En conclución, se obtiene que para considerar como vectores las velocidades y aceleraciones angulares, deben estar definidas en función de rotaciones pequeñas.

5.- Relación entre la cinemática lineal y la cinemática angular para una partícula que se encuentre en movimiento circular. Forma escalar y forma vectorial.

Forma escalar:

En la sección 1-2 se estudió la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria circular. Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto del cuerpo describirá una circunferencia cuyo centro esta sobre el eje. Por lo tanto, hay algunas relaciones sencillas y útiles entre la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo en rotación, y la velocidad y la aceleración lineales de sus puntos.

En la figura 1-11, suponer que r es la distancia al eje de un punto P del cuerpo, al girar el cuerpo la partícula se mueve en un círculo de radio r.

Cuando la partícula se desplaza una distancia S situada sobre la trayectoria circular, el radio formará un ángulo θ con el eje de referencia 0x, encontrando que:

$$S = r\theta \qquad \text{Ecuación 1-14}$$

si θ esta medida en radianes.

Sabiendo que r es constante, y derivando la ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Si $\frac{ds}{dt}$ es el valor de la velocidad lineal V del punto P, y $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular w del cuerpo en rotación, la ecuación quedará:

$$V = rw \qquad \text{Ecuación 1-15}$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} = r\frac{dw}{dt}$$

Donde dV/dt es el valor de la componente tangencial a_T de la aceleración del punto P, y $\frac{dw}{dt}$ es la aceleración angular α del cuerpo que gira, de modo que:

$$a_T = r\alpha \qquad \text{Ecuación 1-16}$$

La componente normal de la aceleración en el punto P, se expresa como: ---

$$a_R = \frac{V^2}{r} = w^2 r.$$

En la figura 1-12, se representan las componentes de la aceleración de un-

punto P cualquiera del cuerpo en rotación.

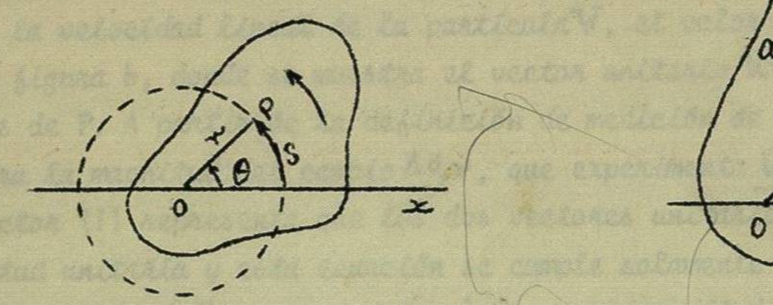

FIGURA 1-11

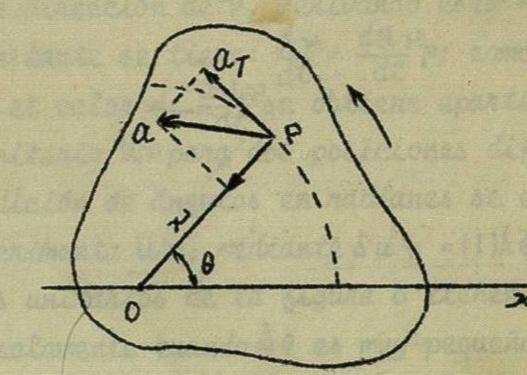

FIGURA 1-12

Conclusión:

La descripción angular ofrece una ventaja clara sobre la descripción lineal cuando hay que considerar varios puntos del mismo cuerpo en rotación.

Ya que diferentes puntos del mismo cuerpo en rotación no tienen desplazamiento, velocidad, o aceleración lineal, y en cambio, todos los puntos de un cuerpo rígido que gira en torno de un eje fijo tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración angulares en un instante cualquiera.

Forma vectorial:

Para encontrar la relación que hay entre las variables lineales y angulares en su forma vectorial se hace uso de la figura 1-13, en donde se muestra una partícula P que gira en forma de un eje fijo que pasa por 0, en los tiempos t y $t+\Delta t$. En la figura 1-13a, la partícula gira un ángulo $\Delta\theta$ en el tiempo Δt, mostrándose los vectores unitarios en coordenadas polares para cada punto.

En los cambios que presentan los vectores unitarios u_r y u_θ en el tiempo Δt, se nota que Δu_r tiene la misma dirección de u_θ cuando $\Delta\theta$ tiende a cero y que Δu_θ tiene la dirección de u_r cuando $\Delta\theta$ tiende a cero, como se muestra en las figuras 1-13b y c.

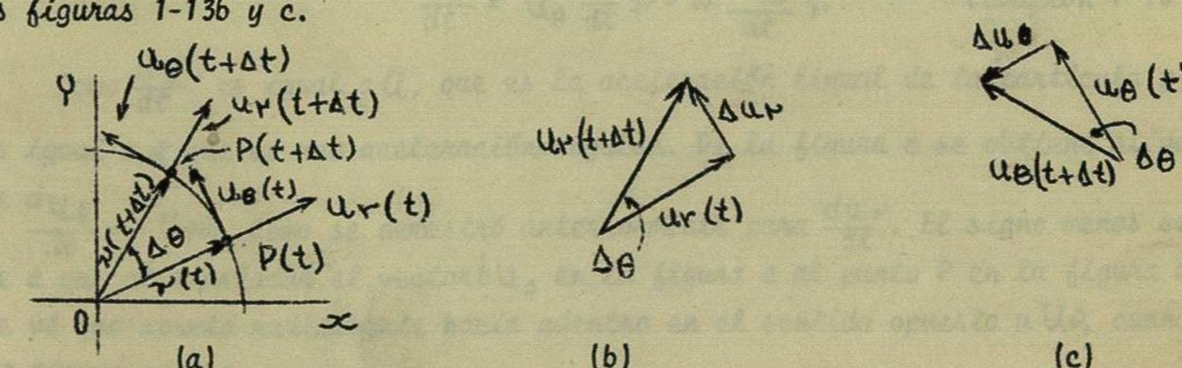

FIGURA 1-13

Sabiendo que el radio es constante, se obtiene la expresión:

$$\mathbf{r} = u_r r$$

donde U_r es un vector unitario que esta en la dirección de r. Derivando esta -- ecuación con respecto al tiempo y siendo r constante se tiene: $\frac{dr}{dt} = \frac{dU_r}{dt} r$; como- $\frac{dr}{dt}$ es la velocidad lineal de la partícula V, el valor de $\frac{dU_r}{dt}$ se obtiene apartir de la figura b, donde se muestra el vector unitario U_r para dos posiciones dife rentes de P. A partir de la definición de medición de ángulos en radianes se en cuentra la magnitud del cambio ΔU_r, que experimenta U_r, mediante $\Delta u_r = (1)\Delta\theta$. El factor (1) representa que los dos vectores unitarios de la figura b tienen - longitud unitaria y esta ecuación se cumple solamente cuando $\Delta\theta$ es muy pequeña.

El cambio de U_r es un vector, ΔU_r, cuya magnitud está dad por la ecuación- anterior, su dirección se dá por el vector unitario U_θ siempre y cuando $\Delta\theta$ sea muy pequeña. Esto es, si ΔU_r en la figura b se traslada al punto P de la figu ra a se vé que apunta en la dirección de U_θ, cuando $\Delta\theta \to 0$.

Encontrando que:

$$\Delta U_r \cong U_r \Delta\theta$$

Dividiendo entre Δt y haciendo que Δt tienda a cero, se obtiene:

$$\frac{dU_r}{dt} = U_\theta \frac{d\theta}{dt} = U_\theta w$$

sustituyendo este valor en la ecuación $\frac{dr}{dt} = \frac{dU_r}{dt} r$, se encuentra que:

$$V = U_\theta w r \qquad \text{Ecuación 1-17}$$

Encontrando que la relación escalar correspondiente a esta ecuación es:

$$V = w r \qquad \text{Ecuación 1-17a}$$

Para encontrar la relación entre las aceleraciones angular y lineal, se de riva la ecuación 1-17 con respecto al tiempo, recordando que r es constante -- aún cuando varíen U_θ y w; se encuentra:

$$\frac{dV}{dt} = U_\theta \frac{dw}{dt} r + w \frac{dU_\theta}{dt} r \qquad \text{Ecuación 1-18}$$

Como $\frac{dV}{dt}$ es igual a a, que es la aceleración lineal de la partícula y $\frac{dw}{dt}$ es igual a α que es una aceleración angular. De la figura c se obtiene el valor de $\frac{dU_\theta}{dt} = -U_r w$. Como se demostró anteriormente para $\frac{dU_r}{dt}$. El signo menos se de be a que al trasladar el vector ΔU_θ en la figura c al punto P en la figura a, - se vé que apunta radialmente hacia adentro en el sentido opuesto a U_r, cuando - Δt tiende a cero.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1-18, se encuentra que:

$$a = U_\theta \alpha r - U_r w^2 r. \qquad \text{Ecuación 1-19}$$

Pero sabiendo que a tiene una componente radial a_R y una componente tangencial a_T, la relación escalar correspondiente a esta ecuación será:

$$a_T = \alpha r \qquad y \qquad a_R = w^2 r$$

Las ecuaciones 1-17 y 1-19 son relaciones entre las variables cinmáticas - lineales en forma vectorial y las angulares en forma escalr.

Para obtener relaciones en las cuales cada grupo de variables queden expresadas en forma vectorial se hará a continuación y quedará limitado para los casos en que el eje de rotación este fijo.

En la figura 1-14, se muestran las direcciones de los vectores ---------- $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, a_T, a_R, w y α para una partícula que gira en un círculo en torno del eje $\mathbf{Z}$. Las cantidades angulares se encuentran sobre el eje de rotación apuntando en la dirección del eje.

Se demostrará que las relaciones que buscamos son:

$$\mathbf{V} = w \times r \qquad y \qquad a = a_T + a_R \qquad \text{Ecuación 1-20}$$

en la cual,

$$a_T = \alpha \times r \qquad y \qquad a_R = w \times \mathbf{V} \qquad \text{Ecuación 1-20a}$$

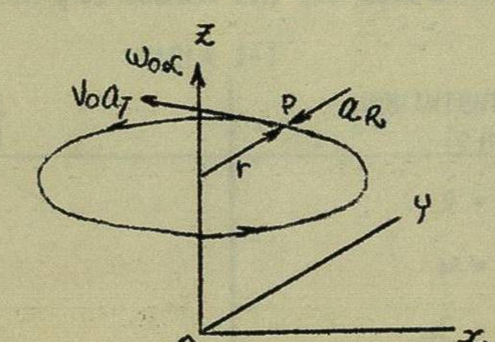

FIGURA 1-14

El producto vectorial de dos vectores a y b se escribe así, a $\times$ b y es otro vector c, siendo c= a $\times$ b. La magnitud de c se define como:
c = abSen ϕ, siendo ϕ el ángulo entre a y b.

Aplicando está definición a las ecuaciones 1-20 y 1-20a, y observando que- w y r, w y V, y α y r en la figura 1-14 son mutuamente perpendiculares, se encuentra que el ángulo ϕ para cada uno de estos tres pares de vectores es de 90°. - Por lo tanto, las magnitudes serán:

$$V = wr\text{Sen } 90° = wr$$

$$a_R = wv\text{Sen } 90° = W(wr) = w^2 r$$

$$a_T = \alpha r\text{Sen } 90° = \alpha r$$

Para saber si las direcciones de las ecuaciones 1-20 y 1-20a están correctas, se hará uso de la regla de la mano derecha que se muestra en la figura --- 1-15.