8.- El ángulo que gira el volante de un generador durante un intervalo de tiempo t está dado por la ecuación $\theta = at + bt^3 - ct^4$,

R: a) $6bt - 12ct^2$.

9.- La órbita de la tierra en torno del sol, aunque elíptica, es casi un círculo. a) Calcular la velocidad angular de la tierra (considerando como partícula) en torno del sol y su velocidad lineal media en su órbita. b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la tierra con respecto al sol?

R: a) 2×10^{-7} rad/seg;

3×10^4 mt/seg;

b) 6 mt/seg^2.

10.- ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un punto de la periferia de un disco de 30 cm que gira a 33 1/3 rev/min.?

R: a) 1.84 mts/seg^2.

11.- ¿De qué magnitud deberá ser una fuerza para mantener un automóvil de 1,250 kg en un arco de 6 mt de radio cuando el automóvil da la vuelta en una esquina a 50 KM/HR? ¿Se dispondrá de una fuerza de esta magnitud en la mayor parte de casos?

R: a) 4750 Kg; no

12.- ¿Qué aceleración angular promedio se requiere para obtener una velocidad de 1 rev cada 20 seg para que una rueda de la fortuna o noria comience del reposo y alcance esta velocidad en 1/2 min? ¿Qué tendrá que ser el radio de la rueda para que la fuerza centrípeta que actúa sobre una persona en la rueda sea un décimo del peso de la persona cuando la rueda haya alcanzado la velocidad indicada?

R: a) 1.65×10^{-3} rev/seg^2;

10 mt.

13.- Un automóvil que va a 96.6 km/hr tiene ruedas de 0.762 mt de diámetro. a) ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas alrededor del eje? b) Si las ruedas se detienen uniformemente en 30 vueltas, ¿Cuál es la aceleración angular? c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este período de frenado?

R: a) 70 rad/seg;

b) -13 rad/seg

c) 75.2 mt.

14.- a) Si la hélice de un avión de radio 1.52 mt gira a 2000 rpm y el avión vuela a 161 km/hr con respecto al suelo, ¿Cuál es la velocidad de un punto de la punta de la hélice? b) ¿Qué clase de trayectoria describe ese punto?

R: a) 319.7 mt/seg; espiral.

15.- ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que en una carretera da una vuelta de 110 mt de radio con una velocidad de 48.3 km/hr?

R: a) 0.12 rad/seg.

CAPITULO II

DINAMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACION

1.- Introducción. Momento de rotación obrando sobre una partícula.

En este capítulo se estudiarán las causas que probocan la rotación de partículas y cuerpos rígidos, aplicando las leyes de la mecánica para este movimiemto.

DN igual forma, que en el capítulo anterior no se tomaron en cuenta situaciones fundamentalmente nuevas, ya que los parámetros de rotación θ, w y α se relacionaban con los parámetros de translación x, v y a para las partículas en rotación; en este capítulo también se omitirá todo fundamento nuevo. Sin embargo; es muy útil refundir los conceptos del movimiento de translación en una nueva forma, escogida especialmente por ser conveniente para describir sistemas en rotación.

Para estudiar la dinámica del movimiento de rotación se partirá desde el punto de vista fundamental, de una sola partícula vista desde un marco de referencia inercial y posteriormente se analizarán sistemas de muchas partículas, incluyendo el caso especial de un cuerpo rígido que gira en torno de un eje fijo.

Momento de rotación obrando sobre una partícula.

Supóngase una partícula de masa m sobre la cuál actúa una fuerza F como se indica en la figura 2-1. En virtud de que se trata de rotación, es conveniente utilizar coordenadas polares para situar la partícula.

Si se restringen el movimiento y las fuerzas a un plano, la posición de la partícula se puede describir en forma completa por el vector de radio r y el ángulo ϕ como se muestra en la figura 2-2 resultando conveniente definir un vector unitario 1_r en la direccion de r, y un vector unitario 1_ϕ perpendicular a r y en la dirección de ϕ.

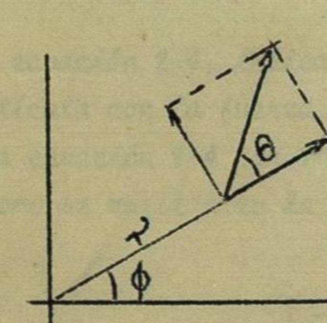


FIGURA 2-1

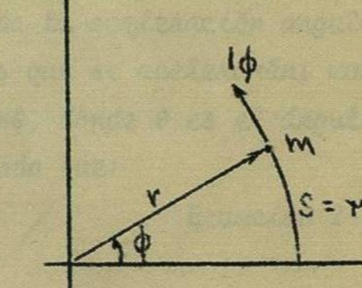


FIGURA 2-2

Las componentes de la velocidad de la partícula se pueden tomar como $v_r 1_r$ y $v_\phi 1_\phi$ de manera:

$$V = v_r 1_r + v_\phi 1_\phi$$

sabiendo que V_r es la relación de tiempo de cambio de r, o $\frac{dr}{dt}$, y V_ϕ la veloci-dad tangencial de la partícula que es igual a $V_T = V_\phi = \omega r$, por lo tanto la velocidad de la partícula se escribe:

$$V = \left(\frac{dr}{dt}\right)|_r \quad + r\omega|_\phi \qquad \text{Ecuación 2-1}$$

En este punto se restringirá este descripción a el caso especial en que $V_r = 0$, siendo r constante. Por lo tanto,

$$V = r\omega|_\phi \qquad \text{Ecuación 2-2}$$

Encontrando que la situación se reduce ahora al movimiento de una partícula en un círculo, movimiento que ya se estudió en el capítulo anterior.

Como ya antes se vió cuando una partícula se mueve sobre una trayectoria circular con velocidad constante experimenta una aceleración radial $-a_r$. El signo (-) representa que la aceleración radial es hacia adentro. Además la partícula puede aumentar su velocidad como resultado de una aceleración tangencial que es $r\alpha$. Para encontrar el vector aceleración de una partícula que se mueve en un círculo, basta sumar vectorialmente estas dos componentes de aceleración:

$$a = -a_r|_r + r\alpha|_\phi \qquad \text{Ecuación 2-3}$$

Estas aceleración es resultado de una fuerza que actúa sobre la partícula, y según la ley de Newton se debe tener,

$$F = ma$$

descomponiendo la fuerza en sus componentes radial y angular como se muestra en la figura 2-1 y utilizando la ecuación 2-3 se obtiene:

$$F_r|_r + F_\phi/_\phi = m(-a_r|_r \quad + r\alpha|_\phi).$$

Con objeto de que esta ecuación sea cierta, las dos ecuaciones componentes deben ser válidas y por lo tanto,

$$F_r = -ma_r$$

$$F_\phi = mr\alpha \qquad \text{Ecuación 2-4}$$

La ecuación 2-4, indica como esta relacionada la aceleración angular de una partícula con la fuerza aplicada, por razones que se acelerarán; multipliquese la ecuación 2-4 por r y hágase F_ϕ como $F\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre F y r como se muestra en la figura 2-1, encontrando que:

$$rF\operatorname{sen}\theta = mr^2\alpha \qquad \text{Ecuación 2-5}$$

de donde,

$$\tau = mr^2\alpha \qquad \text{Ecuación 2-6}$$

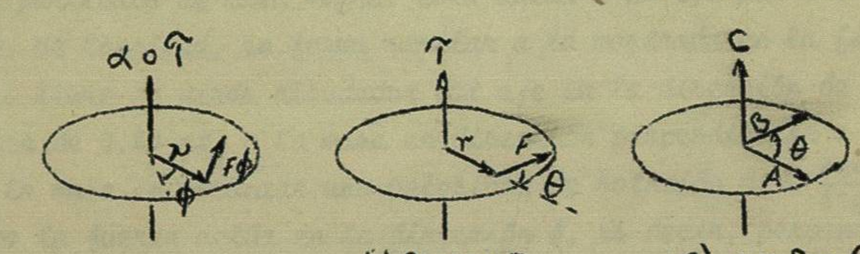
Siendo τ el momento de rotación que obra sobre la partícula con respecto a el origen 0, donde las unidades del momento de rotación son: $NT-MT$, dina-cm o $lb-fT$.

Haciendo una comparación entre la ecuación 2-6 y $F = ma$ se observa que son similares ya que la aceleración lineal a ha sido reemplazada por la aceleración angular α. En el movimiento de rotación el momento de rotación sustituye a las fuerzas, en virtud de que F es reemplazada por τ. Además, el efecto de inercia de la masa en la rotación no es solo m, sino mr^2 significando esto, que entre - mas alejada se encuentre la partícula de su eje de rotación será mas difícil -- darle una aceleración angular específica.

Conviene representar la ecuación 2-6 como una cantidad angular en forma -- vectorial, en virtud de que no se ha decignado dirección al momento de torsión- τ. Las relaciones entre los vectores de la ecuación 2-6 y el eje de rotación - se muestran en la figura 2-3a, donde la dirección de α esta dada por la regla - de la mano derecha. (La aceleración de rotación es provocada por $F\phi$ y por lo -- tanto se debe tomar el eje con los dedos circundándolo en la dirección de $F\phi$).

Para asignar un vector al momento de rotación, este debe ser de acuerdo -- con la definición previa que se obtuvo en la ecuación 2-5, es decir, $\tau = F\text{sen}\theta$. Esto significa que se debe asignar una dirección a $F\text{sen}\theta$. Mostrando estos vectores en la figura 2-3b, así como la dirección de τ.

La dirección de τ es un vector perpendicular al plano que forma el producto de los vectores r y F con el seno del ángulo entre ellos, comprobandose esto con el producto vectorial de la figura 2-3c y a que este dice que si giramos el vector A un ángulo pequeño que señale la dirección de B; el vector resultante - C señalará en la dirección dada por la regla de la mano derecha. La magnitud de A x B es ABsenθ, donde θ es el ángulo entre A y B.



a) $\tau = mr^2\alpha$ b) $\tau = r \times F$ c) $A \times B = C$

FIGURA 2-3

En la figura 2-4 se muestra el plano que forma r y F. Así como la dirección que deverá tener τ, al invertir la dirección de F, r o ambas. Las direcciones de τ se representan mediante ⊙ (si es perpendicular al plano de la figura y saliendo de ella) y mediante ⊗ (si es perpendicular al plano de la figura y entrando a ella).

Resumiendo los resultados obtenidos, se puede expresar el momento de rotación debido a una fuerza F que actúa sobre una partícula que se encuentra a una distancia radial r del eje, por medio de:

$$\tau = r \times F \qquad \text{Ecuación 2-7}$$

donde la magnitud esta dada por:

$$\tau = r\, F\operatorname{sen}\theta.$$

siendo θ el ángulo entre r y F e indicando la dirección de τ como perpendicular al plano de r y F.

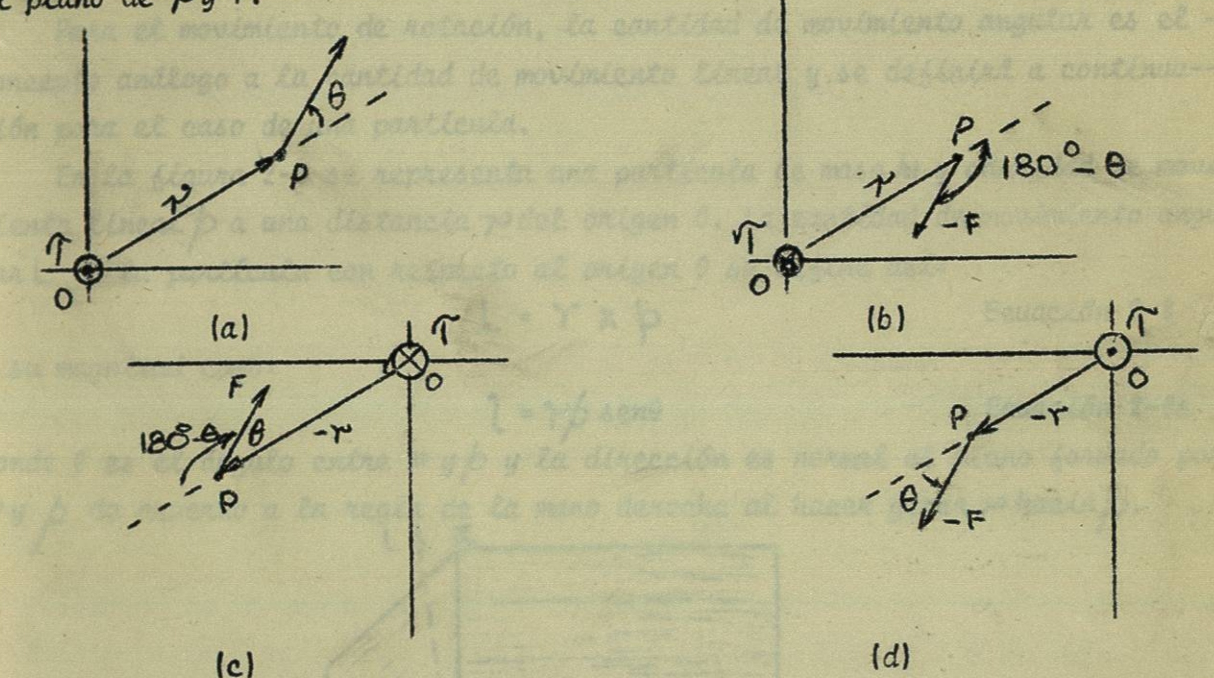


FIGURA 2-4

Ejemplo 2-1.

Una partícula de masa 40grs. está unida a un eje por una barra muy ligera de 70 cm. de longitud, en forma similar a la mostrada en la figura 2-1. La partícula es libre de girar alrededor del eje en la dirección de ϕ. Si se aplica una fuerza de 0.20 nt. a la masa en dirección perpendicular a la barra. ¿Cuánto tardará la masa en alcanzar una velocidad de rotación de $4\,\frac{\text{rev.}}{\text{seg.}}$?

Como la fuerza actúa en la dirección ϕ, es decir, perpendicular a la barra se usará la ecuación 2-4.

$$F_\phi = m r \alpha$$

m=40g
r=70cm
τ=.20 nt

$$0.20\ nt = (0.040\ kg)\ (0.70\ mt)\alpha$$

$$\alpha = 7.14\ \frac{rad}{seg^2}.$$

Para encontrar el tiempo que se requiere en alcanzar una velocidad de ---- $4\,\frac{rev}{seg} = 8\pi\,\frac{rad}{seg}$, se utiliza la ecuación de movimiento.

$$w = w_0 + \alpha t$$