centro del círculo como lo muestra la figura 1-4.

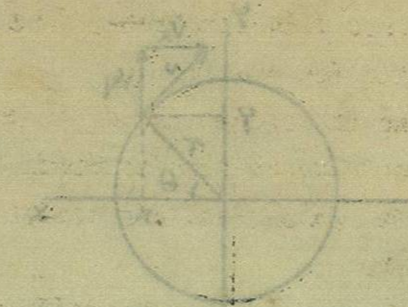


FIGURA 1-4

Obteniendo que las coordenadas de la partícula son:

$$X = r\,Cos\,\theta \qquad Y = r\,Sen\,\theta$$

donde θ es función del tiempo y r permanece constante.

Suponiendo que la partícula se mueve alrededor del círculo con una velocidad angular constante ω, y haciendo uso de la ecuación 1-4a que dice θ = ωt, ya que para este caso [illegible].

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de X y Y, se encuentra que:

$$X = r\,Cos\,\omega t \qquad Y = r\,Sen\,\omega t \qquad \text{Ecuación 1-6}$$

Sabiendo que la componente en el eje X de la velocidad de la partícula es $V_x = \frac{dx}{dt}$ y en el eje Y es $V_y = \frac{dy}{dt}$ y derivando la ecuación 1-6, con respecto al tiempo, se encuentra que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(r\,Cos\,\omega t)}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\,Sen\,\omega t)}{dt}$$

$$V_x = -r\omega\,Sen\,\omega t. \qquad V_y = r\omega\,Cos\,\omega t. \qquad \text{Ecuación 1-7}$$

En general claro está ω no sería constante. Sin embargo es conveniente restringirnos al caso en que la partícula se desplaza en torno del círculo a velocidad constante, de tal manera que $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$.

Obsérvese que tanto V_x como V_y son función del tiempo, por lo tanto, en virtud de que las velocidades cambian con el tiempo la partícula debe estar acelerando aunque su rapidez en el círculo sea constante.

Para encontrar las componentes X y Y de la aceleración, se hace uso del hecho que:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

y derivando con respecto al tiempo la ecuación 1-7, se encuentra que:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{-r\omega(Sen\,\omega t)}{dt} \qquad \frac{dV_y}{dt} = \frac{r\omega(Cos\,\omega t)}{dt}$$

$$a_x = -r\omega^2 Cos\,\omega t. \qquad a_y = -r\omega^2 Sen\,\omega t. \qquad \text{Ecuación 1-8.}$$

Las componentes de aceleración son proporcionales al negativo de los desp-

lazamientos, esto significa; que el vector de desplazamiento que es el radio -- vector del centro del círculo a la partícula, debe ser proporcional al vector - de aceleración pero de dirección opuesta.

De donde se deduce que la aceleración de la partícula en el círculo es un-vector que apunta radialmente hacia adentro desde la partícula hacia el centro-del círculo. Por esta razón, la aceleración recibe el nombre de aceleración radial y se representa por a_R.

Conociendo las componentes de la aceleración y sabiendo que la resultante-R de dos vectores componentes Rx y Ry esta dada por:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \qquad \text{se obtiene que:}$$

$$a_R^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$a_R^2 = r^2\omega^4 Cos^2(\omega t) + r^2\omega^4 Sen^2(\omega t)$$

$$a_R^2 = r^2\omega^4(Cos^2\omega t + Sen^2\omega t).$$

Sabiendo que $Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1$ se encuentra que:

$$a_R = r\omega^2 \qquad \text{Ecuación 1-9.}$$

Aunque la partícula se desplaza en torno del círculo con velocidad constante, su velocidad cambia de dirección. La razón de cambio de este vector de velocidad es la aceleración radial de la partícula.

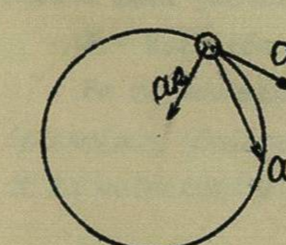
La partícula esta acelerada a lo largo de un radio hacia el centro del círculo.

Ejemplo 1-5.

Calcular la magnitud de la aceleración total de una partícula moviéndose - en un círculo de radio 0.4 mts. En el instante que esta partícula tiene una velocidad angular de $2\,\frac{rad}{seg}$ y una aceleración angular de $5\,\frac{rad}{seg^2}$.

$$a_T = \alpha r = 5\,\frac{rad}{seg^2} \times 0.4\,mt = 2\,\frac{mt}{seg^2}.$$

$$a_R = \omega^2 r = \left(2\,\frac{rad}{seg}\right)^2 \times 0.4mt = 1.6\,\frac{Mt}{seg^2}.$$



$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

$$a = \sqrt{(2^2 + 1.6^2)\,\frac{mt^2}{seg^4}}$$

$$a = 2.6\,\frac{mt}{seg^2}.$$

FUERZAS CENTRÍPETA Y CENTRÍFUGA.

Todos alguna vez hemos experimentado estas fuerzas al atar una piedra o -- un peso a una cuerda y dar vueltas haciendo que la piedra describa una circunferencia. De esta manera al dar vueltas notamos que la mano esta sometida a una - fuerza hacia afuera, e inversamente la mano tiene que ejercer una fuerza hacia-adentro sobre la piedra.

Para tener una mejor idea suponer un punto O, clavado en una superficie horizontal sin rozamiento como se muestra en la figura 1-5. En donde un pequeño cuerpo de masa m. esta unido a la punta por intermedio de una cuerda de radio R, y se pone en rotación alrededor de ella con una velocidad angular w, una velocidad tangencial y una aceleración normal $a_R = \frac{V_T^2}{R} = w^2R_o$

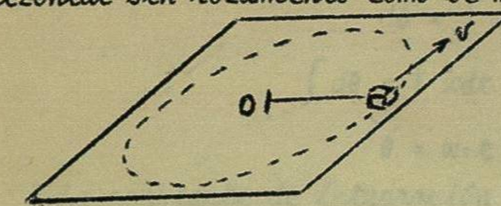


FIGURA 1-5

A partir de la segunda Ley de Newton es necesario ejercer una fuerza sobre el cuerpo para producir esta aceleración normal y la dirección de esta fuerza tiene que ser la misma que la dirección de la aceleración, es decir, según el radio y hacia el centro de la circunferencia. Por esto recibe el nombre de Fuerza Centralo Centrípeta.

Sabiendo que $F = ma$ y $a = V_T^2/R = w^2R_o$ entonces la fuerza centrípeta será:

$$F = \frac{m\,V_T^2}{R} = mw^2R_o \qquad \text{Ecuación 1-10}$$

Esta fuerza esta dirigida hacia el centro y la produce la cuerda, lo cual esta en tensión y por lo tanto ejerce sobre la punta del centro una fuerza hacia afuera, igual y opuesta a la centrípeta, llamada fuerza Centrífuga.

Un diagrama de estas fuerzas se puede observar en la figura 1-6, donde la fuerza F es la centrípeta y la fuerza F^1 es la centrífuga.

Las fuerzas centripeta y cebtrífuga como se puede observar son una pareja de fuerzas de acción y reacción siendo la primera una fuerza resultante hacia adentro ejercida sobre el cuerpo que gira, y la segunda la reacción a esta fuerza.

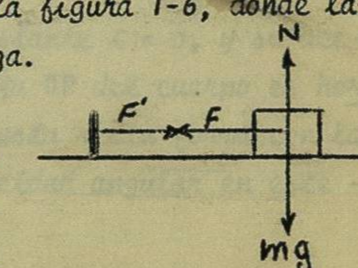


FIGURA 1-6

3.- Rotación con Aceleración Angular Constante.

En el movimiento de rotación con aceleración angular constante, se puede determinar fácilmente las ecuaciones para este caso, integrando las expresiones de la velocidad y las abscisas angulares, teniendo que:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \text{constante.}$$

$$dw = \alpha\, dt$$

$$\int dw = \int \alpha\, dt$$

$$w = \alpha t + c_1$$

Si w_o es la velocidad angular para $t = o$, la constante de integración es $c_1 = w_o$ y

$$w = w_o + \alpha t \qquad \text{Ecuación 1-11}$$

alrededor sobre la piedra.

Para tener una mejor idea supone un punto 0, clavado en una superficie horizontal sin rozamiento como se muestra en la figura 1-5. En donde un pequeño cuerpo de masa m, está unido a la punta extremo de una cuerda de radio R, y se pone en rotación alrededor de éste con una velocidad angular w, una velocidad tangencial y una aceleración normal $a_n = v^2/R = w^2 R$.

FIGURA 1-5

A partir de la segunda Ley de Newton es necesario ejercer una fuerza sobre el cuerpo para producir esta aceleración normal y la dirección de esta fuerza tiene que ser la misma que la dirección de la aceleración, es decir, según el radio y hacia el centro de la circunferencia. Por esto recibe el nombre de Fuerza Centrípeta.

Sabiendo que $F = ma$ y $a_n = v^2/R = w^2 R$, entonces la fuerza centrípeta será:

$$F = \frac{m v^2}{R} = m w^2 R \qquad \text{Ecuación 1-10}$$

Esta fuerza está dirigida hacia el centro y la produce la cuerda, la cual está en tensión y por lo tanto ejerce sobre la punta del centro una fuerza hacia afuera, igual y opuesta a la centrípeta, llamada fuerza Centrífuga.

Un diagrama de estas fuerzas se puede observar en la figura 1-6, donde la fuerza F es la centrípeta y la fuerza F' es la centrífuga.

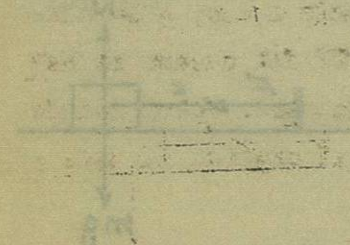


FIGURA 1-6

Las fuerzas centrípeta y centrífuga como se puede observar son una pareja de fuerzas de acción y reacción siendo la primera una fuerza resultante hacia adentro ejercida sobre el cuerpo que gira, y la segunda la reacción a esta fuerza.

3.- Rotación con Aceleración Angular Constante.

En el movimiento de rotación con aceleración angular constante, se puede determinar fácilmente las ecuaciones para este caso, integrando las expresiones de la velocidad y las aceleraciones angulares, teniendo que:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \text{constante.}$$

$$dw = \alpha\, dt$$

$$\int dw = \int \alpha\, dt$$

$$w = \alpha t + c_1$$

Si w_0 es la velocidad angular para $t = 0$, la constante de integración es $c_1 = w_0$, y:

$$w = w_0 + \alpha t \qquad \text{Ecuación 1-11}$$

Puesto que, $w = d\theta/dt$:

$$d\theta = w dt$$

sustituyendo la ecuación 1-11, se tiene que:

$$d\theta = (w_0 + \alpha t)\, dt$$

$$\int d\theta = \int w_0 dt + \int \alpha\, t dt$$

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + c_2$$

La constante de integración c_2 es el valor de θ para $t = 0$, o sea θ_0, si $\theta_0 = 0$, entonces,

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \text{Ecuación 1-12}$$

Escribiendo la aceleración angular en la forma, $\alpha = w\frac{dw}{d\theta}$ se obtiene que:

$$\int \alpha\, d\theta = \int w dw$$

$$\alpha\,\theta = \frac{1}{2}w^2 + c_3.$$

Si el ángulo θ es cero para $t = 0$, y si la velocidad angular inicial es w_0, se tiene que $c_3 = -\frac{1}{2}w_0^2$, por lo tanto:

$$\alpha\,\theta = \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}w_0^2$$

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha\,\theta \qquad \text{Ecuación 1-13}$$

Ejemplo 1-6.

La velocidad angular de un cuerpo es $6\,\frac{rad}{seg}$ en el instante $t = 0$, y su aceleración angular es constante e igual a $3\,\frac{rad}{seg^2}$. Una recta OP del cuerpo es horizontal en el instante $t = 0$, a) ¿Cuál es el ángulo que esta recta forma con la horizontal en el instante $t = 3$ seg? b) ¿Cuál es la velocidad angular en este instante?

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 6\frac{rad}{seg} \times 3\ seg + \frac{1}{2} \times 3\,\frac{rad}{seg^2} \times (3\ seg)$$

$$\theta = 31.5 \text{ radianes.}$$

$$\theta = 5 \text{ revoluciones.}$$

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$= 6\,\frac{rad}{seg} + 3\,\frac{rad}{seg^2} \times 3\ seg.$$

$$w = 15\,\frac{rad}{seg.}$$

$$w^2 = w_0^2 + 2\alpha\,\theta$$

$$= \left(6\,\frac{rad}{seg}\right)^2 + 2\left(3\,\frac{rad}{seg^2}\right) 31.5\ rad.$$

$$= 225 \frac{rad^2}{seg^2}$$

$$w = 15 \frac{rad}{seg.}$$

Cuando la aceleración angular es constante, la velocidad angular media se puede relacionr con las velocidades inicial y final, por medio de:

$$\overline{w} = \frac{w + w_o}{2} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\theta = \overline{w}t$$

4.-Cantidades rotacionales como vectores.

Como primer punto, se dirá que los ángulos de rotación no pueden ser vectores. Sin embargo, como un vector es una cantidad que tiene magnitud y dirección y obedece las leyes de la suma vectorial, si se prefiere, se puede dar dirección a las cantidades angulares y por lo tanto hacerlas vectores.

El vector que representa una velocidad o aceleración angular se dibuja a lo largo del eje de rotación; su longitud, representa la magnitud de la velocidad o aceleración angular y esta hecha con cierta escala elegida. En la figura 1-7, imaginese que el eje sea un tornillo de rosca derecha, el sentido del vector es el correspondiente al avance del tornillo cuando se le hace girar en el sentido de la velocidad o aceleración angular.

En la figura 1-8, se muestran también las direcciones de la velocidad o aceleración angular, de dependiendo el sentido de la rotación.

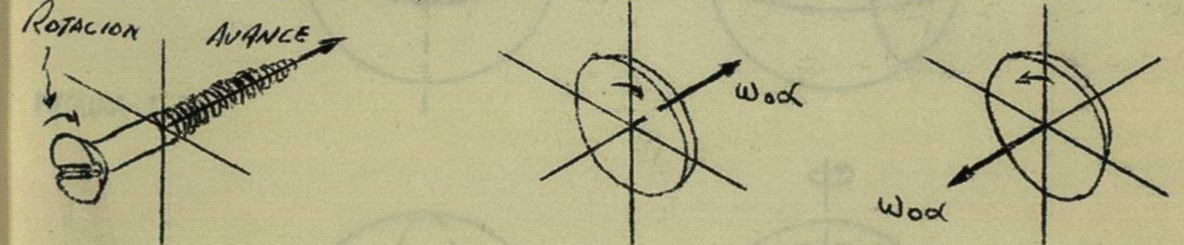


FIGURA 1-7 figura 1-8

La suma de dos vectores que representan dos rotaciones sucesivas θ_1 y θ_2, deben dar el mismo resultado, independientemente del orden en que se tomen, es; $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$.

Esta ley no se sigue en caso de rotaciones finitas, excepto en casos especiales. Este hecho se demuestra fácilmente en la figura 1-9, en que se consideran dos rotaciones sucesivas a 90° del bloque, siendo evidente que el orden enque se llevan a cabo las rotaciones es importante, pues los resultados son diferentes en los dos casos. Por lo tanto, $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. Sin embargo, si se restringe a rotaciones pequeñas, el orden en que se tomen las rotaciones no tiene importancia, como se muestra en la figura 1-10, en donde al efectuar dos rotaciones sucesivas los resultados son los mismos para ambos casos.

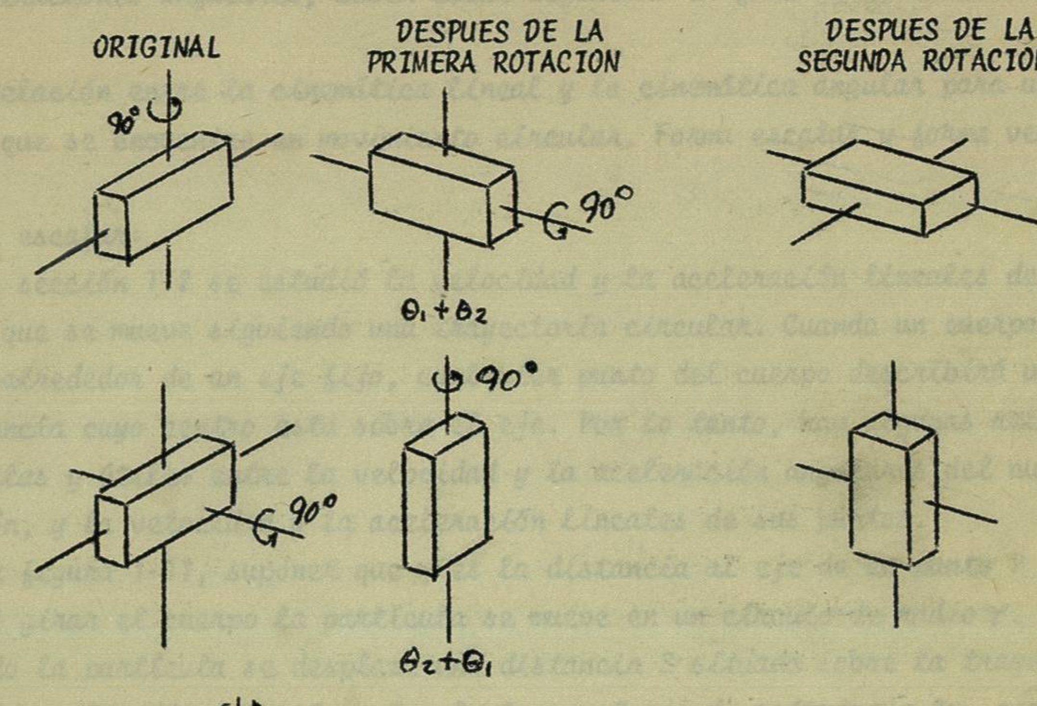


FIGURA 1-9

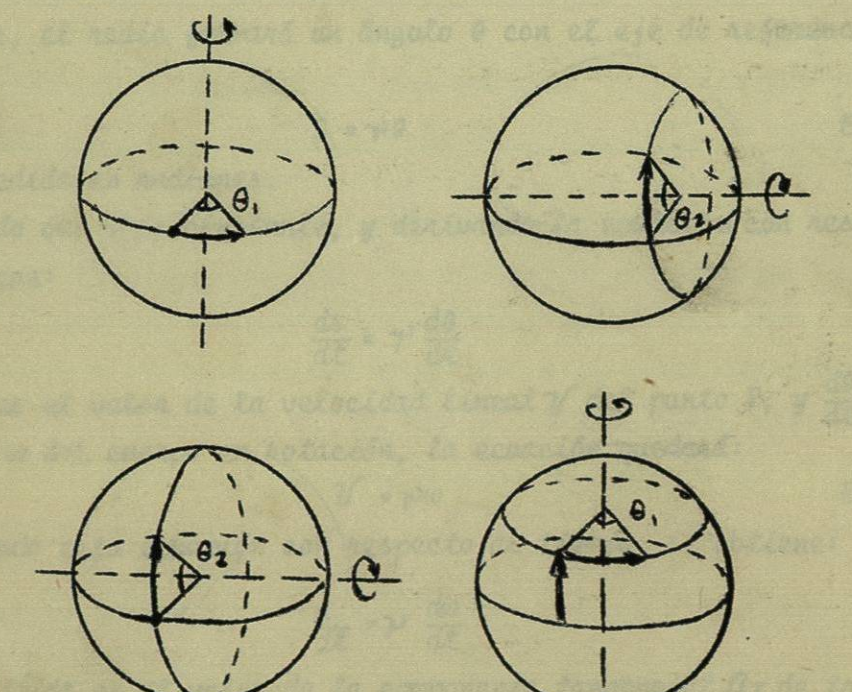


FIGURA 1-10

En este caso de rotaciones pequeñas, así como para rotaciones finitas, es válida y útil la definición de vector ya que para el primer caso obedece las leyes de la suma vectorial, mientras que en el segundo caso todos los vectores son perpendiculares a un plano dado, es decir, tienen magnitud y dirección.

Por lo tanto, se restrigiran las rotaciones vectoriales a ángulos infinitesimales, a menos que las rotaciones se encuentren todas en el mismo plano.