$$t = \frac{8\pi - 0}{7.14} = 3.52 \text{ seg.}$$

2.- Cantidades de movimiento angular de una partícula.

Como se recordará la cantidad de movimiento se presenta cuando una partícula de masa m se mueve con una velocidad v. Para una sola partícula, la cantidad de movimiento lineal es $p = mv$, y para un sistema de partículas es $P = Mv_{cm}$ donde M es la masa total del sistema y v_{cm} la velocidad del centro de masa.

Para el movimiento de rotación, la cantidad de movimiento angular es el -- concepto análogo a la cantidad de movimiento lineal y se definirá a continuación para el caso de una partícula.

En la figura 2-5 se representa una partícula de masa m y cantidad de movimiento lineal p a una distancia r del origen 0. La cantidad de movimiento angular L de la partícula con respecto al origen 0 se define así:

$$L = r \times p \qquad \text{Ecuación 2-8}$$

y su magnitud como:

$$l = rp\,\text{sen}\theta \qquad \text{Ecuación 2-8a}$$

donde θ es el ángulo entre r y p y la dirección es normal al plano formado por r y p de acuerdo a la regla de la mano derecha al hacer girar r hacia p.

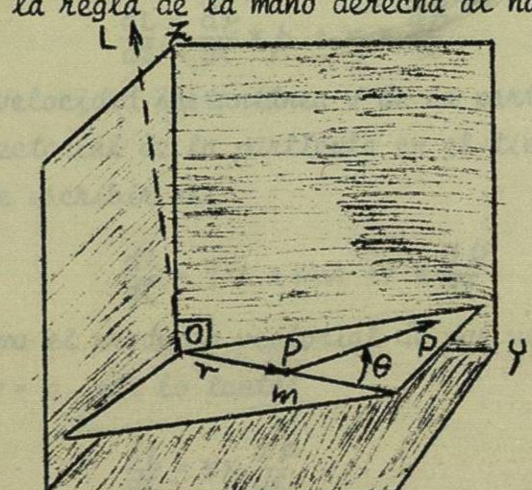

FIGURA 2-5

A continuación se encontrará una relación importante entre la cantidad de movimiento angular y el movimiento de rotación. Newton en su segunda ley del movimiento hizó intervenir la cantidad de movimiento quedando definida como; "La rápides con la cuál cambia la cantidad de movimiento de un cuerpo, es proporcional a la fuerza resultante que obra sobre el cuerpo y se encuentra en la dirección y sentido de esa fuerza". En forma simbólica se expresa así:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

como este sistema es una partícula de masa m esta expreción de la segunda ley - equivale a la forma $F = ma$ de donde:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} = m\,a.$$

encontrando que las relaciones $F = ma$ y $F = \frac{dp}{dt}$ para partículas solas son equivalentes en mecánica.

Si se toma el producto vectorial de r para ambos miembros de la expresión $F = \frac{dp}{dt}$ se obtiene:

$$r \times F = r \times \frac{dp}{dt}$$

como $r \times F$ es el momento de rotación se puede escribir,

$$\tau = r \times \frac{dp}{dt} \qquad \text{Ecuación 2-9}$$

Si ahora se deriva la ecuación 2-8 con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\,(r \times p)$$

como la derivada de un producto vectorial se toma de la misma forma que la derivada de un producto ordinario con la excepción de que no se debe cambiar el orden de los términos la expresión quedará:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}$$

Como $\frac{dr}{dt}$ es la velocidad instantánea v de la partícula, debido a que dr es el desplazamiento vectorial de la partícula en el tiempo dt y p es igual a mv. La ecuación se puede escribir así:

$$\frac{dL}{dt} = (v \times mv) + r \times \frac{dp}{dt}$$

Ahora bien, como el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero, la expresión $v \times mv = 0$, por lo tanto:

$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} \qquad \text{Ecuación 2-10}$$

Haciendo una comparación de las ecuaciones 2-9 y 2-10 se encuentra que:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \qquad \text{Ecuación 2-11}$$

A partir de lo cuál se puede establecer que "la rápidez con que cambia la cantidad de movimiento angular de una partícula con respecto al tiempo es igual al momento de rotación que obra sobre ella."

Como la ecuación 2-11 es una ecuación vectorial, entonces será equivalente a tres ecuaciones escalares que son:

$$\tau_x = \left(\frac{dL}{dt}\right)_x, \quad \tau_y = \left(\frac{dL}{dt}\right)_y, \quad \tau_z = \left(\frac{dL}{dt}\right)_z. \qquad \text{Ecuación 2-12}$$

Por lo tanto, la componente x del momento de rotación aplicado, esta dado-por la componente x del cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular. Para las direcciones Y y Z se obtienen resultados similares.

Ejemplo 2-2.

Una partícula de masa 80 grs. se suelta a partir del reposo desde el punto a, como se muestra en la figura 2-6, cayendo paralelamente al eje de las y. Si $b = 35$ cm y $\theta = 30°$, encontrar: a) El momento de rotación que obra sobre la masa, con respecto al origen 0 y b) La cantidad de movimiento angular de la masa con respecto a ese mismo origen.

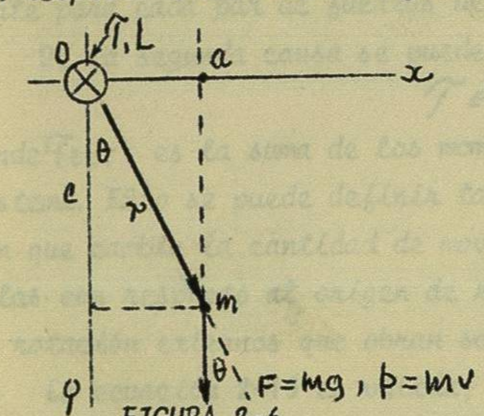

FIGURA 2-6.

a) Sabiendo que:

$$\tau = r F \operatorname{sen}\theta$$

y que para este ejemplo, $r \operatorname{sen}\theta = b$ y $F = mg$.

entonces:

$$r = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{35}{\operatorname{sen}30°} = 70 \text{ cm.}$$

$$F = mg = 0.08\text{kg} \times 9.8 \frac{\text{mt}}{\text{seg}^2} = 0.784$$

$$\tau = 0.70 \text{ MT} \times 0.784 \text{ NT} \times 0.5 = 0.275 \text{ NT-MT}$$

La regla de la mano derecha pone de manifiesto que τ es perpendicular al plano de la figura y penetra en ella.

b) Si $l = r p \operatorname{sen}\theta$. y sabiendo que para este ejemplo, $r \operatorname{sen}\theta = b$ y $p = MV$ se obtiene: $c = r\cos\theta = 70 \times 0.866 = 60.7$ cm.

Haciendo uso de la ecuación de caída libre, se tiene:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy = 0 + 2 \times 9.8 \frac{\text{MT}}{\text{seg}^2} \times 0.607 \text{ MT}.$$

$$v = 3.45 \frac{\text{MT}}{\text{seg.}}$$

$$p = mv = 0.08 \text{ kg} \times 3.45 \frac{\text{MT}}{\text{seg}} = 0.276 \text{ Nt - seg.}$$

$$l = 0.35 \text{ MT} \times 0.276 \text{ NT-seg} = 0.969 \text{ Nt-MT-seg.}$$

3.- Sistemas de partículas.

Para calcular la cnatidad de movimiento angular total L de un sistema con n número de partículas con respecto a un punto dado, basta sumar vectorialmente la cantidad de movimiento angular de cada partícula con respecto a ese mismo punto. Encontrando que para el sistema con n partículas se tiene:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \sum_{i=1}^{i=n} L_i$$

Al transcurrir el tiempo puede presentarse un cambio en la cantidad de movimiento angular total L del sistema con respecto a el punto de referencia fijo El cambio dL/dt puede ser debido a dos causas: a) Por momentos de rotación ---

ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas internas entre las-partículas y b) Por momentos de rotación ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas externas.

La primera causa se puede despreciar basandose en la tercera ley de Newton ya que las fuerzas entre dos partículas no solo son iguales y opuestas sino que también están sobre la línea que une las dos partículas y por lo tanto el momento de rotación interno total es cero debido a que el momento de rotación resultante para cada par de fuerzas de acción y reacción es cero.

De la segunda causa se puede escribir:

$$\tau_{EXT.} = dL/dt \qquad \text{Ecuación 2-13}$$

donde $\tau_{EXT.}$ es la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el-sistema. ESto se puede definir también como: "la rápidez con respecto al tiempo con que cambia la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partí--culas con respecto al origen de referencia, es igual a la suma de los momentos-de rotación externos que obran sobre el sistema".

La ecuación 2-13 es válida, ya sea cuando las partículas que constituyen -un sistema se encuentren en movimiento unas con respecto a otras, o bien que --tengan relaciones especiales fijas, como el caso de un cuerpo rígido.

La ecuación 2-13 es aplicable solamente cuando τ y L se miden con respecto a un origen con un marco de referencia inercial. Así como también si se escoje-como centro de referencia el centro de masa del sistema, aún cuando este punto-no este fijo en este marco de referencia.

No siendo válida si se trata de medir los vectores τ y L con respecto a un punto arbitrario del sistema en movimiento, por ejemplo con respecto a una cierta partícula del sistema ya que tal punto se moverá de una manera complicada --cuando el sistema de partículas se translade, de vueltas o cambie su configuración.

4.- Energía cinética de rotación y momento de inercia.

Se ha demostrado que el valor de la velocidad de una partícula de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo, es: $v = r\omega$, siendo r la distancia de la partícula al eje, y ω la velocidad angular del cuerpo.

La energía cinética de la partícula de masa m será, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. La energía cinética total del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas-las partículas del mismo:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)\,\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\,\omega^2.$$

Sabiendo que ω en un cuerpo rígido es la misma para todas las partículas.-