. del eje y b) -- Uno que se encuentra sobre la orilla del disco.

$$45 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg}{rev/min} = 4.725 \frac{rad}{seg.}$$

a) $V_T = R\,w = 4 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 18.9 \frac{cm}{seg.}$

b) $V_T = 9 \text{ cm} \times 4.725 \frac{rad}{seg} = 42.525 \frac{cm}{seg.}$

ACELERACION TANGENCIAL.

Para encontrar la aceleración tangencial a_T de la partícula de la figura - 1-3. Se toma la derivada respecto al tiempo de la ecuación 1-4, manteniendo R - constante. Esto da:

$$\frac{dV_T}{dt} = R\,\frac{dw}{dt}$$

Siendo $\frac{dV_T}{dt}$ la aceleración tangencial y $\frac{dw}{dt}$ la aceleración angular, se obtiene:

$$\boxed{a_T = R\alpha} \qquad \text{Ecuación 1-5}$$

Debiendo estar α en $\frac{rad.}{seg^2}$.

Ejemplo 1-4.

Suponiendo que en el motor del ejemplo 1-2, se cambia su velocidad de 1800 a 1200 $\frac{rev.}{min.}$ por medio de un reostáto y se deja girar libremente hasta el reposo en un tiempo de 15 seg.

a) Determinar la aceleración tangencial para un punto que se encuentra sobre la orilla del rotor (parte móvil del motor), sabiendo que el diámetro de este es 15 cm.

$$1200 \frac{rev}{min} \times 0.105 \frac{rad/seg.}{rev/min.} = 126 \frac{rad.}{seg.}$$

$$\alpha = \frac{w}{t} = \frac{126 \text{ rad/seg.}}{15 \text{ seg.}} = 8.4 \frac{rad.}{seg^2.}$$

$$a_T = R\alpha = 7.5\text{cm} \times 8.4 \frac{rad}{seg^2.} = 63 \frac{cm}{seg^2.}$$

ACELERACION RADIAL.

Para encontrar la aceleración radial de una partícula que se desplaza sobre un círculo, es conveniente analizar el origen de coordenadas X y Y, en el -